บทที่ 3
แคลคูลัสเชิงตัวเลข (Numerical Calculus)

ในวิชาแคลคูลัส เราศึกษาการหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ โดยใช้สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์ ฟังก์ชันที่เราศึกษาส่วนใหญ่เป็นฟังก์ชันพื้นฐานง่ายๆ ยังมีฟังก์ชันอีกจำนวนมากที่อยู่ในรูปที่ยุ่งยากและซับซ้อน ที่เราไม่สามารถหาอนุพันธ์หรือปริพันธ์โดยใช้สูตรเหล่านั้นได้ นอกจากนี้ ฟังก์ชันที่ได้จากการทดลองทางวิทยาศาสตร์หรือวิศวกรรมศาสตร์ มักเป็นฟังก์ชันที่รู้ค่าเฉพาะที่บางจุด ดังนั้นยิ่งเป็นไปไม่ได้เลยที่จะหาอนุพันธ์หรือหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรเหล่านั้น เราจำเป็นต้องหาฟังก์ชันง่าย ๆ เช่น ฟังก์ชันพหุนาม เพื่อใช้แทนฟังก์ชันที่ยุ่งยากซับซ้อนหรือฟังก์ชันที่รู้ค่าเฉพาะที่บางจุดเหล่านี้ เราเรียกการแทนฟังก์ชันด้วยฟังก์ชันพหุนามว่า **การประมาณฟังก์ชันด้วยพหุนาม** และจะหาอนุพันธ์หรือหาปริพันธ์ของพหุนามแทนการหาอนุพันธ์หรือหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ซับซ้อนเหล่านั้น ในที่นี้เราจะเน้นเฉพาะการประมาณฟังก์ชันด้วยพหุนามเทย์เลอร์ ดังนั้นในลำดับแรก เราจะศึกษาทฤษฎีบทของเทย์เลอร์พร้อมทั้งการวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการประมาณค่า

3.1 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์และอันดับของการประมาณค่า (Taylor's Theorem and The Order of Approximation)

ดังได้กล่าวแล้วว่าในบทนี้ เราจะประมาณฟังก์ชันด้วยพหุนาม พหุนามที่ใช้กันแพร่หลายพหุนามหนึ่ง ได้แก่ **พหุนามเทย์เลอร์** เราจะใช้พหุนามเทย์เลอร์นี้ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน และจะใช้พหุนามเทย์เลอร์นี้ในการหาสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์และสูตรสำหรับการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขของฟังก์ชันในหัวข้อ 3.2, 3.3 และ 3.4

สัญลักษณ์

เพื่อความสะดวกเราจะใช้สัญลักษณ์ $C[a,b]$ แทนเซตของฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงปิด $[a,b]$ และจะใช้สัญลักษณ์ $C^n[a,b]$ แทนเซตของฟังก์ชันทั้งหลายที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์อันดับที่ 1 ถึงอันดับที่ n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$

ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ :

ให้ $f \in C^{n+1}[a,b]$ ถ้า x และ x_0 เป็นจุดใน (a, b) แล้วจะมี c (ขึ้นอยู่กับค่าของ x) ระหว่าง x_0 และ x ซึ่ง

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.1)$$

$$= P_n(x) + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ และ

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

เรียกพหุนาม $P_n(x)$ ว่า ***พหุนามเทย์เลอร์อันดับที่ n*** ซึ่งเกิดจากการกระจายฟังก์ชัน f(x) รอบจุด x_0 ในกรณีที่ $x_0 = 0$ เราอาจเรียก $P_n(x)$ ว่า ***พหุนามแมคลอริน*** เพื่อเป็นเกียรติกับนักคณิตศาสตร์ชาวสก็อต ชื่อ Collin Maclaurin (1698 – 1746) เรียกพจน์สุดท้ายใน (3.1.1) หรือ $R_n(x)$ ว่า ***พจน์เศษ*** (remainder term) หรือพจน์ค่าคลาดเคลื่อน

ข้อสังเกต :

1) พหุนามเทย์เลอร์อันดับที่ n ก็คือพหุนามที่มีดีกรี n นั่นเอง
2) $P_n(x_0) = f(x_0)$ แสดงว่าค่าของพหุนามเท่ากับค่าของฟังก์ชันที่จุด $x = x_0$
3) อนุพันธ์อันดับที่ k ของฟังก์ชัน f(x) เท่ากับอนุพันธ์อันดับที่ k ของพหุนาม $P_n(x)$ ที่จุด $x = x_0$ นั่นคือ $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$
4) พิจารณาจากพจน์เศษ $R_n(x)$ จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ x_0 พจน์เศษ $R_n(x)$ จะมีค่าน้อยลง นั่นแสดงว่า $P_n(x)$ มีค่าใกล้เคียงกับ f(x) เมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ x_0

จากข้อสังเกตดังกล่าว เราจึงนิยมประมาณฟังก์ชันด้วยพหุนามเทย์เลอร์ ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันที่ยุ่งยากซับซ้อน เมื่อต้องการหาค่าของ f(x) เรามักจะหาค่าของพหุนามเทย์เลอร์ $P_n(x)$ แทน เช่นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 : จงหาพหุนามเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ ซึ่งกระจายรอบจุด $x_0 = 0$ และหาค่าโดยประมาณของ f(0.1) โดยใช้

1) พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 2 2) พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 และ

3) พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 4

วิธีทำ จากวิชาแคลคูลัส เราทราบว่า

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x$$

ดังนั้น $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ และ $f^{(n+1)}(c) = e^c$

แทนค่า $f(x) = e^x$ และแทน $x_0 = 0$ ใน (3.1.1) เราได้

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

เมื่อ c อยู่ระหว่าง x และ 0

1) $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ และ $R_2(x) = \frac{e^c}{3!}$ เมื่อ c อยู่ระหว่าง 0 และ x

เมื่อ x = 0.1 เราได้

$$P_2(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} = 1 + 0.1 + 0.005 = 1.105$$

2) $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ และ $R_3(x) = \frac{e^c}{4!}$ เมื่อ c อยู่ระหว่าง 0 และ x

เมื่อ x = 0.1 เราได้

$$P_3(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!}$$

$$= 1 + 0.1 + 0.005 + 0.0001667 = 1.1051667$$

3) $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ และ

$R_4(x) = \frac{e^c}{5!}$ เมื่อ c อยู่ระหว่าง 0 และ x

เมื่อ x = 0.1 เราได้

$$P_4(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^4}{4!}$$

$$= 1 + 0.1 + 0.005 + 0.0001667 + 0.0000042 = 1.1051709$$

เนื่องจากเรารู้ว่า f(x) คือ e^x ดังนั้น เราสามารถหาค่าที่แท้จริงของฟังก์ชันที่ x = 0.1 ได้ ซึ่งได้แก่

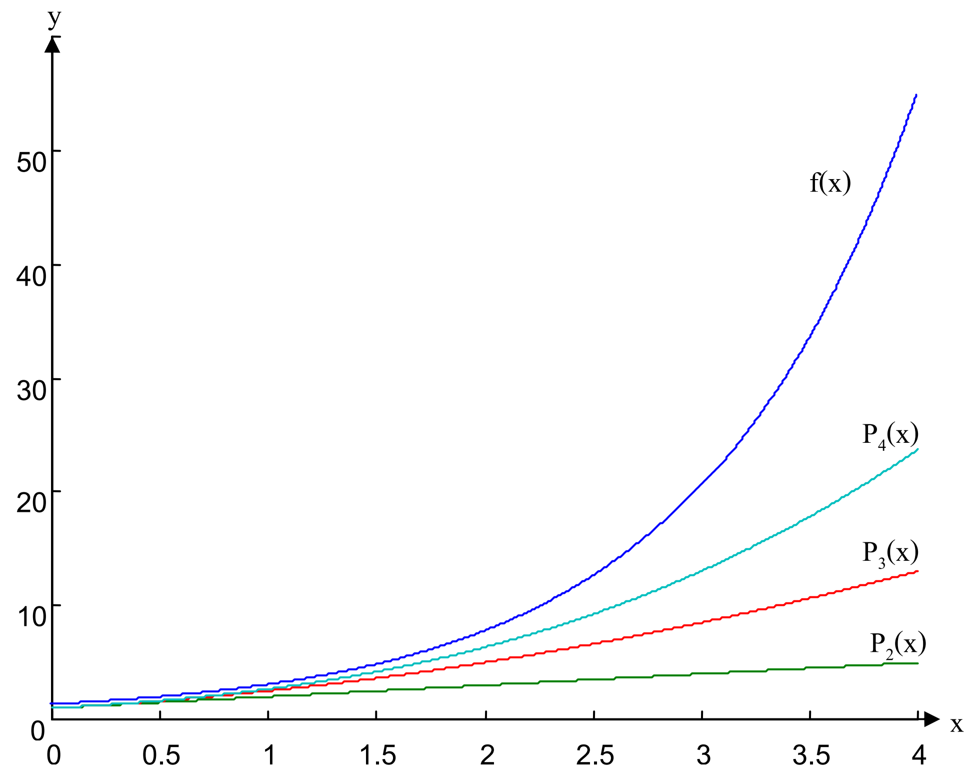
$$f(0.1) = e^{0.1} = 1.1051709$$

เราสามารถหาค่าคลาดเคลื่อน ที่เกิดจากการประมาณค่า f(0.1) ด้วย $P_2(0.1)$, $P_3(0.1)$ และ $P_4(0.1)$ ดังผลที่แสดงในตาราง 3.1.1

ตาราง 3.1.1 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่า

n	**$P_n(0.1)$**	**ค่าคลาดเคลื่อน $f(0.1) - P_n(0.1)$**
2	1.105	0.0001709
3	1.1051667	0.0000042
4	1.1051709	0

จากตาราง 3.1.1 และรูป 3.1.1 จะเห็นว่า การประมาณฟังก์ชันด้วยพหุนามอันดับสูง จะมีความแม่นยำมากกว่าการประมาณด้วยอนุพันธ์อันดับต่ำ



รูป 3.1.1 : เปรียบเทียบการประมาณค่าของ $f(x) = e^x$ ด้วยพหุนาม $P_2(x)$, $P_3(x)$, และ $P_4(x)$

เราอาจหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าของฟังก์ชันโดยใช้พจน์เศษได้ ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

รูป 3.1.1 : เปรียบเทียบการประมาณค่าของ $f(x) = e^x$ ด้วยพหุนาม $P_2(x)$, $P_3(x)$, และ $P_4(x)$

ตัวอย่าง 2 : กำหนดให้ $f(x) = e^x$ จงหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(1) = e$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ที่เกิดจากการกระจาย $f(x)$ รอบจุด $x_0 = 0$

วิธีทำ จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ เราได้

$$f(1) = e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = P_n(1)$$

และ $$R_n(1) = e^1 - P_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} \quad \text{เมื่อ } 0 < c < 1$$

เนื่องจาก $c < 1$ เราได้ $e^c < e^1$ ดังนั้น

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

แสดงว่า $\frac{3}{(n+1)!}$ เป็นขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่าของ f(1) ด้วย $P_n(1)$ กล่าวคือ $P_n(1)$ มีค่าต่างไปจาก f(1) ไม่เกิน $\frac{3}{(n+1)!}$

นอกจากนี้ ในกรณีที่มีการกำหนดขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อนไว้ล่วงหน้า เรายังสามารถใช้พจน์เศษในการหาดีกรีของพหุนามที่จะทำให้การประมาณค่ามีความแม่นยำในระดับที่กำหนด นั่นคือ มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกินขอบเขตบนที่กำหนดนั้น เช่นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 : จงหาดีกรีของพหุนามเทย์เลอร์ $P_n(x)$ ที่ใช้ในการประมาณค่าของ e โดยมีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 10^{-4}

วิธีทำ ในที่นี้เราต้องการหา n ซึ่งทำให้ $R_n(1) \leq 10^{-4}$ กล่าวคือ 10^{-4} เป็นขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด จากตัวอย่าง 3.1.2 เราทราบว่าขอบเขตบนของ $R_n(1)$ คือ $\frac{3}{(n+1)!}$ ดังนั้น เราต้องการหาค่าของ n ที่ทำให้

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$$

เราสามารถคำนวณได้ไม่ยากนักว่าอสมการข้างบนนี้เป็นจริงเมื่อ $n \geq 7$ กล่าวคือ ถ้าเราต้องการให้ $p_n(1)$ เป็นค่าประมาณของ f(1) = e ที่มีค่าคลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงไม่เกิน 10^{-4} แล้ว เราจะต้องใช้พหุนามเทย์เลอร์ที่มีดีกรี 7 หรือมากกว่า

ตัวอย่าง 4: จงหาค่าประมาณของ cos x สำหรับ $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ โดยให้มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 10^{-5}

วิธีทำ ก่อนอื่นเราหาอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของ f(x) = cos x ดังนี้

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x \qquad f'''(x) = \sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(x) = -\sin x$

$\vdots \qquad \vdots$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x \qquad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$

จาก (3.1.1) กระจายฟังก์ชัน $f(x) = \cos x$ รอบจุด $x_0 = 0$ เราได้

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + R_{2n}(x)$$

เมื่อ $R_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(c)$

เนื่องจาก $|\sin(c)| \leq 1$ ดังนั้น

$$|R_{2n}(x)| \leq \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leq 10^{-5} \quad \text{สำหรับ} \quad |x| \leq \frac{\pi}{4}$$

อสมการข้างบนนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$\frac{(\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq 10^{-5}$$

ซึ่งเป็นจริงเมื่อ $n \geq 3$

เมื่อ $n = 3$ เราได้

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

ถ้าเราแทน $x = x_0 + h$ ใน (3.1.1) โดยคิดว่า h เป็นจำนวนคงที่ ที่เล็ก ๆ เราได้

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

เมื่อ $c = x_0 + \theta h$ สำหรับ $0 < \theta < 1$

นิยาม 3.1.1 : สมมุติว่า p(h) เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณฟังก์ชัน f(h) ถ้ามีจำนวนจริง M > 0 และจำนวนเต็ม n ซึ่ง

$$\frac{|\ f(h) - p(h)\ |}{|\ h^n\ |} \leq M$$

สำหรับ h ที่มีค่าเล็กเพียงพอ เรากล่าวว่า p(h) ประมาณฟังก์ชัน f(h) ด้วยอันดับ $O(h^n)$ และเขียน $f(h) = p(h) + O(h^n)$

ตัวอย่าง 6 : จากการกระจายฟังก์ชัน cos (x) รอบจุด $x_0 = 0$ ในตัวอย่าง 3.1.4 เราได้

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(c)$$

ถ้าเราประมาณฟังก์ชัน cos (x) ด้วยพหุนามเทย์เลอร์อันดับ 6 เราได้

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cos(c) \quad \text{หรือ}$$

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \frac{h^8}{8!} \cos(c)$$

ดังนั้น ถ้าเราใช้พหุนามเทย์เลอร์ $p(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!}$ เป็นค่าประมาณของ cos (h) จะพบว่า

$$\frac{|\ f(h) - p(h)\ |}{|\ h^8\ |} = \frac{|\ \cos(c)\ |}{8!} \leq \frac{1}{8!}$$

ดังนั้น p(h) ประมาณฟังก์ชัน cos h ด้วยอันดับ $O(h^8)$ หรือเขียน

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + O(h^8)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียน

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \frac{h^8}{8!} + O(h^{10})$$

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 2 และ 3 โดยการกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้รอบจุด $x_0 = 0$

   1.1 $\dfrac{1}{1-x}$ 1.2 $\sin(x)$ 1.3 $x^{1/3}$

2. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $P_2(x)$ โดยการกระจายฟังก์ชัน $f(x) = e^x \cos(x)$ รอบจุด $x_0 = 0$

   2.1 หาค่าประมาณของ $f(0.5)$ โดยใช้ $P_2(0.5)$

   2.2 จงหาขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน $|f(0.5)-P_2(0.5)|$ โดยใช้พจน์เศษของสูตรเทย์เลอร์ และเปรียบเทียบกับค่าคลาดเคลื่อนที่แท้จริง

3. จงหา ln1.1 โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ที่เกิดจากการกระจายฟังก์ชันรอบจุด $x_0 = 1$ โดยให้มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.0001

4. ให้ $f(x) = e^x$ จงหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าของ $f(-1)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ที่เกิดจากการกระจาย $f(x)$ รอบจุด $x_0 = 0$

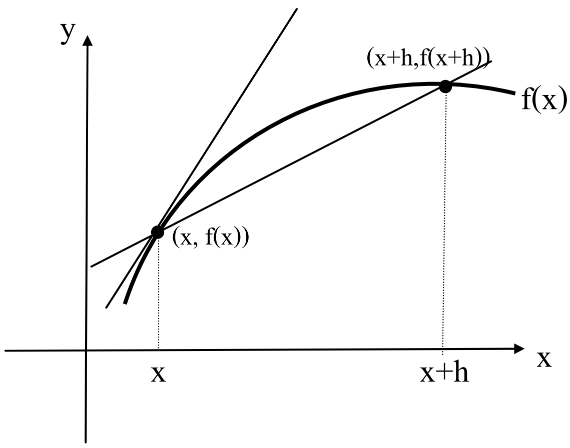
5. จงใช้พหุนามเทย์เลอร์อันดับสองประมาณค่าของ $\cos(61^0)$ พร้อมทั้งวิเคราะห์ความแม่นยำของค่าประมาณ

6. ให้ $f(x) = x^{1/3}$ จงใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์หาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนจากการใช้ $P_3(29)$ ในการประมาณค่าของ $f(29)$ เมื่อ $P_3(x)$ คือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ซึ่งเกิดจากการกระจายฟังก์ชัน f รอบจุด $x_0 = 0$

3.2 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

หัวข้อที่สำคัญของวิชาแคลคูลัสหัวข้อหนึ่งก็คือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังได้กล่าวในตอนต้นแล้วว่าฟังก์ชันที่เราหาอนุพันธ์ได้ในวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น ส่วนใหญ่จะเป็นฟังก์ชันเบื้องต้นง่าย ๆ โดยใช้สูตรพื้นฐานต่าง ๆ สำหรับฟังก์ชันฟังก์ชันที่ยุ่งยากซับซ้อนเราไม่สามารถหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรพื้นฐานเหล่านั้นได้ เราจะต้องอาศัยวิธีการที่เรียกว่าวิธีเชิงตัวเลข ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ นั่นคือ เราพิจารณาปัญหาการประมาณค่าของอนุพันธ์ $f'(x)$ ของฟังก์ชัน f(x) ในเชิงตัวเลข

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



รูป 1 แสดงความชันของเส้นสัมผัส ณ ที่จุด x ใด ๆ

พิจารณานิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f(x) ข้างบนนี้ ซึ่งเป็นนิยามที่เราเคยเห็นแล้วในวิชาแคลคูลัส เป็นนิยามในรูปของลิมิต ในวิชาแคลคูลัส เรารู้อีกว่า

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

คือความชันของเส้นตัดซึ่งเชื่อมระหว่างจุด (x, f(x)) และ (x + h, f(x + h)) และเมื่อ h มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ จะเข้าใกล้ $f'(x)$ ดังนั้นจึงสมเหตุสมผลที่จะใช้ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เป็นค่าประมาณของ $f'(x)$ เมื่อ h มีค่าน้อยเพียงพอ นั่นคือ

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{.................................} \quad (3.2.1)$$

เรียกสูตรที่ใช้สำหรับการประมาณค่าของอนุพันธ์ ที่อยู่ทางขวาของสมการ (3.2.1) นี้ว่า

สูตรผลต่างก้าวหน้า (forward difference)

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f(x) ให้ เราหาอนุพันธ์ของ f(x) ได้โดยการเลือกค่า h ที่มีค่าน้อย ๆ แทนลงในสูตรผลต่างก้าวหน้า ถ้าผลลัพธ์ที่ได้ยังไม่เป็นที่พอใจหรือมีความแม่นยำไม่พอเพียง เราจะเลือกค่า h ตัวใหม่ที่เล็กลงเรื่อย ๆ แทนค่าลงในสูตร ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำตามที่ต้องการ ปัญหาคือเราไม่สามารถบอกได้ว่าค่าของ h จะต้องเล็กมากเพียงใดจึงจะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 : ให้ $f(x) = e^x$ จงใช้สูตรผลต่างก้าวหน้าหาค่าประมาณของ $f'(1)$

ใช้สูตรผลต่างก้าวหน้า สำหรับ $h = 10^{-1} = 0.1$ เราได้

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.1)-f(1)}{0.1} = \frac{3.004166024 - 2.718281828}{0.1} = 2.858841959$$

เป็นค่าประมาณของ $f'(1)$ ที่ได้จากการใช้สูตรผลต่างก้าวหน้าเมื่อ h = 0.1

ในเชิงทฤษฎี อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ คือ $f'(x) = e^x$ แทนค่า x = 1 เราได้ $f'(1) = e = 2.718281828$ ซึ่งจะเรียกค่าที่หาได้ในเชิงทฤษฎีนี้ว่าค่าที่แท้จริงของ $f'(1)$ จะเห็นว่าค่าประมาณที่คำนวณได้ในตัวอย่างนี้เมื่อเทียบกับค่าที่แท้จริงจะคลาดเคลื่อนไปเท่ากับ

$$|\ 2.718281828 - 2.858841959\ | = 0.139560131$$

ซึ่งถือว่าคลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงมากพอสมควร คือคลาดเคลื่อนไปประมาณ 14%

ตารางข้างล่างนี้แสดงค่าประมาณของอนุพันธ์ $f'(1)$ ที่ได้จากการใช้สูตรผลต่างก้าวหน้าและใช้ $h = 10^{-k}$ เมื่อ k = 1, 2, …, 10

ตาราง 3.2.1 : แสดงค่าของ $f'(1)$ เมื่อ h มีค่าต่างๆ กัน

h	$f'(1)$	h	$f'(1)$
10^{-1}	2.858841959	10^{-6}	2.718740000
10^{-2}	2.731918701	10^{-7}	2.722800000
10^{-3}	2.719641870	10^{-8}	2.763000000
10^{-4}	2.718422300	10^{-9}	3.170000000
10^{-5}	2.718341000	10^{-10}	0.000000000

จากตาราง จะเห็นว่าขนาดขั้นที่ใหญ่ที่สุดคือ h = 0.1 ให้ค่าประมาณของ $f'(1)$ ไม่ค่อยดีนัก นอกจากนี้เมื่อ h = 10^{-9} และ h = 10^{-10} ค่าประมาณของ $f'(1)$ ที่คำนวณได้คือ 3.17 และ 0 ตามลำดับ ซึ่งเป็นค่าประมาณที่ไม่ค่อยดีเช่นกัน ทั้งนี้เพราะว่าขนาดขั้นที่เล็กเกินไปจะทำให้ค่าของ f(x + h) และ f(x) มีค่าใกล้เคียงกันมาก อาจทำให้เกิดการสูญเสียเลขนัยสำคัญที่เกิดจากการลบจำนวนที่ใกล้เคียงกันได้ จากตารางจะเห็นว่าเมื่อ h = 10^{-5} ให้ค่าประมาณที่ดีที่สุด

เพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน เราอาจแสดงที่มาของสูตรสำหรับหาอนุพันธ์ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ สมมุติว่า f(x) เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f \in C^2[a,b]$ และให้ x เป็นจุดใด ๆ ใน [a,b] ให้ h เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x + h \in [a,b]$ เราได้

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(c)}{2}h^2$$

เมื่อ c อยู่ระหว่าง x และ x + h หรือ

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(c)}{2}h \quad \text{................................} \quad (3.2.2)$$

ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการใช้ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เป็นค่าประมาณของ $f'(x)$ คือ

$$e(h) = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{f''(c)}{2}h$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ h เราเรียก e(h) ว่า ***ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลาย***

ในทางปฏิบัติเรามักไม่รู้ f'' และ c แต่อย่างน้อยเราสามารถบอกได้ว่าเมื่อ h มีค่าน้อย ๆ แล้ว e(h) จะมีค่าน้อยตามไปด้วยถ้า $f''(c)/2$ มีขอบเขตจำกัด
จะเห็นว่า

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h)$$

นั่นคือ สูตรผลต่างก้าวหน้ามีอันดับของการประมาณค่าเท่ากับ 1

ถ้าแทน h ด้วย - h ใน (2) จะได้

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{f''(c)}{2}h$$

เมื่อ c อยู่ระหว่าง x - h และ x หรือเขียน

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h)$$

เรียกสูตรนี้ว่า ***สูตรผลต่างย้อนหลัง*** (backward difference) ซึ่งเป็นสูตรสำหรับการประมาณค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับ O(h) เช่นเดียวกับสูตรผลต่างก้าวหน้า

โดยปกติเรามักต้องการหาสูตรสำหรับประมาณ $f'(x)$ ที่มีอันดับสูง ๆ เพราะการประมาณค่าที่มีอันดับสูง ๆ แสดงว่าการประมาณนั้นมีความแม่นยำสูง

สมมุติให้ $f \in C^3[a,b]$ ใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ เราได้

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(c_1)}{6}h^3 \qquad \text{............. (3.2.3)}$$

และ $$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(c_2)}{6}h^3 \qquad \text{............. (3.2.4)}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 อยู่ระหว่าง x-h และ x+h ดังนั้น ผลต่างของ (3.2.3) และ (3.2.4) คือ

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \left[\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\right]\frac{h^3}{3}$$

เนื่องจาก $f'''(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง [a,b] และจาก Intermediate Value

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2} = f'''(c)$$

ดังนั้น $$f(x + h) - f(x - h) = 2f'(x)h + f'''(c)\frac{h^3}{3}$$

หรือ $$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - f'''(c)\frac{h^2}{6}$$

เรียกสูตรนี้ว่า ***สูตรผลต่างกลาง*** (central difference) จะเห็นว่าสูตรนี้มีอันดับของการประมาณเท่ากับ 2 หรือ $O(h^2)$ ดังนั้นสูตรนี้จะใช้ประมาณ $f'(x)$ ได้ดีกว่าสูตรผลต่างก้าวหน้าและสูตรผลต่างย้อนหลัง ซึ่งสมเหตุสมผลเพราะสูตรผลต่างกลางใช้ข้อมูลที่จุดซึ่งอยู่ทางซ้ายและขวาของ x ส่วนสูตรผลต่างก้าวหน้าและสูตรผลต่างย้อนหลังใช้ข้อมูลเพียงด้านซ้ายหรือด้านขวาของ x อย่างเดียว จะเห็นว่าการใช้ข้อมูลมากขึ้นจะได้ค่าประมาณที่แม่นยำขึ้น

ถ้า $f \in C^5[a,b]$ และ x - 2h, x - h, x, x+ h, x + 2h เป็นจุดใน [a,b] จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์อีกเช่นกัน เราได้

$$f(x + h) - f(x - h) = 2f'(x)h + 2f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + 2f^{(5)}(c_1)\frac{h^5}{120} \quad \text{............} \quad (3.2.5)$$

แทน h ด้วย 2h จะได้

$$f(x + 2h) - f(x - 2h) = 4f'(x)h + 16f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + 64f^{(5)}(c_2)\frac{h^5}{120} \quad \text{.............} \quad (3.2.6)$$

เมื่อ c_1 และ c_2 อยู่ระหว่าง x + 2h และ x - 2h

คูณสมการ (3.2.5) ด้วย 8 แล้วลบออกจาก (3.2.6) เราได้

$$\begin{aligned} &f(x - 2h) - 8f(x - h) + 8f(x + h) - f(x + 2h) \\ &\qquad = 12f'(x)h + \frac{16f^{(5)}(c_1)-64f^{(5)}(c_2)}{120}h^5 \end{aligned}$$

ถ้า $f^{(5)}(x)$ มีเครื่องหมายเดียวและขนาดไม่เปลี่ยนแปลงเร็วนักเราสามารถหา c ระหว่าง x + 2h และ x - 2h ซึ่งทำให้

$$16f^{(5)}(c_1)-64f^{(5)}(c_2) = -48f^{(5)}(c)$$

ดังนั้น $$f'(x) = \frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h} + f^{(5)}(c)\frac{h^4}{30}$$

หรือ $$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + O(h^4)$$

เรียกสูตรนี้ว่าสูตร 5 จุด เพราะใช้ข้อมูล 5 จุด ถึงแม้ว่าข้อมูลที่จุด x จะไม่ปรากฏในสูตรก็ตาม จะเห็นว่าสูตรนี้มีอันดับของการประมาณเท่ากับ 4 หรือ $O(h^4)$

ตาราง 3.2.2 : สูตรสำหรับหา $f'(x)$ ที่มีอันดับต่าง ๆ

สูตร	$\mathbf{f'(x)}$	**ค่าคลาดเคลื่อน**
ผลต่างก้าวหน้า	$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$-\frac{f''(c)}{2}h$
ผลต่างย้อนหลัง	$\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$	$\frac{f''(c)}{2}h$
ผลต่างกลาง	$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$	$f'''(c)\frac{h^2}{6}$
สูตร 5 จุด	$\frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$	$f^{(5)}(c)\frac{h^4}{30}$

ตัวอย่าง 2 : ให้ $f(x) = \sin x$ จงหา $f'(1)$ โดยใช้ $h = 0.1$

วิธีทำ ถ้าใช้สูตรผลต่างก้าวหน้า จะได้

$$f'(1) = \frac{f(1+0.1) - f(1)}{0.1} = 0.49736375$$

ถ้าใช้สูตรผลต่างย้อนหลัง จะได้

$$f'(1) = \frac{f(1) - f(1-0.1)}{0.1} = 0.5144075$$

ถ้าใช้สูตรผลต่างกลาง จะได้

$$f'(1) = \frac{f(1+0.1) - f(1-0.1)}{2(0.1)} = 0.53940225$$

ถ้าใช้สูตร 5 จุด จะได้

$$f'(1) = \frac{f(1-.0.2) - 8f(1-0.1) + 8f(1+0.1) - f(1+0.2)}{12(0.1)}$$

$$= 0.54030051$$

ตัวอย่าง 3 : ให้ f(x) = sin (x) จงวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่าของ $f'(1)$ โดยใช้สูตรผลต่างก้าวหน้า และใช้ h = 0.1

วิธีทำ ในที่นี้ $f'(x) = \cos(x)$ ดังนั้น ค่าที่แท้จริงของ $f'(1)$ คือ

$$f'(1) = \cos(1) = 0.54030231$$

จากตัวอย่าง 3.2.2 จะเห็นว่าค่าของ $f'(1)$ ที่คำนวณได้จากการใช้สูตรผลต่างก้าวหน้า และใช้ h = 0.1 คลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงเท่ากับ

$$0.54030231 - 0.49736375 = 0.04293856$$

ซึ่งเป็นค่าคลาดเคลื่อนที่แท้จริง

เนื่องจาก $f''(x) = -\sin x$ ดังนั้น

$$f''(c) = -\sin(c) \text{ และ } |f''(c)| = |-\sin(c)| \le 1$$

ถ้าเราคำนวณค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้สูตร $-\frac{f''(c)}{2}h$ ในตาราง 3.2.2 เราได้

$$\left|-\frac{f''(c)}{2}h\right| = \left|-\frac{\sin(c)}{2} \times 0.1\right| = \left|-\frac{\sin(c)}{2}\right| \times 0.1 \le \frac{1}{2} \times 0.1 = 0.05$$

จะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนที่แท้จริง 0.04293856 ใกล้เคียงกับค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากการประมาณคือ 0.05 ไม่มากนัก

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงใช้สูตรผลต่างก้าวหน้าในการหาค่าประมาณของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f(x) = 1/x ณ จุด x โดยใช้ขนาดขั้น h ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อน

a) $x = 1.1; h = 0.1, 0.2, 0.4$ b) $x = 1.3; h = 0.1, 0.2, -0.1$

2. จงใช้สูตรผลต่างก้าวหน้า สูตรผลต่างย้อนหลัง สูตรผลต่างกลาง และสูตร 5 จุด หาค่าประมาณของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f(x) ในตารางที่ ณ จุด x และขนาดขั้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   a) $x = 0.5, h = 0.1$ b) $x = 0.7; h = 0.1$ c) $x = 0.9; h = 0.2$

x	f(x)
0.5	0.877583
0.6	0.825336
0.7	0.764842
0.8	0.696707
0.9	0.621610

3.3 Richardson Extrapolation

เป็นกระบวนการประมาณค่าที่ใช้ค่าประมาณที่คำนวณได้เพื่อหาค่าประมาณใหม่ที่มีอันดับสูงกว่าอันดับของค่าประมาณเดิม สมมุติให้ D(h) เป็นสูตร(ขึ้นอยู่กับค่าของ h) ที่

$$\lim_{h\to 0} D(h) = D$$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ เราได้

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x) + \ldots$$

และ

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x) + \ldots$$

ดังนั้น

$$f(x + h) - f(x - h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3} f'''(x) + \frac{h^5}{60} f^{(5)}(x) + \ldots$$

หารด้วย 2h จะได้

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) + \ldots$$

หรือ

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) - \ldots$$

ถ้าให้

$$D(h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

เราได้

$$f'(x) = D(h) - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) + \ldots$$

$$D(h) = f'(x) + \frac{h^2}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) + \ldots$$

เพื่อความสะดวก เราเขียน

$$f'(x) = D(h) + A_1h^2 + A_2h^4 + A_3h^6 + \ldots$$

เมื่อ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ คือสัมประสิทธิ์ของ $h^2, h^4, h^6, \ldots$ ในสมการข้างบนนี้ ตามลำดับ

ถ้าให้ $D_0(h/2^k) = D(h/2^k)$ จะได้

$$f'(x) = D_0(h) + A_1h^2 + A_2h^4 + A_3h^6 + \ldots \qquad \text{...........(3.3.1)}$$

จะเห็นว่าถ้าเราประมาณค่าของ $f'(x)$ ด้วย $D_0(h)$ อันดับของการประมาณจะเท่ากับ $O(h^2)$

แทนค่า h ใน (3.3.1) ด้วย h/2 และ h/4 ตามลำดับ จะได้

$$f'(x) = D_0(h/2) + \frac{1}{2^2}A_1h^2 + \frac{1}{2^4}A_2h^4 + \frac{1}{2^6}A_3h^6 + \ldots \qquad \text{...........(3.3.2)}$$

และ

$$f'(x) = D_0(h/4) + \frac{1}{2^4}A_1h^2 + \frac{1}{2^8}A_2h^4 + \frac{1}{2^{12}}A_3h^6 + \ldots \qquad \text{...........(3.3.3)}$$

คูณสมการ (3.3.2) ด้วย 2^2 แล้วลบด้วยสมการ (3.3.1) เราได้

$$(2^2 - 1)\ f'(x) = 2^2D_0(h/2) - D_0(h) - \frac{3}{2^2}A_2h^4 - \frac{15}{2^4}A_3h^6 - \ldots$$

หารด้วย $(2^2 - 1)$ จะได้

$$f'(x) = \frac{2^2 D_0(h/2) - D_0(h)}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^2}A_2h^4 - \frac{5}{2^4}A_3h^6 - \ldots$$

ถ้าให้

$$D_1(h/2) = \frac{2^2 D_0(h/2) - D_0(h)}{2^2 - 1}$$

เราได้

$$f'(x) = D_1(h/2) - \frac{1}{2^2}A_2h^4 - \frac{5}{2^4}A_3h^6 - \ldots \qquad \text{...........(3.3.4)}$$

จะเห็นว่าการประมาณ $f'(x)$ ด้วย $D_1(h/2)$ มีอันดับของการประมาณเท่ากับ $O(h^4)$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราคูณสมการ (3.3.3) ด้วย 2^2 แล้วลบด้วยสมการ (3.3.2) จะได้

$$(2^2 - 1)\ f'(x) = 2^2D_0(h/4) - D_0(h/2) - \frac{3}{2^6}A_2h^4 - \frac{15}{2^{10}}A_3h^6 - \ldots$$

หารด้วย $(2^2 - 1)$ จะได้

$$f'(x) = \frac{2^2 D_0(h/4) - D_0(h/2)}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^6}A_2h^4 - \frac{5}{2^{10}}A_3h^6 - \ldots$$

ถ้าให้

$$D_1(h/4) = \frac{2^2 D_0(h/4) - D_0(h/2)}{2^2 - 1}$$

เราได้

$$f'(x) = D_1(h/4) - \frac{1}{2^6}A_2h^4 - \frac{5}{2^{10}} A_3h^6 - \ldots \qquad \text{...........(3.3.5)}$$

จะเห็นว่าการประมาณ $f'(x)$ ด้วย $D_1(h/4)$ มีอันดับของการประมาณเท่ากับ $O(h^4)$ เช่นกัน คูณสมการ (3.3.5) ด้วย $2^4 = 16$ แล้วลบด้วยสมการ (3.3.4) จะได้

$$(2^4 - 1)\, f'(x) = 2^4 D_1(h/4) - D_1(h/2) - \frac{15}{2^6}A_3h^6 - \ldots$$

หารด้วย $2^4 - 1$ เราได้

$$f'(x) = \frac{2^4 D_1(h/4) - D_1(h/2)}{2^4 - 1} - \frac{1}{2^6} A_3h^6 - \ldots$$

ถ้าให้

$$D_2(h/4) = \frac{2^4 D_1(h/4) - D_1(h/2)}{2^4 - 1}$$

เราได้

$$f'(x) = D_2(h/4) - \frac{1}{2^6} A_3h^6 - \ldots$$

จะเห็นว่า $D_1(h/4)$ ประมาณของ $f'(x)$ ด้วยอันดับ $O(h^6)$

ถ้าทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จะได้

$$D_0(h/2^k) = D(h/2^k)$$

และ

$$D_m(h/2^k) = \frac{2^{2m} D_{m-1}(h/2^k) - D_{m-1}(h/2^{k-1})}{2^{2m} - 1} \quad \text{สำหรับ } m \geq 1$$

เพื่อความสะดวก เราจะใช้สัญลักษณ์ $D(m,k)$ แทน $D_m(h/2^k)$ ดังนั้น

$$D(m,k) = \frac{2^{2m} D(m-1,k) - D(m-1,k-1)}{2^{2m} - 1} \quad \text{สำหรับ } m \geq 1$$

จากสูตรนี้เราได้ตารางของ Richardson extrapolation ต่อไปนี้

ตาราง 3.3.1 : Richardson Extrapolation

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$		
D(0,0)				
D(0,1)	D(1,1)			
D(0,2)	D(1,2)	D(2,2)		
D(0,3)	D(1,3)	D(2,3)	D(3,3)	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
D(0,n)	D(1,n)	D(2,n)	...	D(n,n)

ตัวอย่าง 1 : ให้ f(x) = ln x จงหา $f'(1.25)$ โดยใช้ h = 0.2

$$D(0,0) = \frac{f(1.25+0.2)-f(1.25-0.2)}{2(0.2)} = 0.806933$$

$$D(0,1) = \frac{f(1.25+0.1)-f(1.25-0.1)}{2(0.1)} = 0.801713$$

$$D(1,1) = \frac{2^2 D(0,1)-D(0,0)}{2^2-1} = 0.799973$$

$$D(0,2) = \frac{f(1.25+0.05)-f(1.25-0.05)}{2(0.05)} = 0.800427$$

$$D(1,2) = \frac{2^2 D(0,2)-D(0,1)}{2^2-1} = 0.799998$$

$$D(2,2) = \frac{2^4 D(1,2)-D(1,1)}{2^4-1} = 0.800000$$

สรุปผลได้ดังในตารางข้างล่างนี้

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
0.806933		
0.801713	0.799973	
0.800427	0.799998	0.800000

แบบฝึกหัด 3.3

1. ให้ f(x) = $\sqrt{x}$ สำหรับ h = 0.2 จงหา D(0,0), D(1,1) และ D(2,2).
2. จงใช้สูตรผลต่างกลางและ Richardson extrapolation หาค่าประมาณอันดับ 6 หรือ $O(h^6)$ สำหรับอนุพันธ์ที่ x = 0.2 ของฟังก์ชันที่กำหนดข้อมูลดังในตาราง

x	f(x)
0.0	1.00000
0.1	1.22140
0.2	1.49182
0.4	2.22554
0.8	4.95303

3.4 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

ปัญหาที่จะศึกษาในบทนี้คือการหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

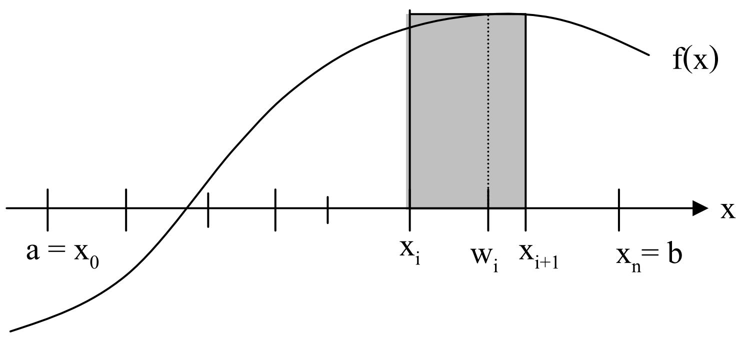
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

เราได้เคยศึกษาวิธีหาปริพันธ์จำกัดเขต I(f) แล้วในวิชาแคลคูลัส สำหรับฟังก์ชัน f(x) ที่เป็นฟังก์ชันพื้นฐานง่าย ๆ เช่น f(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม เป็นฟังก์ชันชี้กำลัง หรือ f(x) เป็นฟังก์ชันตรีโกณ เราสามารถหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันเหล่านี้ได้โดยการหาปฏิยานุพันธ์ F(x) ของฟังก์ชัน f(x) แล้วหาผลต่าง F(b) – F(a) ผลลัพธ์ที่ได้คือค่าของปริพันธ์จำกัดเขต I(f) ยังมีฟังก์ชันอีกจำนวนมากที่มีรูปแบบซับซ้อน หาปฏิยานุพันธ์ได้ยาก หรืออาจหาไม่ได้ เช่น $\int_0^1 e^{x^2} dx$ ดังนั้นการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันเหล่านี้จึงต้องใช้วิธีที่เรียกว่า ***วิธีหาปริพันธ์เชิงตัวเลข*** ที่จะได้กล่าวถึงต่อไปในหัวข้อนี้

ในวิชาแคลคูลัส เรานิยามปริพันธ์จำกัดเขตดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum f(w_i)\Delta x_i$$

เมื่อ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง [a,b] และ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ คือความยาวของช่วง $[x_i, x_{i+1}]$ ส่วน w_i คือจุดใด ๆ ในช่วง $[x_i, x_{i+1}]$ โปรดสังเกตุว่า Δx_i ไม่จำเป็นต้องมีขนาดเท่ากัน สำหรับแต่ละ i ดังนั้น $f(w_i)\ \Delta x_i$ ก็คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แสดงในรูป 3.4.1



รูป 3.4.1 : แสดงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง Δx_i และส่วนสูง $f(w_i)$

ถ้า $f(w_i) > 0$ แต่ถ้า $f(w_i) < 0$ แล้ว $f(w_i)\Delta x_i$ เป็นจำนวนลบของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า

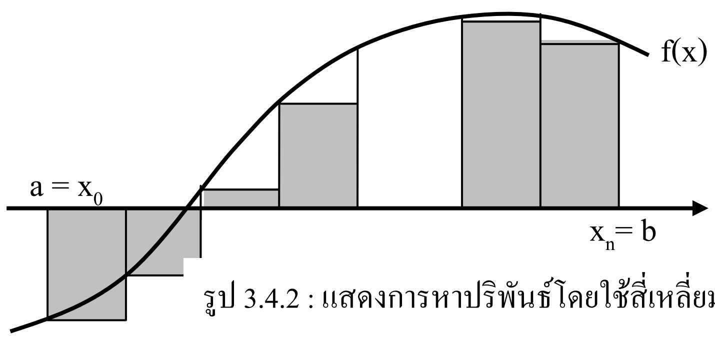
ในกรณีที่ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง [a,b] บางครั้งเรากล่าวง่าย ๆ ว่า $x_0, x_1, \ldots, x_n$ เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง [a,b] เพื่อความสะดวก เราแบ่งช่วง [a, b] ออกเป็น n ช่วงที่มีความยาวเท่า ๆ กัน คือเท่ากับ $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$ และให้

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_n = b$$

เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง [a, b] สำหรับ w_i ที่อยู่ในช่วง $[x_i, x_{i+1}]$ เราใช้ผลบวก

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x$$

เป็นค่าประมาณของปริพันธ์จำกัดเขต I(f) เราอาจเลือก w_i ให้เป็นจุดใด ๆ ก็ได้ในช่วง $[x_i, x_{i+1}]$ แต่ถ้าเราเลือกจุด w_i ให้เป็นจุดปลายทางด้านซ้ายสุดของช่วง $[x_i, x_{i+1}]$ นั่นคือเราเลือก $w_i = x_i$ ผลบวก $\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x$ ก็คือผลบวกของพื้นที่หรือจำนวนลบของพื้นที่ในรูป 3.4.2



รูป 3.4.2 : แสดงการหาปริพันธ์โดยใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้า

ผลบวก

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \Delta x\,[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]$$

$$= h\,[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]$$

เมื่อ $h = \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

จะเป็นค่าประมาณของ I(f) เราเรียกการประมาณค่านี้ว่าการประมาณด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ตัวอย่าง 1 : จงหาค่าประมาณของ $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ โดยใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้า และให้ n = 6 พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลลัพธ์กับค่าที่แท้จริง

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = \frac{1}{x}$, a = 1, b = 2 และ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$ ดังนั้น

$x_0 = a = 1$, $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = \frac{11}{6}$, $x_6 = b = 2$

และค่าของฟังก์ชัน ณ ที่จุดซ้ายสุดของแต่ละช่วงย่อยเหล่านี้ เมื่อคำนวณโดยใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง เราได้

$f(x_0) = f(1) = 1.0000$, $f(x_1) = f(7/6) = 0.8571$, $f(x_2) = f(4/3) = 0.7500$

$f(x_3) = f(3/2) = 0.6667$, $f(x_4) = f(5/3) = 0.6000$, $f(x_5) = f(11/6) = 0.5455$

ดังนั้น ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$= \frac{1}{6}[1.0000 + 0.8571 + 0.7500 + 0.6667 + 0.6000 + 0.5455]$$

$$= 0.5700$$

นั่นคือ $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0.5700$

จะเห็นว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f(x) ในตัวอย่างนี้คือ F(x) = ln x ดังนั้น

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = F(2) - F(1) = \ln 2 - \ln 1 = 0.6931 - 0 = 0.6931$$

ซึ่งเป็นค่าที่คำนวณได้ในเชิงทฤษฎี นั่นคือเราหาค่าที่แท้จริงของ $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ ได้ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้ในเชิงตัวเลข จะพบว่าค่าที่ประมาณได้คลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงเท่ากับ

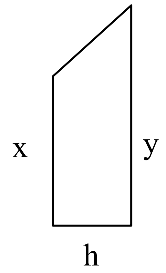
$$0.6931 - 0.5700 = 0.1231$$

ซึ่งจัดว่ามีค่าคลาดเคลื่อนมากพอสมควร คือเมื่อคิดเป็นเปอร์เซ็นเทียบกับค่าที่แท้จริงแล้วค่าที่คำนวณได้คลาดเคลื่อนไป 18% เราจะศึกษาวิธีประมาณค่าของปริพันธ์จำกัดเขตอีกสองวิธี ซึ่งมีความแม่นยำกว่าการประมาณด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า นั่นคือวิธีประมาณด้วยสี่เหลี่ยมคางหมูและวิธีประมาณด้วยพาราโบลา

การประมาณค่าด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู

เราคงยังจำสูตรสำหรับการคำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูได้ว่า

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2} \times \text{ความกว้าง} \times \text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน}$$



รูป 3.4.3 : รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูในรูป 3.4.3 คือ

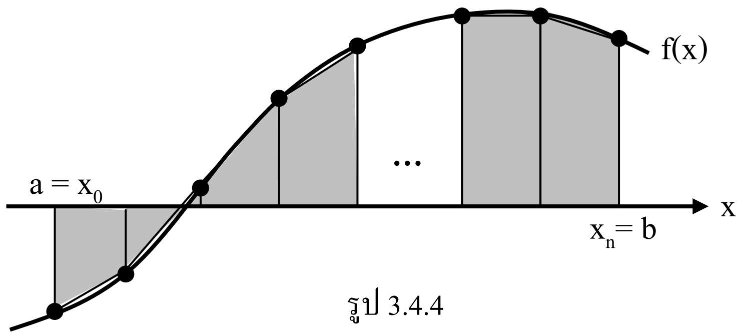
$$\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู} = \frac{1}{2}h\,(x + y)$$

เราจะประมาณค่าของ $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ โดยแบ่งช่วง [a, b]

ออกเป็น n ช่วง เท่า ๆ กัน แต่ละช่วงมีความยาว $h = \dfrac{b-a}{n}$ ให้

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_n = b$$

เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง [a, b] ในแต่ละช่วงย่อย $[x_i, x_{i+1}]$ สร้างสี่เหลี่ยมคางหมูที่มี $f(x_i)$ และ $f(x_{i+1})$ เป็นความยาวของด้านคู่ขนาน และมี $h = x_{i+1} - x_i$ เป็นความกว้าง คำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ละรูป (ดูรูป 3.4.4) แล้วนำมาบวกกัน จะได้



รูป 3.4.4

$$T_n(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \ldots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

ซึ่งจะเป็นค่าประมาณค่าของ $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ นั่นคือเราได้

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

> สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง [a, b] และ $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, …, $x_n = b$ เมื่อ $h = \frac{b-a}{n}$ แล้ว เราสามารถประมาณค่าของ I(f) ด้วย
>
> $$T_n(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

ข้อสังเกต : การประมาณค่า I(f) ด้วย $T_n(f)$ จะมีความแม่นยำสูงถ้า n มีขนาดใหญ่ นอกจากนี้ ถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น นั่นคือเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งและมีกราฟเป็นเส้นตรง ในกรณีนี้ $T_n(f)$ จะประมาณ I(f) ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ

ตัวอย่าง 2 : จงใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหาค่าประมาณของ $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ โดยให้ n = 6 พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลลัพธ์กับค่าที่แท้จริง

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = \frac{1}{x}$, a = 1, b = 2 และ $h = \frac{1}{6}$ ดังนั้น

$x_0 = a = 1$, $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = \frac{11}{6}$, $x_6 = b = 2$

ถ้าให้ m_i แทนสัมประสิทธิ์ของ $f(x_i)$ ใน $T_6(f)$ และคำนวณโดยใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง จะได้ผลการคำนวณดังปรากฏในตาราง 3.4.1

ตาราง 3.4.1 : แสดงการหาค่าของ $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

x_i	$f(x_I)$	m_i	$m_if(x_i)$
1	1.0000	1	1.0000
7/6	0.8571	2	1.7142
4/3	0.7500	2	1.5000
3/2	0.6667	2	1.3334
5/3	0.6000	2	1.2000
11/6	0.5455	2	1.0910
2	0.5000	1	0.5000

ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูก็คือ $\frac{h}{2}$ คูณด้วยผลรวมของจำนวนในหลักสุดท้ายในตาราง 3.4.1 ข้างบนนี้ นั่นคือ

$$T_6(f) = \frac{h}{2}[1.0000 + 1.7142 + 1.5000 + 1.3334 + 1.2000 + 1.0910 + 0.5000]$$

$$= \frac{1}{12} \times 8.3386 = 0.6949$$

ซึ่งคลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงเท่ากับ 0.6949 – 0.6931 = 0.0002 หรือคลาดเคลื่อนไป 0.03% จะเห็นว่าค่าประมาณที่ได้จากการประมาณด้วยสี่เหลี่ยมคางหมูมีความแม่นยำมากกว่าการประมาณด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้ามาก

ถ้าเราไม่รู้ค่าที่แท้จริง เราจะรู้ได้อย่างไรว่าค่าที่คำนวณได้คลาดเคลื่อนไปมากน้อยเพียงใด นั่นคือจะรู้ได้อย่างไรว่าค่าที่คำนวณได้มีความแม่นยำมากน้อยเพียงใด สิ่งหนึ่งที่จะบอกได้ก็โดยการหาขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน ขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อนจะเป็นตัวบอกให้รู้ว่าค่าที่คำนวณได้หรือค่าที่ประมาณนั้นคลาดเคลื่อนไปไม่เกินค่าที่เป็นขอบเขตบน โดยทั่วไปเรามักไม่รู้ค่าที่แท้จริง เพราะถ้าเรารู้ค่าที่แท้จริง เราคงไม่ต้องหาค่าโดยประมาณ แต่เราอาจรู้ขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน การหา

ค่าคลาดเคลื่อนของ $T_n(f)$

ถ้า $f''(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ M เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $\lvert f''(x) \rvert \le M$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วง [a, b] แล้วค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณ I(f) ด้วย $T_n(f)$ คือ $E_T = \left\lvert \int_a^b f(x)dx - T_n(f) \right\rvert \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$ ………….. (3.4.1)

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จะเห็นว่า E_T จะมีค่าน้อย แสดงว่า $T_n(f)$ ประมาณค่าของ I(f) ได้แม่นยำมากขึ้น เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

ตัวอย่าง 3 : จงหาขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน ที่เกิดจากการประมาณค่าของ $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ ด้วย $T_6(f)$ ในตัวอย่าง 3.4.2

วิธีทำ จาก (3.4.1) เราจะต้องหาจำนวนบวก M ซึ่งทำให้ $\lvert f''(x) \rvert \le M$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $1 \le x \le 2$ และจาก $f(x) = \frac{1}{x}$ เราได้อนุพันธ์

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{และ} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ เกิดขึ้นเมื่อ x เท่ากับ 1 ดังนั้น

$$\lvert f''(x) \rvert = \left\lvert \frac{2}{x^3} \right\rvert \le 2 = M$$

ในที่นี้ a = 1, b = 2 และ n = 6 เราได้ขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M = \frac{1}{12(36)} \times 2 = 0.0046$$

ข้อสังเกต : จะเห็นว่าค่าประมาณ $T_6(f)$ ที่คำนวณได้ในตัวอย่าง 3.4.2 คลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริง 0.0002 ซึ่งไม่เกินค่าของขอบเขตบน 0.0046 จริง

ตัวอย่าง 4 : จงใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหาค่าประมาณของ $\int_0^1 e^{x^2}dx$ โดยให้ n = 4 พร้อมทั้งหาขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = e^{x^2}$, a = 0, b = 1 และ $h = \frac{1}{4}$ ดังนั้น

$x_0 = a = 0$, $x_1 = ¼$, $x_2 = ½$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1 = b$

คำนวณโดยใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง จะได้ผลดังแสดงในตาราง 3.4.2

ตาราง 3.4.2 : แสดงการหาค่าของ $\int_0^1 e^{x^2}dx$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

x_i	$f(x_I)$	m_i	$m_if(x_i)$
0	1.0000	1	1.0000
¼	1.0645	2	2.1290
½	1.2840	2	2.5680
3/4	1.7551	2	3.5102
1	2.7183	1	2.7183

ดังนั้น

$$T_4(f) = \frac{h}{2}[1.0000 + 2.12\ 90 + 2.5680 + 3.5102 + 2.7183]$$

$$= \frac{1}{8} \times 11.9255 = 1.4907$$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองของ $f(x) = e^{x^2}$ คือ

$$f'(x) = 2xe^{x^2} \quad \text{และ}$$

$$f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} = e^{x^2}(4x^2 + 2)$$

เราทราบว่า e < 3 และ $4x^2+2 < 6$ เมื่อ $0 \leq x \leq 1$ ซึ่งเป็นผลให้

$$|f''(x)| = |2e^{x^2}(2x^2+1)| < 3 \times 6 = 18 = M$$

ดังนั้นขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อนคือ

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M = \frac{1}{12(16)} \times 18 = 0.0938$$

แสดงว่าค่าประมาณ $T_4(f)$ ที่คำนวณได้ คลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงไม่เกิน 0.0938

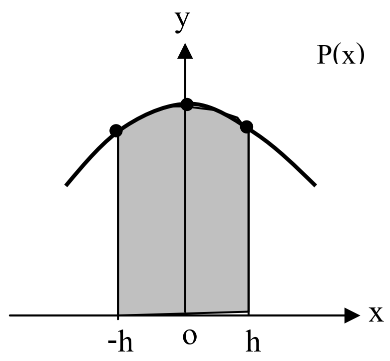
การประมาณค่าด้วยพาราโบลา

จากความพยายามที่จะหาค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)dx$ ที่มีความแม่นยำกว่าการประมาณด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าและสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งทั้งสองวิธีเป็นการประมาณเส้นโค้งด้วยเส้นตรง พบว่าส่วนใหญ่แล้วกราฟของพาราโบลาจะใกล้เคียงกับเส้นโค้ง f(x) มากกว่ากราฟเส้นตรง จึงสมเหตุสมผลที่จะประมาณเส้นโค้ง f(x) ด้วยพาราโบลา ซึ่งก็คือพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูป

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

กล่าวคือ เราจะใช้พื้นที่ใต้โค้งพาราโบลา p(x) เป็นค่าประมาณของพื้นที่ใต้โค้ง f(x) เพื่อความสะดวก เราจะเริ่มต้นด้วยการหาพื้นที่ใต้โค้งพาราโบลา p(x) ในช่วง x = -h ถึง x = h ดังในรูป 3.4.3

รูป 3.4.3 แสดงพื้นที่ใต้โค้งพาราโบลา



เราหาพื้นที่ดังกล่าวโดยการหาปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_{-h}^{h} p(x)dx = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx$$

$$= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-h}^{h}$$

$$= \left[\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch \right] - \left[-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch \right]$$

$$= 2a\frac{h^3}{3} + 2ch = \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right)$$

เนื่องจากพาราโบลา p(x) ผ่านจุด 3 จุด คือ

(-h, p(-h)), (0, p(0)), และ (h, p(h))

แทนค่าใน $p(x) = ax^2 + bx + c$ เราได้

$$p(-h) = ah^2 + bh + c$$

$$p(0) = c$$

$$p(h) = ah^2 + bh + c$$

ซึ่งเป็นผลให้

$$p(-h) + p(h) = 2ah^2 + 2p(0)$$

หรือ

$$2ah^2 = p(-h) – 2p(0) + p(h)$$

ดังนั้น

$$\int_{-h}^{h} p(x)dx = \frac{h}{3}\left(p(-h) - 2p(0) + p(h) + 6p(0)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(p(-h) + 4p(0) + p(h)\right)$$

เป็นพื้นที่ใต้โค้งพาราโบลา p(x) จากช่วง x = -h ถึง x = h

ในการประมาณค่า $\int_a^b f(x)dx$ เราแบ่งช่วง [a, b] ออกเป็น n ช่วง ที่มีขนาดเท่า ๆ กัน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และให้

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_n = b$$

เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง [a, b] เมื่อ $h = \frac{b-a}{n}$

จะเห็นว่าพื้นที่ใต้พาราโบลาไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเลื่อนช่วง [-h, h] ไปตำแหน่งอื่นบนแกน x โดยคงความยาวของช่วงให้มีขนาดเท่าเดิม คือเท่ากับ 2h พิจารณาพาราโบลาในสองช่วงย่อยแรก $[x_0, x_1]$ และ $[x_1, x_2]$ ให้พาราโบลาผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ และ

$$\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

ในทำนองเดียวกัน พื้นที่ใต้พาราโบลาในสองช่วงถัดไปคือ $[x_2, x_3]$ และ $[x_3, x_4]$ ที่ผ่านจุด $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ และ $(x_4, f(x_4))$ จะเท่ากับ

$$\frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$$

หาพื้นที่ใต้พาราโบลาในสองช่วงถัดไป ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงสองช่วงสุดท้าย ซึ่งจะมีพื้นที่เท่ากับ

$$\frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

นำพื้นที่ทั้งหมดมารวมกัน เราได้ค่าประมาณ

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right] + \ldots$$

$$+ \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

ซึ่งจะถูกใช้เป็นเป็นค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)dx$

กฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)

> สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ถ้า f เป็นฟังชันต่อเนื่องในช่วง [a, b] และ $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, …, $x_n = b$ เมื่อ $h = \frac{b-a}{n}$ แล้วเราสามารถประมาณค่าของ I(f) ด้วย
>
> $$S_n(f) = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)$$
> $$+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

ตัวอย่าง 5 : จงใช้กฎของซิมป์สันหาค่าประมาณของ $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ โดยให้ n = 6

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = \frac{1}{x}$, a = 1, b = 2 และ $h = \frac{1}{6}$ ดังนั้น

$x_0 = a = 1$, $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = \frac{11}{6}$, $x_6 = b = 2$

ถ้าให้ m_i แทนสัมประสิทธิ์ของ $f(x_i)$ ใน $S_6(f)$ เราแสดงผลการคำนวณในตาราง 3.4.3

ตาราง 3.4.3 แสดงการหาค่าของ $\int_1^x \frac{1}{x}\,dx$ โดยใช้กฎของซิมป์สัน

x_i	$f(x_i)$	m_i	$m_i f(x_i)$
1	1.0000	1	1.0000
7/6	0.8571	4	3.4284
4/3	0.7500	2	1.5000
3/2	0.6667	4	2.6668
5/3	0.6000	2	1.2000
11/6	0.5455	4	2.1820
2	0.5000	1	0.5000

ผลรวมของจำนวณในหลักสุดท้ายเท่ากับ 12.4772 ดังนั้น

$$S_6(f) = \frac{h}{3}\times 12.4772 = \frac{1}{18}\times 12.4772 = 0.6932$$

ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงมากกว่า $T_6(f)$

ค่าคลาดเคลื่อนของ $S_n(f)$

ถ้า $f^{(4)}(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ M เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $|f^{(4)}(x)| \leq M$ สำหรับทุก ๆ x ใน [a, b] แล้วค่าคลาดเคลื่อนจะเท่ากับ

$$E_S = \left| \int_a^b f(x)dx - S_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}M$$

ตัวอย่าง 6 : จงใช้กฎของซิมป์สันหาค่าประมาณของ $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ โดยให้ n = 4 พร้อมทั้งหาขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = e^{x^2}$, a = 0, b = 1 และ $h = \frac{1}{4}$ ดังนั้น

$x_0 = a = 0$, $x_1 = ¼$, $x_2 = ½$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1 = b$

คำนวณโดยใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงในตาราง 3.4.4

ตาราง 3.4.4 : แสดงการหาค่าของ $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ โดยใช้กฎของซิมป์สัน

x_i	$f(x_i)$	m_i	$m_i f(x_i)$
0	1.0000	1	1.0000
¼	1.0645	4	4.2580
½	1.2840	2	2.5680
3/4	1.7551	4	7.0204
1	2.7183	1	2.7183

ดังนั้น

$$S_4(f) = \frac{1}{12}[1.0000 + 4.2580 + 2.5680 + 7.0204 + 2.7183]$$

$$= \frac{1}{12} \times 17.5647 = 1.4637$$

ขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อนคือ $\frac{(b-a)^5}{180n^4}M$ ก่อนอื่นจะต้องหา M ดังนั้นเราจะต้องหาอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x) = e^{x^2}$ พบว่า

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2}$$

$$f'''(x) = 8x^3e^{x^2} + 8xe^{x^2} + 4xe^{x^2} = 8x^3e^{x^2} + 12xe^{x^2}$$

$$f^{(4)}(x) = 16x^4e^{x^2} + 24x^2e^{x^2} + 24x^2e^{x^2} + 12e^{x^2}$$

$$= e^{x^2}(16x^4 + 48x^2 + 12)$$

เราทราบว่า $e < 3$ และ $16x^4 + 48x^2 + 12 < 76$ เมื่อ $0 \leq x \leq 1$ ซึ่งเป็นผลให้

$$|f^{(4)}(x)| = |e^{x^2}(16x^4 + 48x^2 + 12)| < 3 \times 76 = 228 = M$$

ดังนั้นขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อนคือ

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}M = \frac{1}{180(256)} \times 228 = 0.0049$$

แสดงว่าค่าประมาณ $S_4(f)$ ที่คำนวณได้ คลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงไม่เกิน 0.0049

คำถามที่มักจะพบคือต้องกำหนดให้ n มีค่ามากน้อยเพียงใด การประมาณค่าจึงมีความแม่นยำในระดับที่เราต้องการ โดยทั่วไปการประมาณค่าจะมีความแม่นยำถึงทศนิยม k ตำแหน่ง ถ้าค่าประมาณนั้นมีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.5×10^{-k}

ตัวอย่าง 7 : จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้การประมาณค่าของ $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ ด้วยกฎของซิมป์สัน มีความแม่นยำถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

วิธีทำ เราจะต้องหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}M < 0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$$

แต่

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}M = \frac{1}{180n^4} \times 228 = \frac{19}{15n^4}$$

นั่นคือเราต้องการค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้

$$\frac{19}{15n^4} < 0.0005 \quad \text{หรือ} \quad \frac{19}{15(0.0005)} < n^4$$

แสดงว่า

$$n^4 > 2533.33 \quad \text{หรือ} \quad n > 7.0945$$

เนื่องจาก n จะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ดังนั้น ค่าของ n ที่น้อยที่สุดคือ 8

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาค่าของ $\int_0^2 x^3 dx$ โดยใช้การประมาณค่าด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อ n = 5, 8, 10

2. จงหาค่าของ $\int_0^2 x^3 dx$ โดยใช้การประมาณค่าด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อ n = 5, 8, 10

3. จงหาค่าของ $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อ n = 6, 8, 10

4. จงหาค่าของ $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx$ โดยใช้กฎของซิมป์สัน เมื่อ n = 6, 8, 10

5. เมื่อ n = 4 จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ โดยใช้การประมาณค่าด้วย
   - 5.1 สี่เหลี่ยมผืนผ้า
   - 5.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู
   - 5.3 กฎของซิมป์สัน

6. จงหาค่าของ $\int_0^\pi x \sin x dx$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู และ n = 10 พร้อมทั้งหาขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน

7. จงหาค่าของ $\int_0^\pi x \sin x dx$ โดยใช้กฎของซิมป์สัน และ n = 10 พร้อมทั้งหาขอบเขตบนของค่าคลาดเคลื่อน

8. ให้ f(x) เป็นฟังก์ชันที่กำหนดค่าดังในตาราง จงหาค่าประมาณของ $\int_0^2 f(x) dx$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู และ n = 1, 2, 4

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	0	0.3	5	25.3	80

9. ให้ f(x) เป็นฟังก์ชันที่กำหนดค่าดังในตารางในข้อ 8 จงหาค่าประมาณของ $\int_0^2 f(x) dx$ โดยใช้กฎของซิมป์สัน และ n = 2, 4

10. ให้ f(x) เป็นฟังก์ชันที่กำหนดค่าดังในตาราง จงหาค่าประมาณของ $\int_0^1 f(x) dx$ โดย

x_i	0.0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
$f(x_i)$	0.000	0.124	0.242	0.348	0.433	0.488	0.496	0.424	0.000

11. จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่จะทำให้การประมาณค่าของ $\int_2^7 \frac{1}{x}\,dx$ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู มีความแม่นยำถึงทศนิยม 5 ตำแหน่ง

12. จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่จะทำให้การประมาณค่าของ $\int_0^{\pi/3} \cos x \ dx$ ด้วยกฎของซิมป์สัน มีความแม่นยำถึงทศนิยม 5 ตำแหน่ง

13. จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่จะทำให้การประมาณค่าของ $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 10^{-4}

14. จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่จะทำให้การประมาณค่าของ $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ ด้วยกฎของซิมป์สัน มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 10^{-4}