บทที่ 2
ปริพันธ์ฟังก์ชันเชิงซ้อน

2.1 ทฤษฎีบทการหาปริพันธ์

ในบทที่แล้ว เรารู้จักการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อนมาแล้ว ในบทนี้เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งฟังก์ชันวิเคราะห์เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติพิเศษและน่าสนใจมาก

2.1.1 ปริพันธ์จำกัดเขต

ในการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อน ง่ายที่สุดก็คือ ฟังก์ชันที่เขียนในรูปตัวแปรจริง นั่นคือ

$$f(t) = u(t) + iv(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$$

เมื่อ u(t) และ v(t) เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง t ซึ่งเราทราบมาแล้วจากการศึกษาแคลคูลัสว่า ถ้า u(t) และ v(t) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว u และ v จะหาค่าปริพันธ์ได้ เพราะฉะนั้น เราจึงให้คำจำกัดความของปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \leftarrow$$

จากสมการ $\leftarrow$ โดยการหาปฏิยานุพันธ์ของ u และ v จะได้ว่า

$$\int_a^b f(t)dt = U(b) - U(a) + i\,[V(b) - V(a)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \uparrow$$

เมื่อ $U'(t) = u(t)$ และ $V'(t) = v(t)$

ตัวอย่าง 1

จงหาค่าของ $\int_0^1 (t+i)^3\,dt$

วิธีทำ

ในที่นี้ $f(t) = (t+i)^3$

$= t^3 - 3t + i(3t^2 - 1)$

ดังนั้น $u(t) = t^3 - 3t$ และ $v(t) = 3t^2 - 1$

จากสมการ ← จะได้

$$\int_0^1 (t+i)^3 dt = \int_0^1 (t^3 - 3t)dt + i\int_0^1 (3t^2 - 1)dt$$

$$= \left.\frac{t^4}{4} - \frac{3t^2}{2}\right|_0^1 + i\left.\left(\frac{3t^3}{3} - t\right)\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$$

ตัวอย่าง 2

จงหาค่าของ $\int_0^{\pi} \exp(t + it)dt$

วิธีทำ ในที่นี้ $f(t) = \exp(t + it)$

$$= e^t \bullet e^{it}$$

$$= e^t(\cos t + i\sin t)$$

ดังนั้น $u(t) = e^t \cos t$ และ $v(t) = e^t \sin t$

จากสมการ ← จะได้

$$\int_0^{\pi} \exp(t + it)dt = \int_0^{\pi} e^t \cos t dt + i\int_0^{\pi} e^t \sin t dt$$

โดยการหาปริพันธ์ด้วยวิธีการแยกส่วน จะได้

$$\int_0^{\pi} \exp(t + it)dt = \left.\frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) + \frac{i}{2}e^t(\sin t - \cos t)\right|_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1) + \frac{i}{2}(e^{\pi} + 1)$$

นอกจากนี้ ปริพันธ์เชิงซ้อนยังมีสมบัติเหมือนกับปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริง

ให้ $f(t) = u(t) + iv(t)$

และ $g(t) = r(t) + is(t)$

เมื่อ $a \leq t \leq b$ และ $c \in [a, b]$

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \quad \text{..................} \quad \rightarrow$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \quad \text{..................} \quad \downarrow$$

$$\int_a^b (c+id)f(t)dt = (c+id)\int_a^b f(t)dt \quad \text{..................} \quad \circ$$

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt \quad \text{..................} \quad \pm$$

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b [u(t)r(t) - v(t)s(t)]dt + i\int_a^b [u(t)s(t)+v(t)r(t)]dt \quad \text{..................} \quad ''$$

ข้อสังเกต

ถ้า U และ V เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง $a < t < b$ และให้

$$F(t) = U(t) + iV(t)$$

แล้ว $$F'(t) = U'(t) + iV(t)$$

ดังนั้น สมการ $\uparrow$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad \text{..................} \quad \geq$$

โดยที่ $$F'(t) = f(t)$$

ตัวอย่าง 3

จงแสดงว่า สมการ $\circ$ เป็นจริง

วิธีทำ

เนื่องจาก

$$(c + id)\, f(t) = (c + id)[u(t) + iv(t)]$$
$$= cu(t) - du(t) + i[cv(t) + du(t)]$$

เพราะฉะนั้น โดยสมการ $\leftarrow$ จะได้

$$\int_a^b (c+id)f(t)dt = c\int_a^b u(t)dt - d\int_a^b v(t)dt + ic\int_a^b v(t)dt + id\int_a^b u(t)dt$$

$$= (c+id)\left[\int_a^b u(t) + i\int_a^b v(t)dt\right]$$

$$= (c+id)\int_a^b f(t)dt$$

ตัวอย่าง 4

จงหาค่า $\int_0^{\pi/2} \exp(it)dt$

วิธีทำ ให้ $f(t) = \exp(it)$

จะพบว่า $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{i}\exp(it)\right) = f(t)$

เพราะฉะนั้น ถ้าเปรียบเทียบกับสมการ $\geq$ จะพบว่า

$$F(t) = \frac{1}{i}\exp(it)$$

$$= -i\exp(it)$$

ดังนั้น $\int_0^{\pi/2} \exp(it)dt = \int_0^{\pi/2} f(t)dt = F(\frac{\pi}{2}) - F(0)$

$$= -ie^{i\pi/2} + ie^0$$

$$= i - 1$$

แบบฝึกหัด 2.1

จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int_0^1 (3t - i)^2 dt$
2. $\int_0^1 (t + 2i)^3 dt$
3. $\int_0^{\pi/2} \cosh(it)dt$
4. $\int_0^2 \frac{t}{t+i} dt$

5. $\int_0^{\pi/4} t\exp(it)dt$

6. $\int_0^{2\pi} e^{imt}e^{-int}dt$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็ม

คำตอบ

1. $2 - 3i$
2. $-\frac{23}{4} - 6i$
3. 1
4. $2 - \arctan 2 - i\ln\sqrt{5}$
5. $\sqrt{2}\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\frac{\pi}{8}\right)$
6. 0 เมื่อ $m \neq n$ และ 2π เมื่อ $m = n$

2.1.2 คอนทัวร์

เราสามารถเขียนสมการเส้นโค้งในรูปตัวแปรเสริมได้ เช่น เส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2$ สามารถเขียนในรูปตัวแปรเสริมคือ $x = t$, $y = t^2$ เมื่อ $-\infty < t < \infty$ ถ้าให้ t อยู่ในช่วง $0 \le t \le 2$ ก็จะได้พาราโบลาที่เชื่อมต่อระหว่างจุด (0,0) และจุด (2,4)

นั่นคือ สำหรับจุด (x,y) ใดๆ บนเส้นโค้ง C เราสามารถเขียนแทนในรูปฟังก์ชันค่าจริงสองฟังก์ชัน

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \quad a \le t \le b \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \leftarrow$$

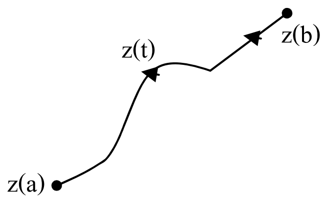
โดย x(t) และ y(t) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เรียก จุดบน C ที่สมนัยกับ $t = a$ ว่า จุดเริ่มต้น และเรียกจุดบน C ที่สมนัยกับ $t = b$ ว่า จุดสิ้นสุด และเรียกสมการ $\leftarrow$ ว่า สมการในรูปตัวแปรเสริม

สำหรับเส้นโค้งในระนาบ z จุด $z = (x , y)$ บนเส้นโค้งสามารถเขียนแทนในรูป

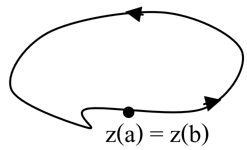
$$z = (x(t) , y(t)) \quad , \ a \le t \le b$$

หรือ

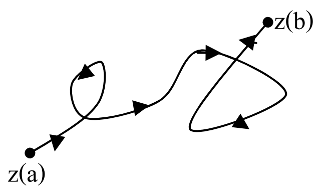
$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad ; \quad a \le t \le b \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \uparrow$$



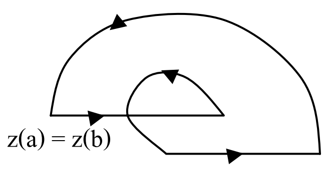
เส้นโค้งเชิงเดี่ยว



เส้นโค้งปิดเชิงเดี่ยว



เส้นโค้งเปิดหลายเชิง



เส้นโค้งปิดหลายเชิง

เรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นโค้งเชิงเดียว ถ้า $z(t_1) \neq z(t_2)$ เมื่อ $t_1 \neq t_2$

เรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นโค้งปิด ถ้า $z(b) = z(a)$

ถ้า $x(t)$ และ $y(t)$ หาอนุพันธ์ได้ เมื่อ $a \leq t \leq b$ แล้ว ฟังก์ชันเชิงซ้อน $z(t)$ ในสมการ $\uparrow$ จะหาอนุพันธ์ได้ด้วย และ

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \ , \ a \leq t \leq b \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \rightarrow$$

เรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นโค้งเรียบ ถ้า $z'(t)$ ตาม $\rightarrow$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

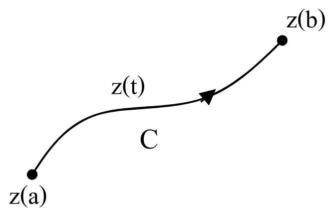
สำหรับเส้นโค้งเรียบใดๆ ให้ $s(t)$ เป็นฟังก์ชันความยาวเส้นโค้ง จะพบว่า

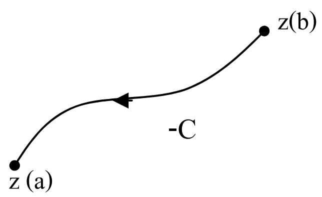
$$\frac{ds}{dt} = |z'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

ให้ L เป็นความยาวของเส้นโค้ง C ดังนั้น

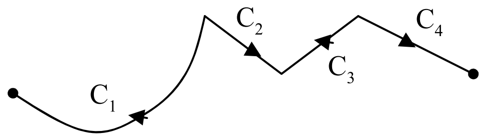
$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_a^b |z'(t)|\, dt \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \downarrow$$

เรียก เส้นโค้ง –C ว่ามีทิศตรงข้ามกับเส้นโค้ง C



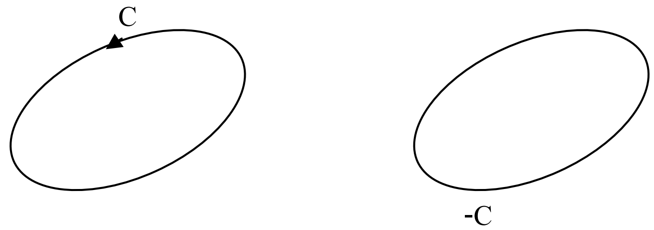


เรียก เส้นโค้ง C ว่า คอนทัวร์ ถ้า C ประกอบด้วยเส้นโค้งเรียบ จำนวนจำกัด เชื่อมต่อกันโดยที่จุดสิ้นสุดของ C_k ต่อกับจุดเริ่มต้นของ C_{k+1}



$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

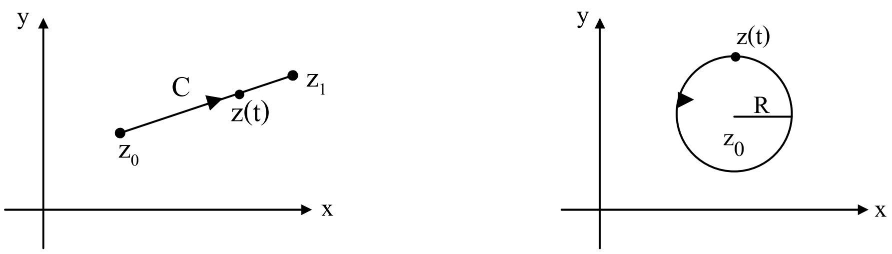
สำหรับคอนทัวร์ปิด C จะเรียกว่า มีทิศทางเป็นบวก ก็ต่อเมื่อขณะเคลื่อนที่จุดภายในคอนทัวร์จะอยู่ด้านซ้ายมือ นั่นคือ เคลื่อนที่ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป



ต่อไปจะพิจารณาสมการเส้นตรง และวงกลมในรูปตัวแปรเสริม

สำหรับเส้นตรง C ที่เชื่อมระหว่างจุด a และ b ในรูป $z(t) = x(t) + iy(t)$,$a \leq t \leq b$

ให้จุดเริ่มต้น คือ $z_0 = x_0 + iy_0$ และจุดปลาย $z_1 = x_1 + iy_1$



จะได้สมการเส้นตรงที่เชื่อมจุด z_0 ไปยัง z_1 คือ

$$z(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t + i[y_0 + (y_1 - y_0)t] \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

หรือ

$$z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

สำหรับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง z_0 รัศมี R จะได้สมการคือ

$$|z(t) - z_0| = R$$

$$= |Re^{it}| \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z(t) = z_0 + Re^{it}$$

หรือ $$z(t) = x_0 + R\cos t + i(y_0 + R\sin t)$$

ตัวอย่าง 1

จงเขียนเส้นโค้ง C_1 , C_2 , C_3 ซึ่งกำหนดสมการดังนี้

C_1 : $x = t$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$

C_2 : $x = 2 - t$, $y = 1$, $1 \leq t \leq 2$

C_3 : $x = 0$, $y = 3 - t$, $2 \leq t \leq 3$

วิธีทำ

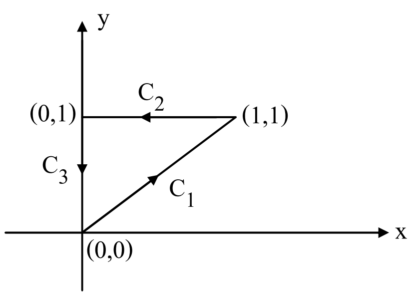
พิจารณา C_1 จะพบว่า $y = x$ และ $0 \leq t \leq 1$ ทำให้ ได้ว่าเป็นเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุด (0 , 0) และ (1 , 1)

พิจารณา C_2 เมื่อ t มีค่าเปลี่ยนจาก 1 ไปยัง 2 จะได้ส่วนของเส้นตรงซึ่งจุดเริ่มต้นคือ (1 , 1) และจุดสิ้นสุดคือ (0 , 1)

พิจารณา C_3 เมื่อ t มีค่าเปลี่ยนจาก 2 ไปยัง 3 จะได้ส่วนของเส้นตรงซึ่งจุดเริ่มต้นคือ (0 , 1) และจุดสิ้นสุดคือ (0 , 0)

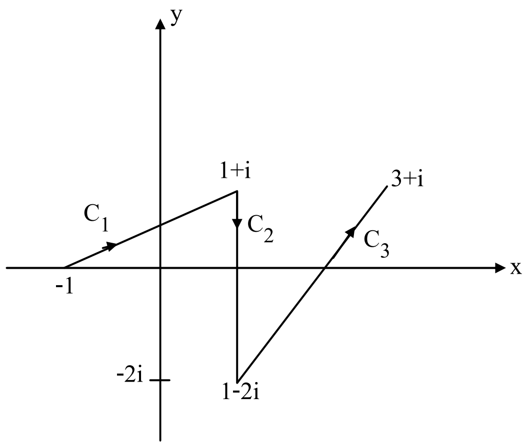
ซึ่งมีทิศทางดังรูป และ C_1 , C_2 , C_3 ต่อกันเป็นรูปสามเหลี่ยม นั่นคือ

$C = C_1 + C_2 + C_3$



ตัวอย่าง 2

จงหาสมการในรูปตัวแปรเสริม ที่แทนคอนทัวร์ C จาก –1 ถึง 3 + i ดังรูป



วิธีทำ คอนทัวร์ $C = C_1 + C_2 + C_3$

สูตรที่ใช้หาสมการเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุด z_0 และ z_1

คือ $z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)\, t \quad , \; 0 \le t \le 1$

พิจารณา C_1 : $z_1(t) = -1 + [1 + i - (-1)]t$

$= (-1 + 2t) + it \quad ; \; 0 \le t \le 1$

C_2 : $z_2(t) = 1 + i + [1 – 2i - (1+i)]\, t$

$= 1 + (1 - 3t)i \quad ; \; 0 \le t \le 1$

C_3 : $z_3(t) = 1 – 2i + [3 + i - (1 - 2i)]\, t$

$= 1 + 2t + (3t - 2)i \quad , \; 0 \le t \le 1$

แบบฝึกหัด 2.12

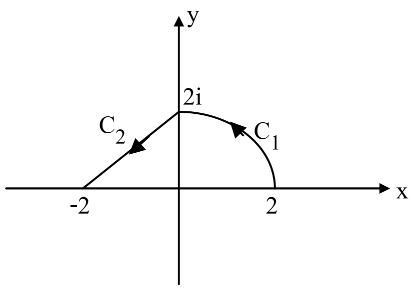
1. จงเขียนรูปเส้นโค้งต่อไปนี้

   1.1 $z(t) = t^2 - 1 + i(t + 4) \quad , \quad 1 \le t \le 3$

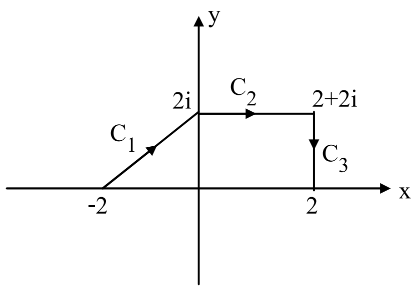
   1.2 $z(t) = \sin t + i \cos 2t \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

   1.3 $z(t) = 5 \cos t - i3 \sin t \;, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le 2\pi$

2. จงหาสมการตัวแปรเสริมของคอนทัวร์ $C = C_1 + C_2$ จากรูป ก. และคอนทัวร์ $C = C_1 + C_2 + C_3$ จากรูป ข.



รูป ก.



รูป ข.

คำตอบ

2. รูป ก. $C_1 : z_1(t) = 2 \cos t + i2 \sin t \quad , \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

   $C_2 : z_2(t) = -t + i(2 - t) \quad , \quad 0 \le t \le 2$

   รูป ข. $C_1 : z_1(t) = -2 + t + it \quad , \quad 0 \le t \le 2$

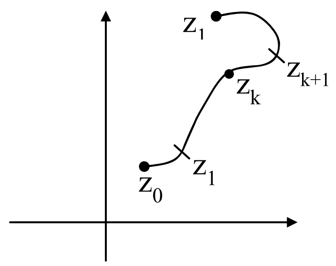
   $C_2 : z_2(t) = t + 2i \quad , \quad 0 \le t \le 2$

   $C_3 : z_3(t) = 2 + i(2 - t) \quad , \quad 0 \le t \le 2$

2.1.3 ปริพันธ์ตามคอนทัวร์

ปริพันธ์ตามคอนทัวร์ นิยามโดยใช้ลิมิตของผลบวกรีมันน์ ในรูป

$$\int_C f(z)dz \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \leftarrow$$



ซึ่งนักศึกษาสามารถค้นคว้าได้จากหนังสือขั้นสูง ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีหาปริพันธ์โดยใช้ความรู้ที่ผ่านมา ดังนี้

เพราะว่า $\quad z'(t) = x'(t) + iy'(t) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \uparrow$

ดังนั้น $\quad dz = z'(t)dt = [x'(t) + iy'(t)]\, dt \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \rightarrow$

ถ้าเราเขียน $\quad dz = dx + idy$ จะพบว่า

$\quad dx = x'(t)dt$ และ $dy = y'(t)dt \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \downarrow$

บทนิยาม ปริพันธ์ตามคอนทัวร์ C ของฟังก์ชัน f(z) กำหนดโดย

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \circ$$

เนื่องจาก $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x(t) + iy(t)$

$$\therefore \int_C f(z)dz = \int_a^b (u+iv)(x'+iy')dt$$

$$= \int_a^b (ux'-vy')dt + i\int_a^b (vx'+uy')dt \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \pm$$

หรือ

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy \qquad \text{.............................} \quad ''$$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า $\int_C \exp z dz$

C เป็นเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุด 0 และ $2 + \frac{i\pi}{2}$

วิธีทำ

$C : z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)\,t \quad , \quad 0 \le t \le 1$

$= (2 + \frac{i\pi}{2})t \quad , \quad 0 \le t \le 1$

$dz = (2 + \frac{i\pi}{2})\, dt$

$\therefore f(z(t)) = \exp(2t + \frac{i\pi}{2} t)$

$= e^{2t}(\cos \frac{\pi}{2} t + i\sin \frac{\pi}{2} t)$

$x'(t) = 2$ และ $y'(t) = \frac{\pi}{2}$

จากสมการ $\pm$

$$\therefore \int_C \exp z dz = \int_0^1 [2e^{2t}\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}e^{2t}\sin\frac{\pi}{2}t]dt + i\int_0^1 [2e^{2t}\sin\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}e^{2t}\cos\frac{\pi}{2}t]dt$$

เราหาค่าปริพันธ์ได้ โดยการหาปริพันธ์ ด้วยวิธีการแยกส่วน ซึ่งจะได้

$$\int_C \exp z dz = e^{2t}\cos\frac{\pi}{2}t + ie^{2t}\sin\frac{\pi}{2}t\,\Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$= e^{2}\cos\frac{\pi}{2} + ie^{2}\sin\frac{\pi}{2} - 1$$

$$= -1 + ie^{2}$$

ข้อสังเกต

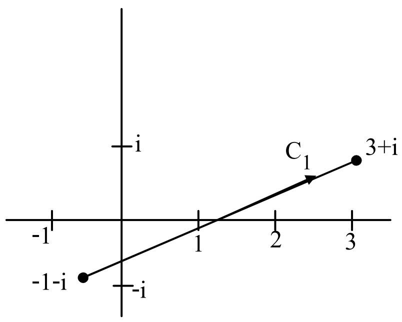
เราอาจจะหาสมการตัวแปรเสริมของ C ได้อีก ลักษณะคือ พิจารณาเส้นตรงที่เชื่อมจุด (0 , 0) และ $(2 , \frac{\pi}{2})$ ซึ่งเราหาสมการเส้นตรงนี้ได้จากสูตร $y - y_1 = m(x - x_1)$ ซึ่งจะได้ $y = \frac{\pi/2}{2}x$ หรือ $y = \frac{\pi}{4}x$ เป็นการสะดวกที่จะให้ $x = t$ ทำให้ $y = \frac{\pi}{4}t$, $0 \le t \le 2$ ฉะนั้นสมการตัวแปรเสริมคือ

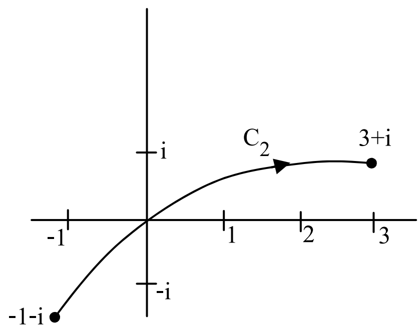
$$z(t) = t + i\frac{\pi}{4}t \quad , \quad 0 \le t \le 2$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า $\int\limits_{C_1} zdz$ และ $\int\limits_{C_2} zdz$

เมื่อ C_1 คือ ส่วนของเส้นตรงจากจุด –1 - i ถึง 3 + i และ C_2 คือ ส่วนของเส้นโค้งพาราโบลา $x = y^2 + 2y$ จากจุด -1 - i คือ 3 + i

วิธีทำ





พิจารณา C_1 ซึ่งเป็นเส้นตรงที่เชื่อมจุด (-1 , -1) และ (3 , 1) จะได้สมการคือ

$y + 1 = \frac{1+1}{3+1}(x+1)$ หรือ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ หรือ $x = 2y + 1$ ถ้าให้ $y = t$ จะได้ $x = 2t + 1$ ดังนั้นสมการตัวแปรเสริมของ C_1

$$C_1 \quad : \quad z(t) = 2t + 1 + it \quad ; \quad -1 \le t \le 1$$

$$dz = (2 + i)\, dt$$

ดังนั้น

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int zdz = \int_{-1}^{1} (2t+1+it)(2+i)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} [3t+2+i(4t+1)]dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (3t+2)dt + i\int_{-1}^{1} (4t+1)dt$$

$$= \frac{1}{6}(3t+2)^2 + \frac{i}{8}(4t+1)^2 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{25}{6} + \frac{25}{8}i - \frac{1}{6} - \frac{9}{8}i$$

$$= 4+2i$$

พิจารณา C_2 ซึ่งเป็นเส้นโค้งพาราโบลา $x = y^2+2y$ เชื่อมจุด (-1,-1) และ (3,1) ถ้าให้ $y = t$ จะได้ $x = t^2+2t$

$$\therefore C_2 : \quad z(t) = t^2 + 2t + it \quad , \quad -1 \le t \le 1$$

$$dz = (2t + 2 + i)dt$$

ดังนั้น

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_2} zdz = \int_{-1}^{1} (t^2+2t+it)(2t+2+i)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} [(2t^3+6t^2+3t)+i(3t^2+4t)]dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (2t^3+6t^2+3t)dt + i\int_{-1}^{1} (3t^2+4t)dt$$

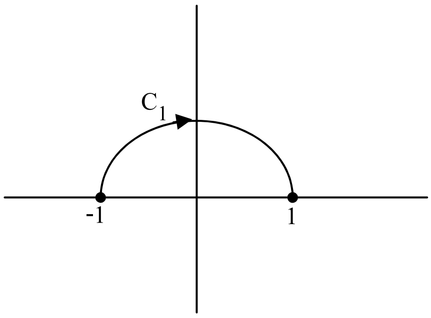
$$= \frac{1}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 + i(t^3 + 2t^2) \Big|_{-1}^{1}$$

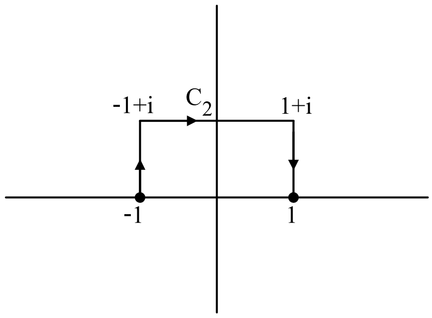
$$= 4 + 2i$$

ตัวอย่าง 3 **จงหาค่า** $\int_{C_1} \bar{z}dz$ **และ** $\int_{C_2} \bar{z}dz$

เมื่อ C_1 คือ เส้นรอบวงรูปครึ่งวงกลมจาก (-1,0) ถ้า (1,0) และ C_2 คือ คอนทัวร์ที่เกิดจากเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(-1,0) \rightarrow (-1,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,0)$

วิธีทำ





พิจารณา C_1 สมการตัวแปรเสริม คือ

$$C_1 : \quad z(t) = -\cos t + \sin t \quad , \quad 0 \le t \le \pi$$

$$\bar{z}(t) = -\cos t - i\sin t$$

$$dz = (\sin t + i\cos t)\, dt$$

$$\int_{C_1} \bar{z}dz = \int_0^{\pi} (-\cos t - i\sin t)(\sin t + i\cos t)dt$$

$$= \int_0^{\pi} -i(\sin^2 t + \cos^2 t)dt$$

$$= -i\int_0^{\pi} dt = -it\Big|_0^{\pi} = -\pi i$$

พิจารณา C_2 ซึ่งประกอบด้วย เส้นตรงสามเส้น ทำให้ เราเขียนสมการตัวแปรร่วมดังนี้

$$z_1(t) = -1 + it \ , \ dz_1 = idt \ , \ f(z_1(t)) = -1 - it$$

$z_2(t) = -1 + 2t + i$, $dz_2 = 2dt$, $f(z_2(t)) = -1 + 2t - i$

$z_3(t) = 1 + i(1 - t)$, $dz_3 = -idt$, $f(z_3(t)) = 1 - i(1 - t)$

ซึ่งทุกเส้นตรง $0 \le t \le 1$ ดังนั้น

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^1 f(z_1(t))dz_1 + \int_0^1 f(z_2(t))dz_2 + \int_0^1 f(z_3(t))dz_3$$

$$\int_{C_2} \bar{z}dz = \int_0^1 (-1 - it)idt + \int_0^1 (-1 + 2t - i)2dt + \int_0^1 [1 - i(1 - t)](-i)dt$$

$$= \int_0^1 [(-i + t) + (-2 + 4t - 2i) + (-i + t - 1)]dt$$

$$= \int_0^1 (6t - 3 - 4i)dt$$

$$= 3\int_0^1 (2t - 1)dt - 4i\int_0^1 dt$$

$$= 3(t^2 - t) - 4it\Big|_0^1 = -4i$$

สมบัติของปริพันธ์ตามคอนทัวร์

1. $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$
2. $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$
3. $\int_C (c + id)f(z)dz = (c+id) \int_C f(z)dz$
4. $\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$
5. $\int_C f(z)dz$ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าคอนทัวร์ C จะใช้สมการตัวแปรเสริมใดก็ตาม
6. $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$

สำหรับข้อ 2 , 3 และ 4 เราจะเห็นได้ง่ายว่าเป็นจริง

1. ให้ $C : z(t) = x(t) + iy(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$

เนื่องจาก $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$

ฉะนั้น $\int_{-C} f(z)dz = \int_b^a f(z(t))z'(t)dt$

$$= -\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

$$= -\int_C f(z)dz$$

5. สมมติว่าคอนทัวร์ C เขียนในรูปตัวแปรเสริมสองแบบ คือ

$C : z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) \qquad a \leq t \leq b$

$C : z_2(\tau) = x_2(\tau) + iy_2(\tau) \qquad \alpha \leq \tau \leq \beta$

โดยที่ฟังก์ชัน ϕ หาอนุพันธ์ได้ กำหนดโดย

$$\tau = \phi(t) \qquad \alpha = \phi(a) \qquad \beta = \phi(b)$$

และ

$$\phi'(t) > 0 \quad \text{สำหรับ} \quad a < t < b$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนคอนทัวร์ C แล้ว

$$\int_a^b f(z_1(t))z_1'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(z_2(\tau))z_2'(\tau)d\tau$$

6. เราเขียนค่าของปริพันธ์ในรูปแบบเชิงขั้ว

$$re^{i\theta} = \int_a^b f(t)dt$$

ดังนั้น

$$r = \int_a^b e^{-i\theta}f(t)dt$$

ส่วนจริงของสมการข้างบนคือ

$$r = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t))dt$$

แต่เราทราบว่า $\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t)) \leq |e^{-i\theta} f(t)| \leq |f(t)|$

ฉะนั้น

$$r = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t))dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

แต่เนื่องจาก $\qquad r = \left|\int_a^b f(t)dt\right|$

ฉะนั้นจึงได้สมบัติตามข้อ 6

ทฤษฎีบท ถ้า $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนคอนทัวร์ C แล้ว

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$$

เมื่อ L เป็นความยาวของคอนทัวร์ C และ M เป็นขอบเขตบนของ $|f(z)|$ บน C

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\left|\int_C f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \\
&\leq \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|dt \\
&\leq \int_a^b M|z'(t)|dt \\
&\leq M\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = ML
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4 จงแสดงว่า

1) $\left|\int_C (x^2 + iy^2)dz\right| \leq 2$ โดยที่ C คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุด –i ไปยัง i

2) $\left|\int_C \frac{1}{z^2}dz\right| \leq 2$ โดยที่ C คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อจากจุด –1+i ไปยังจุด 1+i

วิธีทำ

1) พิจารณา $|f(z)| = |x^2 + iy^2|$

$$\leq |x^2| + |iy^2| = |x^2| + |y^2|$$

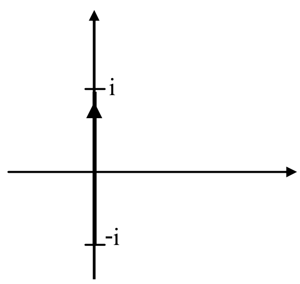
สมการเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด –i และ i คือ $z = iy \quad , \quad -1 \leq y \leq 1$

เพราะฉะนั้น ตามเส้นตรงจะพบว่า $|x^2| + |y^2| \leq 1$

นั่นคือ $|f(z)| \leq 1 = M$

ต่อไปพิจารณา $L = \int_C |z'(t)|dt = \int_C |i|\,dt$

$$= \int_{-1}^{1} dt = 2$$



นั่นคือ

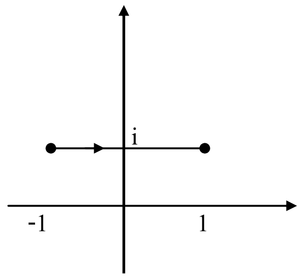
$$\left|\int_C (x^2 + iy^2)dz\right| \leq ML = 2$$

2) สมการเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด –1 + i และ 1 + i คือ

$$z = x + i \qquad -1 \leq x \leq 1$$

ดังนั้น $\quad 1 \le |z| \le \sqrt{2}$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{|z|^2} \le 1$$



นั่นคือ $|f(z)| = \left|\frac{1}{z^2}\right| \le 1 = M$

ในที่นี้ความยาวของคอนทัวร์ L มีค่าเท่ากับ 2

เพราะฉะนั้น

$$\left|\int_C \frac{1}{z^2}dz\right| \le ML = 2$$

แบบฝึกหัด 2.1.3

1. จงหาค่าของ $\int_C ydz$ จาก -i ถึง i ตามคอนทัวร์ต่อไปนี้

   1) C : รูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอด –i , -1 - i , -1 , i

   2) C : รูปครึ่งวงกลมด้านซ้ายของ $|z| = 1$ ทิศทางบวก

2. จงหาค่าของ $\int_{1+i}^{2+4i} z^2dz$ ตามคอนทัวร์

   1) พาราโบลา $x = t$, $y = t^2$

   2) เส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด 1 + i และ 2 + 4i

   3) เส้นตรงจากจุด 1 + i ถึง 2 + i และเส้นตรงจากจุด 2 + i ถึง 2 + 4i

3. จงหาค่าของ $\int_C (z^2 - z + 2)dz$ โดยที่ C คือ ครึ่งวงกลม ด้านบนของ $|z| = 1$ ทิศทางบวก

4. จงแสดงว่า

1) $\left|\int_C (x^2 + iy^2)dz\right| \leq \pi$ โดยที่ C คือ ครึ่งวงกลมด้านขวาของ $|z| = 1$ และ $\text{Re } z \geq 0$

2) $\left|\int_C \frac{1}{z^2+1}dz\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{5}}$ โดยที่ C คือ เส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด 2 และ 2 + i

คำตอบ

1. 1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{\pi}{2}$

2. 1) $-\frac{86}{3} - 6i$

   2) $-\frac{86}{3} - 6i$

   3) $-\frac{86}{3} - 6i$

3. $-\frac{14}{3}$

2.1.4 ทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชี

จากตัวอย่าง 2 ในหัวข้อ 2.1.3 จะพบว่า

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \qquad \text{.......................} \qquad \leftarrow$$

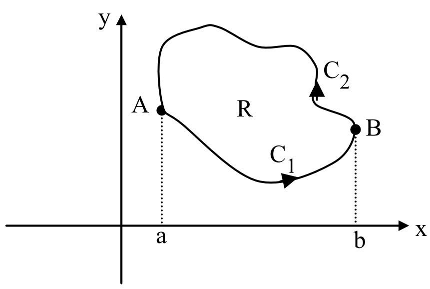
แต่จากตัวอย่าง 3 จะพบว่าไม่เป็นจริง ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาว่า เมื่อไรสมการ ← จึงจะเป็นจริงแต่ก่อนที่จะกล่าวถึงเรื่องดังกล่าว ขอทบทวนทฤษฎีบทของกรีน (Green's Theorem) เพื่อนำไปใช้ในโอกาสต่อไป

ทฤษฎีบทของกรีน

ให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวมีทิศทางบวก และให้ R เป็นโดเมนที่มีขอบเขตในคอนทัวร์ C ถ้า P(x,y) และ Q(x,y) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่ง P_x , P_y , Q_x และ Q_y เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน R แล้ว

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]dxdy$$

พิสูจน์



ให้ R เป็นบริเวณที่มีขอบเขตโดยคอนทัวร์ C = $C_1 + C_2$ โดย

C_1 : y = $g_1(x)$ $\quad a \le x \le b$

และ C_2 : y = $g_2(x)$ $\quad a \le x \le b$

พิจารณาปริพันธ์สองชั้น

$$\iint_R P_y(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y(x,y)dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \Big[P(x,y) \Big]_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dx$$

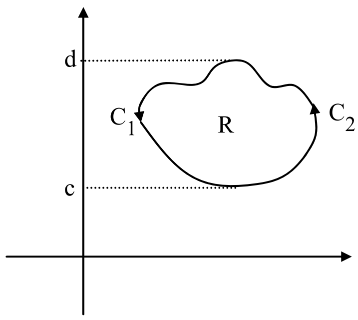
$$= \int_a^b P(x, g_2(x))dx - \int_a^b P(x, g_1(x))dx$$

$$= -\int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_b^a P(x, g_2(x))dx$$

$$= -\left[\int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx \right]$$

$$= -\int_C P(x,y)dx \qquad \text{..............................} \uparrow$$

ในทำนองเดียวกัน ให้คอนทัวร์ $C = C_1 + C_2$



โดยที่ $C_1 : x = h_1(y) \qquad c \le y \le d$

แล้ว $C_2 : x = h_2(y) \qquad c \le y \le d$

$$\iint_R Q_x(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} Q_x(x,y)dx \right] dy$$

$$= \int_c^d [Q(h_2, y) - Q(h_1, y)]\, dy$$

$$= \int_d^c Q(h_1, y)dy + \int_c^d Q(h_2, y)dy$$

$$= \int_C Q(x,y)dy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \rightarrow$$

จากสมการ $\uparrow$ และ $\rightarrow$ จะได้

$$\int_C [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \iint_R [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]dxdy$$

ทฤษฎีบทโคชี-เกอร์ซาท (Cauchy-Goursat Theorem)

ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว R

ถ้า C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว ซึ่งอยู่ใน R แล้ว

$$\int_C f(z)dz = 0$$

พิสูจน์

เนื่องจาก

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

ใช้ทฤษฎีบทของกรีนกับส่วนจริง ของสมการข้างบน

โดย P = u และ Q = -v จะได้

$$\int_C (udx - vdy) = \iint_R (-v_x - u_y)dxdy$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับส่วนจินตภาพ

$$\int_C (vdx + udy) = \iint_R (u_x - v_y)dxdy$$

แต่ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ฉะนั้นสมการโคชี-รีมันน์ เป็นจริง ($u_x = v_y$ และ $u_y = -v_x$)

นั่นคือ

$$\int_C (udx - vdy) = 0$$

$$\int_C (vdx + udy) = 0$$

เพราะฉะนั้น $\int_C f(z)dz = 0$

หมายเหตุ สำหรับคอนทัวร์ปิด C ใดๆ เราอาจจะเขียน $\oint_C f(z)dz$ แทน $\int_C f(z)dz$

ตัวอย่าง 1

เนื่องจากฟังก์ชัน exp z , cos z , z^n เมื่อ $n \in I^+$ เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ ถ้าให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว ใดๆ จะพบว่า

$$\int_C \exp dz = 0$$

$$\int_C \cos z \, dz = 0$$

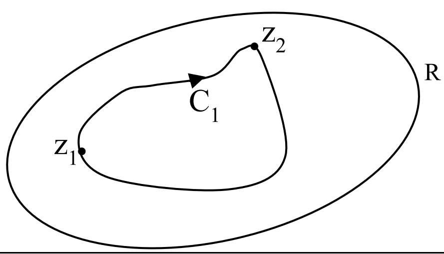
$$\int_C z^n \, dz = 0$$

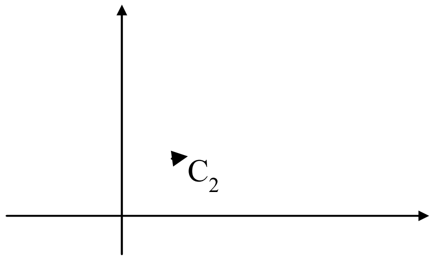
บทแทรก ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว R แล้ว

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นคอนทัวร์ใดๆ ใน R ที่เชื่อมจุด z_1 ไปยังจุด z_2

พิสูจน์





พิจารณาคอนทัวร์ C_1 และ C_2 ที่เชื่อมจากจุด z_1 ไปยัง z_2 ซึ่งอยู่ในบริเวณ R ดังรูป เราสามารถประกอบคอนทัวร์ C_1 และ C_2 ให้เป็นคอนทัวร์ปิด C_1 - C_2 ได้

จากทฤษฎีบทโคชี-เกอร์ซาท จะได้

$$\int_{C_1 - C_2} f(z)dz = 0$$

แต่

$$\int_{C_1 - C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz$$

$$= \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

ดังนั้น $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$

บทแทรก ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว R ถ้า z_0 เป็นจุดที่ตรึงในบริเวณดังกล่าว และถ้า C เป็นคอนทัวร์ที่เชื่อมจากจุดเริ่มต้น z_0 ไปยังจุด z แล้ว

$$F(z) = \int_C f(\xi)d\xi = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และ $F'(z) = f(z)$

(เราเรียก F(z) ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ f(z))

พิสูจน์ เราต้องแสดงว่า

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} \quad = \quad f(z)$$

นั่นคือ จะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $|\Delta z| < \delta$ แล้ว

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$$

จากนิยามของ F(z) จะได้

$$F(z+\Delta z) - F(z) \quad = \quad \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

$$= \quad \int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi$$

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} \quad = \quad \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi$$

$$= \quad \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z) + f(z)]d\xi$$

=

$$\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)]d\xi + \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\xi$$

$$= \quad \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)]d\xi + \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} d\xi$$

$$= \quad \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)]d\xi + f(z)$$

ดังนั้น

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) \quad = \quad \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)]d\xi$$

แต่ $f(\xi)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ บน R จึงมีความต่อเนื่องทุกๆ จุด ใน R นั่นคือ สำหรับ $\xi > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad |\xi - z| < \delta$$

จากสมการข้างต้น

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \quad = \quad \left|\frac{1}{\Delta z}\right|\left|\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)]d\xi\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\xi)-f(z)||d\xi|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon$$

บทแทรก ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว R และจุด z_0 และ z_1 อยู่ใน R แล้ว

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

เมื่อ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

พิสูจน์ เนื่องจาก F(z) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f (นั่นคือ $F'(z) = f(z)$)

ให้ G(z) เป็นอีกปฏิยานุพันธ์ของ f (นั่นคือ $G'(z) = f(z)$)

พิจารณาผลต่างของ F และ G

ให้ $H(z) = G(z) - F(z)$

จะได้ $H'(z) = G'(z) = F'(z) = 0$

ถ้า $H(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

แล้ว $u_x + iv_x = 0$

และ $v_y - iu_y = 0$

ทำให้ u_x , v_x , v_y , u_y เป็นศูนย์

นั่นคือ u และ v เป็นค่าคงตัวค่าจริง

เพราะฉะนั้น $H(z) = K$ ค่าคงตัว

และ $G(z) = F(z) + K$

ฉะนั้น $G(z_1) - G(z_0) = F(z_1) - F(z_0)$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า $\int_C (|z| - e^z \sin z^2 + \bar{z})dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = a$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\int_C (|z| - e^z \sin z^2 + \bar{z})dz = \int_C |z|dz - \int_C e^z \sin z^2 dz + \int_C \bar{z}dz$$

เนื่องจาก $e^z \sin z^2$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น

$$\int_C e^z \sin z^2 dz = 0$$

พิจารณา ปริพันธ์ $\int_C |z|\, dz$

เนื่องจาก $C : |z| = a$

ดังนั้น $\int_C |z|dz = a\int_C dz = 0$

พิจารณาปริพันธ์ที่สาม

$$z = ae^{it}, \quad dz = aie^{it}dt$$

$$\bar{z} = ae^{-it}$$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^{2\pi} ae^{-it} aie^{it} dt$$

$$= a^2 i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^2 i$$

$$\therefore \int_C (|z| - e^z \sin z^2 + \bar{z})dz = 2\pi a^2 I$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/6} \cos z e^{\sin z} dz$

วิธีทำ เนื่องจาก $e^{\sin z}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\cos z\, e^{\sin z}$

ดังนั้น

$$\int_0^{\pi/6} \cos z e^{\sin z} dz = e^{\sin z}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= e^{\sin\frac{\pi}{6}} - e^{\sin 0}$$
$$= e^{\frac{1}{2}} - 1$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $\int_{1-i}^{1+i} z^2 dz$

วิธีทำ เนื่องจากปฏิยานุพันธ์ของ z^2 คือ $\frac{z^3}{3}$ ดังนั้น

$$\int_{1-i}^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{1-i}^{1+i}$$
$$= \frac{1}{3}(1+i)^3 - \frac{1}{3}(1-i)^3$$
$$= \frac{1}{3}(-2+2i) - \frac{1}{3}(-2-2i) = \frac{4}{3}i$$

แบบฝึกหัด 2.1.4

จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int_2^{i\pi/2} \exp z dz$
2. $\int_i^{1+i} (z^2 + z^{-2}) dz$
3. $\int_1^i \frac{1+z}{z} dz$
4. $\int_0^{\pi-2i} \sin\frac{z}{2} dz$
5. $\int_{-1-i\pi/2}^{2+\pi i} z \exp z dz$
6. $\int_2^{2+i} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$

คำตอบ

1. $i - e^2$

2. $-\frac{7}{6}+\frac{i}{2}$

3. $-1 + i\left(\frac{\pi+2}{2}\right)$

4. 2 - i2 sin h1

5. $\frac{\pi}{2e}-e^{2}-i(e^{2}\pi+\frac{2}{e})$

6. $\ln\sqrt{10} - \ln 2 + i\tan^{-1}3 = \ln\sqrt{\frac{5}{2}} + i\tan^{-1}3$

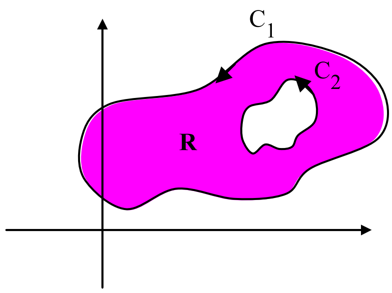
$= \ln\sqrt{\frac{5}{2}} + i\left(\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

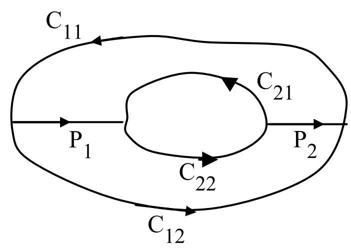
2.1.5 ทฤษฎีบทแผ่นวงแหวนเชิงเดียว

ทฤษฎีบท ให้ C_1 และ C_2 เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว ที่มีทิศเดียวกัน โดยที่ C_2

อยู่ภายใน C_1 ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ R ซึ่งมี C_1 และ C_2 เป็นขอบ ดังรูป แล้ว

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$





พิสูจน์

สร้างคอนทัวร์ P_1 และ P_2 เชื่อมระหว่างคอนทัวร์ C_1 และ C_2 ดังรูป ทำให้ $C_1 = C_{11} + C_{12}$ และ $C_2 = C_{21} + C_{22}$ และให้ P_1 มีทิศจาก C_1 ไปยัง C_2 และ P_2 มีทิศจาก C_2 ไปยัง C_1

จะพิจารณาพบว่า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณที่ประกอบด้วยคอนทัวร์ปิด $C_{11} + P_1 - C_{21} + P_2$ และบริเวณที่ประกอบด้วยคอนทัวร์ปิด $C_{-22} - P_1 + C_{12}$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทโคชี-เกอร์ซาท จะได้

$$\int_{C_{11}+P_1-C_{21}+P_2} f(z)dz = 0 \quad \text{และ} \quad \int_{-C_{22}-P_1+C_{12}-P_2} f(z)dz = 0$$

นั่นคือ

$$\int_{C_{11}+P_1-C_{21}+P_2} f(z)dz + \int_{-C_{22}-P_1+C_{12}-P_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_{11}} f(z)dz + \int_{P_1} f(z)dz + \int_{-C_{21}} f(z)dz + \int_{P_2} f(z)dz +$$

$$+ \int_{-C_{22}} f(z)dz + \int_{-P_1} f(z)dz + \int_{C_{12}} f(z)dz + \int_{-P_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_{11}} f(z)dz + \int_{C_{12}} f(z)dz - \int_{C_{21}} f(z)dz - \int_{C_{22}} f(z)dz = 0$$

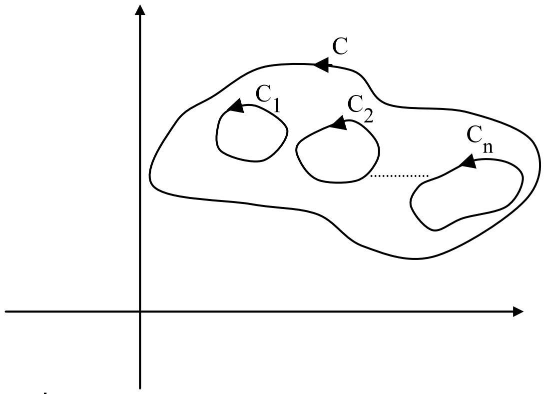
$$\int_{C_{11}+C_{12}} f(z)dz = \int_{C_{21}+C_{22}} f(z)dz$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

ทฤษฎีบทแผ่นวงแหวนหลายเชิง

ให้ C , C_1 , C_2 ,...C_n เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว และมีทิศทางเดียวกัน โดยที่ C_k ($k = 1 , 2 , \ldots , n$) อยู่ภายใน C และจุดภายใน C_k ไม่อยู่ใน C_j สำหรับ $k \neq j$ ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ R ที่มี C และ C_k เป็นขอบดังรูป แล้ว

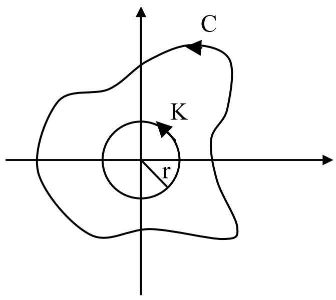
$$\int_{C} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz$$



ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $\int_C \frac{dz}{z}$ โดยที่ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว

วิธีทำ ฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกๆ จุด ยกเว้น z = 0 ดังนั้น ถ้า z = 0 อยู่ภายนอกคอนทัวร์ C จากทฤษฎีบทโคชี-เกอร์ซาท จะได้ว่า $\int_C \frac{dz}{z} = 0$

แต่ถ้า z = 0 อยู่ภายในคอนทัวร์ปิด C เราสามารถสร้างคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว K ให้เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ z = 0 รัศมี r และอยู่ภายในคอนทัวร์ C ดังรูป



ฉะนั้นฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวที่มี C และ K เป็นขอบ ทำให้

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_K \frac{dz}{z}$$

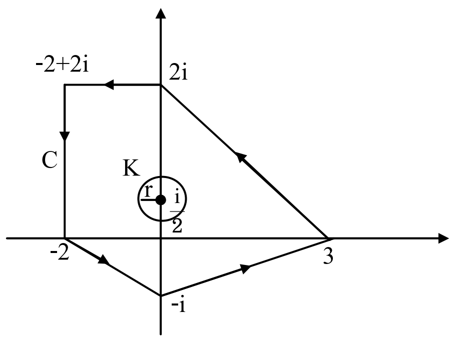
พิจารณา $K : z = re^{it}, \ 0 \le t \le 2\pi$

$$dz = ire^{it}dt$$

$$\int_K \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

ดังนั้น
$$\int_C \frac{dz}{z} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } z = 0 \text{ อยู่ภายใน } C \\ 2\pi i & \text{ถ้า } z = 0 \text{ อยู่ภายนอก } C \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า $\int_C \frac{dz}{z - \frac{i}{2}}$ โดยที่ C เป็นคอนทัวร์ปิด ตามรูป



วิธีทำ เนื่องจากคอนทัวร์ C ประกอบด้วยเส้นตรงห้าเส้น เราสามารถหาค่าปริพันธ์ตามเส้นตรงเหล่านี้ได้ แต่ในที่นี้เราสามารถใช้ทฤษฎีบทโคชี-เกอร์ซาท ได้โดยสร้างคอนทัวร์ปิด K ซึ่งเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $\frac{i}{2}$ รัศมีเล็กพอที่ทำให้ K อยู่ภายในคอนทัวร์ C ดังนั้น

$$\int_C \frac{dz}{z - \frac{i}{2}} = \int_K \frac{dz}{z - \frac{i}{2}}$$

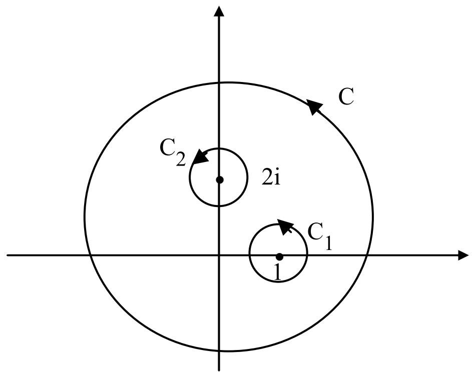
$$K \quad : \quad z = \frac{i}{2} + re^{it} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$dz = ire^{it}\frac{dt}{2\pi}$$

$$\therefore \int_K \frac{dz}{z-\frac{i}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่า $\int_C \left(\frac{4}{z-1}+\frac{3}{z-2i}\right)dz$ โดย C เป็นวงกลม $|z| = 4$ มีทิศทางบวก

วิธีทำ



เนื่องจากปริพัทธ์ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ z = 1 และ z = 2i

สร้างคอนทัวร์ C_1 และ C_2 โดยที่

$$C_1 \; : \; z = 1+e^{it} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$C_2 \; : \; z = 2i+e^{it} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_C \left(\frac{4}{z-1}+\frac{3}{z-2i}\right)dz = \int_{C_1} \left(\frac{4}{z-1}+\frac{3}{z-2i}\right)dz + \int_{C_2} \left(\frac{4}{z-1}+\frac{3}{z-2i}\right)dz$$

$$= 4\int_{C_1}\frac{dz}{z-1} + 3\int_{C_1}\frac{dz}{z-2i} + 4\int_{C_2}\frac{dz}{z-1} + 3\int_{C_2}\frac{dz}{z-2i}$$

เช่นเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว $\int_{C_1}\frac{dz}{z-1} = 2\pi i$ และ $\int_{C_2}\frac{dz}{z-2i} = 2\pi i$

สำหรับปริพันธ์ที่สองและปริพันธ์ที่สามโดยใช้ทฤษฎีบทโคชี-เกอร์ซาท จะมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\int_C \left(\frac{4}{z-1} + \frac{3}{z-2i} \right) dz \quad = \quad 14\pi i$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า $\displaystyle\int_C \frac{2i}{z^2+1} dz$

เมื่อ C : $|z - 1| = 5$ ทิศทางบวก

วิธีทำ โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{2i}{z^2+1} \quad = \quad \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}$$

สร้างคอนทัวร์ C_1 และ C_2 โดยที่

$$C_1 \ : \ |z - i| \quad = \quad \frac{1}{2}$$

$$C_2 \ : \ |z + 1| \quad = \quad \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{2i}{z^2+1} dz &= \int_C \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+i} \right) dz \\
&= \int_{C_1} \frac{dz}{z-i} - \int_{C_1} \frac{dz}{z+i} + \int_{C_2} \frac{dz}{z-i} - \int_{C_2} \frac{dz}{z+i} \\
&= 2\pi i - 0 + 0 - 2\pi i \\
&= 0
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.1.5

จงหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ตามคอนทัวร์ที่กำหนดในทิศทางบวก

1. $f(z) = \dfrac{dz}{z^2+2}$, $|z| = 2$

2. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 + 2}$, $|z - i| = 1$

3. $f(z) = (z^2 - z)^{-1}$, $|z - 1| = 2$

4. $f(z) = (2z - 1)(z^2 - z)^{-1}$, $|z| = 2$

5. $f(z) = (4z^2 + 4z - 3)^{-1}$, $|z| = 1$

คำตอบ

1. $4\pi i$
2. $2\pi i$
3. 0
4. $4\pi i$
5. $\dfrac{\pi i}{4}$

2.1.6 สูตรปริพันธ์ของโคชี

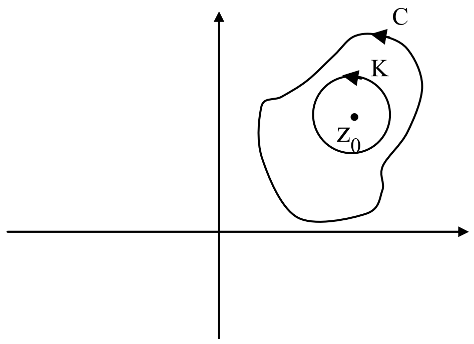
จากหัวข้อที่แล้วจะพบว่าทฤษฎีบทโคชี-เกอร์ซาท ช่วยให้เราหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนได้ง่ายขึ้น แต่ในหัวข้อนี้ สูตรปริพันธ์ของโคชีจะเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการหาค่าปริพันธ์ตามคอนทัวร์ปิดได้อย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

ทฤษฎีบท

ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณภายในและบนคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C ซึ่งมีทิศทางบวก ถ้า z_0 เป็นจุดที่อยู่ภายใน C แล้ว

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

พิสูจน์



สร้างคอนทัวร์ K รอบจุด z_0 ให้เล็กพอที่จะทำให้ K อยู่ภายใน C ดังรูป ฉะนั้น $\frac{f(z)}{z-z_0}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ในบริเวณที่มี C และ K เป็นขอบจากทฤษฎีบทโคชี-เกอร์ซาท

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \int_K \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \int_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz \quad \cdots\cdots\cdots \leftarrow$$

พิจารณาปริพันธ์ที่สองทางขวามือของสมการ ←

$$\int_k \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_k \frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)\cdot 2\pi i$$

พิจารณาปริพันธ์แรกทางขวามือของสมการ ←

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ฉะนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{เมื่อไรก็ตามที่} \quad |z - z_0| < \delta$$

สมมติว่าเราเลือกรัศมีของ K คือ r $< \delta$ (โดยที่ K ต้องอยู่ภายใน C) และเราทราบว่า

$$\left|\int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz\right| \le \int_K \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| |dz|$$

$$= \int_K \frac{\varepsilon}{r}|dz|$$

$$= \frac{\varepsilon}{r}2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

นั่นคือมอดูลัสของปริพันธ์ข้างต้น น้อยกว่าจำนวนบวก ε ใด ๆ แสดงว่าค่าของปริพันธ์ต้องเป็นศูนย์

ดังนั้น

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)2\pi i$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า $\int_C \frac{\exp z}{z - i}\,dz$ โดย $C : |z| = 2$ และมีทิศทางบวก

วิธีทำ เนื่องจาก $f(z) = \exp z$ เป็นฟังก์ชันเอนไทน์ และ $z_0 = i$ อยู่ภายในคอนทัวร์ C ฉะนั้นจากสูตรปริพันธ์ของโคชี จะได้

$$\int_C \frac{\exp z}{z - i}\,dz = 2\pi i f(i)$$

$$= \quad 2\pi i e^{i}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า $\int_C \frac{z^2+2z-2}{z-2}dz$, $C : |z| = 4$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(z) = z^2 + 2z - 2$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และ $z_0 = 2$ อยู่ภายในคอนทัวร์ C ฉะนั้น จากสูตรปริพันธ์ของโคชี จะได้

$$\int_C \frac{z^2+2z-2}{z-2}dz = 2\pi i\, f(2)$$

$$= 2\pi i[4 + 4 - 2]$$

$$= 12\pi i$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่า $\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$, $C : |z-1| = 3$

วิธีทำ $\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \int_C \left(\frac{z}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz$

$$= \int_C \frac{f_1(z)}{z+1}dz + \int \frac{f_2(z)}{z-1}dz$$

โดย $f_1(z) = z$, $f_2(z) = 1$

$f_1(z)$ และ $f_2(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ $z_0 = \pm 1$ อยู่ในคอนทัวร์ C ฉะนั้นจากสูตรปริพันธ์ของโคชี

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 2\pi i f_1(-1) + 2\pi i f_2(1)$$

$$= -2\pi i + 2\pi i = 0$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า $\int_C \frac{\exp z}{z(z+1)} dz$, $C : |z-1| = 3$

วิธีทำ $z_0 = 0$ และ $z_0 = 1$ อยู่ภายในคอนทัวร์ C

$$\int_C \frac{\exp z}{z(z+1)} dz = \int_C e^z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$= \int_C \frac{e^z dz}{z} - \int \frac{e^z dz}{z+1}$$

$$= 2\pi i(e^0 - e^{-1})$$

$$= 2\pi i \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

ทฤษฎีบท ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน บริเวณภายในและบนคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C ซึ่งมีทิศทางบวก ถ้า z_0 เป็นจุดที่อยู่ภายใน C แล้ว

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

สำหรับ $n = 0, 1, 2, \ldots$

พิสูจน์ เราสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 5 จงหาค่า $\int_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3}$, $C : |z| = 2$

วิธีทำ

ในที่นี้ $z_0 = 1$ อยู่ใน C และ $n = 2$

พิจารณา $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$

$$f'(z) = 10z - 3$$
$$f''(z) = 10$$
$$f''(1) = 10$$

ดังนั้น

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1)$$
$$= 10\pi i$$

ตัวอย่าง 6 จงหาค่า $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3}$, $C : |z - 3| = 2$

วิธีทำ ในที่นี้ $z_0 = 2$ อยู่ใน C

$f(z) = \dfrac{1}{z^3}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน C และ n = 1

ดังนั้น

$$\int_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3} = \int \frac{1/z^3}{(z-2)^2}\,dz$$
$$= 2\pi i f'(2)$$
$$= -\frac{3\pi i}{8}$$

ตัวอย่าง 7 จงหาค่า $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3}$, $C : |z - 1| = 2$

วิธีทำ สำหรับตัวอย่างนี้ เราไม่สามารถหาฟังก์ชันวิเคราะห์ในคอนทัวร์ C ได้ ดังนั้นโดยใช้แผ่นวงแหวนปิดหลายเชิง สร้างคอนทัวร์ C_1 และ C_2

$$C_1 : |z| = r_1 \text{ และ } C_2 : |z - 2| = r_2$$

โดยที่ C_1 และ C_2 อยู่ภายใน C

ดังนั้น

$$\int_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3} = \int_{C_1} \frac{dz}{(z-2)^2 z^3} + \int_{C_2} \frac{dz}{(z-2)^2 z^3}$$

$$= \int_{C_1} \frac{(z-2)^{-2}}{z^3} dz + \int_{C_2} \frac{z^{-3}}{(z-2)^2} dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{f_1(z)}{z^3} dz + \int_{C_2} \frac{f_2(z)}{(z-2)^2} dz$$

โดย $f_1(z) = (z-2)^{-2}$, $f_2(z) = z^{-3}$

$f_1'(z) = -2(z-2)^{-3}$, $f_2'(z) = -3z^{-4}$

$f_1''(z) = 6(z-2)^{-4}$, $f_2'(2) = -\frac{3}{16}$

$f_1''(0) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

นั่นคือ

$$\int_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3} = \frac{2\pi i}{2!} f_1''(0) + \frac{2\pi i}{1!} f_2'(2)$$

$$= \pi i \left(\frac{3}{8}\right) + 2\pi i\left(-\frac{3}{16}\right)$$

$$= 0$$

แบบฝึกหัด 2.1.6

จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int_C \frac{\exp(z^2)}{(z-i)^4} dz$, $C : |z| = 2$

2. $\int_C \frac{\exp(i\pi z)}{2z^2 - 5z + 2} dz$, $C : |z| = 1$

3. $\int_C (z+1)^{-1}(z-1)^{-1} dz$, $C : |z-1| = 1$

4. $\int_C z^{-4} \sin z dz$, $C : |z| = 1$

5. $\int_C z^{-2}(z^2 - 16)^{-1} \exp z dz$

1) $C : |z| = 1$

2) $C : |z-4| = 1$

6. $\int_C (z^2 + 1)^{-1} dz$

1) $C : |z-i| = 1$

2) $C : |z+i| = 1$

คำตอบ

1.	$-\frac{4\pi}{3e}$	2.	$\frac{2\pi}{3}$	3.	πi	4.	$-\frac{\pi i}{3}$
5.	1) $-\frac{\pi i}{8}$	2) $\frac{e^4 \pi i}{64}$		6.	1) π	2) $-\pi$	

2.2 อนุกรมอนันต์

สมมติว่าเรามีอนุกรมอนันต์ที่แต่ละพจน์เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูป

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \leftarrow$$

พิจารณาผลบวกย่อย s_1 , s_2 , …s_n โดยที่

$$s_1 = z_1$$

$$s_2 = z_1 + z_2$$

$$s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

อนุกรมอนันต์ $\leftarrow$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเชิงซ้อน S ซึ่ง

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

เรียกจำนวน S ว่าผลบวกของอนุกรม นั่นคือ

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ถ้าอนุกรมไม่ลู่เข้า เราเรียกว่า ลู่ออก และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ จะเรียกว่า ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ลู่เข้า

2.2.1 การลู่เข้าของอนุกรม

ทฤษฎีบท ให้ $z_n = x_n + iy_n$ และ $S = U + iV$ แล้ว

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$$

ก็ต่อเมื่อ

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{และ} \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

ทฤษฎีบท

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าแล้ว $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in(-1)^n}{n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{i(-1)^n}{n}\right]$

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ และ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+in(-1)^n}{n^2}$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 2 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+i}{n}$ ลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+i}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+i\frac{1}{n}\right]$

และเราทราบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ลู่ออก ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+i}{n}$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 3 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n$ ลู่ออก

วิธีทำ ในที่นี้ $z_n = (1 + i)^n$

และ $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \lim_{n\to\infty}|\sqrt{2}|^n = \infty$

ฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$

จากทฤษฎีบทข้างต้น ทำให้ได้ว่าอนุกรมนี้ลู่ออก

ทฤษฎีบท

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ ลู่เข้า แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ ลู่เข้า

จากทฤษฎีบทข้างต้น ช่วยให้เราตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมเชิงซ้อนได้ง่ายขึ้น เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ ฉะนั้นเราสามารถใช้การทดสอบของอนุกรมจำนวนจริงได้

ทฤษฎีบทการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ ซึ่งลู่เข้า ถ้า $|z_n| \le A_n$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 4 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$ ลู่เข้า

วิธีทำ เนื่องจาก $|z_n| = \left|\frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}\right|$

$$= \frac{1}{n^2} = A_n$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

โดยการทดสอบเปรียบเทียบ ฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบทการทดสอบด้วยอัตราส่วน

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = L \quad \text{แล้ว}$$

อนุกรมจะลู่เข้า ถ้า $L < 1$ และอนุกรมจะลู่ออก ถ้า $L > 1$

ตัวอย่าง 5 จงแสดงว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!}$ ลู่เข้า

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วน

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(1-i)^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{(1-i)^{n}}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!|1-i|}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|1-i|}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0 = L$$

เนื่องจาก $L < 1$ ดังนั้นอนุกรมนี้ลู่เข้า

ตัวอย่าง 6 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{z^n}$ ลู่เข้าเมื่อ $|z\text{-}i| < 2$

วิธีทำ โดยใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วน

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(z-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{(z-1)^{n}}{2^{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z-i|}{2} = \frac{|z-i|}{2} = L$$

ซึ่งอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $L < 1$

นั่นคือ $\frac{|z-i|}{2} < 1$

$|z - i| < 2$

และอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|z - i| > 2$

ทฤษฎีบทการทดสอบโดยราก

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมเชิงซ้อน ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ แล้ว

อนุกรมจะลู่เข้า ถ้า $L < 1$ และลู่ออก ถ้า $L > 1$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n$ ลู่ออก

วิธีทำ โดยใช้การทดสอบโดยราก

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|1+i|^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\sqrt{2})^n} = \sqrt{2} = L\end{aligned}$$

เนื่องจาก $L > 1$ ดังนั้นอนุกรมลู่ออก

แบบฝึกหัด 2.2.1

1. จงใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วนทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n2^n}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}$ 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{2n}}{(2n+1)!}$

2. จงใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วนหาบริเวณที่อนุกรมลู่เข้า

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(3+4i)^n}$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(3+4i)^n}$

2.2.2 อนุกรมเทเลอร์

นิยาม อนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0+a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2+\ldots \qquad \leftarrow$$

เรียกว่า อนุกรมกำลัง เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ค่าคงตัวเชิงซ้อน a_0 , a_1 , … เรียกสัมประสิทธิ์ของอนุกรม และค่าคงตัวเชิงซ้อน z_0 เรียกว่า จุดศูนย์กลางของอนุกรม นอกจากนี้เรายังเรียกอนุกรมนี้ว่า อนุกรมกำลังรอบจุด z_0

จากอนุกรม $\leftarrow$ จะพบว่าอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $z = z_0$ บริเวณที่อนุกรมลู่เข้าคือ เซต ของจุด z ซึ่งอนุกรมลู่เข้าและสามารถพิสูจน์ได้ว่า อนุกรมกำลังลู่เข้าในบริเวณ $|z - z_0| < R$ และลู่ออกในบริเวณ $|z - z_0| > R$ เรียก R ว่า รัศมีของการลู่เข้า

ตัวอย่าง 1 จงหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{n!}$

1.2 $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z-i)^n$

1.3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n z^n}{n+1}$

วิธีทำ 1.1 ใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วน สำหรับ z $\neq$ 1 - i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z-1+i)^{n+1} n!}{(z-1+i)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z-1+i)}{(n+1)} \right| = 0 = L$$

เนื่องจาก $L < 1$ ดังนั้น อนุกรมลู่เข้าทุกค่า z นั่นคือ รัศมีการลู่เข้า คือ R = ∞

1.2 ใช้การทดสอบด้วยราก

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\left| n^n (z-i)^n \right| \right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n|z-i| = \infty = L$$

แต่ $L > 1$ ดังนั้นอนุกรมลู่ออกทุก $z \neq i$

1.3 ใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วน

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1} z^{n+1} (n+1)}{2^n z^n (n+2)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2|z| \frac{n+1}{n+2} = 2|z| = L$$

ซึ่งจะลู่เข้าเมื่อ $L = 2|z| < 1$

หรือ $|z| < \frac{1}{2}$

นั่นคือ รัศมีการลู่เข้า $R = \frac{1}{2}$

ทฤษฎีบท สำหรับอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

1) ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$

2) ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}} = R$ แล้ว รัศมีการลู่เข้าคือ R

บทนิยาม

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 แล้ว อนุกรม

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)(z-z_0)^2}{2!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad \leftarrow$$

เรียกว่า อนุกรมเทเลอร์ของ f(z) รอบ ๆ จุด z_0 และเมื่อ $z_0 = 0$ เราจะเรียกว่า อนุกรม แมคลอริน

ทฤษฎีบท

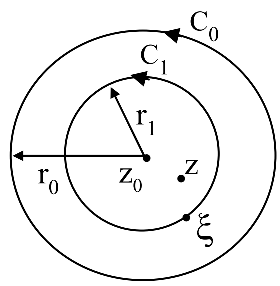
ถ้าฟังก์ชัน f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในวงกลม C_0 ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี r_0 แล้วอนุกรมเทเลอร์ $\leftarrow$ จะลู่เข้า f(z) เมื่อ $|z - z_0| < r_0$ นั่นคือ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

พิสูจน์ สร้างวงกลม C_1 จุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี $r_1 < r_0$ โดยที่ z อยู่ภายใน C_1 ให้ ξ เป็นจุดใดๆ บน C_1

ดังนั้น จากสูตรปริพันธ์ของโคชี

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)}d\xi \quad \text{..................} \uparrow$$



และ $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$

พิจารณา $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)}$

$$= \frac{1}{(\xi - z_0)}\left\{\frac{1}{1 - \left[\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right]}\right\}$$

จาก $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

$$= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

หรือ $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

ดังนั้น $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n(\xi - z)}$

แทนค่าในสมการ ↑

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi \quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}d\xi + \frac{(z-z_0)}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^2}d\xi$$

$$+ \ldots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^n} + R_n$$

โดยที่ $R_n = \dfrac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^n(\xi-z)}$

ใช้สูตรปริพันธ์โคชี จะได้

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + R_n$$

หรือ

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + R_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad *$$

ให้ $|z - z_0| = r$ และ $|\xi - z_0| = r_1$ และ $r_1 > r$

$$\therefore |\xi - z| = |(\xi - z_0) - (z - z_0)|$$

$$\geq |\xi - z_0| - |z - z_0| = r_1 - r$$

ให้ $|f(\xi)| \leq M$ บน C_1

ดังนั้น $|R_n| \leq \dfrac{r^n}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{M}{r_1^n(r_1 - r)}r_1 d\theta \quad (\because \ \xi = r_1 e^{i\theta})$

$$= \frac{Mr_1}{r_1 - r}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

แต่ $\dfrac{r}{r_1} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n = 0$

ดังนั้น $|R_n| \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

นั่นคือ $R_n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

จากสมการ * ใส่ลิมิต $n \rightarrow \infty$ จะได้

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \infty$$

ข้อสังเกต

1. ฟังก์ชัน f(z) สามารถกระจายเป็นอนุกรมกำลังรอบจุดที่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์
2. รัศมีการลู่เข้าของอนุกรมเทเลอร์รอบจุด z_0 คือ ระยะห่างที่สั้นที่สุดระหว่างจุด z_0 และจุดเอกฐานของ f(z)

ตัวอย่าง 1 จงกระจายอนุกรมแมคลอรินสำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้

1) e^z 2) $\sin z$

3) $\frac{1}{i-z}$

วิธีทำ 1) $f(z) = e^z$

$\therefore f^{(n)}(z) = e^z$, $f^{(n)}(0) = 0$

จากอนุกรมเทเลอร์

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$\therefore e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

เนื่องจาก e^z เป็นฟังก์ชันเอนไทน์ ดังนั้นรัศมีการลู่เข้าคือ ∞

$$\therefore e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots \qquad |z| < \infty$$

2) $f(z) = \sin z$, $f(0) = 0$

$f'(z) = \cos z$, $f'(0) = 1$

$f''(z) = -\sin z$, $f''(0) = 0$

$f'''(z) = -\cos z$, $f'''(0) = -1$

$f^{(2n)}(z) = (-1)^n \sin z$, $f^{(2n)}(0) = 0$

$f^{(2n+1)} = (-1)^n \cos z$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$

จากอนุกรมเทเลอร์

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$\therefore \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \quad |z| < \infty$$

3) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $f(0) = 1$

$f'(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$, $f'(0) = 1$

$f''(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3}$, $f''(0) = 2!$

$f'''(z) = \dfrac{2 \bullet 3}{(1-z)^4}$, $f'''(0) = 3!$

$\therefore f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}}$, $f^{(n)}(0) = n!$

จากอนุกรมเทเลอร์

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= 1 + z + z^2 + \ldots$$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{1-z}$ มี $z = 1$ เป็นจุดเอกฐาน

ฉะนั้น รัศมีการลู่เข้าคือ ระยะระหว่าง 0 และ 1 ซึ่งคือ 1

$\therefore \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots \quad |z| < 1$

อนุกรมเมคลอรินพื้นฐานที่ควรรู้จักมีดังนี้

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$

2. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$

3. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$

4. $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$

5. $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$

6. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$

7. $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad |z| < 1$

การแทนค่าช่วยให้เราสามารถกระจายอนุกรมได้มีประสทธิภาพมากขึ้น ถ้า $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าสำหรับ $|z| < R$ และ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $|z| < R$ แล้ว $f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(z)]^n$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าใน $|g(z)| < R$

ตัวอย่าง 2 จงกระจายอนุกรมของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) e^{z^2} รอบจุด 0 2) e^z รอบจุด $z = a$

3) $\frac{1}{2-4z}$ รอบจุด 0 4) $\frac{1}{z^2-z-6}$ รอบจุด $z = -1$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{n!}$ $|z| < \infty$

ดังนั้น $e^{z^{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^{2})^{n}}{n!}$ $|z| < \infty$

$= \frac{z^{2n}}{n!}$

2) เนื่องจาก $e^{z} = e^{z-a+a} = e^{a}e^{z-a}$

$= e^{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^{n}}{n!}$ $|z - a| < \infty$

3) $\frac{1}{2-4z} = \frac{1}{2(1-2z)}$

จาก $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n}$ $|z| < 1$

$\frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^{n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n} z^{n}$ $|z| < \frac{1}{2}$

ดังนั้น

$\frac{1}{2-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} z^{n}$ $|z| < \frac{1}{2}$

4) $\frac{1}{z^{2}-z-6} = \frac{1}{(z-3)(z+2)}$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2} \right)$

$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z+1-4} - \frac{1}{z+1+1} \right]$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{-4}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z+1)}{4}}-\frac{1}{1+(z+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[\sum_{n=0}^{\infty}-\left(\frac{z+1}{4}\right)^n-4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4^n}-4(-1)^n\right)(z+1)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+(-4)^{n+1}}{4^n}(z+1)^n$$

รัศมีการลู่เข้าคือ ระยะห่างจาก $z = -1$ ไปยัง $z = -2$ คือ 1

แบบฝึกหัด 2.2.2

1. จงหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

   1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n z^n$

   2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2n+1}$

   3) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{(z-i)^n}{n!}$

   4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4iz-2)^n}{2^n}$

   5) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+i)^4(z+6)^n$

2. จงกระจายอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยมีจุดศูนย์กลางตามที่กำหนดให้

   1) e^{2z} , $z_0 = 2i$

   2) $\cos z$, $z_0 = -\frac{\pi}{2}$

   3) $\frac{1}{3-z}$, $z_0 = 2i$

4) $\dfrac{1}{z^2 - z - 6}$, $z_0 = 1$

5) $\dfrac{z+3}{z^2 - 5z + 4}$, $z_0 = 2$

6) $\dfrac{1-z}{z-2}$, $z_0 = 1$

คำตอบ

1. 1) 2 2) 1 3) ∞ 4) $\dfrac{1}{2}$ 5) 1

2. 1) $e^{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}(z+2i)^n$ $|z - 2i| < \infty$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z+\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $|z + 2i| < \infty$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{(3-2i)^{n+1}}$, $|z\text{-}2i| < \sqrt{13}$

4) $-\dfrac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^n - \dfrac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{z-1}{3}\right)^3$, $|z - 1| < 2$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\dfrac{4}{3}(-1)^{n+1} - \dfrac{7}{6}\dfrac{1}{2^n}\right\}(z-2)^n$, $|z - 2| < 1$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n+1}$, $|z - 1| < 1$

2.2.3 อนุกรมลอเรนต์

สมมติ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ $0 < |z| < r$ แต่ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z = 0 แล้ว f(z) ไม่สามารถกระจายเป็นอนุกรมแมคลอรินได้ เช่น $f(z) = z^{-2}\sin z$ อย่างไรก็ตามเราสามารถกระจายอนุกรมของ sin z ได้ จากนั้นนำ z^2 มาหารแต่ละพจน์ จะได้อนุกรมในรูป

$$f(z) = z^{-2}\sin z = \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} \ldots$$

ซึ่งเรียกว่า อนุกรมลอเรนต์

ทฤษฎีบท

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในแผ่นวงแหวนปิด $r_2 \le |z - z_0| \le r_1$ แล้ว f(z) สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมลอเรนต์

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

โดยที่

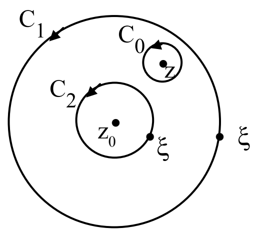
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}}\,d\xi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

เมื่อ $C_1 : |z - z_0| = r_1$ และ $C_2 : |z - z_0| = r_2$ มีทิศทางเป็นบวก

พิสูจน์ ให้ z เป็นจุดใดๆ ที่ตรึงและอยู่ในแผ่นวงแหวนปิด $r_2 \le |z - z_0| \le r_1$ ให้ ξ เป็นตัวแปรในการหาปริพันธ์ตาม C_1 และ C_2 สร้างวงกลม C_0 ล้อมรอบจุด z และให้อยู่ภายในแผ่นวงแหวนเปิด จากทฤษฎีบทแผ่นวงแหวนหลายเชิง

$$\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi + \int_{C_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$



แต่จากสูตรอินทิกรัลโคชี $\displaystyle\int_{C_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = 2\pi i\, f(z)$

ดังนั้น

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \leftarrow$$

เช่นเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรื่องอนุกรมเทเลอร์

บน C_1 $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)}$$

$$= \frac{1}{(\xi - z_0)}\left\{\frac{1}{1-\frac{(z-z_0)}{(\xi-z_0)}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z-z_0}{(\xi-z_0)^2} + \ldots + \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^n(\xi-z)}$$

$$\therefore\ I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)}d\xi + \frac{z-z_0}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^2}d\xi + \ldots$$

$$+ \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^n}d\xi + R_n$$

$$= a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + R_n$$

โดย $R_n = \dfrac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^n(\xi-z)}$ .... $\uparrow$

บน C_2 $|\xi - z_0| < |z - z_0|$

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)}$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)}\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{z-z_0} + \frac{\xi-z_0}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^n(z-\xi)}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\xi)}{z-z_0}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{(\xi-z_0)}{(z-z_0)^2}f(\xi)d\xi + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{(\xi-z_0)^{n-1}f(\xi)}{(z-z_0)^n}d\xi + S_n$$

$$= b_1(z - z_0)^{-1} + b_2(z - z_0)^{-2} + \ldots + b_n(z - z_0)^{-n} + S_n$$

โดย $S_n = \frac{1}{2\pi i(z-z_0)^n}\int_{C_1}\frac{(\xi-z_0)^n f(\xi)}{z-\xi}d\xi$ .... $\rightarrow$

ถ้า $|z - z_0| = r$ แล้ว $r_2 < r < r_1$

$R_n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

ให้ $|f(\xi)| < M$ บน C_2

ดังนั้น $|S_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\frac{r_2^n n}{r-r_2}r_2 d\theta$ $\quad (w = r_2e^{i\theta})$

$$= \frac{Mr_2}{r-r_2}\left(\frac{r_2}{r}\right)^n$$

$\therefore$ $|S_n| \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เนื่องจาก $r_2 < r$

$S_n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

แทนค่า R_n และ S_n จากสมการ $\uparrow$ และ $\rightarrow$ ในสมการ $\leftarrow$ แล้วใส่ลิมิต $n \rightarrow \infty$ จะได้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน C_2 อนุกรมลอเรนต์ จะกลายเป็นอนุกรมเทเลอร์ เพราะว่า $b_n = 0$ ทุก n

2. ส่วนแรกของอนุกรมลอเรนต์ คือ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ เรียกว่า ส่วนวิเคราะห์

และส่วนหลังคือ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$ เรียกว่า ส่วนหลัก

ตัวอย่าง 1 จงกระจายอนุกรมลอเรนต์รอบจุด $z = 0$

1) $e^{\frac{1}{z}}$, $0 < |z|$ 2) $\frac{1}{1-z}$, $1 < |z|$

วิธีทำ 1)

$$\because \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$$

ดังนั้น สำหรับ $z \neq 0$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \qquad 0 < |z|$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$$

2) เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$, $|w| < 1$

แต่ $1 < |z|$ เราจึงไม่สามารถกระจายอนุกรมโดยแทน $w = z$ ได้

แต่ถ้าให้ $w = \frac{1}{z}$ จะสามารถใช้ได้ เพราะว่า $|w| = \frac{1}{|z|} < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(\frac{1}{z} - 1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} \qquad 1 < |z|$$

$$= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots \qquad 1 < |z|$$

ตัวอย่าง 2 จงกระจายอนุกรมลอเรนต์ของ $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ ในบริเวณ

1) $|z+1| < 1$ 2) $1 < |z+1| < 2$

3) $|z+1| > 2$

วิธีทำ โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

1)

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+1-1} + \frac{1}{1-(z+1)+1} \\
&= \frac{-1}{1-(z+1)} + \frac{1}{2-(z+1)} \\
&= \frac{-1}{1-(z+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{(z+1)}{2}} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n \qquad |z+1| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z+1)^n \qquad |z+1| < 1
\end{aligned}$$

2) เนื่องจาก $1 < |z+1| < 2$

ดังนั้น $\dfrac{1}{|z+1|} < 1$ และ $\dfrac{|z+1|}{2} < 1$

จาก

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+1-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{z+1)}{2}} \\
&= \frac{1}{(z+1)(1-\frac{1}{z+1})} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{z+1}{2})}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$$

3) จาก $|z+1| > 2$ ดังนั้น $\frac{2}{|z+1|} < 1$ และ $\frac{1}{|z+1|} < \frac{1}{2} < 1$

จาก f(z) $= \frac{1}{z+1-1} + \frac{1}{2-(z+1)}$

$$= \frac{1}{(z+1)(1-\frac{1}{z+1})} + \frac{1}{(z+1)(\frac{2}{z+1}-1)}$$

$$= \frac{1}{(z+1)(1-\frac{1}{z+1})} - \frac{1}{(z+1)(1-\frac{2}{z+1})}$$

$$= \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n - \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(1-2^n)\frac{1}{(z+1)^{n+1}}$$

แบบฝึกหัด 2.2.3

1. จงหาอนุกรมลอเรนต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ในบริเวณที่กำหนด

   1) $\frac{1}{1-z}$, $|z - i| > \sqrt{2}$

   2) $\frac{1-z}{z-2}$, $|z - 1| > 1$

   3) $\frac{1-z}{z-3}$, $|z - 1| > 2$

2. จงกระจายอนุกรมโลรองต์ของ $\frac{1}{(1-z)(z-2)}$ ในบริเวณ

1) $1 < |z| < 2$ 2) $|z| > 2$

3. จงกระจายอนุกรมของ $f(z) = \dfrac{5z+2i}{z(z+i)}$ ในแผ่นวงแหวน $1 < |z - i| < 2$

4. จงกระจายอนุกรมต่อไปนี้รอบจุด $z = 0$

1) $\dfrac{e^z - 1}{z}$ 2) $\dfrac{\sin z}{z}$

3) $\dfrac{\cos z^2 - 1}{z^2}$ 4) $\dfrac{e^z - (z+1)}{z^2}$

คำตอบ

1. 1) $-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-i)^{n-1}}{(z-i)^n}$ 2) $-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(z-1)^n}$

3) $-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(z-1)^n}$

2. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^{n+1}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-2^n}{2^{n+1}} z^n$

3. $2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n i^n}{(z-i)^{n+1}} + 3\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (z-i)^n}{(2i)^{n+1}}$

4. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{n!}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{4n-2}$ 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^{n-2}}{n!}$

2.3 ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง

สูตรปริพันธ์โคชีที่ได้เรียนมาช่วยให้เราสามารถหาค่าปริพันธ์ตามคอนทัวร์ได้สะดวกขึ้น ในหัวข้อนี้จะได้ศึกษาวิธีการที่สะดวกยิ่งขึ้นในการหาค่าปริพันธ์ดังกล่าว

2.3.1 การจำแนกชนิดของจุดเอกฐานเอกเทศ

จุด z_0 เป็นจุดเอกฐานของ f(z) ก็ต่อเมื่อ f(z) ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 แต่ทุกๆ ย่านจุดของจุด z_0 จะประกอบด้วยอย่างน้อยหนึ่งจุด ซึ่งทำให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เช่น $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกๆ จุด $z \neq 1$ แต่ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ $z_0 = 1$ ดังนั้น $z_0 = 1$ เป็นจุดเอกฐาน

g(z) = Log z เราทราบว่าเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกๆ จุด ยกเว้นศูนย์และแกน x ที่เป็นลบ ดังนั้นจุดศูนย์และจุดที่อยู่บนแกน x ที่เป็นลบ จึงเป็นจุดเอกฐาน

บทนิยาม

จุด z_0 เรียกว่า จุดเอกฐานแบบเอกเทศของ f(z) ถ้ามีบางย่านจุดของ z_0 ที่ไม่ได้ประกอบด้วยจุดเอกฐานจุดอื่นๆ

ข้อสังเกต

ถ้าฟังก์ชันประกอบด้วยจุดเอกฐานเป็นจำนวนจำกัดแล้ว จุดเอกฐานเหล่านั้นจะ

เป็นจุดเอกฐานเอกเทศ เช่น

$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ มี $z_0 = 1$ เป็นจุดเอกฐานเอกเทศ

$s(z) = \dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$ มี $z_0 = 0$, $\pm i$ เป็นจุดเอกฐานเอกเทศ

จากนิยาม ถ้า z_0 เป็นจุดเอกฐานเอกเทศ เราสามารถกระจายอนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)$ ในบริเวณ $0 < |z-z_0| < R$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

เราจำแนกชนิดของจุดเอกฐานเอกเทศได้ดังนี้

1. ถ้า ส.ป.ส. b_n เป็นศูนย์ทั้งหมด นั่นคือ อนุกรมลอเรนต์ ไม่มีพจน์ที่ยกกำลังเป็นลบแล้ว เราเรียก z_0 ว่าเป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้

ตัวอย่าง 1 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ มี $z_0 = 0$ เป็นจุดเอกฐานเอกเทศ สามารถแทนด้วยอนุกรมลอเรนต์ได้ดังนี้

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots \quad |z| > 0$$

ซึ่งไม่มีพจน์ที่ยกกำลังเป็นลบ ดังนั้น $z_0 = 0$ เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้

ถ้าเรานิยาม $f(0) = 1$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z_0 = 0$

$$\left(\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1\right)$$

2. ถ้า ส.ป.ส. b_n ไม่เป็นศูนย์เป็นจำนวนจำกัด แล้วเราเรียก z_0 ว่าเป็นโพลอันดับ m นั่นคือ $b_m \neq 0$ แต่ $b_n = 0$ สำหรับ $n > m$

ตัวอย่าง 2 f(z) $= z^{-3}\sin z$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \ldots$$

f(z) มีโพลอันดับ 2 ที่ $z_0 = 0$

ตัวอย่าง 3 f(z) $= z^{-1}\exp z$

$$= \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$$

f(z) มีโพลอันดับ 1 ที่ $z_0 = 0$

3. ถ้า ส.ป.ส. b_n มีจำนวนอนันต์ ที่ไม่เป็นศูนย์ เราเรียกจุด z_0 ว่าเป็นจุดเอกฐานจำเป็น

ตัวอย่าง 4 f(z) $= \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \ldots$$

มีจุดเอกฐานจำเป็นที่ $z_0 = 1$

ตัวอย่าง 5 จงจำแนกชนิดของจุดเอกฐานเอกเทศที่กำหนดให้

1) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$ 2) $\frac{z - \sin z}{z^3}$, $z_0 = 0$

3) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -2$ 4) $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$, $z_0 = -2$

วิธีทำ 1) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^{2(z-1+1)}}{(z-1)^3}$

$$= \frac{e^2}{(z-1)^3}e^{2(z-1)}$$

$$= \frac{e^2}{(z-1)^3}\left[1+2(z-1)+\frac{(2(z-1))^2}{2!}+\frac{(2(z-1))^3}{3!}+\ldots\right]$$

$$= \frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{2(z-1)}+\frac{4}{3}e^2(z-1)+\ldots$$

ดังนั้น $z_0 = 1$ เป็นโพลอันดับ 3

2) $$\frac{z-\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left[z-(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots)\right]$$

$$= \frac{1}{z^3}\left[\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\ldots)\right]$$

$$= \frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\ldots$$

ดังนั้น $z_0 = 0$ เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้

3) $$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+2}\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$= \frac{1}{z+2}\left[1-\frac{1}{z+2-1}\right]$$

$$= \frac{1}{z+2}\left[1+\frac{1}{1-(z+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{z+2}\left[1+\{1+(z+2)+(z+2)^2 \quad +\ldots\}\right]$$

$$= \frac{1}{z+2}\left[2+(z+2)+(z+2)^2 \quad \right]$$

$$= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + \ldots$$

ดังนั้น $z_0 = -2$ เป็นโพลอันดับหนึ่ง หรือโพลเชิงเดียว

4) $$(z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (z+2-5)\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3!(z+2)^3}+\frac{1}{5!(z+2)^5}-\ldots\right)$$

$$= 1- \frac{5}{z+2} - \frac{1}{3!(z+2)^2} + \frac{5}{3!(z+2)^3} + \frac{1}{5!(z+2)^4} - \ldots$$

ดังนั้น $z_0 = -2$ เป็นจุดเอกฐานจำเป็น

ข้อสังเกต

1. z_0 เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้ก็ต่อเมื่อ $\lim_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้

   (หรือ $\lim_{z \to z_0} f(z - z_0) f(z) = 0$)

2. z_0 เป็นโพลอันดับ m ก็ต่อเมื่อ $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

   (หรือ $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m \neq 0$)

3. z_0 จะเป็นจุดเอกฐานจำเป็น ถ้า z_0 ไม่ใช่จุดเอกฐานที่ขจัดได้ และไม่ใช่โพล

ตัวอย่าง 6 $f(z) = z^{-3} \sin z$

วิธีทำ ในที่นี้จุดเอกฐานเอกเทศ คือ $z_0 = 0$

เนื่องจาก $\lim_{z \to 0} z^2 \bullet z^{-3} \sin z = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$

ดังนั้น $z_0 = 0$ เป็นโพลอันดับสอง

ตัวอย่าง 7 $f(z) = z^{-1} \exp z$

เนื่องจาก $\lim_{z \to 0} z \bullet z^{-1} \exp z = 1 \neq 0$

ดังนั้น $z_0 = 0$ เป็นโพลเชิงเดียว

ตัวอย่าง 8 $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)$

วิธีทำ ในที่นี้ $z_0 = 1$ เป็นจุดเอกฐานเอกเทศ

เนื่องจาก $\lim_{z\to 1} (z-1)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right) = \infty$

และ $\lim_{z\to 1} (z-1)^m \exp\left(\frac{1}{z-1}\right) = \infty$

ดังนั้น $z_0 = 1$ เป็นจุดเอกฐานจำเป็น

ตัวอย่าง 9 จงจำแนกชนิดของจุดเอกฐานเอกเทศที่กำหนดให้

1) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$ 2) $\frac{z-\sin z}{z^3}$, $z_0 = 0$

3) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -2$ 4) $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$, $z_0 = -2$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\lim_{z\to 1} (z-1)^3 \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = e^2 \neq 0$

ดังนั้น $z_0 = 1$ เป็นโพลอันดับสาม

2) เนื่องจาก $\lim_{z\to 0} z\frac{(z-\sin z)}{z^3} = 0$

อันดับ $z_0 = 0$ เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้

3) เนื่องจาก $\lim_{z\to -2} (z+2)\frac{1}{(z+1)(z+2)} = -1 \neq 0$

ดังนั้น $z_0 = -2$ เป็นโพลเชิงเดียว

4) เนื่องจาก $\lim_{z\to -2} (z+2)(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ หาค่าไม่ได้ และ

$\lim_{z\to -2} (z+2)^m(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $z_0 = -2$ เป็นจุดเอกฐานจำเป็น

แบบฝึกหัด 2.3.1

จงจำแนกชนิดจุดเอกฐานเอกเทศของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1. $\dfrac{z^2+1}{z}$ 2. $\cos\dfrac{1}{z}$ 3. $\dfrac{e^z-\cos(z-1)}{z-1}$

4. $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 5. $\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{3}{z-\pi}$ 6. $\dfrac{e^z-1}{z^2}$

คำตอบ

1. $z_0 = 0$ เป็นโพลอันดับหนึ่ง
2. $z_0 = 0$ เป็นจุดเอกฐานจำเป็น
3. $z_0 = 1$ เป็นโพลเชิงเดียว
4. $z_0 = 1$ เป็นโพลเชิงเดียว , $z_0 = 2$ เป็นโพลอันดับสอง
5. $z_0 = 0$ เป็นโพลอันดับสอง , $z_0 = \pi$ เป็นโพลเชิงเดียว
6. $z_0 = 0$ เป็นโพลเชิงเดียว

2.3.2 ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง

ถ้า $z = z_0$ เป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศของ f(z) แล้ว f(z) จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ $0 < |z-z_0| < R$ และ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

โดยที่ $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวในบริเวณวงแหวน และมี z_0 อยู่ภายใน

ถ้า n = 1 , $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz$

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i b_1$$

เราเรียก ส.ป.ส. b_1 ของ $\frac{1}{z - z_0}$ ว่า ส่วนตกค้าง ของ f(z) ที่ z_0 เขียนแทนด้วย $\text{Res}(f , z_0) = b_1$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า $\int_C \frac{e^z}{(z-1)^2} dz$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{z-1+1}}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} e^{z-1}$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} = \left[1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\ldots\right]$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{(z-1)}+\frac{e}{2!}+\ldots$$

ดังนั้น $b_1 = e$

$$\int_C \frac{e^z}{(z-1)^2}dz = 2\pi ie$$

ทฤษฎีบท ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดภายในและบนคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C ซึ่งมีทิศทางเป็นบวก ยกเว้นจุด z_1 , z_2 , …, z_n ซึ่งเป็นจุดเอกฐานเอกเทศเป็นจำนวนจำกัด แล้ว

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{n=1}^{n}\operatorname{Re}s(f,z_i)$$

$$= 2\pi i[\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) +\ldots+\operatorname{Res}(f, z_n)]$$

พิสูจน์ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

การหาค่าส่วนตกค้าง

1. ถ้าจุด z_0 เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้ แล้ว Res (f, z_0) = 0

เนื่องจากอนุกรมลอเรนต์ มีแต่พจน์ที่กำลังเป็นบวก

2. ถ้าจุด z_0 เป็นโพลเชิงเดียว แล้ว

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

เนื่องจากอนุกรมลอเรนต์ของ f(z) รอบจุด z_0 คือ

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$(z-z_0)f(z) = b_1 + (z - z_0)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$\therefore \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = b_1 = \text{Res}(f, z_0)$$

3. ถ้าจุด z_0 เป็นโพลอันดับ m ($m > 1$) แล้ว

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right]$$

เนื่องจาก

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \ldots + b_1 (z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}$$

หาอนุพันธ์ m-1 ครั้ง แล้วใส่ลิมิต $z \to z_0$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) = (m-1)!\, b_1 + 0 + \ldots$$

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right]$$

ตัวอย่าง 2 จงหาส่วนตกค้างของ $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\displaystyle \lim_{z \to 1} (z - 1) \frac{z^2}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{1}{9} \neq 0$

แสดงว่า $z_0 = 1$ เป็นโพลเชิงเดียว

เพราะฉะนั้น $\displaystyle \text{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z - 1) \frac{z^2}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{1}{9}$

เนื่องจาก $\displaystyle \lim_{z \to -2} (z + 2)^2 \frac{z^2}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{4}{3} \neq 0$

แสดงว่า z_0 = -2 เป็นโพลอันดับสอง

เพราะฉะนั้น Res(f , -2) $= \frac{1}{1!}\lim\limits_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left[(z+2)^2\bullet\frac{z^2}{(z-1)(z+2)}\right]$

$= \lim\limits_{z\to -2}\left[\frac{(z-1)2z-z^2}{(z-1)^2}\right]$

$= \lim\limits_{z\to -2}\frac{2^2-2z}{(z-1)^2}$

$= \frac{8}{9}$

ตัวอย่าง 3 จงหาส่วนตกค้างของ f(z) = $\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$

วิธีทำ พิจารณา $z^3 + 2z^2 + 2z = 0$

$z(z^2 + 2z + z) = 0$

$z = 0 \;,\; -1 \pm i$

จะพบว่า $z_0 = 0 \;, -1 \pm i$ เป็นโพลเชิงเดียว

Res(f , 0) $= \lim\limits_{z\to 0} z\bullet f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z^2+4}{z^2+2z+2} = 2$

Res(f , -1+i) $= \lim\limits_{z\to -1+i}[z-(-1+i)]f(z)$

$= \lim\limits_{z\to -1+i}\frac{z^2+4}{z(z+1+i)}$

$= \frac{2-i}{-1-i} = \frac{1}{2}(-1 + 3i)$

Res (f , -1-i) $= \lim\limits_{z\to -1-i}[z-(-1-i)]f(z)$

$= -\frac{1}{2}(1+3i)$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า $\int\limits_C \frac{\cos\pi z^2+\sin\pi z^2}{(z+1)(z+2)}$, C : $|z| = 3$

วิธีทำ เนื่องจาก z_0 = -1 , -2 เป็นโพลเชิงเดียว ที่มีอยู่ $|z| = 3$

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1)f(z)$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{\cos \pi z^2 + \sin \pi z^2}{z+2}$$

$$= -1$$

$$\text{Res}(f,-2) = \lim_{z \to -2} (z+2)f(z)$$

$$= \lim_{z \to -2} \frac{\cos \pi z^2 + \sin \pi z^2}{(z+1)}$$

$$= -1$$

จากทฤษฎีบทส่วนตกค้าง

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(-1-1)$$

$$= -4\pi i$$

ตัวอย่าง 5 จงหาค่า $\int_C \frac{dz}{(z^2+9)^3}$, $C : |z - i| = 3$

วิธีทำ เนื่องจากจุดเอกฐานเอกเทศคือ $z_0 = \pm 3i$

แต่เฉพาะ $z_0 = 3i$ เท่านั้นที่มีอยู่ใน $|z - i| = 3$ และ $z_0 = 3i$ เป็นโพลอันดับสาม

$$\text{Res}(f, 3i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 3i} \left[\frac{d^2}{dz^2} (z-3i)^3 f(z) \right]$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 3i} \left[\frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z+3i)^3} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 3i} \left[\frac{12}{(z+3i)^5} \right]$$

$$= \frac{6}{6^5 i^5} = \frac{1}{1296i}$$

จากทฤษฎีบทส่วนตกค้าง

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+9)^3} = 2\pi i \frac{1}{1296i} = \frac{\pi}{648}$$

แบบฝึกหัด 2.3.2

1. จงหาส่วนตกค้างของฟังก์ชันที่กำหนดให้ที่จุดเอกฐานของฟังก์ชันนั้น

   1) $\frac{e^{2z}-1}{z}$ 2) $\frac{z^2+1}{z-1}$ 3) $\frac{(1-z^2)e^{2z}}{z^4}$

   4) $\frac{z^2-1}{(z-2)(z+1)(z-\pi)}$ 5) $\frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3}$ 6) $\frac{e^z}{z^4-z^2}$

2. จงหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ตามคอนทัวร์ที่กำหนด

   1) $\frac{(z^2+1)e^z}{(z+i)(z-i)^3}$, $|z| = \frac{1}{2}$

   2) $\frac{1}{z^2(z-1)(z+\pi i)}$, $|z| = 2$

   3) $\frac{z}{z^4-1}$, $|z| = 4$

   4) $\frac{e^z}{z^3-2z^2+z}$, $|z| = 2$

   5) $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$, $|z| = 3$

คำตอบ

1. 1) 0   2) 2   3) $-\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{2-\pi}$, 0 , $\frac{\pi-1}{\pi-2}$

   5) 0   6) Res (f , 0) = -1 , Res (f , -1) = $-\frac{1}{2e}$,

   Res (f , 1) = $\frac{e}{2}$

2. 1) 0 2) $\dfrac{-2i}{\pi(1+\pi i)}$ 3) 0 4) $2\pi i$ 5) 0

2.3.3 ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง

เราสามารถนำทฤษฎีบทส่วนตกค้างไปใช้หาค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันค่าจริงได้ โดยมีรูปแบบดังต่อไปนี้

แบบที่ 1 $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันตรรกยะของ $\cos\theta$, $\sin\theta$

โดยให้ $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$

จะได้ $\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$

$dz = ie^{i\theta}d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

C : วงกลมหนึ่งหน่วยมีทิศทางเป็นบวก และปริพัทธ์ทางขวามือเป็นฟังก์ชันตรรกยะของ z ซึ่งสามารถหาค่าปริพันธ์ได้โดยใช้ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง นั่นคือ

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$

วิธีทำ ให้ $z = e^{i\theta}$ จะได้

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = \int_C \frac{dz/iz}{5+3(\frac{z-z^{-1}}{2i})}$$

$$= \int_C \frac{2dz}{3z^2+10iz-3}$$

$$= \int_C \frac{2dz}{(3z+i)(z+3i)}$$

ซึ่งปริพัทธ์มีโพลที่ –3i และ $-\frac{i}{3}$

แต่ –3i อยู่ภายนอกวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนี้

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -\frac{i}{3})$$

$$f(z) = \frac{2}{3z^2+10iz-3}$$

$$\operatorname{Res}(f(z), -\frac{i}{3}) = \lim_{z \to -i/3} 2\frac{(z+i/3)}{3z^2+10iz-3}$$

$$= \lim_{z \to -i/3} 2\frac{2}{6z+10i} \quad \text{(ใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล)}$$

$$= \frac{1}{4i}$$

นั่นคือ

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta$

วิธีทำ ให้ $z = e^{i\theta}$ จะได้

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta} = \int_C \frac{\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{5-4\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz}$$

$$= -\frac{i}{4}\int_C \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(2z-1)(z-2)}dz$$

ซึ่งปริพัทธ์มีโพลอันดับสองที่ 0 , โพลเชิงเดียวที่ z = $\frac{1}{2}$ และ 2 แต่ 2 ไม่อยู่ใน C

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{5-4\cos\theta} = -\frac{i}{4}\bullet 2\pi i[\operatorname{Res}(f(z),0)+\operatorname{Res}(f(z),\tfrac{1}{2})]$$

$$f(z) = \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(2z-1)(z-2)}$$

แต่ Res (f(z) , 0) $= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2 f(z)]$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^4-2z^2+1}{(2z-1)(z-2)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{(2z-1)(z-2)(4z^3-4z)-(z^4-2z^2+1)(4z-5)}{(2z-1)^2(z-2)^2}\right]$$

$$= \frac{5}{4}$$

Res (f(z) , $\frac{1}{2}$) $= \frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left[(z-\frac{1}{2})f(z)\right]$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z-2)} = -\frac{3}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{5-4\cos\theta} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

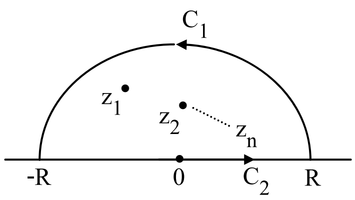
แบบที่ 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

- เมื่อ f(x) เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งตัวส่วนไม่เป็นศูนย์สำหรับ x ที่เป็นค่าจริง
- และ $\lim_{x \to \pm\infty} xf(x) = 0$ (นั่นคือ ตัวส่วนต้องมีดีกรีสูงกว่าตัวเศษอย่างน้อยที่สุด 2)

โดยการกำหนด f(z) เป็นฟังก์ชันตรรกยะรูปแบบเดียวกับ f(x) ฉะนั้น f(z) จะมีโพลเป็นจำนวนจำกัด (z_1 , z_2 ,…,z_n) อยู่บนระนาบครึ่งบน พิจารณา $\int_C f(z)dz$ โดย $C = C_1 + C_2$

C_1 : ครึ่งบนวงกลม $|z| = R$

C_2 : $-R \le x \le R$ ดังรูป



ดังนั้น $2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k) = \int_C f(z)dz$

$$= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

$$= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

ให้ $R \to \infty$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k) - \lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz$$

เราสามารถแสดงได้ว่าเทอมที่สองด้านขวามือเป็นศูนย์

เนื่องจาก $\lim_{z\to\infty} zf(z) \;=\; 0$

$$|zf(z)| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ } |z| \geq N$$

$$|f(z)| \;<\; \frac{\varepsilon}{|z|}$$

และ $\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| \leq M \bullet L$

$$\leq \frac{\varepsilon}{|z|} \bullet \frac{2\pi R}{2}$$

$$< \pi\varepsilon \qquad\qquad (|z| < R)$$

แสดงว่า $\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| \;=\; 0$

ฉะนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่า $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(z) \;=\; \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \;=\; \int_{C} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \;=$

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

ในที่นี้ $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$

มีโพลที่ $\pm i$ และ $\pm 2i$ แต่เฉพาะ i และ 2i ที่อยู่ใน C

พิจารณา $\text{Res}(f(z), i) = \lim\limits_{z \to i} (z-i)f(z)$

$$= \lim_{z \to i} \frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{i}{6}$$

และ $\text{Res}(f(z), 2i) = \lim\limits_{z \to 2i} (z-2i)f(z)$

$$= \lim_{z \to i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = -\frac{i}{3}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi I\left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3}\right)$

$$= \frac{\pi}{3}$$

แบบที่ 3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx \quad , m > 0$

- เมื่อ f(x) เป็นฟังก์ชันตรรกยะซึ่งตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ สำหรับ x ที่เป็นค่าจริง
- และ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ (ตัวส่วนมีดีกรีสูงกว่าตัวเศษ)

ใช้วิธีการเช่นเดียวกับแบบที่ 2

เราสามารถแสดงได้ว่า บน $C : |z| = R$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_1} e^{imz} f(z)dz = 0 \quad (m > 0)$$

จาก $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$

$|f(z)| < \varepsilon$

ให้ $z = Re^{i\theta}$ บนครึ่งวงกลมรัศมี R

$$\therefore \quad \int_{C_1} e^{imz} f(z)dz = \int_0^{\pi} e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

แต่ $\left| e^{imR(\cos\theta + i\sin\theta)} \right| = e^{-mR\sin\theta}$

และเราทราบว่า $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \geq \dfrac{2}{\pi}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

ทำให้ $e^{-mR\sin\theta} \leq e^{-2mR\theta/\pi}$

ดังนั้น
$$\left| \int_{C_1} e^{imz} f(z)dz \right| \leq \varepsilon \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} R d\theta$$

$$< 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi} d\theta$$

$$= -\frac{\pi\varepsilon}{m} e^{-2mR\theta/\pi} \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi\varepsilon}{m}(1 - e^{-mR}) < \frac{\pi\varepsilon}{m}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_1} e^{imz} f(z)dz = 0$

หมายเหตุ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx dx \quad \text{และ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx dx$$

คือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx} dx$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx$

วิธีทำ พิจารณา $\displaystyle\int_C \frac{e^{2iz}}{z^2+1}\,dz$

เนื่องจาก $f(z) = \dfrac{e^{2iz}}{z^2+1}$ มีโพลเชิงเดียวที่ $z = \pm i$ แต่ $-i$ ไม่อยู่ใน C

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z)$$

$$= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{2iz}}{(z+i)(z-i)}$$

แสดงว่า $\displaystyle\int_C \frac{e^{2iz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-2}}{2i}\right) = \pi e^{-2}$

หรือ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-2}$

หรือ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-2}$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-2}$

แบบฝึกหัด 2.3.3

จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\sin x}$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+4}$

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx$

คำตอบ

1.	$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	2.	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	3.	$\frac{\pi}{16}$	4.	π
5.	πe^{-2}	7.	0	8.	$\frac{\pi}{2e}$		