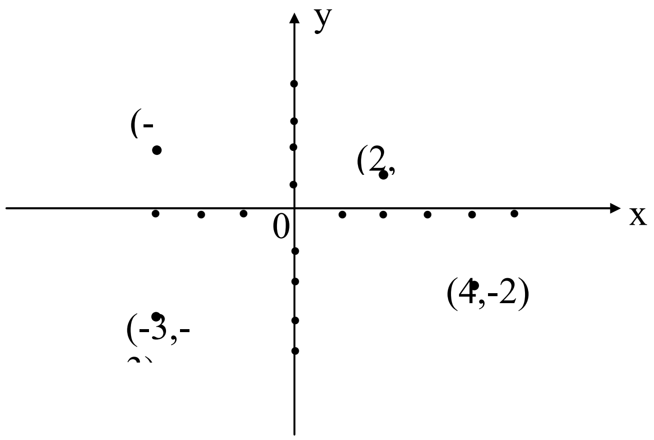
บทที่ 1
จำนวนเชิงซ้อน

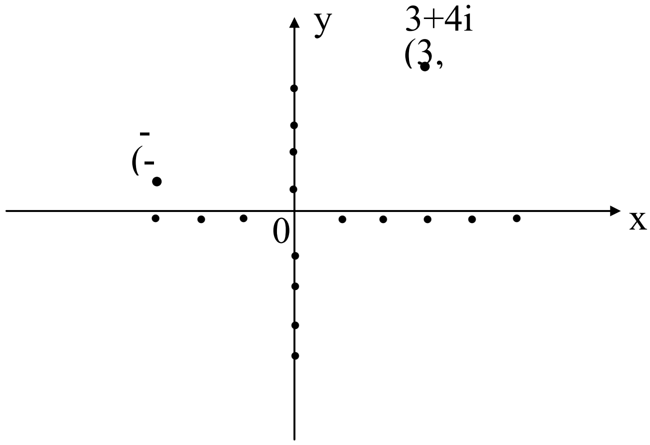
1.1 เซตในระนาบเชิงซ้อน

การเขียนกราฟจำนวนจริงในระบบพิกัดฉาก เราทำโดยกำหนดแกนโคออร์ดิเนต X และ Y ให้ตัดตั้งฉากกันที่จุด (0 , 0) เรียกจุดนี้ว่า จุดกำเนิด และสำหรับจุดใดๆ ในระนาบ แทนด้วยคู่อันดับของจำนวนจริง (x , y) ดังเช่น จุดในรูป 1.1



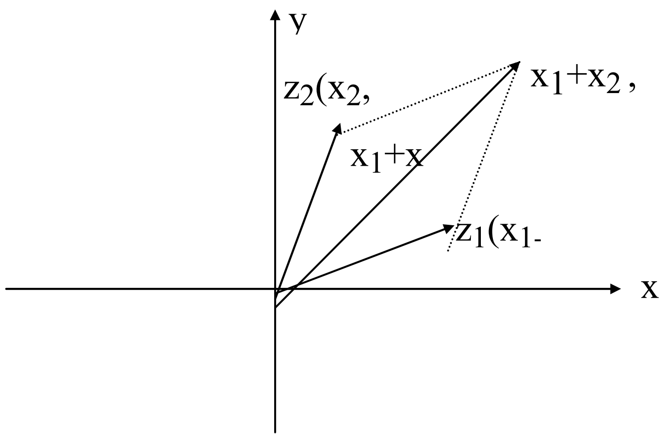
รูป 1.1

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อน $x + yi$ เราเขียนแทนด้วยคู่อันดับ (x , y) โดยที่ x , y เป็นจำนวนจริงอยู่แล้ว เราจึงสามารถแทนจุดใดๆ ในระนาบด้วยคู่อันดับ (x , y) ได้เลยทันที เรียกระนาบ xy นี้ว่า ระนาบจำนวนเชิงซ้อนหรือระนาบ z เช่น จำนวนเชิงซ้อน $3 + 4i$ เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (3 , 4) จำนวนเชิงซ้อน $-3 + i$ เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (-3 , 1) เป็นต้น ในระนาบจำนวนเชิงซ้อนคู่อันดับหนึ่งคู่อันดับจะแทนจุดเพียงจุดเดียว เรียกแกน X ว่าแกนจริง (real axis) เรียกแกน Y ว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis) ดังรูป 1.2 และระยะทางระหว่างจุด $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$ จะเขียนแทนด้วย $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



รูป 1.2

ถ้าพิจารณาผลบวก $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 \,,\, y_1 + y_2)$ ถ้าเขียนกราฟในระนาบจำนวนเชิงซ้อน จะได้ดังรูป 1.3



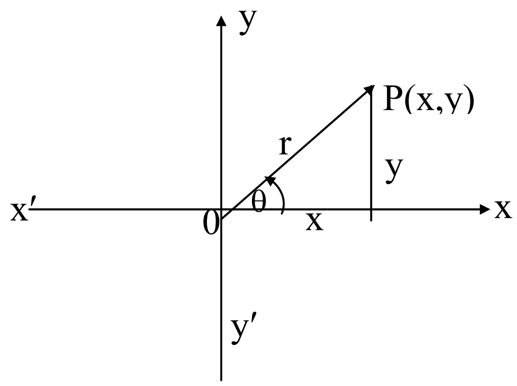
รูป 1.3

รูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า P เป็นจุดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งมีโคออร์ดิเนต (x , y) หรือ $x + iy$, θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ ทำกับแกน X จากรูป 1.4 จะได้

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$$

โดยที่ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ เรียกว่า ค่าสัมบูรณ์ของ $z = x + iy$ หรือ modulus เขียนแทนด้วย mod z หรือ $|z|$ เรียก θ ว่า amplitude หรือ argument ของ $z = x + iy$ เขียนแทนด้วย arg z



รูป 1.4

นั่นคือ

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

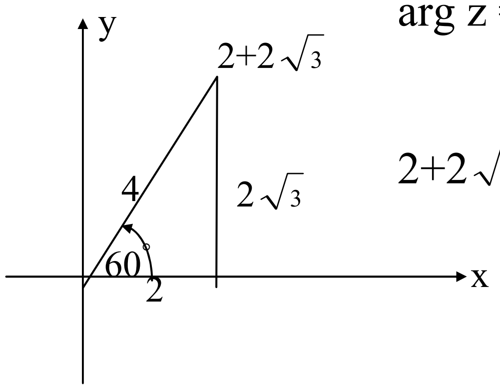
เรียกจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว (Polar form) เรียก r และ θ ว่า โคออร์ดิเนตเชิงขั้ว

เพื่อความสะดวกและง่ายในการเขียน บางครั้งเราเขียน cis θ แทน $\cos\theta + i\sin\theta$

นิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z \neq 0$ ใดๆ จะสมนัยกับค่า θ ใน $0 \leq \theta < 2\pi$ เพียงค่าเดียว

ตัวอย่าง 1 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $2 + 2\sqrt{3}\,i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ $\mathrm{mod}\ z = r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$



$$\arg z = \theta = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{4}$$
$$= \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$
$$2+2\sqrt{3}\,i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$
$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 4\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}$$

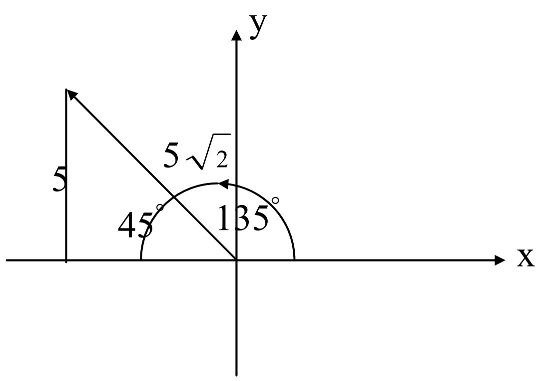
ตัวอย่าง 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $-5 + 5i$ ในแบบเชิงขั้ว

วิธีทำ $r = |-5 + 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5\sqrt{2}$

$\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น $-5 + 5i = 5\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$

$= 5\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\ \frac{3\pi}{4}$



ทฤษฎี (ทฤษฎีของ De Moivre)

ถ้า $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

1. $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

และทำนองเดียวกันจะได้

3. $z_1z_2\ldots z_n = r_1r_2\ldots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)\}$
4. ถ้า $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
z^n &= \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n \\
&= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad ; \quad n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ}
\end{aligned}
$$

พิสูจน์ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= \{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\}\{r_1(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\} \\
&= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\
&= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\left\{\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right\} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}
\end{aligned}
$$

ค่ารากของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน w จะเรียกว่า รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z ถ้า $w^n = z$ และเราเขียน $w = z^{\frac{1}{n}}$ โดยทฤษฎีของเดอร์โมวี เราจะได้ว่าถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$z^{\frac{1}{n}} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

แสดงว่าจะมีค่ารากที่ n ของ z ทั้งหมด n ค่าต่างๆ กันหรืออาจใช้สูตรในรูป

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

เช่น ถ้าต้องการหารากที่ n ของ 1 เราทำโดยแก้สมการ $w^n = 1$

ให้ $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1 = \cos 0 + i\sin 0$

$r^n = 1$ และ $n\theta = 0 + 2k\pi \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$r = 1$ และ $\theta = \frac{2k\pi}{n}$

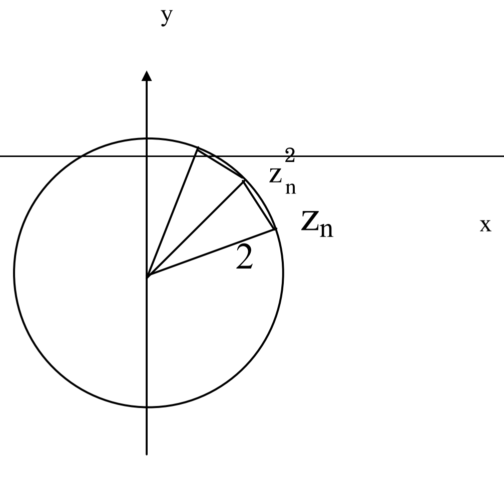
ดังนั้นจะมีคำตอบต่างๆ กัน คือ

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

รากที่ n ของ 1 มี n ราก เขียนได้ในรูป

จาก $z_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

โดยทฤษฎีของเดอร์โมวี รากที่ n ของ 1 คือ $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$ ซึ่งถ้าเขียนรูปจะได้ว่ารากทั้ง n ราก จะอยู่บนวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดรัศมีหนึ่งหน่วย แต่ละรากห่างกันเป็นมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$ ดังรูป (วงกลมมีสมการ $|z| = 1$)



ตัวอย่าง 3 จงหารากที่ 5 ของ -32

วิธีทำ $-32 = 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\} \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

โดยทฤษฎีเดอร์โมวี

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)$$
$$= 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\}$$

ดังนั้น

$$r^5 = 32 \;,\; 5\theta = \pi + 2k\pi$$
$$\therefore \quad r = 2 \;,\; \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5}$$

ดังนั้น

$$z = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right\}$$

ถ้า $k = 0$, $z = z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$

ถ้า $k = 1$, $z = z_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5})$

ถ้า $k = 2$, $z = z_3 = 2(\cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}) = -2$

ถ้า $k = 3$, $z = z_4 = 2(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5})$

ถ้า $k = 4$, $z = z_5 = 2(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5})$

ถ้า $k = 5, 6, \ldots$ และ $-1, -2, \ldots$ ค่าที่ได้จะซ้ำกับ 5 รากที่ได้ข้างต้น

สูตรของออยเลอร์ (Euler's Formula)

เนื่องจาก $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... +$

ถ้า $x = i\theta$ จะได้ว่า

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad ; \quad e = 2.71828...$$

เรียกสูตรนี้ว่า **สูตรของออยเลอร์**

โดยทั่วไป

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

ถ้า $y = 0$ แล้ว $e^z = e^x$

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ว่า $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \quad ; \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+2k\pi)} &= \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \\ &= e^{i\theta} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4 จงหารากที่ 5 ของ 1

วิธีทำ $z^5 = 1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = e^{2k\pi i}$

โดยที่ $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ โดยที่

$$\begin{aligned} z &= \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} \\ &= e^{\frac{2k\pi i}{5}} \end{aligned}$$

ถ้า $k = 0$

$$z = e^0 = 1$$

$k = 1$

$$z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

$k = 2$

$$z = e^{\frac{4\pi i}{5}}$$

$k = 3$

$$z = e^{\frac{6\pi i}{5}}$$

$k = 4$

$$z = e^{\frac{8\pi i}{5}}$$

1.2 ลิมิตและความต่อเนื่อง

1.2.1 ตัวแปรและฟังก์ชัน

สัญลักษณ์ z ซึ่งใช้เขียนแทนจำนวนเชิงซ้อนจะเรียกว่า ตัวแปรเชิงซ้อน

ถ้าแต่ละค่าของตัวแปรเชิงซ้อน z สมนัยกับค่าของตัวแปรเชิงซ้อน w หนึ่งหรือมากกว่า เรากล่าวว่า w เป็นฟังก์ชันของ z และเขียน $w = f(z)$ หรือ $w = G(z)$

เรียก z ว่า ตัวแปรอิสระ , w ตัวแปรตาม

ค่าของฟังก์ชัน ณ ที่ $z = a$ จะเขียน $f(a)$ ดังนั้น ถ้า $f(z) = z^2$ แล้ว $f(3i) = (3i)^2 = -9$

ถ้าค่าของ w เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่สมนัยกับแต่ละค่าของ z เรากล่าวว่า $w = f(z)$ เป็น single valued function (ฟังก์ชันค่าเดียว)

ถ้าค่าของ w มากกว่าหนึ่งค่าที่สมนัยกับแต่ละค่าของ z เรากล่าวว่า $w = f(z)$ เป็น multiple-valued function (ฟังก์ชันในหลายค่า)

ตัวอย่าง 1 ถ้า $w = z^2$ จะพบว่า z หนึ่งค่าจะให้ค่า w เพียงหนึ่งค่า ดังนั้น $w = f(z) = z^2$ เป็นฟังก์ชันค่าเดียว

ตัวอย่าง 2 ถ้า $w = z^{\frac{1}{2}}$ จะพบว่าค่า z หนึ่งค่า จะได้ค่า w 2 ค่า ดังนั้น $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ เป็นฟังก์ชันหลายค่า

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของฟังก์ชัน $f(z) = (4 - z)$ ที่ $z = 1 + i$

วิธีทำ

$$f(z) = 4 - z$$

$$f(1 + i) = 4 - (1 + i)$$

$$= 3 - i$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $f(z) = z^2 + 2$ ที่ $z = -2 + i$

วิธีทำ

$$f(z) = z^2 + 2$$

$$f(-2+i) = (-2 + i)^2 + 2$$

$$= (4 - 4i + i^2) + 2$$

$$= 5 - 4i$$

ถ้าพิจารณา $w = u + iv$ เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ $z = x + iy$

$$w = f(z)$$

$$u + iv = f(x + iy)$$

จะพบว่าแต่ละจำนวนจริง u , v จะขึ้นอยู่กับค่าจริง x , y

เช่น

$$f(z) = z^2+1$$

$$f(z) = (x + iy)^2 + 1$$

$$u+iv = x^2 - y^2 + 2xyi + 1$$

$$= (x^2 - y^2 + 1) + 2xyi$$

$$u = (x^2 - y^2 + 1)$$

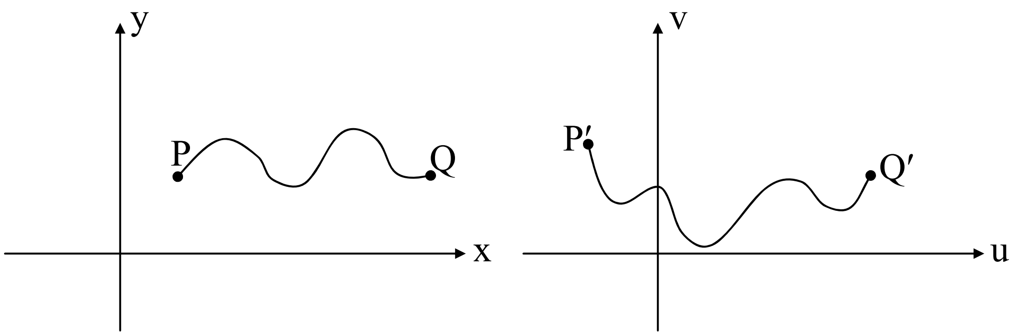
$$v = 2xy$$

นิยาม ให้ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน ถ้า $v(x, y) = 0$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นจำนวนจริงเสมอเรียก $f(z)$ ว่า ฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรเชิงซ้อน

เช่น $\qquad f(z) = |z|^2$

$\qquad\qquad |z|^2 = x^2 + y^2$ เป็นค่าจริงเสมอ

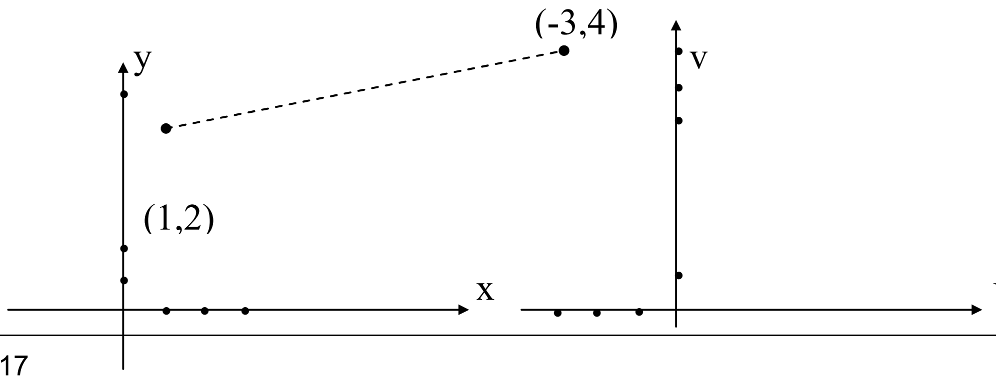
$\qquad\qquad f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรเชิงซ้อน



รูป 1.2.1

ตัวอย่าง 5 ถ้า $w = z^2$ แล้ว $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$ ดังนั้น

$u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ ภาพ (image) ของจุด $(1, 2)$ ในระนาบ z คือจุด $(-3, 4)$ ในระนาบ w



ระนาบ z $\qquad\qquad$ ระนาบ w

ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function)

ถ้า $w = f(z)$ แล้ว เราสามารถจะพิจารณาว่า z เป็นฟังก์ชันของ w ด้วย เขียนแทนด้วย $z = g(w) = f^{-1}(w)$ ฟังก์ชัน f^{-1} เรียกว่า ฟังก์ชันผกผัน ดังนั้น $w = f(z)$ และ $w = f^{-1}(z)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

การแปลง (Transformations)

ถ้า $w = u + iv$ เป็นฟังก์ชันค่าเดียวของ $z = x + iy$ โดยที่ u , v , x , y เป็นจำนวนจริง เราสามารถเขียน

$$u + iv = f(x + iy) \qquad (1.2.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = u(x , y) \\ v = v(x , y) \end{array}\right\} \qquad (1.2.2)$$

ถ้าเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ของสมการ (1.2.1) จะมีตัวแปร 4 ตัว คือ x , y , u , v ถ้าเขียนกราฟจะต้องเขียนกราฟใน 4 มิติ ซึ่งไม่อาจเขียนให้เห็นได้จึงใช้วิธีกำหนดจุด $P(x , y)$ ในระนาบ z แล้วเขียนจุด (u,v) ในอีกระนาบคือ ระนาบ w เพื่อลงจุด P' ที่สมนัยกับจุด P ในระนาบ z ดังนั้นการเขียนแสดงฟังก์ชันโดยกราฟนี้เป็นการแปลงหรือส่งจุด P ในระนาบ z ไปยังจุด P' ในระนาบ w หรือเป็นการแปลงหรือส่งสมาชิกในเซตของจุด P ในระนาบ z ไปยังสมาชิกในเซตของจุด P' ในระนาบ w เราเรียก (1.2.2) ว่า การแปลง (Transformation) หรือการส่ง (Mapping) เรากล่าวว่า จุด P ถูกส่ง (mapped) หรือถูกแปลง (Transformed) ไปยังจุด P' เรียก P' ว่า ภาพ (image) ของ P

1.2.2 ลิมิต (Limits)

นิยาม ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดียวและกำหนดค่าได้ในย่านรอบ z_0 ยกเว้นที่ neighborhood of $z = z_0$

$z = z_0$ เราจะกล่าวว่าจำนวน ℓ เป็นลิมิตของฟังก์ชัน $f(z)$ ขณะที่ z เข้าใกล้ z_0 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \ell$ ถ้าสำหรับจำนวนเต็มบวก ε (ไม่ว่าจะสักเท่าใดก็ตาม) เราสามารถหาจำนวนเต็มบวก δ ซึ่ง $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ เมื่อไรก็ตาม $0 < |z - z_0| < \delta$

จากนิยามเราอาจจะกล่าวได้ว่า $f(z)$ มีค่าเข้าใกล้ ℓ ขณะที่ z มีค่าเข้าใกล้ z_0 และเขียน $f(z) \to \ell$ ขณะที่ $z \to z_0$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 6

ให้ $$f(z) = \begin{cases} z^2 & ; \ z \neq i \\ 0 & ; \ z = i \end{cases}$$

จะเห็นว่าเมื่อ z เข้าใกล้ i , $f(z)$ ก็จะเข้าใกล้ $i^2 = -1$ ดังนั้นเราได้ว่า

$$\lim_{z \to i} f(z) = -1$$

ตัวอย่าง 7

กำหนดให้ $f(z) = z^2$ จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = z_0^2$

วิธีทำ เราจะต้องแสดงว่าเมื่อให้ $\varepsilon > 0$ ใดๆ เราสามารถหาค่า δ ซึ่ง $\left|z^2 - z_0^2\right| < \varepsilon$ เมื่อไรก็ตามที่ $0 < |z - z_0| < \delta$

ถ้า $\delta \le 1$ แล้ว $0 < |z - z_0| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left|z^2 - z_0^2\right| &= |z - z_0||z + z_0| < \delta \ |z - z_0 + 2z_0| \\ &< \delta \ \{|z - z_0| + |2z_0|\} \\ &< \delta \ (1 + 2|z_0|) \end{aligned}$$

เลือก $\delta = 1$ หรือ $\dfrac{\varepsilon}{(1 + 2|z_0|)}$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าเสมอ ดังนั้นได้ว่าเรามี $\left|z^2 - z_0^2\right| < \varepsilon$

ทฤษฎี 1.2.1 (Uniqueness of limit)

ถ้า $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ หาค่าได้ (exist) แล้ว ค่าที่ได้ต้องมีค่าเดียว (unique)

พิสูจน์ เราจะต้องแสดงว่า ถ้า $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \ell_1$ และ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \ell_2$ แล้ว $\ell_1 = \ell_2$

จากสมมติฐาน กำหนด $\varepsilon > 0$ เราสามารถหาค่า $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ } 0 < |z-z_0| < \delta$$

$$|f(z) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ } 0 < |z - z_0| < \delta$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(z) + f(z) - \ell_2| \\ &\le |\ell_1 - f(z)| + |f(z) - \ell_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $|\ell_1 - \ell_2|$ น้อยกว่าจำนวนบวก ε ใดๆ (ไม่ว่าจะเล็กเท่าใดก็ตาม) และจะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้น $\ell_1 = \ell_2$

อย่างไรก็ตามการพิจารณาค่าของลิมิตโดยใช้นิยามค่อนข้างยุ่งยาก เพื่อความสะดวกและลดความยุ่งยากลง เราจะหาค่าของลิมิตโดยอาศัยทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 1.2.2

ถ้า $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ และ $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$ แล้ว

1. $$\lim_{z\to z_0}\{f(z)+g(z)\} = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z)$$
$$= A + B$$

2. $$\lim_{z\to z_0}\{f(z)-g(z)\} = \lim_{z\to z_0} f(z) - \lim_{z\to z_0} g(z)$$
$$= A - B$$

3. $$\lim_{z\to z_0}\{f(z)g(z)\} = \left\{\lim_{z\to z_0} f(z)\right\}\left\{\lim_{z\to z_0} g(z)\right\}$$
$$= AB$$

4. $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} = \frac{A}{B} \quad ; \quad B \neq 0$$

ทฤษฎี 1.2.3

1. $$\lim_{z\to z_0} z = z_0$$

2. $$\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. $$\lim_{z\to z_0} c = c \quad ; \quad c = \text{ค่าคงตัวเชิงซ้อน}$$

ตัวอย่าง 8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{z\to 1+i}(z^2 - 5z + 10)$

วิธีทำ $\lim\limits_{z\to 1+i}(z^2 - 5z + 10)$

$$= \lim_{z\to 1+i} z^2 - \lim_{z\to 1+i}(-5z) + \lim_{z\to 1+i}(10)$$

$$= \left(\lim_{z\to 1+i} z\right)\left(\lim_{z\to 1+i} z\right) + \left(\lim_{z\to 1+i} (-5)\right)\left(\lim_{z\to 1+i} z\right) + \lim_{z\to 1+i} (10)$$

$= (1 + i)(1 + i) - 5(1 + i) + 10$

$= 5 - 3i$

ตัวอย่าง 9 จงหาค่าของ $\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$

วิธีทำ $\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = \frac{\lim_{z\to -2i}(2z+3)\ \lim_{z\to -2i}(z-1)}{\lim_{z\to -2i}(z^2-2z+4)}$

$$= \frac{(3-4i)(-2i-1)}{4i}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$$

ตัวอย่าง 10

จงแสดงว่า $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ หาค่าไม่ได้ (ไม่มีลิมิต)

วิธีทำ ให้ $z \to 0$ ตามแกน X ดังนั้น $y = 0$

และ $z = x + iy = x$

$\bar{z} = x - iy = x$

ดังนั้น

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$ .... $\leftarrow$

ให้ $z \to 0$ ตามแกน Y ดังนั้น $x = 0$

และ $z = x + iy = iy$

$\bar{z} = x - iy = -iy$

ดังนั้น

$$\lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

ดังนั้น $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ หาค่าไม่ได้ (ไม่มีลิมิต)

ค่าอนันต์

โดยการแปลง $w = \frac{1}{z}$ จุด $z = 0$ จะถูกส่งจากระนาบ z ไปยังจุด $w = \infty$ ในระนาบ w เรียก $w = \infty$ ว่าจุดที่อนันต์ ทำนองเดียวกัน เราเขียน $z = \infty$ แทนจุดที่อนันต์ในระนาบ z

เราจะกล่าวว่า $\lim_{z \to \infty} f(z) = \ell$ หรือ $f(z)$ มีค่าเข้าใกล้ ℓ ขณะที่ z เข้าใกล้ค่าอนันต์ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ เราสามารถหา $M > 0$ ซึ่ง $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ เมื่อไรก็ตาม $|z| > M$

เราจะกล่าวว่า $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ หรือ $f(z)$ มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ขณะที่ z เข้าใกล้ z_0 ถ้าสำหรับแต่ $N > 0$ ใดๆ เราสามารถหา $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(z)| > N$ เมื่อไรก็ตาม $0 < |z - z_0| < \delta$

1.2.3ความต่อเนื่อง (Continuity)

นิยาม ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดียวและหาค่าได้ในย่านของ $z = z_0$ (neighborhood of z_0) จะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f(z)$ ต่อเนื่องที่ $z = z_0$ ก็ต่อเมื่อสอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$ หาค่าได้ (exist)
2. $f(z_0)$ หาค่าได้
3. $f(z_0) = \ell$

ดังนั้นจากนิยาม ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ z_0 เราจะได้ว่า $\lim_{z \to z_0} f(z) =$

$$f\left(\lim_{z\to z_0}\right)$$

ตัวอย่าง 11 กำหนดให้

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & ; \ z \neq i \\ 0 & ; \ z = i \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า $f(z)$ ต่อเนื่องที่ i หรือไม่

วิธีทำ เพราะว่า

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} i^2 = -1$$

$$f(z=i) = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{z\to i} f(z) \neq f(z=i)$$

$f(z)$ ไม่ต่อเนื่องที่ i

ตัวอย่าง 12 กำหนดให้ $f(z) = z^2$ สำหรับทุกๆ ค่า z จงพิจารณาว่า $f(z)$ ต่อเนื่องที่ i หรือไม่

วิธีทำ

$$f(z=i) = i^2 = -1$$

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} z^2 = i^2 = -1$$

$$\lim_{z\to i} f(z) = f(z=i)$$

ดังนั้น $f(z)$ ต่อเนื่องที่ i

ตัวอย่าง 13 จงพิจารณา $f(z) = \frac{3z^4 - 2z^2 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ ต่อเนื่องที่ $z = i$ หรือไม่

วิธีทำ ℓ f(i) หาค่าไม่ได้ (เนื่องจากส่วนเป็นศูนย์)

ดังนั้น $f(z)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $z = i$

ทฤษฎี 1.2.4

ให้ $f(z)$ และ $g(z)$ ต่อเนื่องที่ z_0 แล้ว

1. $f(z) + g(z)$ ต่อเนื่องที่ z_0
2. $f(z) - g(z)$ ต่อเนื่องที่ z_0
3. $f(z)g(z)$ ต่อเนื่องที่ z_0
4. $\frac{f(z)}{g(z)}$ ต่อเนื่องที่ z_0 เมื่อ $g(z) \neq 0$

1.3 อนุพันธ์และฟังก์ชันวิเคราะห์

นิยาม ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดียวในบริเวณ $\Re$ ของระนาบ z แล้ว อนุพันธ์ของ $f(z)$ ที่ z_0 กำหนดโดย

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad \text{.........} (1)$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้และไม่เท่ากับค่าอนันต์

ถ้า $f'(z_0)$ หาค่าได้ เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ $z = z_0$

เพราะว่า f นิยามบนย่านของ z_0 ดังนั้น ถ้า $|\Delta z|$ มีค่าเล็กพอ $f(z_0 + \Delta z)$ หาค่าได้เสมอ

นิยาม ถ้าอนุพันธ์ $f'(z)$ หาค่าได้ที่ทุกๆ จุด z ในบริเวณ $\Re$ แล้วจะเรียกฟังก์ชัน $f(z)$ ว่า ฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $\Re$ (analytic function)

ถ้าให้ $z_0 = z$ และ $\Delta z = dz$ เป็นค่าที่เปลี่ยนไปของ z แล้ว $\Delta w = f(z + \Delta$

$\frac{dw}{dz}$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

ดังนั้นเราจึงเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ z ใดๆ ได้ในรูป $f'(z)$ หรือ $\frac{df}{dz}$ หรือ $\frac{dw}{dz}$

ดังนั้น $\frac{dw}{dz} = f'(z)$

$$dw = f'(z)\,dz$$

เรียก dw ว่า ดิฟเฟอเรนเชียลของ w ซึ่งคือ ค่าที่เปลี่ยนไปของ w

เรียก dz ว่า ดิฟเฟอเรนเชียลของ z เป็นค่าที่เปลี่ยนไปของ z

กฎการหาอนุพันธ์

ทฤษฎี 1.3.1 ถ้า $f(z)$, $g(z)$ และ $h(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของ z แล้ว

1. $\frac{d}{dz}\{f(z)+g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) + \frac{dg}{dz}g(z) = f'(z) + g'(z)$
2. $\frac{d}{dz}\{f(z)-g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) - \frac{dg}{dz}g(z) = f'(z) - g'(z)$
3. $\frac{d}{dz}\{cf(z)\} = c\frac{d}{dz}f(z) = cf'(z)$; c = ค่าคงที่
4. $\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z) = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$
5. $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{(g(z))^2}$

$$= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$$

6. ถ้า $w = f(t)$ และ $t = g(z)$ แล้ว

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt}\cdot\frac{dt}{dz} = f'(t)\frac{dt}{dz}$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า $w = f(t)$ และ $t = g(r)$ และ $r = h(z)$ แล้ว

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt}\cdot\frac{dt}{dr}\cdot\frac{dr}{dz}$$

7. ถ้า $w = f(z)$ แล้ว $z = f^{-1}(w)$

$$\frac{dw}{dz} = 1\Big/\frac{dz}{dw}$$

8. ถ้า $z = f(t)$ และ $w = g(t)$ แล้ว

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

9. $\frac{dc}{dz} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน

10. $\frac{dz}{dz} = 1$

11. $\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ตัวอย่าง 1

กำหนดให้ $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ จงหา $\frac{dw}{dz}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \frac{(1-z)\frac{d}{dz}(1+z)-(1+z)\frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} \\ &= \frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2} \\ &= \frac{2}{(1-z)^2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2

กำหนดให้ $f(z) = 3z^{-3}$ จงหา $f'(z)$

วิธีทำ

$$f(z) = 3z^{-3}$$

$$f'(z) = 3\frac{dz^{-3}}{dz}$$

$$= 3(-3)z^{-4}$$

$$= -9z^{-4}$$

ตัวอย่าง 3

กำหนดให้ $w = f(z) = z^3 - 2z$ จงหา $f'(-1)$

วิธีทำ

$$f(z) = z^3 - 2z$$

$$f'(z) = 3z^2 - 2$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2$$

$$= 1$$

ตัวอย่าง 4

กำหนดให้ $f(z) = (4z^2 - 2i)^5$ จงหา $f'(z)$

วิธีทำ

$$f(z) = (4z^2 - 2i)^5$$

$$f'(z) = 5(4z^2 - 2i)^4 \frac{d}{dz}(4z^2 - 2i)$$

$$= 5(4z^2 - 2i)^4 (8z)$$

$$= 40z(4z^2 - 2i)^4$$

อนุพันธ์อันดับสูง

ถ้า $w = f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณใดบริเวณหนึ่ง และอนุพันธ์กำหนดโดย $f'(z)$, w' หรือ $\frac{dw}{dz}$ ถ้า $f'(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณนั้นด้วย แล้วอนุพันธ์ของ $f'(z)$ จะเขียนแทนด้วย $f''(z)$, w'' หรือ $\frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{d^2w}{dz^2}$

ทำนองเดียวกัน ถ้าอนุพันธ์อันดับที่ n ของ $f(z)$ มี (exist) เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f^{(n)}(z)$, $w^{(n)}$ หรือ $\frac{d^n w}{dz^n}$ การคำนวณอนุพันธ์อันดับสูงเหล่านี้ทำโดยการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งซ้ำๆ จนได้จำนวนที่ n ตามต้องการ

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน $w = \frac{1+z}{1-z}$

วิธีทำ

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$= \frac{(1-z)\frac{d}{dz}(1+z)-(1+z)\frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-z)^2} = 2(1-z)^{-2}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 2\frac{d}{dz}(1-z)^{-2}$$

$$= -4(1-z)^{-3}\frac{d}{dz}(1-z)$$

$$= \frac{-4}{(1-z)^3}(-1)$$

$$= \frac{4}{(1-z)^3}$$

ทฤษฎี 1.3.2

ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ $\Re$ แล้ว $f'(z)$, $f''(z)$,... เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ $\Re$ ด้วย (นั่นคือ อนุพันธ์อันดับสูงทั้งหมด หาค่าได้ (exist) ใน $\Re$

กฎของโลปิตาล (L' Hospital ' s rule)

ให้ f(z) และ g(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณซึ่งมีจุด z_0 อยู่ และสมมติว่า $f(z_0) = g(z_0) = 0$ แต่ $g'(z_0) \neq 0$ แล้ว กฎของโลปิตาล กล่าวว่า

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

ในกรณีที่ $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$ กฎอาจจะขยาย บางครั้งเราเรียกด้านซ้ายของ สมการในกฎโลปิตาลว่า " รูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form) " ซึ่งอาจมีรูปเป็น $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ และ $\infty - \infty$

จุดเอกฐาน (Singular Points)

ซึ่ง f(z) ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เราจะเรียกว่า จุดเอกฐาน (singular point) ของ f(z) ซึ่งมีหลายรูปแบบดังนี้

1. จุดเอกฐานที่เป็นเอกเทศ (Isolated Singularities)

จุด $z = z_0$ จะเรียกว่า จุดเอกฐานที่เป็นเอกเทศ (isolated singular) ของ f(z) ถ้าเราสามารถหา $\delta > 0$ ซึ่ง $|z - z_0| = \delta$ ปิดล้อมเป็นวงโดยรอบที่ไม่มีจุดเอกฐาน singular อื่นนอกจาก z_0 (นั่นคือ ถ้าไม่สามารถหา δ แบบนี้ได้จะเรียกจุด z_0 ว่า ภาวะเอกฐานที่ไม่เป็นเอกเทศ (non-isolated singularity)

ถ้า z_0 ไม่ใช่จุดเอกฐาน (singular) และเราสามารถหา $\delta > 0$ ซึ่ง $|z - z_0| = \delta$ ปิดล้อมเป็นวงโดยรอบที่ไม่มีจุด singular แล้ว เราเรียก z_0 ว่าจุดสามัญ ordinary ของ f(z)

2. ขั้ว (Poles)

ถ้าเราสามารถหาจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$ แล้ว

ตัวอย่าง 1 $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$ มีขั้วของอันดับ 3 ที่ $z = 2$

ตัวอย่าง 2 $f(z) = \frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$ มีขั้วของอันดับ 2 ที่ $z = 1$ และมีขั้วเชิงเดียวที่ $z = -1$ และ $z = 4$

ถ้า $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ โดยที่ $f(z_0) \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว จะเรียก $z = z_0$ ว่า " zero อันดับ n " ของ $g(z)$ ถ้า $n = 1$ เรียก z_0 ว่า zero เชิงเดียว ในกรณีนี้เรียก z_0 ว่า ขั้วของอันดับ n ของฟังก์ชัน $\frac{1}{g(z)}$

1.4 ฟังก์ชันมูลฐาน

1.4.1 ฟังก์ชัน e^z , sin z , cos z

นิยาม สำหรับ $z = x + iy$ ในเซตจำนวนเชิงซ้อน

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \quad\ldots\ldots\ldots \quad \leftarrow$$

และได้ว่า
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad\ldots\ldots\ldots \quad \uparrow$$

และ
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad\ldots\ldots\ldots \quad \rightarrow$$

เนื่องจาก sin z เป็นฟังก์ชันคี่ และ cos z เป็นฟังก์ชันคู่

$$\sin(-z) = -\sin z$$
$$\cos(-z) = \cos z$$

จาก $\leftarrow$ ถ้า $z = x + 0i$ จะได้

$$e^z = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x$$

ถ้า $z = 0 + yi$ จะได้

$$e^z = \cos y + i\sin y$$

หรือ $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

เรียกสูตรของออยเลอร์

ทฤษฎี 1.4.1 สำหรับทุกๆ จำนวนเชิงซ้อน z_1 , z_2

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

บทแทรก 1) $e^z \neq 0$ สำหรับทุกๆ จำนวนเชิงซ้อน z

2) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

ทฤษฎี 1.4.2 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z , z_1 , z_2 ใดๆ

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

2) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

3) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

ทฤษฎี 1.4.3 ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว จะได้

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \quad ; \quad k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

พิสูจน์ จากกฎของออยเลอร์

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$$

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^z e^{2k\pi i} \\ &= e^z \cdot 1 \end{aligned}$$

$$= \; e^z$$

บทแทรก $e^{z_1} = e^{z_2}$ ก็ต่อเมื่อ $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ สำหรับบาง k ที่เป็นจำนวนเต็ม

ข้อสังเกตุ จากทฤษฎี 1.4.3 คาบของฟังก์ชัน e^z คือ จำนวนเชิงซ้อน $2k\pi i$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม เราเรียกจำนวน $2\pi\, i$ ว่า คาบหลักมูล (fundamental period) ของ e^z

ทฤษฎี 1.4.4 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ

1) $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$; k เป็นจำนวนเต็ม
2) $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\sin(z + 2k\pi) &= \frac{e^{i(z+2k\pi)} - e^{-i(z+2k\pi)}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz+2k\pi i} - e^{-iz+2k\pi i}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \sin z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(z + 2k\pi) &= \frac{e^{i(z+2k\pi)} + e^{-i(z+2k\pi)}}{2} \\
&= \frac{e^{iz+2k\pi i} + e^{-iz-2k\pi i}}{2} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&= \cos z
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต ฟังก์ชัน e^z , $\sin z$, $\cos z$ เป็นฟังก์ชันชนิดมีคาบ (periodic

ทฤษฎี 1.4.5 ฟังก์ชัน e^z , $\sin z$, $\cos z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) และได้ว่า

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

เรานิยามฟังก์ชันเชิงซ้อนตรีโกณมิติอื่นๆ ดังนี้

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้นนี้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ **ยกเว้น** ที่จุดที่ฟังก์ชันไม่มีนิยาม และอนุพันธ์เป็นดังนี้

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\cot z = -\operatorname{cosec}^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{cosec} z = -\operatorname{cosec} z \cot z$$

ตัวอย่าง 1 จงแสดงว่า $e^{(3-4\pi i)} = e^3$

วิธีทำ
$$e^{(3-4\pi i)} = e^3 \cdot e^{-4\pi i}$$
$$= e^3 (\cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi))$$

$$= e^3 (\cos 4\pi - i\sin 4\pi)$$
$$= e^3(1 - i(0))$$
$$= e^3$$

ตัวอย่าง 2 จงหาอนุพันธ์ของ $w = \cos^2(2z + 3i)$

วิธีทำ $\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}(\cos^2(2z+3i))$

$$= \frac{d}{dz}(\cos(2z+3i))^2$$
$$= 2\{\cos(2z + 3i)\}\frac{d}{dz}\{\cos(2z + 3i)$$
$$= 2\{\cos(2z + 3i)\}\{-\sin(2z + 3i)\}\frac{d}{dz}(2z +$$
3i)
$$= 2\{\cos(2z + 3i)\}\{-\sin(2z + 3i)\}(2 + 0)$$
$$= -4\cos(2z + 3i)\sin(2z + 3i)$$

ตัวอย่าง 3 จงหา $\frac{de^{3z}}{dz}$

วิธีทำ $\frac{de^{3z}}{dz} = e^{3z}\frac{d}{dz}(3z)$

$$= 3e^{3z}$$

ตัวอย่าง 4 จงหา $\frac{d}{dz}(\tan 3z)^2$

วิธีทำ $\frac{d}{dz}(\tan 3z)^2 = 2\tan 3z\frac{d}{dz}(\tan 3z)$

$$= 2\tan 3z\sec^2 3z\frac{d}{dz}(3z)$$
$$= 6\tan 3z\sec^2 3z$$

1.5 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic functions)

นิยาม ถ้า $z = e^w$ แล้วเราเขียน $w = \ln z$ เรียก w ว่า ลอการิทึมธรรมชาติ

$= 1$

ดังนั้น $2\pi i$ เป็นลอริทึมธรรมชาติของ 1

จะเห็นว่าฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติเป็นผกผัน(inverse) ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังธรรมชาติ

ถ้าเขียน $w = u + iv$ .... $\leftarrow$

และ $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}$

หรือ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วจะได้

$$z = e^{w} = e^{u+iv}$$

$$= e^{u} \cdot e^{iv}$$

$$= e^{u}(\cos v + i\sin v)$$

แต่ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $e^{u} = r$ และ $v = \theta$

$u = \ln r$ และ $v = \theta$

$\therefore$ จาก $\leftarrow$ จะได้

$$w = \ln r + i\theta$$

หรือ $w = \ln|z| + i\arg z$

นิยาม ลอการิทึมของตัวแปร z เขียนแทนด้วย $\log z$ มีค่าดังนี้

$$\log z = \ln|z| + i\arg z$$

โดยที่ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์

ถ้า $z = x + io$ แล้ว

$$\log z = \ln|x| + i\arg x$$

$$= \ln x + 2k\pi i$$

จะเห็นว่าแต่ละจำนวนเชิงซ้อน $z \neq 0$ จะมีลอการิทึมเป็นจำนวนอนันต์ เพราะฟังก์ชัน $\log z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่า

นิยาม ให้ z = เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ ลอการิทึมสำคัญ z (Principle logarithm of z) เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ Log z มีค่าดังนี้

$$\text{Log } z = \ln|z| + i\text{Arg } z$$

โดยที่ $-\pi < \text{Arg } z \le \pi$

นั่นคือ พิจารณาเฉพาะค่าสำคัญ Arg ที่มีค่าในช่วง $(-\pi , \pi]$ และจากนิยามของ log z และ Log z จะได้

$$\log z = \text{Log } z + 2k\pi i \quad ; \quad k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

เนื่องจาก $\text{Log } z = \ln|z| + i\text{Arg}z$

ถ้า $z = x$ จะได้

$$\begin{aligned}\text{Log } z &= \ln|x| + i\text{Arg } o \\ &= \ln x \text{ ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าจริง}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5 จงหาค่าของ log i

วิธีทำ $\because$

$$\begin{aligned}\log z &= \ln|z| + i\arg z \\ \log i &= \ln|i| + i\arg i \\ &= \ln 1 + i\arg i \\ &= \ln 1 + i(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &= i\pi(2k + \tfrac{1}{2})\end{aligned}$$

ทฤษฎี 1.5.1

ให้ D เป็นอาณาบริเวณที่ได้มาจากระนาบ w โดยการตัดจุดกำเนิดและแกนที่เป็นลบออก แล้วฟังก์ชัน Log z เป็นฟังก์ชันค่าเดียว และเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในอาณาบริเวณ D นอกจากนั้น สำหรับ $z \in D$ เราได้

$$\frac{d}{dz}\text{Log } z = \frac{1}{z}$$

คุณสมบัติของ log z

ให้ z ; z_1 , z_2 เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนใดๆ

1. $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$
2. $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$
3. $\log e^z = z$
4. $e^{\log z} = z$
5. $\log(z^n) = n \log z$ โดยที่ n เป็นจำนวนตรรกยะ

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาค่าของ

1.1 $(3 + 2i) + (-7 - i)$ ตอบ $-4 + i$

1.2 $(8 - 6i) - (-7 + 2i)$ ตอบ $15 - 8i$

1.3 $(5 + 3i) + \{(-1 + 2i) + (7 - 5i)\}$ ตอบ 11

1.4 $(2 - 3i)(4 + 2i)$ ตอบ $14 - 8i$

1.5 $(2 - i)\{(-3 + 2i)(5 - 4i)\}$ ตอบ $8 - 51i$

1.6 $(-1 + 2i)\{(7 - 5i) + (-3 + 4i)\}$ ตอบ $-2 + 9i$

1.7 $\frac{3-2i}{-1+i}$ ตอบ $-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$

1.8 $\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}$ ตอบ $3 - i$

2. กำหนดให้ $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 3 - 2i$ และ $z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ จงหาค่าต่อไปนี้

2.1 $|3z_1 - 4z_2|$ ตอบ $\sqrt{154}$

2.2 $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$ ตอบ $-7 + 3i$

2.3 $(\bar{z}_3)^4$ ตอบ

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2.4 $\left|\frac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i}\right|$ ตอบ 1

3. จงเขียนกราฟต่อไปนี้

3.1 (3 + 4i) + (5 + 2i)

3.2 (6 - 2i) - (2 – 5i)

4. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปเชิงขั้ว

4.1 $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

4.2 –3i

5. จงเขียนกราฟ

5.1 $6(\cos 240^{\circ} + i\sin 240^{\circ})$

5.2 $4e^{3\pi i/5}$

5.3 $2e^{-\pi i/4}$

6. จงหาค่าของ

6.1 $\frac{(2\text{cis}15^{O})^{7}}{(4\text{cis}45^{O})^{3}}$ ตอบ $\sqrt{3}-i$

6.2 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ ตอบ -

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

7. จงหาค่า

7.1 $\lim\limits_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$ ตอบ $\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i$

7.2 $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+i}{z^6+i}$ ตอบ $\frac{1}{3}$

8. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่ใด

8.1 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ ทุกค่า z ยกเว้น $z = \pm i$

8.2 $f(z) = \operatorname{cosec} z$ ทุกค่า z ยกเว้น $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

9. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 $f(z) = 4z^2 - 3z$

9.2 $f(z) = 6z^{-4}$

9.3 $f(z) = (2z^2 - 3i)^3$

9.4 $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$

10. จงหาอนุพันธ์

10.1 $w = \sin^2(2z + 3i)$

10.2 $w = \tan(3z + i)$

10.3 $w = \cos^2(z + 5i)$

10.4 $w = \sec(3z + 2i)$

10.5 $w = e^{-3z}$

10.6 $w = e^{(2z+i)}$

10.7 $w = \operatorname{Log}(3z + 4i)$

10.8 $w = \operatorname{Log}(2z)$

11. ถ้า $w^3 - 3z^2w + 4\operatorname{Log} z = 0$ จงหา $\frac{dw}{dz}$

12. จากโจทย์ข้อ 11. จงหา $\frac{d^2w}{dz^2}$