# บทที่ 8
# สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

เราได้หาผลเฉลยสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวมาแล้ว ในบทนี้จะพิจารณาสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยเริ่มจากสมการที่มีรูปแบบเฉพาะที่สามารถแปลงเป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้

## 8.1 <u>สมการโคชี-ออยเลอร์</u>

สมการโคชี-ออยเลอร์ เป็นสมการเชิงเส้นที่มีรูปแบบดังนี้

$$a_0x^n \frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}x \frac{dy}{dx} + a_ny = g(x) \quad \dots\dots(1)$$

โดยที่ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว

เราสามารถแก้สมการ (1) ได้โดยเปลี่ยนตัวแปรอิสระให้

$$x = e^z$$

$$z = \ln x$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$$

หรือ

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$$

ถ้าให้ $D = \frac{d}{dx}$ และ $D_1 = \frac{d}{dz}$ จาก (2) สามารถเขียนได้เป็น

$$x\,Dy = D_1y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left( \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right)$$

นั่นคือ

$$x^2D^2y = (D_1^2 - D_1)y = D_1(D_1 - 1)y$$

ทำนองเดียวกัน

$$x^3D^3y = D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2)y$$

$$\vdots$$

$$x^nD^ny = D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2) \ldots (D_1 - n + 1)y$$

จากผลที่ได้นี้ แทนในสมการ (1) จะได้สมการใหม่คือ

$$[a_0D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2)\ldots(D_1-n+1)+a_1D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2)\ldots(D_1-n+2)+\ldots$$
$$+ a_{n-1}D_1 + a_n]\, y = G(z) \qquad \ldots\ldots(2)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มี z เป็นตัวแปรอิสระ ดังนั้นเราสามารถแก้สมการ (2) นี้ได้

**ตัวอย่างที่ 1** จงแก้สมการ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x \qquad \ldots\ldots(3)$$

**วิธีทำ** เนื่องจากสมการ (3) เป็นสมการโคชี-ออยเลอร์
ดังนั้นเปลี่ยนตัวแปร ให้

$$x = e^z$$

จะทำให้ได้สมการ (3) ใหม่คือ

$$(D_1(D_1 - 1) - 2D_1 + 2)y = ze^z$$

หรือ

$$(D_1^2 - 3D_1 + 2)y = ze^z$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

<u>หา $y_c$</u> รากสมการช่วยคือ 1,2 ดังนั้น

$$y_c = c_1e^z + c_2e^{2z}$$

<u>หา $y_p$</u>

$$y_p = \frac{1}{D_1^2 - 3D_1 + 2} ze^z$$

$$= e^z \frac{1}{(D_1 + 1)^2 - 3(D_1 + 1) + 2} z$$

$$= e^z \frac{1}{D_1^2 - D_1} z$$

$$= -e^z \frac{1}{D_1} (1 + D_1)z$$

$$= -e^z \frac{1}{D_1} (z + 1)$$

$$= -e^z (\frac{z^2}{2} + z)$$

แต่ $y = y_c + y_p$

$$= c_1e^z + c_2z^{2z} - e^z ( \frac{z^2}{2} + z)$$

แทนค่า $e^z = x$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1x + c_2x^2 - x(\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x)$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงแก้สมการ $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{4}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{5}{x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^3} = 1$

<u>วิธีทำ</u> คูณตลอดสมการโจทย์ ด้วย $x^3$ จะได้

$$(x^3D^3 - 4x^2D^2 + 5xD - 2)y = x^3$$

ซึ่งเป็นสมการโคชี-ออยเลอร์ เปลี่ยนตัวแปรอิสระให้

$$x = e^z$$

จะได้

$$[D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2) - 4D_1(D_1 - 1) + 5D_1 - 2]y = e^{3z}$$

หรือ

$$(D_1^3 - 7D_1^2 + 11D_1 - 2)y = e^{3z}$$

<u>หา $y_c$</u>

สมการช่วยคือ

$$(m - 2)(m^2 - 5m + 1) = 0$$

$$m = 2, \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2} i$$

$$y_c = c_1e^{2z} + e^{5z/2} [c_2\cos \frac{\sqrt{21}}{2} z + c_3 \sin \frac{\sqrt{21}}{2} z]$$

<u>หา $y_p$</u>

$$y_p = \frac{1}{(D_1 - 2)(D_1^2 - 5D_1 + 1)} e^{3z}$$

$$= \frac{1}{(3 - 2)(9 - 5 + 1)} e^{3z} = \frac{1}{5} e^{3z}$$

ดังนั้น

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1e^{2z} + e^{5z/2} [c_2 \cos \frac{\sqrt{21}}{2} z + c_3 \sin \frac{\sqrt{21}}{2} z] + \frac{1}{5} e^{3z}$$

แต่ $e^z = x$

$$y = c_1x^2 + x^{5/2} [c_2\cos(\frac{\sqrt{21}}{2} \ln x) + c_3\sin(\frac{\sqrt{21}}{2} \ln x)] + \frac{x^3}{5}$$

จากสมการ (1) ถ้า $g(x) = 0$ จะได้

$$a_0x^n \frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

เพื่อให้ง่ายในการทำความเข้าใจ พิจารณากรณี $n = 2$ นั่นคือสมการอันดับสอง

$$L[y] = x^2y'' + axy' + by = 0 \qquad \ldots\ldots(4)$$

ซึ่งมีวิธีหาผลเฉลยที่น่าสนใจอีกลักษณะหนึ่งดังนี้

เนื่องจาก ส.ป.ส. ของ $y^{(k)}$ ใน $L[y]$ เป็นค่าคงตัวคูณกับ $x^k$ และ $x^r$ เป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติดังกล่าว (เมื่อ $r$ เป็นค่าคงตัว) เช่น

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$$

ดังนั้นเราสมมติผลเฉลยของสมการ (4) คือ

$$y = x^r$$

จากสมการ (4)

$$L[x^r] = x^2(x^r)'' + ax(x^r)' + bx^r$$

$$= [r(r-1) + ar + b]x^r = 0$$

ให้ $F(r) = r(r-1) + ar + b$

จะได้

$$L[x^r] = F(r)x^r = 0 \qquad \ldots\ldots(5)$$

ถ้า $r$ เป็นรากของสมการ

$$F(r) = 0 \qquad \ldots\ldots(6)$$

แล้ว $L[x^r] = 0$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้ารากสมการ (6) เป็นรากจริงที่ไม่ซ้ำกัน นั่นคือ $r_1 \neq r_2$ จะได้ผลเฉลยคือ

$$y_1 = x^{r_1} \text{ และ } y_2 = x^{r_2}$$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้ารากสมการ (6) เป็นรากจริงที่ซ้ำกัน นั่นคือ $r_1 = r_2$ ซึ่งกรณีนี้จะพบว่า ไม่เพียงแต่ $F(r) = 0$ เท่านั้น

$F'(r) = 0$ ด้วย

(เพราะว่า เมื่อรากซ้ำกัน = $r_1$ จะพบว่า $F(r) = (r - r_1)^2$ ทำให้

$$F'(r) = 2(r - r_1))$$

หาอนุพันธ์สมการ (5) เทียบกับ r

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = L(\frac{\partial}{\partial r} x^r) = L[x^r \ln x]$$

$$= [F'(r)x^r + F(r)x^r \ln x]$$

ซึ่งขวามือของสมการข้างต้นนี้เป็นศูนย์ เมื่อ $r = r_1$ ผลที่ได้คือ

$$L[x^r \ln x] = 0$$

นั่นคือ $y_2 = x^{r_1} \ln x$

**ตัวอย่างที่ 3** จงแก้สมการ $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

**วิธีทำ** ให้ผลเฉลยคือ $y = x^r$

แทนในสมการโจทย์ จะได้

$$[r(r - 1) - 2r + 2]x^r = 0$$

นั่นคือ

$$r(r - 1) - 2r + 2 = 0$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r = 1,2$$

ดังนั้น $y_1 = x^{r_1} = x$

$$y_2 = x^{r_2} = x^2$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

$$y = c_1x + c_2x^2$$

**ตัวอย่างที่ 4** จงแก้สมการ $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ , $x > 0$

**วิธีทำ** ให้ผลเฉลยคือ $y = x^r$

แทนในสมการโจทย์ จะได้

$$[r(r - 1) + 5r + 4]x^r = 0$$

จะได้

$$r(r-1)+5r+4=0$$

หรือ

$$r^2+4r+4=0$$

$$r=-2,-2$$

ซึ่งเราทราบว่า $L[x^r]=0$ และ $L[\frac{\partial}{\partial r}x^r]=0$ ด้วย

ดังนั้น $y_1=x^{-2}$ , $y_2=x^{-2}\ln x$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\ln x$$

หรือ

$$y=x^{-2}(c_1+c_2\ln x)$$

# แบบฝึกหัดที่ 8.1

จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x \dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ , $y(2) = 0$ , $y'(2) = 4$

2. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = 4x - 8$ , $y(1) = 4$, $y'(1) = -1$

3. $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 6x \dfrac{dy}{dx} + 18y = 0$

4. $(x^2D^2 + xD + 4)y = 2x \ln x$

5. $(x^2D^2 - 2xD + 2)y = \dfrac{1}{x}$

6. $(xD^2 + 2D)y = 6x$

# คำตอบ

1. $y = -2x^2 + x^3$

2. $y = x^{-1} + x^2 - 2x + 4$

3. $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^3 + c_3 x^{-2}$

4. $y = c_1 \sin(\ln x^2) + c_2 \cos(\ln x^2) + \frac{x \ln x^2}{5} - \frac{4x}{25}$

5. $y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{x^{-1}}{6}$

6. $y = c_1 + c_2 x^{-1} + \frac{6x^2}{5}$

## 8.2 อนุกรมกำลัง

การแก้สมการเชิงเส้นสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร นอกจากที่กล่าวในเรื่องของสมการโคชี-ออยเลอร์ แล้วยังสามารถใช้วิธีการสมมติผลเฉลยให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอีกด้วย เพื่อความสะดวกจะพิจารณาแต่สมการอันดับสองเท่านั้น ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่จะกล่าวถึงก็จะไม่พิสูจน์ เนื่องจากต้องใช้ความรู้ขั้นสูง

**บทนิยาม** อนุกรมกำลังคืออนุกรมของฟังก์ชันซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad .....(1)$$

โดย $x_0$ เป็นค่าคงตัวเรียกว่าจุดศูนย์กลางของการกระจาย และเรียกอนุกรมนี้ว่าอนุกรมกำลังรอบจุด $x_0$

**บทนิยาม** ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับ ณ จุด $x_0$ เราเรียกอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad .....(2)$$

ว่าอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชัน f ณ จุด $x_0$

ถ้า $x_0 = 0$ เราเรียกอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad .....(3)$$

ว่าอนุกรมแมคลอรีน

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน f นิยามในช่วงซึ่งประกอบด้วยจุด $x_0$ เรียกว่าฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x_0$ ถ้าอนุกรมเทเลอร์

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

หาได้และลู่เข้าสู่ f(x) สำหรับทุก ๆ x ในช่วงดังกล่าว

**ตัวอย่างที่ 1** $e^x$, sin x, cos x เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุก ๆ จุด

$x^2 - 4x + 3$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุก ๆ จุด

$\dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกจุด ยกเว้นที่ x = 1 และ x = 3

**ข้อสังเกต** จุดที่ทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์ จะทำให้ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

## 8.3 ผลเฉลยรอบจุดสามัญ

**บทนิยาม** จุด $x = x_0$ เรียกว่า<u>จุดสามัญ</u> ของสมการเชิงเส้นอันดับสอง

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad \ldots(1)$$

ถ้าฟังก์ชัน P(x) และ Q(x) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = x_0$ และถ้าฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่ง ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = x_0$ แล้ว จุด $x = x_0$ เรียกว่า<u>จุดเอกฐาน</u>ของสมการ (1)

**ตัวอย่างที่ 1** พิจารณาสมการ $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

จัดรูปให้เหมือนสมการ (1) ได้

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0$$

ในที่นี้ $P(x) = x$, $Q(x) = -\dfrac{2}{x}$

จะพบว่า P(x) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ที่ทุก ๆ จุด

แต่ Q(x) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดยกเว้น x = 0

ดังนั้นสมการนี้มีจุดสามัญทุกค่า x ยกเว้นที่ x = 0 และได้ว่า x = 0 เป็นจุดเอกฐานของสมการข้างต้น

**ตัวอย่างที่ 2** พิจารณาสมการ $y'' + (x - 1)y' + (x^2 + 1)y = 0$

ในที่นี้ $P(x) = x - 1$ และ $Q(x) = x^2 + 1$

ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุก ๆ จุด ดังนั้นสมการนี้มีจุดสามัญทุก ๆ ค่า x

**ทฤษฎีบท** ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดสามัญของสมการ (1) แล้วสมการ (1) จะมีผลเฉลยสองผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันอยู่ในรูปของอนุกรมกำลังรอบจุด $x_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad .....(2)$$

และอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าในช่วง $|x - x_0| < R \quad (R > 0)$

**ตัวอย่างที่ 3** จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุด $x = 0$ ของสมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \qquad .....(3)$$

**วิธีทำ** ในที่นี้ $P(x) = 0$, $Q(x) = 4$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุก ๆ จุด ให้ผลเฉลยอยู่ในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด $x = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad .....(4)$$

หาอนุพันธ์ถึงอันดับสอง จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

และ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n - 1)a_n x^{n-2}$$

แทนค่าเป็นสมการ (3) จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

เพื่อที่จะเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกเดียว ต้องทำให้เลขชี้กำลังเท่ากัน เราจะเปลี่ยนเลขชี้กำลัง $n - 2$ ในพจน์แรกให้เป็น $n$ โดยแทนค่า $m = n - 2$ หรือ $n = m + 2$ เนื่องจาก $n = 0$ จะทำให้ $m = 2$ เพราะฉะนั้น

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} x^m + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

เปลี่ยนค่า $m$ กลับเป็น $n$ อีกครั้ง และเนื่องจาก $m = -2,-1$ พจน์แรกจะเป็นศูนย์จึงได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 4a_n]x^n = 0$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ต้องเป็นศูนย์

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 4a_n = 0 \; , \; n \geq 0$$

หรือ

$$a_{n+2} = \frac{-4a_n}{(n+2)(n+1)} \; , \; n \geq 0 \qquad \qquad .....(5)$$

เรียกสมการ (5) นี้ว่าสูตรเวียนบังเกิด ซึ่งเมื่อแทนค่า $n = 0,1,2,...$ แล้วจะได้สัมประสิทธิ์ $a_i$ ดังนี้

$$a_2 = \frac{-4a_0}{2\cdot 1} \qquad a_3 = \frac{-4a_1}{3\cdot 2}$$

$$a_4 = \frac{-4a_2}{4\cdot 3} \qquad a_5 = \frac{-4a_3}{5\cdot 4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{2k} = \frac{-4a_{2k-2}}{2k(2k-1)} \qquad a_{2k+1} = \frac{-4a_{2k-1}}{(2k+1)(2k)}$$

จะพบว่า $a_i$ แบ่งเป็นพวกเลขคู่และเลขคี่ เราสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้โดยคูณ $a_i$ เหล่านี้เข้าด้วยกัน

$$a_2a_4\ldots a_{2k} = \frac{(-1)^k4^k}{(2k)!}\, a_0a_2\ldots a_{2k-2}$$

หรือ

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k4^k}{(2k)!}\, a_0, \quad k \geq 1 \qquad \ldots\ldots(6)$$

และ

$$a_3a_5\ldots a_{2k+1} = \frac{(-1)^k4^k}{(2k+1)!}\, a_1a_3\ldots a_{2k-1}$$

หรือ

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k4^k}{(2k+1)!}\, a_1\ , \ k \geq 1 \qquad \ldots\ldots(7)$$

แทน $a_i$ ในสมการ (4) จะได้

$$y = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + a_1x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$$

แต่ $a_{2k}$ และ $a_{2k+1}$ เป็นไปตามสมการ (6) และ (7) ดังนั้น

$$y = a_0\left[\ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k4^k}{(2k)!}\, x^{2k}\ \right] + a_1\left[\ x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k4^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\ \right]$$

หรือ

$$y = a_0\left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!}\right] + \frac{1}{2} a_1\left[2x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] \quad .....(8)$$

โดยที่อนุกรมทั้งสองในสมการ (8) ก็คืออนุกรมแมคลอรีนของฟังก์ชัน cos 2x และ sin 2x นั่นเอง เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$y = a_0 \cos 2x + \frac{1}{2} a_1 \sin 2x$$

**ตัวอย่างที่ 4** จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น

$$(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad .....(9)$$

$$y(0) = 4$$
$$y'(0) = 6 \quad .....(10)$$

**วิธีทำ** ในที่นี้ $P(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$ และ $Q(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกจุดยกเว้น $x = \pm 1$

ให้ผลเฉลยของสมการ (9) คือ

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad .....(11)$$

หาอนุพันธ์ถึงอันดับสอง จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad .....(12)$$

และ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

แทนในสมการ (9) จะได้

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Big| n-2 = n \qquad\qquad \Big| n+1 = n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - [2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n]$$

$$+ 3[a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^2] + [a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n] = 0$$

$$-2a_2 + (a_0 + 3a_1 - 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} [-(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1}]x^n = 0$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์ต้องเป็นศูนย์

$$-2a_2 = 0$$

$$a_0 + 3a_1 + 6a_3 = 0$$

และ

$$-(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1} = 0 \quad , \quad n \geq 2$$

ดังนั้น

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1$$

และสูตรเวียนบังเกิด

$$a_{n+2} = \frac{n(n+2)a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad , \ n \geq 2$$

แทนค่า $n = 2,3,4,\ldots$ จะได้

$$a_4 = \frac{8a_2 + a_1}{12} = \frac{1}{12} a_1$$

$$a_5 = \frac{15a_3 + a_2}{20} = \frac{1}{8} a_0 + \frac{3}{8} a_1$$

.

.

แทนค่า $a_i$ ในสมการ (11) จะได้

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2}\right)x^3 + \frac{a_1}{12} x^4 + \left(\frac{a_0}{8} + \frac{3a_1}{8}\right)x^5 + \ldots$$

หรือ

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{8} x^5 + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{3}{8} x^5 + \ldots\right) \qquad \ldots\ldots(13)$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการโจทย์

จากเงื่อนไขตามสมการ (10)

แทน $x = 0$ ในสมการ (11) จะได้ $a_0 = 4$

แทน $x = 0$ ในสมการ (12) จะได้ $a_1 = 6$

แทนค่า $a_0$ และ $a_1$ ในสมการ (13) จะได้ผลเฉลย

$$y = 4\left(1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{8} x^5 + \ldots\right) + 6\left(x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{3}{8} x^5 + \ldots\right)$$

หรือ

$$y = 4 + 6x + \frac{11}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{11}{3} x^5 + \ldots$$

**ตัวอย่างที่ 5** จงแก้สมการ $y'' + x^2y' - 4xy = 0$ ในรูปอนุกรมกำลัง

**วิธีทำ** ในที่นี้ $P(x) = x^2$ และ $Q(x) = -4x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุด ให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{.....(14)}$$

หาอนุพันธ์ $y'$ และ $y''$ แล้วแทนค่าในโจทย์ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} - 4x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-4)a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Big| n+1 = n-2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-7)a_{n-3} x^{n-2} = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-7)a_{n-3} x^{n-2} = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1)a_n + (n-7)a_{n-3}]x^{n-2} = 0$$

ดังนั้น

$$a_2 = 0$$

และ สูตรเวียนบังเกิด

$$-n(n-1)a_n + (n-7)a_{n-3} = 0$$

$$a_n = -\frac{(n-7)}{n(n-1)} a_{n-3}, \quad n \geq 3$$

แทนค่า n = 3,4,5, จะได้

$$a_3 = -\frac{-4}{3\cdot 2} a_0 \qquad a_4 = -\frac{-3}{4\cdot 3} a_1 \qquad a_5 = -\frac{-2}{5\cdot 4} a_2 = 0$$

$$a_6 = -\frac{-1}{6\cdot 5} a_3 \qquad a_7 = -\frac{0}{7\cdot 6} a_4 = 0 \qquad a_8 = 0$$

$$a_9 = -\frac{2}{9\cdot 8} a_6 \qquad a_{10} = -\frac{3}{10\cdot 9} a_7 = 0 \qquad a_{11} = 0$$

.                .

.                .

$$a_{3k} = -\frac{3k-7}{3k(2k-1)} a_{3k-3} \quad a_{3k+1} = 0,\ k \geq 2 \quad a_{3k+2} = 0, k \geq 1$$

ดังนั้น

$$a_3a_6a_9\ldots a_{3k} = \frac{(-1)^k[(-4)(-1)\cdot 2\ldots(3k-7)]}{[3\cdot 6\cdot 9\ldots 3k][2\cdot 5\cdot 8\ldots(3k-1)]} a_0a_3a_6\ldots a_{3k-3}$$

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k[(-4)(-1)2\ldots(3k-7)]}{[3.6.9\ldots.3k][2.5.8\ldots(3k-1)]} a_0 \;;\; k \geq 1$$

แทนค่า $a_i$ ในสมการ (14) จะได้

$$y = a_0 + a_1x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k[(-4)(-1)\cdot 2\ldots(3k-7)]}{[3.6.9\ldots.3k][2.5.8\ldots(3k-1)]} a_0x^{3k} + \frac{1}{4} a_1x^4$$

$$= a_0[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k[(-4)(-1)2\ldots(3k-7)]x^{3k}}{[3.6.9\ldots.3k][2.5.8\ldots(2k-1)]}] + a_1(x + \frac{1}{4}x^4)$$

**ตัวอย่างที่ 6** จงแก้สมการในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด 1 จากปัญหาต่อไปนี้

$$xy'' + y' + 2y = 0 \qquad .....(15)$$

$$y(1) = 1$$

$$y'(1) = 2 \qquad .....(16)$$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $x = 1$ เป็นจุดสามัญของสมการ (15)

ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$

แต่เพื่อความสะดวกเราเปลี่ยนตัวแปรอิสระให้

$$x - 1 = t$$

ดังนั้นจากโจทย์ จะได้ปัญหาใหม่คือ

$$(t+1)\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 0 \qquad .....(17)$$

และ

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 2 \qquad .....(18)$$

ซึ่ง $t = 0$ เป็นจุดสามัญของสมการ (17)

ดังนั้นให้ผลเฉลย

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad .....(19)$$

หาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dt}$ , $\frac{d^2y}{dt^2}$ แล้วแทนในสมการ (17)

$$(t+1)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} na_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^n = 0$$

$$\Big|\, n-2 = n-1 \qquad\qquad \Big|\, n = n-1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)na_{n+1} t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} t^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + [2a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)na_{n+1} t^{n-1}] + [a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n t^{n-1}]$$

$$+ [2a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} t^{n-1}] = 0$$

$$2a_0 + a_1 + 2a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n + n(n+1)a_{n+1} + na_n + 2a_{n-1}]t^{n-1} = 0$$

นั่นคือ

$$a_2 = -a_0 - \frac{a_1}{2}$$

และ $n(n-1)a_n + n(n+1)a_{n+1} + na_n + 2a_{n-1} = 0 \ , \quad n \geq 2$

หรือ $$a_{n+1} = \frac{-n^2 a_n - 2a_{n-1}}{n(n+1)} \ , \quad n \geq 2$$

แทนค่า $n = 2,3,4,\ldots$ จะได้

$$a_3 = \frac{-4a_2 - 2a_1}{6} = \frac{-4(-a_0 - a_{1/2} - 2a_1}{6} = \frac{2}{3} a_0$$

$$a_4 = \frac{-9a_3 - 2a_2}{12} = \frac{-9(2a_0/3) - 2(-a_0 - a_1/2)}{12} = \frac{a_1 - 4a_0}{12}$$

$$a_5 = \frac{-16a_4 - 2a_3}{20} = \frac{-a_1}{15} + \frac{a_0}{5}$$

.

.

แทนค่า ส.ป.ส. $a_i$ ที่ได้ในสมการ (19)

$$y = a_0 + a_1 t + (-a_0 - \frac{a_1}{2})t^2 + \frac{2}{3} a_0 t^3 + (\frac{a_1 - 4a_0}{12}) t^4$$

$$+ (\frac{-a_1}{15} + \frac{a_0}{5})t^5 + \ldots$$

$$= a_0(1 - t^2 + \frac{2}{3} t^3 - \frac{1}{3} t^4 + \frac{1}{5} t^5 + \ldots )$$

$$+a_1(t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{12} t^4 - \frac{1}{15} t^5 + \ldots )$$

จากเงื่อนไขตามสมการ (18) จะได้ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 2$
ดังนั้น

$$y = (1 - t^2 + \frac{2}{3} t^3 - \frac{1}{3} t^4 + \frac{1}{3} t^5 + \ldots) + 2(t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{12} t^4 - \frac{1}{15} t^5 + \ldots)$$

$$= 1 + 2t - 2t^2 + \frac{2}{3} t^3 - \frac{1}{6} t^4 + \frac{1}{15} t^5 + \ldots$$

แต่ $t = x - 1$ เพราะฉะนั้นผลเฉลยที่ต้องการคือ

$$y = 1 + 2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{2}{3} (x-1)^3 - \frac{1}{6} (x-1)^4 + \frac{1}{15} (x-1)^5 + \ldots$$

# แบบฝึกหัดที่ 8.3

จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิด สำหรับข้อ 1 - 7

1. $y'' + 3xy' + 3y = 0$

2. $(1 - 4x^2)y'' + 8y = 0$

3. $(x^2 + 4)y'' + 2xy' - 12y = 0$

4. $(x^2 + 4)y'' + 6xy' + 4y = 0$

5. $y'' + xy' + 3y = x^2$

6. $y'' - xy' - y = 0$ , $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

7. $(x^2 + 1)y'' + xy' + 2xy = 0$ , $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

8. $y'' + (x - 3)y' + y = 0$ รอบจุด $x = 2$

# คำตอบ

1. $y = a_0[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k x^{2k}}{2^k k!}] + a_1[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k x^{2k+1}}{3.5.7\ldots(2k+1)}]$

2. $y = a_0(1 - 4x^2) + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} x^{2k+1}}{4k^2 - 1}$

3. $y = a_0[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k (k+1) x^{2k}}{2^{2k}(2k-1)(2k-3)}] + a_1(x + \frac{5}{12} x^3)$

4. $y = a_0[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1) x^{2k}}{2^{2k}}] + a_1[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+3) x^{2k+1}}{3 \cdot 2^{2k}}]$

5. $y = -\frac{2}{15} + \frac{1}{5} x^2 + a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1) x^{2k}}{2^k k!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k )(k+1) x^{2k+1}}{1.3.5\ldots(2k+1)}$

6. $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2.4.6\ldots(2n)]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$

7. $y = 2 + 3x - \frac{7x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + \frac{21x^5}{40} + \ldots$

8. $y = a_0[1 - \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{12}(x-2)^4 + \frac{1}{20}(x-2)^5 + \ldots$

$+ a_1[(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^4 + \ldots]$

## 8.4 ผลเฉลยรอบจุดเอกฐาน 1

**บทนิยาม** ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดเอกฐานของสมการ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

และฟังก์ชัน $(x - x_0)P(x)$, $(x - x_0)^2Q(x)$

ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด $x_0$ แล้วเราเรียกจุด $x = x_0$ ว่า<u>จุดเอกฐานปกติ</u>ของสมการ (1) สำหรับจุดเอกฐานที่ไม่ใช่จุดเอกฐานปกติเรียกว่า<u>จุดเอกฐานไม่ปกติ</u>

**ตัวอย่างที่ 1** พิจารณาสมการ $2x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ ......(2)

จัดสมการใหม่เป็น

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{(x^2 - 1)}{2x^2}y = 0$$

ในที่นี้ $P(x) = \frac{1}{2x}$ และ $Q(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$

จะพบว่า $x = 0$ เป็นจุดเอกฐาน และฟังก์ชัน

$$xP(x) = \frac{1}{2}$$

$$x^2Q(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ $x = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (2)

**ตัวอย่างที่ 2** พิจารณาสมการ

$$x(x - 1)^2(x + 2)y'' + x^2y' - (x^3 + 2x - 1)y = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

จัดสมการใหม่

$$y'' + \frac{x}{(x - 1)^2(x + 2)}y' - \frac{(x^3 + 2x - 1)}{x(x - 1)^2(x + 2)}y = 0$$

ในที่นี้ $P(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)}$ และ

$$Q(x) = -\frac{(x^3 + 2x - 1)}{x(x-1)^2(x+2)}$$

จะพบว่า $x = 0, 1, -2$ เป็นจุดเอกฐาน

เนื่องจาก

$$xP(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

และ $$x^2Q(x) = \frac{-x(x^3 + 2x - 1)}{(x-1)^2(x+2)}$$

ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด 0 ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (3)

ทำนองเดียวกัน จะพบว่า

$(x+2)P(x)$ และ $(x+2)^2Q(x)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด $-2$ ดังนั้น $x = -2$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (3) แต่

$(x-1)P(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด 1

ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปกติของสมการ (3)

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (1) แล้วสมการ (1) จะมีผลเฉลยอย่างน้อยหนึ่งผลเฉลยซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+r} \qquad \text{.....(4)}$$

โดยที่ $r$ เป็นค่าคงตัวที่จะต้องกำหนด และ $0 < |x - x_0| < R \quad (R > 0)$

การหาผลเฉลยกรณีนี้มีวิธีการเหมือนกับกรณีจุดสามัญกล่าวคือต้องหา ส.ป.ส. $a_n$ แต่ที่เพิ่มมาคือต้องหา $r$ ด้วยซึ่งเรียกวิธีการนี้ว่าวิธี<u>โฟรเบนิอุส</u> เพื่อเป็นเกียรติประวัติกับผู้คิดค้น

ให้ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+r}$

หาอนุพันธ์

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n(x - x_0)^{x+r-1}$$

และ $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n(x - x_0)^{n+r-2}$

แทนในสมการ (1) แล้วจัดรูปจะได้รูปแบบ

$$A_0(x - x_0)^{r+k} + A_1(x - x_0)^{r+k+1} + A_2(x - x_0)^{r+k+2} + \ldots = 0$$

โดยเทียบ ส.ป.ส.

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = 0$$

ซึ่งจะพบว่ากรณี $A_0 = 0$

จะสามารถกำหนดค่า $r$ ได้ จึงเรียกสมการ $A_0 = 0$ ว่าสมการดัชนี ในตัวอย่างต่อไปจะเห็นได้ชัดเจนว่าสมการดัชนีได้จาก ส.ป.ส. ของพจน์ $(x - x_0)$ ที่มีเลขชี้กำลังต่ำสุด

**ตัวอย่างที่ 3** จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุด $x = 0$ ของสมการ

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 + \frac{x}{2})\frac{dy}{dx} + xy = 0 \qquad \ldots\ldots(5)$$

**วิธีทำ** จากโจทย์

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{2x + 1}{2x})\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0$$

ในที่นี้ $P(x) = \dfrac{2x + 1}{2x}$ และ $Q(x) = \dfrac{1}{x}$

ซึ่งมีจุด $x = 0$ เป็นจุดเอกฐาน

พิจารณา

$$xP(x) = \frac{2x + 1}{2} \quad \text{และ} \quad x^2Q(x) = x$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด $x = 0$

แสดงว่า $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (5)

ให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

หาอนุพันธ์

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1}$$

และ

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r-2}$$

แทนในกสมาร (5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r+1}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

เปลี่ยนเลขชี้กำลังให้เท่ากัน

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} (n + r - 1)a_{n-1} x^{n+r}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$[r(r-1)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}(n-r)(n+r-1)a_nx^{n+r}] + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r}$$

$$+ \frac{1}{2}[\ ra_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}] + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r} = 0 \quad ,$$

หรือ

$$[r(r-1)a_0 + \frac{1}{2}ra_0]x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)a_n + (n+r-1)a_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{2}(n+r)a_n + a_{n-1}\ ]x^{n+r} = 0 \qquad .....(6)$$

ซึ่งสมการดัชนีคือ

$$r(r-1)a_0 + \frac{1}{2}ra_0 = 0 \qquad .....(7)$$

เนื่องจาก $a_0 \neq 0$

$$r - \frac{1}{2}r = 0$$

$$r(r - \frac{1}{2}) = 0$$

ดังนั้น $r_1 = \frac{1}{2}$ , $r_2 = 0$

และจากสมการ (6) สำหรับ $n \geq 1$

$$(n+r)(n+r-1)a_n + (n+r-1)a_{n-1} + \frac{1}{2}(n+r)a_n + a_{n-1} = 0$$

หรือ

$$(n+r)(n+r-\frac{1}{2})a_n + (n+r)a_{n-1} = 0$$

$$a_n = -\frac{1}{n+r-\frac{1}{2}}a_{n-1} \ , \quad n \geq 1 \qquad .....(8)$$

สำหรับ $r = \frac{1}{2}$ จะได้

$$a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1}$$

ใช้สูตรเวียนบังเกิดตามสมการ (8) สำหรับ n - 1, n - 2,...,1 จะได้

$$a_n = \frac{-1}{n} \cdot \frac{-1}{n-1} \cdots \frac{-1}{1} a_0$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} a_0$$

ดังนั้น ผลเฉลยหนึ่งคือ (เมื่อ $r_1 = \frac{1}{2}$)

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_0 x^{n+1/2}$$

$$= a_0 x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

$$= a_0 \sqrt{x}\, e^{-x}$$

สำหรับ $r = 0$ จากสมการ (8) จะได้

$$a_n = -\frac{1}{n - \frac{1}{2}} a_{n-1}$$

ใช้สูตรเวียนบังเกิด สำหรับ n - 1, n - 2,...,1 จะได้

$$a_n = \frac{-1}{n - \frac{1}{2}} \cdot \frac{-1}{n - \frac{3}{2}} \cdots \frac{-1}{\frac{1}{2}} a_0$$

$$= \frac{(-1)^n a_0}{(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

ดังนั้นผลเฉลยสำหรับ $r_2 = 0$ คือ

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} x^n$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} x^n$$

ผลเฉลยทั่วไปของโจทย์ในสมการ (5) คือ $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_2y_2$ นั่นคือ

$$y(x) = Ax^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} x^n$$

จากสมการ (1)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

ถ้าพิจารณาหาผลเฉลยสมการนี้ ณ จุดเอกฐานปกติ $x = 0$

ให้ $$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1} = x^{r-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} = x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^n$$

เนื่องจาก $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ ดังนั้น $x\ P(x)$ แล้ว $x^2\ Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 0$ นั่นคือ

$$x P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \ , \ x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

พิจารณา

$$P(x)y' = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n [ x^{r-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^n ]$$

$$= x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} [ \sum_{k=0}^{\infty} p_{n-k}(k + r)a_k ]x^n$$

( เพราะว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n [ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n ] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

โดย $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

ดังนั้น $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$ )

พิจารณา

$$Q(x)y = x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n [ x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ]$$

$$= x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} [ \sum_{k=0}^{\infty} q_{n-k} a_k ]x^n$$

แทนค่าในสมการ (1) จะได้

$$x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^n + x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} [ \sum_{k=0}^{\infty} p_{n-k}(k + r)a_k ]x^n$$

$$+ x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} [ \sum_{k=0}^{\infty} q_{n-k} a_k ]x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{\infty} \{p_{n-k}(k+r) + q_{n-k}\}a_k ]x^{n+r-2} = 0 \qquad .....(9)$$

ถ้า $n = 0$ จะได้ $x^{r-2}$ ซึ่งเป็นพจน์ที่เลขชี้กำลังมีค่าน้อยที่สุด เทียบ ส.ป.ส. ได้

$$r(r-1) + rp_0 + q_0 = 0 \qquad .....(10)$$

ถ้า $n \geq 1$ เทียบ ส.ป.ส. จะได้

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{\infty} (p_{n-k}(k+r) + q_{n-k})a_k = 0$$

รวมพจน์ $a_n$ เข้าด้วยกัน

$$[(n+r)(n+r-1) + p_0(n+r) + q_0]a_n = -\sum_{k=0}^{\infty} [p_{n-k}(k+r) + q_{n-k}]a_k \qquad . . ...(n)$$

จากสมการ (10) ซึ่งเรียกว่าสมการดัชนี

$$F(r) = r(r-1) + rp_0 + q_0$$

$$= r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0 \qquad .....(12)$$

จากสมการ (12) สามารถแก้สมการหาค่า $r_1$ และ $r_2$ ได้ สมมติให้ $r_1 > r_2$

จากสมการ (11) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$F(n+r)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k \; ; n \geq 1$$

$$a_n(r) = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k \; ; n > 1}{F(n+r)} \qquad .....(13)$$

จาก (13) แสดงว่า $a_n$ ขึ้นกับค่า $r$ และ $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ ยิ่งกว่านั้น $F(1+r), F(2+r), ..., F(n+r)$ ต้องไม่เป็นศูนย์ด้วย เราทราบว่า $F(r) = 0$ เมื่อ $r = r_1$ และ $r = r_2$ แต่ $r_1 + n \neq r_1$ หรือ $r_2$ สำหรับ $n > 1$ (เพราะว่า $r_1 > r_2$) ฉะนั้น $F(r_1 + n) \neq 0$ สำหรับ $n > 1$ และจะได้ผลเฉลยหนึ่งเป็น

$$y_1(x) = x^{r_1}\,[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\,] \qquad .....(14)$$

ส่วนอีกผลเฉลย พิจารณาดังนี้

ถ้า $r_2 \neq r_1$ และ $r_1 - r_2$ ไม่เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $r_2 + n \neq r_1$ สำหรับ $n \geq 1$ ดังนั้น $F(r_2 + n) \neq 0$ จะได้ผลเฉลยที่สองคือ

$$y_2(x) = x^{r_2}\,[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\,] \qquad .....(15)$$

- ถ้า $r_2 = r_1$ เราได้ผลเฉลยหนึ่งในรูปของสมการ (14) ส่วนอีกผลเฉลยจะอยู่ในรูปฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งจะได้พิจารณาต่อไป
- ถ้า $r_1 - r_2 = N$ ($N$ = จำนวนนับ) แล้ว $F(r_2 + N) = F(r_1) = 0$

ทำให้เราไม่สามารถหา $a_N(r_2)$ จากสมการ (13) ได้ นอกเสียจากว่าผลบวกในสมการ (13) จะเป็นศูนย์ด้วยสำหรับ $n = N$ ซึ่งถ้าเป็นเช่นนี้แสดงว่า $a_N$ มีค่าตามใจชอบ และทำให้เราได้ผลเฉลยที่สอง แต่ถ้าไม่ใช่กรณีดังกล่าวแล้วผลเฉลยที่สองก็จะอยู่ในรูปฟังก์ชันลอการิทึมเช่นกัน ซึ่งจะได้พิจารณาต่อไป

**<u>ทฤษฎีบท</u>** ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (1) และให้ $r_1, r_2$ เป็นรากของสมการดัชนี (10) โดยที่ $r_1 \neq r_2$ และ $r_1 - r_2 \neq N$ ($N$ = จำนวนเต็มบวก) แล้วผลเฉลยทั้งสองของสมการ (1) คือ

$$y_1(x) = (x - x_2)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \,,\; a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \,,\; b_0 \neq 0$$

**<u>ตัวอย่างที่ 4</u>** จงแก้สมการ $2xy'' + (1 + x)y' - 2y = 0$ .....(16)
ในรูปอนุกรมรอบจุด $x = 0$