วิธีทำ เนื่องจากจุด $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (16)
ให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

ในที่นี้

$$xP(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \Rightarrow p_0 = \frac{1}{2},\ p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = p_3 = \ldots = 0$$

$$x^2Q(x) = \text{[illegible]} \Rightarrow q_0 = 0,\ q_1 = -1,\ q_2 = q_3 = \ldots = 0$$

จากสมการดัชนี (12)

$$F(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

$$r^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)r = 0$$

$$r\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$r = 0,\ \frac{1}{2}$$

ให้ $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$ โดยที่ $r_1 \neq r_2$ และ $r_1 - r_2 \neq N$

จากสมการสูตรเวียนบังเกิด (13)

$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{[(r + k)p_{n-k} + q_{n-k}]}{F(n + r)} a_k \quad , n \geq 1$$

จะได้

$$a_n(r) = -\frac{[(r + n - 1)p_1 + q_1]}{F(n + r)} a_{n-1} \qquad \ldots\ldots(17)$$

แทนค่า $r = r_1 = \frac{1}{2}$ และ $p_1 = \frac{1}{2}$, $q_1 = -1$

$$a_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\left[\left(\frac{1}{2} + n - 1\right)\frac{1}{2} - 1\right]}{F\left(n + \frac{1}{2}\right)} a_{n-1}$$

$$= \frac{-\left[\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right) - 1\right]}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^n} a_{n-1}$$

$$= -\frac{(2n-5)}{2n(2n+1)} a_{n-1}$$

แทนค่า $n = 1,2,3,\ldots$

$$a_1 = -\frac{(-3)a_0}{2\cdot 3}$$

$$a_2 = -\frac{(-1)a_1}{4\cdot 5}$$

$$a_3 = -\frac{(1)a_2}{6\cdot 7}$$

$$\vdots$$

$$a_n = -\frac{(2n-5)a_{n-1}}{2n(2n+1)}$$

ซึ่งคูณกัน จะได้

$$a_n = \frac{(-1)^n[(-3)(-1)(1)\ldots(2n-5)]a_0}{[2.4.6.\ldots.2n][3.5.7\ldots(2n+1)]}$$

$$= \frac{(-1)^n\, 3a_0}{2^n n!(2n-3)(2n-1)(2n+1)}$$

ดังนั้น $\quad y_1 = x^{1/2} + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3x^{n+1/2}}{2^n n!(2n-3)(2n-1)(2n+1)}$

ทำนองเดียวกัน $r = r_2 = 0$ จากสมการ (17) แต่ใช้ b_n แทน a_n

$$b_n(0) = \frac{-[0 + n - 1]\frac{1}{2}}{n(n - \frac{1}{2})} b_{n-1} \quad , n \geq 1$$

$$= - \frac{(n - 3)}{2n(n - 1)} b_{n-1}$$

แทนค่า $n = 1,2,3,...$

$$b_1 = - \frac{(-2)b_0}{1\cdot 1}$$

$$b_2 = - \frac{(-1)b_1}{2\cdot 3}$$

$$b_3 = - \frac{(0)b_2}{3\cdot 5} = 0$$

.

.

$$b_n = - \frac{(n - 3)b_{n-1}}{2n(n - 1)}$$

ซึ่ง $b_n = 0$ สำหรับ $n \geq 3$ ดังนั้น

$$y_2(x) = b_0(1 + 2x + \frac{1}{3} x^2)$$

แบบฝึกหัดที่ 8.4

จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดกำเนิด

1. $2x(x+1)y'' + 3(x+1)y' - y = 0$

2. $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2-1)y = 0$

3. $4xy'' + 3y' + 3y = 0$

4. $2xy'' + 5(1-2x)y' - 5y = 0$

5. $3xy'' + (2-x)y' - 2y = 0$

6. $3x^2y'' + xy' - (1+x)y = 0$

7. $2x^2y'' + x(4x-1)y' + 2(3x-1)y = 0$

คำตอบ

1. $y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{4n^2 - 1}$; $y_2 = x^{-1/2} + x^{1/2}$

2. $y_1 = (\sin x)/\sqrt{x}$; $y_2 = (\cos x)/\sqrt{x}$

3. $y_1 = x^{1/4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{n+1/4}}{n!5.9.13...(4n+1)}$; $y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{n!3.7.11...(4n-1)}$

4. $y_1 = 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!(2n+1)(2n+3)}$; $y_2 = x^{-3/2} + 10x^{-1/2}$

5. $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+4)x^{n+1/3}}{4\cdot 3^n n!}$; $y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2.5.8...(3n-2)}$

6. $y_1 = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!7.10.13...(3n+4)}$;

$y_2 = x^{-1/3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1/3}}{n!(-1).2.5...(3n-4)}$

7. $y_1 = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+2}}{2^n n!} = x^2 e^{-2x}$;

$y_2 = x^{-1/3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{n-1/2}}{(-3)(-1).1...(2n-5)}$

8.5 ผลเฉลยรอบจุดเอกฐาน 2

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้พิจารณาการหาผลเฉลยของสมการรอบจุดเอกฐานกรณีทั่ว ๆ ไป สำหรับหัวข้อนี้จะได้พิจารณาต่อถึงกรณีเฉพาะที่เป็นข้อยกเว้นจากหัวข้อที่แล้ว

กรณีรากสมการดัชนีเท่ากัน $(r_1 = r_2)$

จากสมการ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad .....(1)$$

สมมติให้ผลเฉลย

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad .....(2)$$

แทนในสมการ (1) จะได้รูปแบบดังนี้ (ตามสมการ (9) หัวข้อ 8.4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n + r)(n + r - 1)a_n + \sum_{k=0}^{\infty} ((k + r)p_{n-k} + q_{n-k})a_k]x^{n+r-2} = 0$$

หรือ

$$[r(r - 1) + rp_0 + q_0]a_0x^{r-2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{\infty} ((k + r)p_{n-k}$$

$$+ q_{n-k})a_k]x^{n+r-2} = 0$$

หรือ $$a_0F(r)x^{r-2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_nF(r + n) + \sum_{k=0}^{\infty} ((r + k)p_{n-k} + q_{n-k})a_k]x^{r+n-2} = 0 \qquad .....(3)$$

โดย $F(r) = r(r - 1) + p_0r + q_0$ .....(4)

ถ้ารากของสมการดัชนีเท่ากัน $= r_1$ เราได้ผลเฉลยหนึ่งในรูปแบบสมการ (2) โดยที่ a_n หาจากการให้ ส.ป.ส. ในอนุกรมตามสมการ (3) เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$a_n(r) = - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} [(r + k)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k}{F(r + n)} , \quad n \geq 1 \qquad .....(5)$$

ดังนั้น เมื่อแทน

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)x^{n+r}$$

ในสมการ (1) จะได้

$$L[y] = a_0 x^{r-2} F(r) \qquad \text{......(6)}$$

เมื่อ $L = D^2 + P(x)D + Q(x)$

เนื่องจาก $F(r)$ ให้รากซ้ำกัน $= r_1$ ดังนั้น $F(r)\big|_{r=r_1} = (r - r_1)^2 = 0$

และยิ่งกว่านั้น $F'(r)\big|_{r=r_1} = 2(r - r_1) = 0$ ด้วย

หาอนุพันธ์สมการ (6) เทียบกับ r

$$\frac{\partial}{\partial r} L[y] = L\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}[a_0 x^{r-2} F(r)]$$

$$= a_0 x^{r-2} F'(r) + a_0 F(r) x^{r-2} \ln x \qquad \text{.....(7)}$$

แสดงว่า เมื่อให้ $r = r_1$ จะได้ $L\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) = 0$ นั่นคือ

ผลเฉลยที่สองคือ

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}[y(x,r)]\Big|_{r=r_1} - \frac{\partial}{\partial r}\{x^r[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n]\}_{r=r_1}$$

$$= (x^{r_1} \ln x)[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n] + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n$$

$$= y_1(x)\ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'(r_1)x^n \qquad \text{.....(8)}$$

โดยที่ $a_n'(r_1) = \frac{da_n}{dr}\Big|_{r=r_1}$ และ $a_n(r)$ เป็นไปตามสมการ (5) การคำนวณ

$a_n'(r)$ จะสะดวกยิ่งขึ้น ถ้าใช้ความรู้ต่อไปนี้

กำหนดให้ $f(x) = (m_1x + a_1)^{b_1}(m_2x + a_2)^{b_2} \ldots (m_nx + a_n)^{b_n}$ .....(9)

เมื่อ a_i, b_i และ m_i เป็นค่าคงตัว

$$\ln f(x) = b_1\ln(m_1x + a_1) + b_2\ln(m_2x + a_2) + \dots + b_n\ln(m_nx + a_n)$$

หาอนุพันธ์

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{m_1b_1}{m_1x + a_1} + \frac{m_2b_2}{m_2x + a_2} + \dots + \frac{m_nb_n}{m_nx + a_n}$$

นั่นคือ

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{m_1b_1}{m_1x + a_2} + \frac{m_2b_2}{m_2x + a_2} + \dots + \frac{m_nb_n}{m_nx + a_n}\right) \quad \dots\dots(10)$$

เช่น $y = \dfrac{x^2(x + 1)}{(4x - 1)^3(7x + 2)^6}$

$$= x^2(x + 1)(4x - 1)^{-3}(7x + 2)^{-6}$$

ดังนั้น

$$y' = y\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x + 1} - \frac{12}{4x - 1} - \frac{42}{4x + 2}\right)$$

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (1) และถ้ารากของสมการดัชนีเท่ากันนั่นคือ $r_1 = r_2$ แล้ว ผลเฉลยทั้งสองของสมการ (1) คือ

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1}[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)(x - x_0)^n] \quad \dots\dots(11)$$

และ

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x - x_0) + |x - x_0|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)(x - x_0)^n \quad \dots\dots(12)$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาผลเฉลในรูปอนุกรมรอบจุดกำเนิดของสมการ

$$x^2y'' + 3xy' + (1 - 2x)y = 0$$

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $P(x) = \dfrac{3}{x}$, $Q(x) = \dfrac{1 - 2x}{x^2}$

ดังนั้น $p_0 = 3$, $q_0 = 1$, $p_1 = 0$, $q_1 = -2$

จากสมการดัชนี คือ

$$F(r) = r^2 + (p_0 - 1)r - q_0 = 0$$

จะได้ $r^2 + 2r + 1 = 0$

$$r = -1,-1$$

จากสูตรเวียนบังเกิด

$$a_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(r + k)p_{n-k} + q_{n-k}]}{F(n + r)} a_k \ , \ n \geq 1$$

จะได้

$$a_n(r) = -\frac{[(r + n - 1)p_1 + q_1]}{F(n + r)} a_{n-1}$$

$$= \frac{2a_{n-1}}{(n + r + 1)^2} \ , \ n \geq 1$$

แทนค่า $n = 1,2,3,...$

$$a_1(r) = \frac{2a_0}{(r + 2)^2}$$

$$a_2(r) = \frac{2a_1}{(r + 3)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_n(r) = \frac{2a_{n-1}}{(n + r + 1)^2}$$

โดยการคูณกันจะได้

$$a_n(r) = \frac{2^n a_0}{[(r + 2)(r + 3)...(r + n + 1)]^2} \qquad .....(13)$$

$$a_n(-1) = \frac{2^n}{(n!)^2} a_0$$

จาก $y_1(x,r) = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r).x^{n+r}$ .....(14)

ดังนั้น

$$y_1(x) = y(x,r)\Big|_{r=-1}$$

$$= a_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \frac{2^n x^{n-1}}{(n!)^2} \qquad \ldots\ldots(15)$$

หาอนุพันธ์สมการ (13) โดยใช้ผลจากสมการ (10)

$$a_n'(r) = -2\, a_n(r) \left\{ \frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+3} + \ldots + \frac{1}{r+n+1} \right\}$$

$$a_n'(-1) = -2. \frac{2^n}{(n!)^2} a_0 \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right\}$$

$$= -\frac{2^{n+1}}{(n!)^2} a_0 \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right\}$$

เนื่องจาก $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

เป็นอนุกรมฮาร์โมนิก ให้ $H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$$a_n'(-1) = -\frac{2^{n+1}}{(n!)^2} a_0 H_n$$

และ

$$y_2(x) = y_1 \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \frac{2^{n+1} H_n x^{n-1}}{(n!)^2} \qquad \ldots\ldots(16)$$

หรือเราอาจจะหา $y_2(x)$ ได้อีกวิธีคือ

ให้ $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$ $\qquad \ldots\ldots(17)$

$$y_2' = y_1' \ln x + x^{-1} y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) b_n x^{n-2}$$

$$\therefore\ y_2'' = y_1'' \ln x + 2x^{-1}y_1' - x^{-2}y_1 + \sum_{n=l}^{\infty} (n-1)(n-2)b_n x^{n-3}$$

แทนในสมการโจทย์ จะได้

$$[x^2y_1'' + 3xy_1' + (1-2x)y_1]\ln x + 2y_1 + 2xy_1' + \sum_{n-l}^{\infty} (n-2)(n-l)b_n x^{n-l}$$

$$+ \sum_{n=l}^{\infty} 3(n-1)b_n x^{n-l} + \sum_{n=l}^{\infty} b_n x^{n-1} - 2\sum_{n=l}^{\infty} b_n x^n = 0$$

แต่ $x^2y_1'' + 3y_1' + (1-2x)y_1 = 0$ ดังนั้น

$$2y_1 + 2xy_1' + bl + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2b_n - 2b_{n-1})x^{n-1} = 0$$

แทนค่า $y_1(x)$ จากสมการ (15) ให้ $a_0 = 1$

$$2x^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n-i}}{(n!)^2} - 2x^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2}$$

$$+ b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2b_n - 2b_{n-1})x^{n-1} = 0$$

หรือ

$$b_1 + 4 + \sum_{n=2}^{\infty} [n^2b_n - 2b_{n-1} + \frac{n2^{n+l}}{(n!)^2}]x^{n-1} = 0$$

โดยเทียบ ส.ป.ส. จะได้

$$b_1 = -4$$

$$b_n = (2b_{n-1} - \frac{n.2^{n+1}}{n!^2})/n^2 \quad , \quad n > 2$$

ซึ่งเป็นเรื่องยากที่จะหารูปแบบปิดของ b_n เหมือนในสมการ (16)
แทนค่า b_n ในสมการ (17) ก็จะได้ผลเฉลย y_2 เช่นเดียวกัน

<u>กรณีรากสมการดัชนีต่างกันเป็นจำนวนเต็ม</u> $(r_1 - r_2 = N)$

ผลเฉลยที่หนึ่ง เราสามารถหาได้ตามปกติ จาก

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

ส่วนผลเฉลยที่สองเราจะใช้วิธีการคล้ายกับกรณีรากสมการดัชนีซ้ำกันแต่มีรายละเอียดมากกว่า ดังนี้

จากสมการ (3),(4),(5) และ (6) ที่กล่าวมาแล้ว ทราบว่า

$$a_n(r) = - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} [(r + k)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k}{F(r + n)} \quad , \quad n \geq 1 \qquad .....(5)$$

$$L[y] = [D^2 + P(x)D + Q(x)]y = a_0 x^{r-2} F(r) \qquad .....(6)$$

ถ้าเราให้ $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_2+n}$

เนื่องจาก $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$

ฉะนั้น $F(r + N) = (r + N - r_1)(r + N - r_2)$

$= (r - r_2)(r + N - r_2)$

$= 0$ เมื่อ $r = r_2$

แสดงว่าเมื่อ $n = N$ เราไม่สามารถหา $a_N(r_2)$ ได้

เราจะหาได้แค่

$a_1(r_2), a_2(r_2), \ldots, a_{N-1}(r_2)$

เพื่อที่จะแก้ปัญหานี้ พิจารณาขวามือของสมการ (5) ถ้าตัวเศษมีพจน์ $r - r_2$ จะทำให้ตัดทอนกับตัวส่วนใน $F(r + N)$ เราก็จะหา $a_N(r_2)$ ได้ตามปกติจากสมการ (5) และจะทำให้ได้ ส.ป.ส. ตัวต่อไปนี้คือ

$a_{N+1}(r_2)$, $a_{N+2}(r_2), \ldots$

ฉะนั้น ถ้าเราเลือก $a_0 = r - r_2$ (เพราะว่า a_0 เป็นค่าตามใจชอบ) ซึ่งค่า a แต่ละค่าจะขึ้นกับ a_0 ทำให้ตัวเศษในสมการ (5) มีตัวประกอบ $r - r_2$ ไปตัดทอนกับตัวส่วน

ดังนั้น ให้ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)x^{n+r}$ โดย $a_0(r) = r - r_2$

จะได้ $L[y] = (r - r_2)x^{r-2} F(r)$

ฉะนั้น $\frac{\partial}{\partial y} L[y] = L\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)$

$$= F(r)x^{r-2} + (r - r_2)[F'(r) + (\ln x)F(r)]x^{r-2}$$

นั่นคือ ผลเฉลยที่สองคือ

$$y_2(x) = \left.\frac{\partial y\ (x,r)}{\partial r}\right|_{r=r_2}$$

มีรูปแบบเป็น

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_2)x^n + (\ln x)x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n$$

เมื่อ $a_0(r_2) = 1$

$$a_n(r_0) = \left.\frac{d}{dr}[(r - r_2)a_n(r)]\right|_{r=r_2} \quad ; n = 1,2,3,\ldots$$

แต่ $a_0(r) = r - r_2$ ดังนั้น

$$a_0(r_2) = a_1(r_2) = \ldots a_{N-1}(r_2) = 0$$

ซึ่งทำให้อนุกรม $x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ เริ่มต้นจาก x^N นั่นคือ

$$x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n = x^{r_2+N}\sigma(x)$$

$$= x^{r_1}\sigma(x) = ay_1(x)$$

เมื่อ $\sigma(x)$ เป็นอนุกรมกำลัง และ

$$a = \lim_{r\to r_2} (r - r_2)a_N(r)$$

เพราะฉะนั้น

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n + ay_1(x)\ln x$$

$$a_0(r_2) = 1$$

$$a_n(r_2) = \frac{d}{dr} [(r - r_2)a_n(r)]\Big|_{r=r_2} \quad ; n = 1,2,3,...$$

$$a = \lim_{r\to r_2} (r - r_2)a_N(r)$$

ทฤษฎีบท ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (1) และถ้ารากของสมการดัชนีต่างกันเป็นจำนวนเต็มบวก นั่นคือ $r_1 - r_2 = N$ แล้ว ผลเฉลยทั้งสองของสมการ (1) คือ

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)(x - x_0)^n]$$

และ

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln |x - x_0| + |x - x_0|^{r_2} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n]$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $x(1 - x)y'' - (1 + 3x)y' - y = 0$ .....(18)
รอบจุดเอกฐานปกติ $x = 0$

วิธีทำ ให้ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(r + r - 1)a_n x^{n+r-2}$$

แทนในสมการ (18) จะได้

$$(x-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - (1+3x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$-3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1]a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Big| \; n + r - 1 = n + r$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)(n+r-1)a_{n+1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)+3(n+r)+1]a_n x^{n+r} = 0$$

$$r(r-2)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+r+1)(n+r-1)a_{n+1} - [(n+r)(n+r-1)+3(n+r)+1]a_n\}x^{n+r} = 0$$

เทียบ ส.ป.ส. เลขชี้กำลังต่ำสุด จะได้

สมการดัชนี $r(r - 2) = 0$

$$r = 0,2$$

$$r_1 - r_2 = 2 - 0 = 2 = N$$

เทียบ ส.ป.ส. ของ x^{n+r} จะได้

$$(n + r + 1)(n + r - 1)a_{n+1} - [(n + r)(n + r + 2) + 1]a_n = 0$$

หรือ

$$(n + r + 1)(n + r - 1)a_{n+1} - (n + r + 1)^2 a_n = 0$$

$$(n + r - 1)a_{n-1} - (n + r + 1)a_n = 0 \qquad .....(19)$$

$$a_{n+1} = \frac{(n + r + 1)a_n}{n + r - 1} \quad ; n = 0,1,2,...$$

แทนค่า $n = 0,1,2,...$ จะได้

$$a_1 = \frac{r + 1}{r - 1} a_0$$

$$a_2 = \frac{r + 2}{r} a_1$$

$$a_3 = \frac{(r + 3)}{r + 1} a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(n + r)}{(n + r - 2)} a_{n-1}$$

โดยการคูณกัน จะได้

$$a_n = \frac{(r + 1)(r + 2)(r + 3)...(n + r)a_0}{(r - 1)r(r + 1)...(n + r - 2)}$$

เพราะฉะนั้น

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y = a_0 x^r [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r + 1)(r + 2)...(n + r)}{(r - 1)r...(n + r - 2)} a_0 x^n]$$

$$= a_0 x^r [1 + \frac{r+1}{r-1} x + \frac{(r+1)(r+2)}{(r-1)r} x^2 + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{(r-1)r(r+1)} x^3 + ...$$

$$.....(20)$$

แทน r = 2 จะได้

$$y_1 = a_0x^2[1 + 3x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \frac{3.4.5}{1.2.3}x^3 + \ldots] \qquad \ldots\ldots(21)$$

ถ้าให้ $r = 0$ ส.ป.ส. ของ x^2 จะหาค่าไม่ได้

ดังนั้น ให้ $a_0 = (r - r_2) = r - 0$

จากสมการ (20) จะได้

$$y = x^r[r + \frac{r(r+1)}{r-1}x + \frac{(r+1)(r+2)}{r-1}x^2 + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+1)}x^3 + \ldots \qquad \ldots\ldots(22)$$

แทนค่า $r = 0$ ในสมการ (22) จะได้

$$\bar{y} = [-1.2x^2 - 2.3x^3 - \frac{2.3.4}{2}x^4 + \ldots]$$

$$= -2x^2[1 + 3x + \frac{3.4x^2}{2} + \ldots]$$

ซึ่งจะพบว่า $y_1 = \bar{y}$ เมื่อ $a_0 = -2$

แสดงว่า y_1 และ $\bar{y}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

ดังนั้นต้องหาอีกผลเฉลยหนึ่งซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นกัน และเราทราบว่า $\left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=0}$

จะเป็นอีกผลเฉลยหนึ่ง

จากสมการ (22) จะได้

$$y_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=0} = (\ln x)\bar{y} + (1 - x - 5x^2\ldots)$$

$$= (\ln x)y_1 = (1 - x - 5x^2\ldots)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (18) คือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^2y'' + x(1 - x)y' - (1 + 3x)y = 0$$

รอบจุดเอกฐานปกติ $x = 0$

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $P(x) = 1 - x$ และ $Q(x) = -1 - 3x$

ดังนั้น $p_0 = 1,\ p_1 = -1$ และ $q_0 = -1,\ q_1 = -3$

จากสมการดัชนี $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$$r(r-1) + r - 1 = 0$$

$$r^2 - r + r - 1 = 0$$

$$r_1 = 1 \ , \ r_2 = -1$$

จะพบว่า $r_1 - r_2 = N = 2$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวก

สูตรเวียนบังเกิด คือ

$$a_n(r) = - \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k}{F(r+n)} \quad , \quad n \geq 1$$

$$= - \frac{(r+n-1)p_1 + q_1}{(r+n)(r+n-1)(r+n)-1} a_{n-1}$$

$$= - \frac{-(r+n-1)-3}{(r+n)(r+n-1)+r+n-1} a_{n-1}$$

$$= \frac{n+r+2}{(r+n+1)(r+n-1)} a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

แทนค่า $n = 1,2,3,\ldots$

$$a_1(r) = \frac{(r+3)a_0}{(r+2)r}$$

$$a_2(r) = \frac{(r+4)a_1}{(r+3)(r+1)}$$

$$a_3(r) = \frac{(r+5)a_2}{(r+4)(r+2)}$$

.

.

$$a_n(r) = \frac{(n+r+2)}{(r+n+1)(r+n-1)} a_{n-1}$$

โดยการคูณกันจะได้

$$a_n(r) = \frac{(r+3)(r+4)(r+5)\ldots(r+n+2)a_0}{(r+2)(r+3)(r+4)\ldots(r+n+1).r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}$$

$$= \frac{(r + n + 2)a_0}{(r+2)[r(r+1)(r+2)\dots(r+n-1)]}$$

แทนค่า $r = r_1 = 1$

$$a_n(1) = \frac{(n + 3)a_0}{3[1.2.3.\dots.n]} = \frac{(n + 3)a_0}{3n!}$$

ดังนั้น สำหรับ $a_0 = 1$ จะได้

$$y_1(x) = |x|(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 3)}{3n!} x^n)$$

$$a = \lim_{r \to r_2} (r - r_2)a_N(r)$$

$$= \lim_{r \to -1} (r + 1)a_2(r)$$

$$= \lim_{r \to -1} \frac{(r + 1)(r + 4)(r + 3)}{(r + 3)(r + 1)(r + 2)r}$$

$$= -3$$

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr} [(r - r_2)a_n(r)] \Big|_{r=r_2} \quad ; n = 1,2,3,\dots$$

$$= \lim_{r \to -1} \frac{d}{dr} (r + 1) \frac{(r + n + 2)}{(r+2)[r(r+1)(r+2)\dots(r+n-1)}$$

ใช้ผลของสมการ (10)

$$c_n(-1) = \lim_{r \to -1} \frac{(r + n + 2)}{(r+2)r(r+2)\dots(r+n-1)} \left[\frac{1}{r+n+2} - \frac{1}{r+2} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r+2} \dots \frac{1}{r+n-1} \right]$$

$$= \frac{(n + 1)}{1(-1)1.2\dots(n-2)} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{-1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \dots - \frac{1}{n-2} \right]$$

$$= \frac{(n + 1)}{(-1)(n - 2)!} \left[\frac{1}{n+1} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} \right]$$

$$= \frac{-(n + 1)}{(n- 2)!} \left[\frac{1}{n+1} - H_{n-2} \right]$$

$$= -\left[\frac{1 - (n+1)H_{n-2}}{(n-2)!} \right] \quad n = 3,4,5,\ldots$$

โดย

$$c_1(-1) = \frac{d}{dr}[(r+1)a_1(r)]\Big|_{r=r_2} = \frac{d}{dr}\frac{(r+1)(r+3)}{(r+2)r}\Big|_{r=-1}$$

$$= \lim_{r\to -1}\left[\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+3} - \frac{1}{r+2} - \frac{1}{r}\right]\frac{(r+1)(r+3)}{(r+2)r}$$

$$= -2$$

$$c_2(-1) = \frac{d}{dr}[(r+1)a_2(r)]_{r=r_2} = \frac{d}{dr}\frac{(r+1)(r+4)(r+3)}{(r+3)(r+1)(r+2)r}\Big|_{r=-1}$$

$$= \lim_{r\to -1}\left[\frac{1}{r+4} - \frac{1}{r+2} - \frac{1}{r}\right]\frac{(r+4)}{(r+2)r}$$

$$= -1 + 3 - 3$$

$$= 1$$

ดังนั้น

$$y_2(x) = -3y_1(x)\ln|x| + |x|^{-1}\{1 - 2x - x^2 - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{[1 - (n+1)H_{n-2}]x^n}{(n-2)!}$$

$$= -3y_1(x)\ln|x| + x^{-1} - 2 + x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1 - (n+3)H_n]}{n!}x^{n+1}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงแก้สมการ $(1 - x^2)y'' + 2xy' + y = 0$ .....(23)

รอบจุดเอกฐานปกติ $x = 0$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ .....(24)

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r-2}$$

แทนในสมการ (23)

$$(1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r}$$

$$\big| n+r-2 = n+r \qquad\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+r+2)(n+r+1)a_{n+2} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$r(r-1)a_0 x^{r-2} + (r+1)ra_1 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r+2)(n+r+1)a_{n+2} - (n+r)(n+r-1)a_n$$

$$+ 2(n + r)a_n + a_n]x^{n+r} = 0$$

เทียบ ส.ป.ส. ของ x^{r-2}

$$r(r - 1)a_0 = 0 \quad ;$$

$$r = 0,1 \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

ซึ่ง $r_1 - r_2 = N = 1$

เทียบ ส.ป.ส. ของ x^{r-1}

$$(r + 1)ra_1 = 0 \qquad .....(25)$$

จากสมการ (25) ส.ป.ส. ของ a_1 เป็นศูนย์เมื่อ $r = 0$ และเนื่องจากไม่มีพจน์อื่นอีก จึงไม่สามารถกำหนด a_1 ได้ ในกรณีนี้เราจะให้ a_0 และ a_1 เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ และหา ส.ป.ส. ของตัวอื่นในรูปของ a_0 และ a_1

เทียบ ส.ป.ส. ของ x^{n+r}

$$(n+r+2)(n+r+1)a_{n+2} - (n+r)(n+r-1)a_n + 2(n+r)a_n + a_n = 0$$

หรือ

$$(n+r+2)(n+r+1)a_{n+2} - (n+r)(n+r-3)a_n + a_n = 0$$

$$(n+r+2)(n+r+1)a_{n+2} - [(n+r)(n+r-3) - 1]\, a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{(n+r)(n+r-3)-1}{(n+r+2)(n+r+1)}\, a_n \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

แทน n ด้วย n - 2 จะได้

$$a_n = \frac{(n+r-2)(n+r-5)-1}{(n+r)(n+r-1)}\, a_{n-2} \quad ; \quad n = 2,3,4,\ldots \qquad \ldots\ldots(26)$$

แทนค่า $n = 2,3,4,\ldots$

$$a_2 = \frac{r(r-3)-1}{(r+2)(r+1)}\, a_0 \qquad a_3 = \frac{(r+1)(r-2)-1}{(r+3)(r+2)}\, a_1$$

$$a_4 = \frac{(r+2)(r-1)-1}{(r+4)(r+3)}\, a_2 \qquad a_5 = \frac{(r+3)r-1}{(r+5)(r+4)}\, a_3$$

$$= \frac{[(r+2)(r-1)-1][r(r-3)-1]}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}\, a_0 \qquad = \frac{[r(r+3)-1][(r+1)(r-2)-1]}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\, a_1$$

.

.

จากสมการ (24)

$$y = x^r[a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots] + x^r[a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \ldots]$$

$$= a_0x^r[1 + \frac{r(r-3)-1}{(r+1)(r+2)}x^2 + \frac{\{(r+2)(r-1) - 1\}\{r(r-3) - 1\}}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}x^4 + \ldots]$$

$$+ a_1x^r[x + \frac{(r+1)(r-2)-1}{(r+2)(r+3)}x^3 + \frac{\{r(r+3)-1\}\{(r+1)(r-2)-1\}}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}x^5 + \ldots] \qquad \ldots\ldots(27)$$

แทนค่า $r = 0$ และเปลี่ยน a_0 เป็น c_1 และเปลี่ยน a_1 เป็น c_2 จะได้

$$y = c_1(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \ldots) + c_2(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{40}x^5 - \ldots) \quad \ldots\ldots(28)$$

ซึ่งสมการ (28) ประกอบด้วยค่าคงตัวตามใจชอบ 2 ตัว จึงเป็นผลเฉลยทั่วไปที่ต้องการ

แต่ถ้าเราแทนค่า $r = 1$ แล้ว จากสมการ (25) $a_1 = 0$

ฉะนั้น จากสมการ (26) จะพบว่า $a_3 = a_5 = \ldots = 0$

แทนค่า $r = 1$ ในสมการ (27) และใช้ผลที่ว่า $a_3 = a_5 = \ldots = 0$

จะได้

$$y = a_0x(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{40}x^4 + \frac{3}{560}x^6 - \ldots)$$

ซึ่งก็คืออนุกรมที่สองของสมการ (28) นั่นเอง

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \quad \ldots\ldots(29)$$

รอบจุดเอกฐานปกติที่ $x = 0$

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $P(x) = 1$ และ $Q(x) = x^2 - \frac{1}{4}$

ดังนั้น $p_0 = 1,\ p_1 = p_2 = 0$ และ $q_0 = -\frac{1}{4},\ q_1 = 0,\ q_2 = 1$

จากสมการดัชนี

$$F(r) = r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$$

$$r(r - 1) + r - \frac{1}{4} = 0$$

$$r^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -\frac{1}{2}$$

ซึ่ง $r_1 - r_2 = N = 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก

จากสูตรเวียนบังเกิด

$$a_n(r) = -\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k}{F(r+n)} \quad , \quad n \geq 1$$

$$= -\frac{[(r+n-1)p_1 + q_1]a_{n-1} - [(r+n-2)p_2+q_2]a_{n-2}}{(r+n)^2 - \frac{1}{4}} \qquad .....(30)$$

$$= -\frac{a_{n-2}}{(r+n)^2 - \frac{1}{4}} \ ; \quad n \geq 2$$

แทนค่า n = 2,3,4,...

$$a_2(r) = \frac{-a_0}{(r+2)^2 - \frac{1}{4}} \qquad a_3(r) = \frac{-a_1}{(r+3)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$a_4(r) = \frac{-a_2}{(r+4)^2 - \frac{1}{4}} \qquad a_5(r) = \frac{-a_3}{(r+5)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{2n}(r) = \frac{-a_{2n-2}}{(r+2n)^2 - \frac{1}{4}} \qquad a_{2n+1}(r) = \frac{-a_{2n-1}}{(r+2n+1)^2 - \frac{1}{4}}$$

โดยการคูณกัน จะได้

$$a_{2n}(r) = \frac{(-1)^n a_0}{[(r+2)^2 - \frac{1}{4}][(r+4)^2 - \frac{1}{4}][(r+6)^2 - \frac{1}{4}]\ldots[(r+2n)^2 - \frac{1}{4}]} \ , \ r \geq 1$$

$$a_{2n+1}(r) = \frac{(-1)^n a_1}{[(r+3)^2 - \frac{1}{4}][(r+5)^2 - \frac{1}{4}][(r+7)^2 - \frac{1}{4}]\ldots[(r+2n)^2 - \frac{1}{4}]} \ , \ r \geq 1$$

สำหรับ $r = \frac{1}{2}$ เราจะพบว่า ส.ป.ส. ของ x^{r+1} เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$a_1(\tfrac{1}{2}) = 0 \quad \text{ทำให้} \quad a_{2n+1}(\tfrac{1}{2}) = 0 \;; \quad n \geq 1$$ ฉะนั้น

$$y_1 = |x|^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(\tfrac{1}{2}) x^{2n}$$

โดย $$a_{2n}(\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^n a_0}{[(\frac{1}{2}+2)^2 - \frac{1}{4}][(\frac{1}{2}+4)^2 - \frac{1}{4}][(\frac{1}{2}+6)^2 - \frac{1}{4}]\ldots[(\frac{1}{2}+2n)^2-\frac{1}{4}]}$$

$$= \frac{(-1)^n a_0}{6.20.42\ldots(2n + 4n^2)}$$

$$= \frac{(-1)^n a_0}{2.3.4.5.6.7\ldots.2n(2n + 1)}$$

$$= \frac{(-1)^n a_0}{(2n + 1)!} \quad ; n \geq 1 \qquad \ldots..(31)$$

นั่นคือ

$$y_1 = |x|^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n + 1)!} \qquad \text{เมื่อ} \quad a_0 = 1$$

หรือ

$$y_1 = |x|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$$

พิจารณา

$$a = \lim_{r \to r_2} (r - r_2) a_N(r)$$

$$= \lim_{r \to -1/2} (r + \tfrac{1}{2}) a_1(r)$$

$$= 0$$

ดังนั้น

$$y_2 = |x|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n$$

โดย $a_n(r_2) = \frac{d}{dr}[(r - r_2)a_n(r)]\Big|_{r=r_2} \qquad n = 1,2,...$

เนื่องจาก $a_n(r) = a_{2n}(r) + a_{2n+1}(r)$

ดังนั้น สำหรับ ส.ป.ส. ที่เป็นเลขคู่

$$a_2(-\frac{1}{2}) = \frac{d}{dr}[(r - r_2)a_2(r)]\Big|_{r_2=-1/2}$$

$$= \frac{d}{dr}\left[\frac{-(r + 1/2)a_0}{(r + 2)^2 - \frac{1}{4}}\right]\Big|_{r_2=-1/2} = \frac{-a_0}{2}$$

$$a_4(-\frac{1}{2}) = \frac{d}{dr}[(r - r_2)a_4(r)]\Big|_{r=-1/2}$$

$$= \frac{d}{dr}\left[\frac{-(r + 1/2)a_2}{(r + 4)^2 - \frac{1}{4}}\right]\Big|_{r=-1/2} = -\frac{a_2}{3.4}$$

.

.

.

$$a_{2n}(-\frac{1}{2}) = \frac{-a_{2n-2}}{(2n - 1)2n}$$

โดยการคูณ จะได้

$$a_n(-\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^n a_0}{2.3.4...(2n-1)2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \quad n = 1,2,...$$

และสำหรับ ส.ป.ส. ที่เป็นเลขคี่ จะได้

$$a_{2n+1}(-\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^n a_1}{(2n + 1)!} \quad ; \quad n = 1,2,...$$

เพราะฉะนั้น

$$y_2 = |x|^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

ซึ่งอนุกรมในพจน์สุดท้าย ก็คือ y_1 นั่นเอง

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

$$= c_1x^{-1/2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right] + c_2x^{-1/2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$= c_1 \frac{\cos}{x^{1/2}} + c_2 \frac{\sin x}{x^{1/2}}$$

แบบฝึกหัดที่ 8.5

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้ ในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิด

1. $x^2y'' + x(1 + x)y' + 4 = 0$

2. $x^2y'' + x(x - 1)y' + (1 - x)y = 0$

3. $x(x - 2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = 0$

4. แก้สมการในข้อ 3. แต่รอบจุด $x = 2$

5. $xy'' + y = 0$

6. $x(1 - x)y'' + 2(1 - x)y' + 2y = 0$

7. $4x^2y'' + 2x(2 - x)y' - (1 + 3x)y = 0$

8. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$

9. $x^2y'' + 2x(x - 2)y' + 2(2 - 3x)y = 0$

10. $xy'' - (3 + x)y' + 2y = 0$

11. $x(1 - x)y'' - 3y' + 2y = 0$

12. แก้สมการในข้อ 10. แต่รอบจุด $x = 1$

คำตอบ

1. $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = xe^x$; $y_2 = y_1 \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n x^{n+1}}{n!}$

2. $y_1 = x$; $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n.n!}$

3. $y_1 = 1 - x$; $y_2 = y_1 \ln x + \frac{5}{2} x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n n(n-1)}$

4. $y_1 = 1+(x-2)$; $y_2 = y_1 \ln (x-2) - \frac{5}{2}(x-2) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(x-2)^n}{2^n n(n-1)}$

5. $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n-1)!}$; $y_2 = y_1 \ln x + 1 + x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1}) x^n}{n!(n-1)!}$

6. $y_1 = -2 + 2x$; $y_2 = y_1 \ln x + x^{-1} + 1 - 5x + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2x^{n-1}}{(n-1)(n-2)}$

7. $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1/2}}{2^{n-1}(n-1)!}$; $y_2 = y_1 \ln x + 2x^{-1/2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_{n-1} x^{n-1/2}}{2^{n-1}(n-1)!}$

8. $y_1 = x^{-2}(- \frac{1}{2^2.4} x^4 + \frac{1}{2^3.4.6} x^6 - \frac{1}{2^3.4^2.6.8} x^8 + \ldots)$

$y_2 = y_1 \ln x^{-2}(1 + \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2.4} x^4 - \frac{11}{2^2.4^2.6^2} x^6 - \ldots)$

9. $y = a_0(x - 2x^2 + 2x^3) + a_3[\ x^4 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{6(-2)^{n-3}x^{n+1}}{n!}\ ]$

10. $y = a_0(1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2) + a_4 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{24(n - 3)x^n}{n!}$

11. $y = a_0(1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2) + a_4 \sum_{n=4}^{\infty} (n - 3)x^n$

12. $y = a_0[(x - 1)^{-2} + 4(x - 1)^{-1}] + a_2[1 + \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{1}{6}(x - 1)^2\ ]$