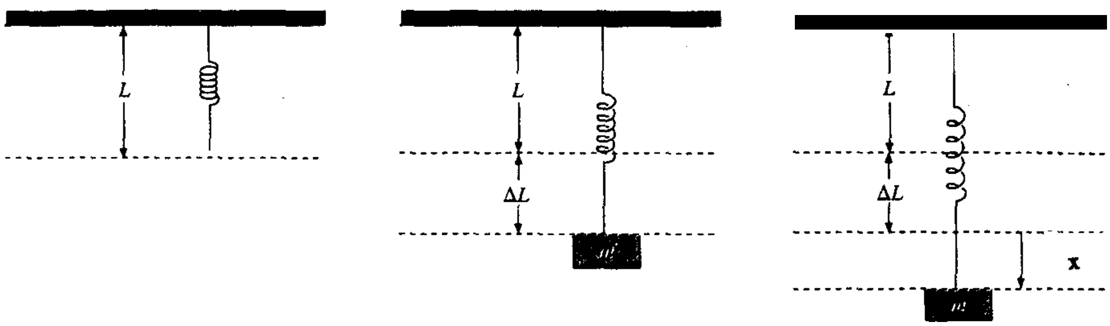
บทที่ 7
ประยุกต์ของสมการอันดับสอง

ในบทนี้เราจะพิจารณาถึงการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวเฉพาะสมการอันดับสองเท่านั้น เนื่องจากปัญหาในทางฟิสิกส์และวิศวกรรมส่วนมากจะเกี่ยวข้องกับสมการอันดับสอง

7.1 <u>ปัญหาของวัตถุที่ยึดติดแน่นกับปลายลวดสปริง</u>

นำลวดสปริงที่ยังไม่ยืดซึ่งยาว L หน่วย แขวนกับเพดานดังรูป ก. เมื่อเรานำวัตถุมวล m ไปยึดติดแน่นกับปลายอีกข้างหนึ่งของลวดสปริง จะทำให้ลวดสปริงยืดออกไป ΔL หน่วย แล้วจะอยู่ในตำแหน่งสมดุล ดังรูป ข

เพื่อที่จะศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุ เราสามารถทำได้โดยดึงวัตถุลง หรือกดวัตถุเข้าหาลวดสปริงแล้วปล่อย ก็จะเกิดการเคลื่อนที่ กำหนดให้ x เป็นระยะขจัดในแนวดิ่งวัดจากตำแหน่งสมดุลย์ โดยให้ทิศทางเป็นบวกเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ลงดังรูป ค



ก. ข. ค.

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อ 2 ของนิวตัน $F = ma$ มีแรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อมวลดังต่อไปนี้

1. F_1 เป็นแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (น้ำหนักของวัตถุ)

$$F_1 = mg$$

2. F_2 เป็นแรงเนื่องจากลวดสปริง เพื่อให้ลวดสปริงกลับคืนสู่สภาพเดิมโดยแรงดังกล่าวนี้เป็นไปตาม กฎของฮุคที่ว่า "แรงที่ยืดสปริงออกจะเป็นสัดส่วนกับระยะทางที่ลวดสปริงยืดออกไป" ดังนั้น

$$F_2 = -k(\Delta L + x)$$

3. F_3 เป็นแรงต้านการเคลื่อนที่ เรียกว่า แรงแดมพ์ ซึ่งสำหรับการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ความเร็วไม่มากนัก จะพบว่าแรงแดมพ์จะเป็นสัดส่วนกับขนาดของความเร็วของวัตถุ นั่นคือ

$$F_3 = -a\left|\frac{dx}{dt}\right|$$

$a > 0$ เป็นค่าคงตัวจากการแปรผัน

4. $F_4 = f(t)$ เป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อการเคลื่อนที่

เพราะฉะนั้นโดยกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะพบว่า

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

หรือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(\Delta L + x) - a\frac{dx}{dt} + f(t) \qquad .....(1)$$

แต่จากตำแหน่งสมดุลย์ของวัตถุ แรงยืดกลับของสปริงจะเท่ากับแรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุ นั่นคือ

$$-k\Delta L = mg$$

ดังนั้น จากสมการ (1) จะได้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt} + f(t)$$

หรือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = f(t) \qquad .....(2)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับลวดสปริง

เมื่อ $f(t) = 0$ เป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงภายนอก เป็นการเคลื่อนที่อย่างอิสระ

เมื่อ $f(t) \neq 0$ เป็นการเคลื่อนที่ที่มีแรงภายนอกมากระทำ

เมื่อ $a = 0$ เป็นการเคลื่อนที่แบบไม่มีแรงแดมพ์

เมื่อ $a \neq 0$ เป็นการเคลื่อนที่แบบมีแรงแดมพ์

ซึ่งเราจะพิจารณาเป็นกรณี ๆ ดังต่อไปนี้

ก. **การเคลื่อนที่อย่างอิสระและไม่มีแรงแดมพ์**

กรณีนี้ $f(t) = 0$ และ $a = 0$ ดังนั้นจากสมการ (2)

จะได้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ โดยใช้สมการช่วย (ให้ $\omega_0^2 = k/m$)

$$m^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$m = \pm i\omega_0$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t \qquad \text{.....(4)}$$

คูณและหารขวามือของสมการ (4) ด้วย $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ จะได้

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\cos\omega_0 t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

ถ้าให้

$$\cos 6 = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad \sin\delta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \text{.....(5)}$$

ดังนั้น

$$x(t) = R(\cos\delta\cos\omega_0 t + \sin\delta\sin\omega_0 t)$$
$$= R\cos(\omega_0 t - \delta) \qquad \ldots\ldots(6)$$

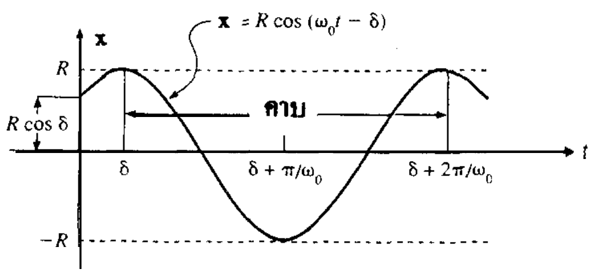
ซึ่งผลเฉลยที่ได้นี้แสดงการเคลื่อนที่แบบสั่นกลับไปกลับมา รอบตำแหน่งสมดุลย์ ซึ่งเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่าเป็นการเคลื่อนที่ แบบ**ซิมเปิลฮาร์โมนิก**

ค่า R เรียกว่า**แอมพลิจูด** ของการเคลื่อนที่ เป็นระยะเคลื่อนที่ที่ไกลสุดในทางบวกจากตำแหน่งสมดุลย์

ค่า $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ เรียกว่า**ความถี่** ของการเคลื่อนที่เป็นจำนวนรอบของการเคลื่อนที่ต่อ 2π หน่วยเวลา) ความถี่ที่นิยมใช้กันต่อ $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ซึ่งเป็นจำนวนรอบของการเคลื่อนที่ต่อหนึ่งหน่วยเวลา

ค่า $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{m/k}$ เรียกว่า**คาบ**ของการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นส่วนกลับของความถี่ f

ค่า δ เป็น**ระยะทิ้งช่วงหรือมุมทิ้งช่วง** ของการเคลื่อนที่



ข้อสังเกต ถ้าเราเปลี่ยนบทบาทของ c_1 และ c_2 ในสมการ (5)
จะได้ $x(t) = R\sin(\omega_0 t + \phi)$

ตัวอย่างที่ 1 วัตถุหนัก 8 ปอนด์ ผูกติดกับลวดสปริง แล้วนำไปแขวนในแนวดิ่งติดกับเพดาน ณ ตำแหน่งสมดุลย์ลวดสปริงยืดออกมา 6 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุต่ำกว่าตำแหน่งสมดุลย์ 1 ฟุต แล้วปล่อยให้เกิดความเร็ว 8 ฟุตต่อวินาทีในทิศทางขึ้นข้างบน สมมติว่าไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่ จงหาสมการการเคลื่อนที่ แอมพลิจูด คาบ และความถี่ ของการเคลื่อนที่

วิธีทำ ในที่นี้

$$m = \frac{W}{g} = \frac{8 \text{ ปอนด์}}{32 \text{ ฟุต/วินาที}^2} = \frac{1}{4} \text{ สลัก}$$

$$a = 0$$

น้ำหนัก 8 ปอนด์ ที่ให้ลวดสปริงยืด 6 นิ้ว ดังนั้นจากกฎของฮุค ($W = k\Delta L$)

จะได้ $\quad 8 = k(\frac{6}{12})$

$$k = 16 \text{ ปอนด์/ฟุต}$$

ดังนั้น จากสมการ (3)

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \qquad \ldots(7)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(0) = 1$, $x'(0) = -8$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (7) คือ

$$x(t) = c_1\cos 8t + c_2 \sin 8t$$

$$x'(t) = -8c_1\sin 8t + 8c_2\cos 8t$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(0) = c_1 = 1$$

$$x'(0) = 8c_2 = -8$$

จะพบว่า $c_1 = 1$ และ $c_2 = -1$ นั่นคือ

$$x(t) = \cos 8t - \sin 8t$$

พิจารณา $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\tan \delta = \frac{c_2}{c_1} = -1$$

แต่ c_1 เป็นบวก , c_2 เป็นลบ ดังนั้น δ จะอยู่ในจตุภาคที่ 4

นั่นคือ $\delta = \frac{7\pi}{4}$ เพราะฉะนั้น

$$x(t) = \sqrt{2}\cos(8t - \frac{7\pi}{4})$$

แอมพลิจูด $= \sqrt{2}$ ฟุต

คาบ $= \frac{\pi}{4}$ วินาที

ความถี่ $= \frac{4}{\pi}$ รอบต่อวินาที

ข. การเคลื่อนที่อย่างอิสระและมีแรงแดมพ์

กรณีนี้ $f(t) = 0$ แต่ $a \neq 0$ ดังนั้นจากสมการ (2) จะได้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad .....(8)$$

ซึ่งรากสมการช่วยคือ

$$m_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a \quad - 4mk}}{2m}$$

ดังนั้นการเคลื่อนที่แบบนี้ขึ้นกับธรรมชาติของรากสมการช่วยข้างต้น นั่นคือขึ้นกับ $a^2 - 4mk$ ว่าเป็นลบ ศูนย์ หรือบวก

1. $a^2 < 4mk$

กรณีนี้ $a^2 - 4mk < 0$ ทำให้ได้รากสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (8) คือ

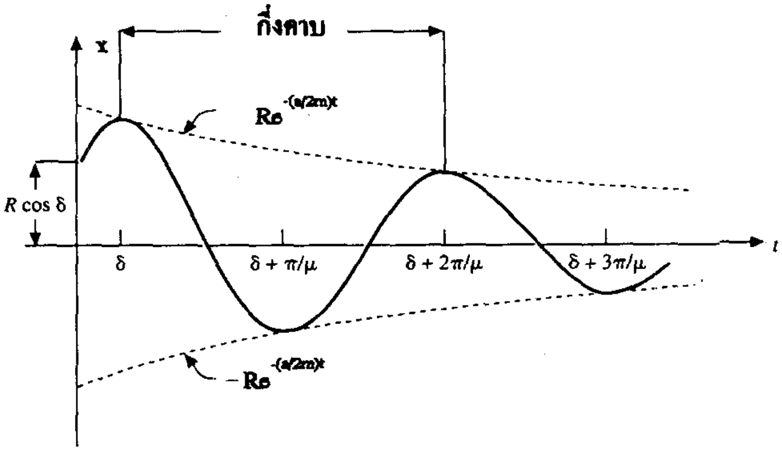
$$x(t) = e^{-(a/2m)t}\,(c_1\cos \mu t + c_2 \sin \mu t) \qquad \ldots(9)$$

โดยที่ $\mu = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - a^2}$

ซึ่งสามารถ เขียนสมการ (9) ได้ในรูป

$$x(t) = Re^{-(a/2m)t}\cos(\mu t - \delta) \qquad \ldots..(10)$$

เมื่อ $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\tan \delta = c_2/c_1$ ดังรูป



เนื่องจากฟังก์ชันโคซายน์ในสมการ (10) เคลื่อนที่กลับไปกลับมาระหว่าง -1 และ 1 ด้วยคาบ $\frac{2\pi}{\mu}$ ดังนั้น x(t) จะเคลื่อนที่กลับไปกลับมาระหว่าง $-Re^{-(a/2m)t}$ และ $Re^{-(a/2m)t}$ ซึ่งพจน์ $Re^{-(a/2m)t}$ มีค่าเข้าสู่ศูนย์เมื่อ $t \to \infty$ เรียกว่า<u>แอมพลิจูดภายใต้แรงแดมพ์</u> ของการเคลื่อนที่และการเคลื่อนที่ไม่เป็นคาบที่แท้จริง แต่เป็นแบบ<u>กึ่งคาบ</u> เป็นการเคลื่อนที่กลับไปกลับมาภายใต้แรงแดมพ์

2. $a^2 = 4mk$

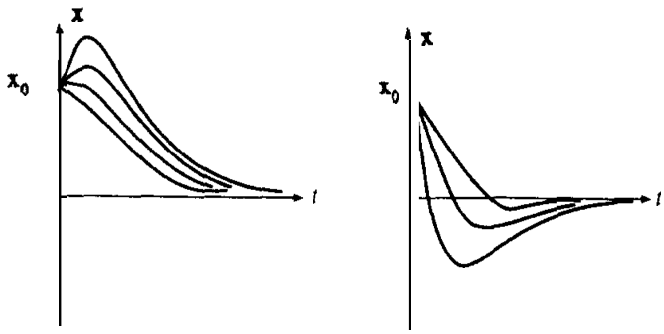
กรณีนี้ $a^2 - 4mk = 0$ ทำให้รากสมการช่วยของสมการ (8) คือ $-a/2m$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-(a/2m)/t} \qquad \ldots..(11)$$

โดยกฎโลปิตาล จะพบว่า

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{c_1 + c_2 t}{e^{(a/2m)t}} = 0$$

เนื่องจากผลเฉลย (11) ไม่ปรากฏฟังก์ชันซายน์หรือโคซายน์ ดังนั้นการเคลื่อนที่จึงไม่มีการเคลื่อนที่แบบกลับไปกลับมา นั่นคือไม่สั่นเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า**<u>การเคลื่อนที่ภายใต้ค่าวิกฤติของแรงแดมพ์</u>** แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่เข้าหาตำแหน่งสมดุลย์ เมื่อเวลามากขึ้นแล้วหยุดนิ่ง ณ ตำแหน่งสมดุลย์ และเราสามารถแสดงได้ว่า x(t) มีจุดสูงสุดหรือต่ำสุดอย่างมากที่เดียว ซึ่งการเคลื่อนที่อาจเป็นไปได้ตามรูปข้างล่างนี้



3. $a^2 > 4mk$

กรณีนี้ $a^2 - 4mk > 0$ ทำให้ได้รากสมการช่วยเป็นรากจริง 2 รากที่ต่างกัน คือ

$$m_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4mk}}{2m}$$

$$m_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4mk}}{2m}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (8) คือ

$$x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \qquad .....(12)$$

ซึ่งผลเฉลยนี้ก็ไม่มีลักษณะของการสั่น พิจารณา m_1 และ m_2 จะพบว่าต่างก็มีค่าเป็นลบ ดังนั้น $x(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$ นั่นคือ วัตถุเคลื่อนที่เข้าหาตำแหน่งสมดุลย์ เมื่อผ่านไปนาน ๆ

และเนื่องจาก $x'(t) = c_1m_1e^{m_1t} + c_2m_2e^{m_2t} = e^{m1t}(c_1m_1 + c_2m_2e^{(m_2-m_1t)})$

แสดงว่า $x'(t) = 0$ เมื่อ $c_1m_1 + c_2m_2e^{(m_2-m_1t)} = 0$ นั่นคือ $x(t)$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดเพียงที่เดียว เพราะฉะนั้นการเคลื่อนที่กรณีที่ 3 นี้ ก็คล้ายกับกรณีที่ 2 แต่เนื่องจากแรงแดมพ์กรณีนี้มีค่ามากกว่ากรณีที่ 2 ทำให้การเคลื่อนที่ไปสู่ตำแหน่งสมดุลย์ใช้เวลามากกว่า จึงเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่าการเคลื่อนที่ภายใต้แรงแดมพ์ที่มากเกิน

ตัวอย่างที่ 2 จงเปรียบเทียบผลเฉลยของการเคลื่อนที่อย่างอิสระ และมีแรงแดมพ์ ของปัญหาต่อไปนี้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad .....(13)$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 1$$

เมื่อ $a = 1,2$ และ 4

วิธีทำ สมการช่วยของสมการ (13) คือ

$$m^2 + am + 1 = 0$$

$$m = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \qquad .....(14)$$

เมื่อ $a = 1$

จากสมการ (14)

$$m = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น การเคลื่อนที่ภายใต้แรงแดมพ์ คือ

$$x(t) = e^{-t/2}[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t] \qquad .....(15)$$

จากเงื่อนไข $x(0) = 1$ และ $x'(0) = 0$ ทำให้ได้

$$x(t) = e^{-t/2}[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\pi}{6} \right) \qquad \ldots\ldots(16)$$

<u>เมื่อ a = 2</u> จากสมการ (14) จะได้ รากสมการช่วย -1,-1 ดังนั้นการเคลื่อนที่ภายใต้ค่าวิกฤติของแรงแดมพ์ คือ

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$

จากเงื่อนไข $x(0) = 1$ และ $x'(0) = 0$ จะได้ $c_1 = c_2 = 1$
ดังนั้น

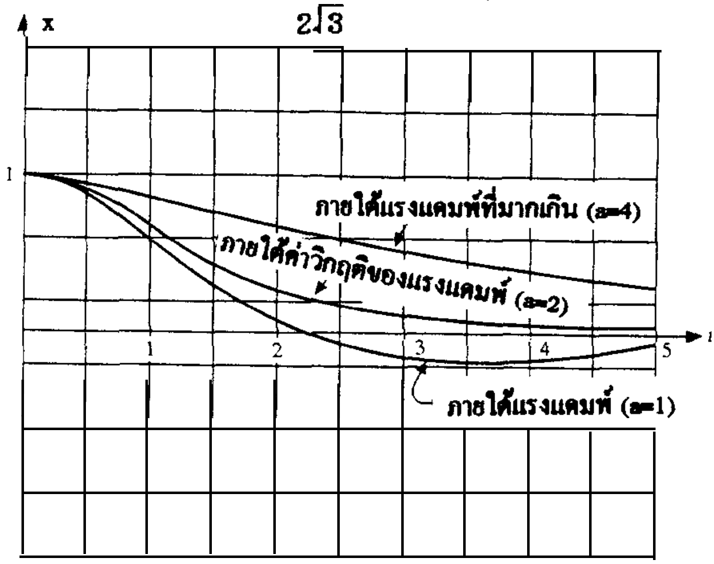
$$x(t) = (1 + t)e^{-t} \qquad \ldots\ldots(17)$$

<u>เมื่อ a = 4</u> จากสมการ (14) จะได้รากสมการช่วยคือ $-2 \pm \sqrt{3}$
ดังนั้น การเคลื่อนสที่ภายใต้แรงแดมพ์ที่มากเกินคือ

$$x(t) = c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 1$ และ $x'(0) = 0$ จะได้

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3})e^{(-2+\sqrt{3})t} + (-2 + \sqrt{3})e^{(-2+\sqrt{3})t}] \qquad \ldots\ldots(18)$$



ค. การเคลื่อนที่เมื่อมีแรงภายนอกกระทำ

สมมติว่าแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบการเคลื่อนที่คือ $f(t) = F_0 \cos wt$ ดังนั้นจากสมการ (2) จะได้

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos wt \qquad \ldots\ldots(19)$$

ถ้าให้ $a^2 < 4mk$, ผลเฉลยของสมการ (19) คือ $x_c + x_p$

x_c หาได้เช่นเดียวกับสมการ (8) นั่นคือจะได้

$$x_c(t) = Re^{-(a/2m)t} \cos(\mu t - \delta)$$

ส่วน x_p สามารถหาได้โดยใช้ตัวดำเนินการผกผัน

$$x_p(t) = \frac{1}{mD^2 + aD + k} F_0 \cos wt$$

$$= \frac{1}{-m\omega^2 + aD + k} F_0 \cos wt$$

$$= aD - (k - m\omega^2) \frac{1}{aD^2 - (k - m\omega^2)^2} F_0 \cos wt$$

$$= aD - (k - m\omega^2) \frac{1}{-a^2\omega^2 - (k - m\omega^2)^2} F_0 \cos wt$$

$$= - \frac{1}{a^2\omega^2 + (k+m\omega^2)^2} [-aF_0\omega \sin \omega t - F_0(k - m\omega^2)\cos \omega t]$$

$$= \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + a^2\omega^2} [(k - m\omega^2)\cos wt + a\omega \sin \omega t]$$

$$= \frac{F_0}{m^2(k/m - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} [m(k/m-\omega^2 \text{kos } \omega t + a\omega \sin \omega t]$$

$$= \frac{F_0}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + a^2\omega^2} [m(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t + aw \sin \omega t]$$

หรือ

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta_1) \qquad .....(20)$$

เมื่อ $\cos \delta_1 = m(\omega_0^2 - \omega^2)/\Delta$ และ $\sin \delta_1 = a\omega/\Delta, \Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ $x_c + x_p$

$$x(t) = Re^{-(a/2m)t}\cos(\mu t - \delta) + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}}\cos(\omega t - \delta_1) \qquad \text{.....(21)}$$

ซึ่งพจน์แรก ($x_c(t)$) มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น ($x_c(t) \to 0$) ในขณะที่พจน์หลัง ($x_p(t)$) มีแอมพลิจูดคงตัวตลอดเมื่อ t เพิ่มขึ้น ดังนั้นจึงเรียกพจน์แรกว่า<u>**พจน์ชั่วคราว**</u> และเรียกพจน์หลังว่า<u>**พจน์สถานะคงที่**</u>

พิจารณากรณีไม่มีแรงแดมพ์ นั่นคือ $a = 0$ จากสมการ (19) จะได้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0\cos\omega t \qquad \text{.....(22)}$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลย

$$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$

โดยที่ $x_c(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t$

= พจน์ชั่วคราว

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$

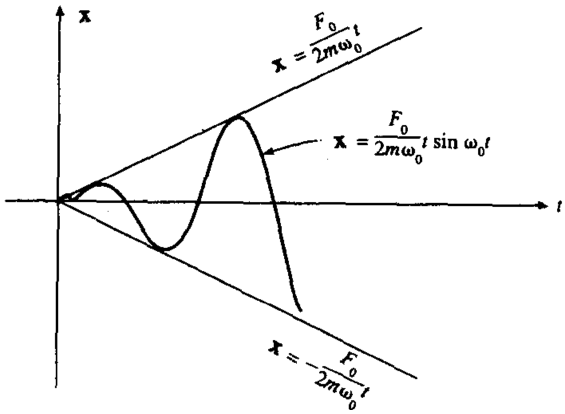
= พจน์สถานะคงที่

แต่ถ้า $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ ผลเฉลยของสมการ (22) คือ

$$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t$$

จะพบว่าเมื่อ $t \to \infty$ $x(t) \to \infty$ ดังรูป

ซึ่งเรียกปรากฏการณ์เช่นนี้ว่า <u>**การประสาน**</u> เช่นกองทหารเดินข้ามสะพาน พวกเขาต้องระวังไม่ให้จังหวะการเดินของเขาไปเท่ากับความถี่การสั่นของสะพาน มิฉะนั้นจะทำให้สะพานขาดได้



ตัวอย่างที่ 3 วัตถุหนัก 16 ปอนด์ ผูกติดแน่นกับปลายล่างของลวดสปริงโดยปลายบนยึดติดแน่นกับเพดาน ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 10 ปอนด์ต่อฟุต เริ่มต้น ณ ตำแหน่งสมดุลของวัตถุ ถ้าแรงจากภายนอก $f(t) = 5 \cos 2t$ และแรงแดมพ์เป็น 2 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ สมการ

$$\frac{16}{32}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 5 \cos 2t$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 10 \cos 2t \qquad \ldots\ldots(23)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(0) = 0 \,,\ x'(0) = 0 \qquad \ldots\ldots(24)$$

หา x_c สมการช่วยคือ $m^2 + 4m + 20 = 0$

$$m = -2 \pm 4i$$

$$x_c(t) = e^{-2t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t)$$

หา x_p

$$x_p(t) = \frac{1}{D^2 + 4D + 20} 10 \cos 2t$$

$$= \frac{1}{-4 + 4D + 20} 10 \cos 2t$$

$$= \frac{1}{4(D+4)} 10 \cos 2t$$

$$= \frac{5}{2} (D - 4) \frac{1}{D^2 - 16} \cos 2t$$

$$= \frac{5}{2} (D - 4) \frac{1}{-4 - 16} \cos 2t$$

$$= -\frac{1}{8} [-2 \sin 2t - 4 \cos 2t]$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t$$

ดังนั้น

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= e^{-2t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t) + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ตามสมการ (24) จะได้ $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{3}{8}$

$$x(t) = e^{-2t}(-\frac{1}{2} \cos 4t - \frac{3}{8} \sin 4t) + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t$$

$$= -\frac{5}{a} e^{-2t} \cos(4t - \delta) + \frac{\sqrt{5}}{4} \cos(2t - \delta_1)$$

เมื่อ $\tan \delta = \frac{3}{4}$ และ $\tan \delta_1 = \frac{1}{2}$

แบบฝึกหัดที่ 7.1

จงหาการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก พร้อมทั้งบอกค่าแอมพลิจูด มุมที่ทิ้งช่วง ความถี่ และคาบ ของการเคลื่อนที่ จากปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น ข้อ 1-3

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \ , \ x(0) = 1, \ x'(0) = 0$

2. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \ , \ x(0) = 1, \ x'(0) = 1$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \ , \ x(0) = 1, \ x'(0) = -2$

4. วัตถุหนัก 12 ปอนด์ ยึดติดแน่นกับปลายล่างของลวดสปริง ส่วนปลายบนยึดติดกับเพดานห้อง จะทำให้ลวดสปริงยืดออกจากเดิมจนถึงตำแหน่งสมดุล เป็นระยะ 6 นิ้ว จงหาสมการการเคลื่อนที่เมื่อวัตถุทำให้เกิดการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 2 ฟุตต่อวินาทีในทิศทางขึ้นบน สมมติว่าเริ่มต้นวัตถุอยู่ ณ ตำแหน่งที่เหนือจากตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ 4 นิ้ว

สำหรับข้อ 5 - 7

จงพิจารณาว่าสมการข้อใดเป็นการเคลื่อนที่แบบภายใต้แรงแดมพ์ ภายใต้ค่าวิกฤติของแรงแดมพ์ หรือ ภายใต้แรงแดมพ์ที่มากเกิน

5. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0$

6. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \ , \ b^2 > k$ และ $k < 0$

7. $\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad 0 < b < 2$

8. วัตถุหนัก 32 ปอนด์ ยึดติดกับสปริง แล้วแขวนเพดานซึ่งทำให้สปริงยืด 2 ฟุต จากตำแหน่งสมดุลถ้าดึงวัตถุลง 6 นิ้ว แล้วปล่อยจงหาสมการการเคลื่อนที่นี้ กำหนดให้แรงต้านการเคลื่อนที่เป็น 4 เท่าของความเร็ว

9. วัตถุหนัก 32 ปอนด์ยึดติดกับสปริง แล้วแขวนเพดานซึ่งทำให้สปริงยืด 1.6 ฟุต จากตำแหน่งสมดุล ณ เวลา $t = 0$ มีแรง $20 \cos 2t$ มากระทำกับระบบ และมีแรงต้านการเคลื่อนที่ $4 \frac{dx}{dt}$ จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

10. มวล 1 สลัก แขวนกับสปริงในสภาพนิ่ง ซึ่งมีค่าคงที่ของสปริง 12 ปอนด์/ฟุต ณ เวลา $t = 0$ ให้แรงภายนอก $16 \cos wt$ มาทำกับระบบ จงหาความถี่ของแรงที่ทำเพื่อให้เกิดการประสานและ จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

คำตอบ

1. $x = \cos t$; $R = 1$, $\delta = 0$, $f = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}$, $t = 2\pi$

2. $x = \sqrt{2} \cos (t - \frac{\pi}{4})$; $R = \sqrt{2}$, $\delta = \frac{\pi}{4}$, $f = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}$, $T = 2\pi$

3. $x = \sqrt{2} \cos (2t - \frac{7\pi}{4})$; $R = \sqrt{2}$, $\delta = \frac{7\pi}{4}$, $f = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}$, $T = 2\pi$

4. $x = -\frac{1}{3} \cos 8t + \frac{1}{4} \sin 8t = \frac{5}{12} \cos(8t - 2.5)$

5. ภายใต้ค่าวิกฤตของแรงแดมพ์

6. ภายใต้แรงแดมพ์ที่มากเกิน

7. ภายใต้แรงแดมพ์

8. $x = e^{-2t}\left(\frac{1}{2} \cos 2\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{6} \sin 2\sqrt{3}\, t\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-2t} \cos \left(2\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$

9. $x = -\frac{1}{4} e^{-2t} (3 \sin 4t + 4 \cos 4t) + \frac{1}{2} (\sin 2t + 2 \cos 2t)$

10. $w = 2\sqrt{3}$

    $x = \frac{2}{3} \sin 2\sqrt{3}\, t - \frac{4\sqrt{3}}{3} t \cos 2\sqrt{3}\, t$

7.2 ปัญหาวงจรไฟฟ้า

วงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ ตัวเก็บประจุมาต่ออนุกรมกับแหล่งกำเนิดไฟฟ้า สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้กฎเกณฑ์ทางไฟฟ้าดังต่อไปนี้

1. แรงเคลื่อนไฟฟ้าเมื่อกระแสไฟฟ้าผ่านตัวต้านทาน คือ

$$E_R = RI$$

เมื่อ R เป็นค่าคงตัวเรียกว่าความต้านทาน และ I เป็นกระแส

2. แรงเคลื่อนไฟฟ้าเมื่อกระแสไฟฟ้าผ่านตัวเหนี่ยวนำ คือ

$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

เมื่อ L เป็นค่าคงตัวเรียกว่า ความเหนี่ยวนำ

3. แรงเคลื่อนไฟฟ้าเมื่อกระแสไฟฟ้าผ่านประจุ คือ

$$E_C = \frac{1}{C}Q$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวเรียกว่า ความจุ และ Q เป็นประจุ

และ $I = \frac{dQ}{dt}$

กฎเกณฑ์เบื้องต้นสำหรับวงจรไฟฟ้าก็คือ **กฎของเคอร์ชอฟ** ซึ่งกล่าวว่า "ผลรวมทางพีชคณิตของแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่กำหนดทิศทาง มีค่าเป็นศูนย์"

เนื่องจากแรงเคลื่อนไฟฟ้าเมื่อผ่านตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำและประจุ มีทิศเดียวกัน และมีทิศตรงข้ามกับแรงเคลื่อนไฟฟ้าจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้า ดังนั้นจะได้ว่า

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E \qquad .....(1)$$

เนื่องจาก $I = \frac{dQ}{dt}$ สมการ (1) จึงเขียนได้เป็น

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E \qquad . . ...(Z)$$

ซึ่งเป็นสมการอันดับสองในตัวแปร Q

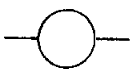
โดยสมการหาอนุพันธ์สมการ (1) เทียบกับ t จะได้

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dI}{dt} \qquad \ldots(3)$$

ซึ่งเป็นสมการอันดับสองในตัวแปร I

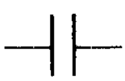
หน่วยและสัญลักษณ์ที่ควรรู้จัก

ปริมาณ	หน่วย
แรงเคลื่อนไฟฟ้า (E)	โวลต์ (V)
กระแสไฟฟ้า (I)	แอมแปร์
ประจุ (Q)	คูลอมบ์
ความต้านทาน (R)	โอห์ม (Ω)
ความเหนี่ยวนำ (L)	เฮนรี่ (H)
ความจุ (C)	ฟารัด

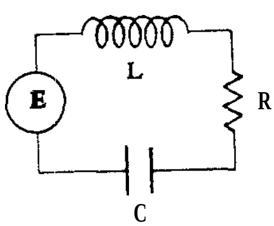

E แหล่งกำเนิดไฟฟ้า


R ตัวต้านทาน


L ตัวเหนี่ยวนำ


C ตัวเก็บประจุ

ดังนั้นวงจรไฟฟ้าข้างต้น สามารถแสดงได้ดังรูป



ตัวอย่างที่ 1 วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยแหล่งกำเนิดไฟฟ้า $E = 100 \sin 40t$ โวลต์ ตัวต้านทาน $10\ \Omega$ และตัวเหนี่ยวนำ 0.5 H ถ้าเริ่มต้นไม่มีกระแสไฟฟ้าเลย จงหากระแสไฟฟ้า ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ จากโจทย์ $E = 100 \sin 40t$

$R = 10$

$L = 0.5$

จากสมการ (1) จะได้

$$0.5 \frac{dI}{dt} + 10I = 100 \sin 40t$$

หรือ

$$\frac{dI}{dt} + 20I = 200 \sin 40t \qquad \ldots(4)$$

เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $I(0) = 0$

จากสมการ (4) สามารถแก้ได้โดยสมการเชิงเส้น นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}(e^{20t} I) = 200e^{20t} \sin 40t$$

จะได้

$$I = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + ce^{-20t}$$

จากเงื่อนไข $I(0) = 0$ จะพบว่า $c = 4$ ดังนั้น

$$I = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + 4e^{-20t}$$

ตัวอย่างที่ 2 วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยแรงเคลื่อนไฟฟ้า $100 \sin 60t$ ตัวต้านทาน 2Ω ตัวเหนี่ยวนำ 0.1 H และตัวเก็บประจุ $\frac{1}{260}$ ฟารัด ถ้าเริ่มต้นไม่มีกระแสและประจุเลย จงหาประจุ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ จากโจทย์ $E = 100 \sin 60t$

$R = 2$

$L = 0.1$

$C = \frac{1}{260}$

จากสมการ (2) จะได้

$$0.1 \frac{d^2Q}{dt^2} + 2 \frac{dQ}{dt} + 260Q = 100 \sin 60t$$

หรือ

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 20 \frac{dQ}{dt} + 2,600Q = 1,000 \sin 60t \qquad \ldots(7)$$

เงื่อนไขเริ่มคือ $Q(0) = 0$

และ $I(0) = \frac{dQ}{dt}(0) = 0$

เราสามารถแก้สมการ (5) ดังนี้

หา Q_c ใช้สมการช่วย

$$m^2 + 20m + 2,600 = 0$$

$$m = -10 \pm 50i$$

$$Q_c(t) = e^{-10t}(c_1 \cos 50t + c_2 \sin 50t)$$

หา Q_p

$$Q_p(t) = \frac{1}{D^2 + 20D + 2,600} 1,000 \sin 60t$$

$$= 1,000 \frac{1}{-3600 + 20D + 2,600} \sin 60t$$

$$= \frac{1,000}{20}(D + 50) \frac{1}{D^2 - 2500} \sin 60t$$

$$= 50 (D + 50) \frac{1}{-3600 - 2500} \sin 60t$$

$$= \frac{50}{-6,100}(60 \cos 60t + 50 \sin 60t)$$

$$= -\frac{30}{61} \cos 60t - \frac{25}{61} \sin 60t$$

ดังนั้น

$$Q(t)=e^{-10t}(c_1\cos 50t + c_2\sin 50t) - \frac{30}{61}\cos 60t - \frac{25}{61}\sin 60t$$

ใช้เงื่อนไข $Q(0) = 0$ และ $\frac{dQ}{dt}(0) = 0$

จะพบว่า $c_1 = \frac{30}{61}$, $c_2 = \frac{36}{61}$

$$Q(t) = \frac{6e^{-10t}}{61}(5\cos 50t + 6\sin 50t) - \frac{5}{61}(6\cos 60t + 5\sin 60t)$$

แบบฝึกหัดที่ 7.2

1. วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยแรงเคลื่อนไฟฟ้า 40 V. ตัวต้านทาน 10 Ω และตัวเหนี่ยวนำ 0.2 H. ถ้าเริ่มต้นกระแสไฟฟ้าในวงจรเป็นศูนย์ จงหากระแสไฟฟ้าในวงจร ณ เวลา t ใด ๆ
2. วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยแรงเคลื่อนไฟฟ้า 100 V. ตัวต้านทาน 10 Ω และตัวเก็บประจุ 2×10^{-4} ฟารัด เมื่อ t = 0 สวิตช์ไฟปิดอยู่ และตัวเก็บประจุเป็นศูนย์ จงหาประจุและกระแสไฟฟ้าเมื่อเวลาใด ๆ
3. วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยแรงเคลื่อนไฟฟ้า 100 sin 200t V. ตัวต้านทาน 40 Ω ตัวเหนี่ยวนำ 0.25 H. และตัวเก็บประจุ 4×10^{-4} ฟารัด ถ้าเริ่มต้นกระแสไฟฟ้าเป็นศูนย์ ประจุในตัวเก็บประจุคือ 0.01 คูลอมบ์ จงหากระไฟฟ้าเมื่อเวลาใด ๆ

คำตอบ

1. $I = 4(1 - e^{-50t})$

2. $Q = \dfrac{1 - e^{-500t}}{50}$, $I = 10e^{-500t}$

3. $I = e^{-80t}(-4.588 \sin 60t + 1.247 \cos 60t) - 1.247 \cos 200t + 1.331 \sin 200t$