บทที่ 6
สมการเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

จากสมการ

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = g(x)$$

หรือ

$$f(D) y = g(x)$$

เราทราบจากบทที่ 4 แล้วว่าผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = y_c + y_p$$

การหา y_c เราพิจารณาแล้วในบทที่ 5
ดังนั้นในบทนี้จะพิจารณาการหา y_p
ซึ่งมีหลายวิธี ดังต่อไปนี้

6.1 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์

ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีนี้ มีเรื่องราวบางอย่างซึ่งจำเป็นต้องทราบเพื่อที่จะได้ทำความเข้าใจวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ได้ดียิ่งขึ้นดังนี้

จากบทที่แล้ว เมื่อเราทราบรากสมการช่วย (ค่า m) เราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้ เช่น

ถ้า $m = a \;;\; y = e^{ax}$

$m = a, a \;;\; y = e^{ax},\ xe^{ax}$

$m = a \pm ib \;;\; y = e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx$

$m = a \pm ib \;;\; a \pm ib \;;\; y = e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}x\cos bx,$
$e^{ax}\sin bx,\ e^{ax}x\sin bx$

โดยทางกลับกัน ถ้าผลเฉลยมีพจน์ e^{ax} แสดงว่ามาจากรากสมการช่วย $f(m) = 0$ ที่มีรากหนึ่งคือ $m = a$ นั่นคือ ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องมีตัวประกอบหนึ่งเป็น $(D - a)$

ถ้าผลเฉลยมีพจน์ xe^{ax} แสดงว่ามาจากรากสมการช่วยที่มีรากซ้ำกัน 2 ครั้ง คือ $m = a,a$ นั่นคือตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องมีตัวประกอบ $(D - a)^2$

ถ้าผลเฉลยมีพจน์ $e^{ax} \cos bx$ หรือ $e^{ax} \sin bx$ แสดงว่าต้องมาจากรากสมการช่วยที่เป็นเชิงซ้อน คือ $m = a \pm ib$ นั่นคือ ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องมีตัวประกอบ $[(D - a)^2 + b^2]$

ถ้าผลเฉลยมีพจน์ $xe^{ax}\cos bx$ หรือ $xe^{ax}\sin bx$ แสดงว่าต้องมาจากรากสมการช่วยที่เป็นเชิงซ้อนและซ้ำกัน 2 ครั้ง คือ $m = a \pm ib, a \pm ib$ นั่นคือ $f(D)$ ต้องมีตัวประกอบ $[(D - a)^2 + b^2]^2$

ซึ่งจากการใช้ผลจากการพิจารณาข้างต้นนี้ สามารถนำมาใช้สร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้

__ตัวอย่างที่ 1__ จงหาสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ จากผลเฉลยเฉพาะ

$$y = 4e^{3x} + 2x \qquad \text{.....(1)}$$

__วิธีทำ__ เนื่องจากพจน์ e^{3x} มาจาก $m = 3$ นั่นคือมี $(D - 3)$ เป็นตัวประกอบของ $f(D)$

และ พจน์ x มาจาก $m = 0,0$ นั่นคือมี D^2 เป็นตัวประกอบ $f(D)$

ดังนั้น สมการที่ต้องการคือ

$$D^2(D - 3)y = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

ซึ่งเราทราบว่าผลเฉลยทั่วไปของ (2) คือ

$$y_c = (c_1 + c_2x) + c_3e^{3x}$$

เมื่อ $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ และ $c_3 = 4$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะตามโจทย์คือ

$$y_p = 4e^{3x} + 2x$$

__ตัวอย่างที่ 2__ จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ที่มีผลเฉลยเฉพาะ

$$y = 5 + 4xe^x - \cos 2x$$

__วิธีทำ__ พจน์ 5 มาจาก $m = 0$ นั่นคือมี D เป็นตัวประกอบของ $f(D)$

xe^x มาจาก $m = 1,1$ นั่นคือมี $(D - 1)^2$ เป็นตัวประกอบของ $f(D)$

$\cos 2x$ มาจาก $m = \pm 2i$ นั่นคือมี $D^2 + 4$ เป็นตัวประกอบของ $f(D)$

ดังนั้นสมการที่ต้องการคือ

$$D(D-1)^2(D^2+4)y = 0 \qquad \ldots(S)$$

ซึ่งเราทราบว่า ผลเฉลยทั่วไปของ (3) คือ

$$y_c = c_1 + (c_2 + c_3x)e^x + c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x$$

เมื่อ $c_1 = 5$, $c_2 = 0$, $c_3 = 4$, $c_4 = -1$, $c_5 = 0$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะตามโจทย์ คือ

$$y_p = 5 + 4xe^x - \cos 2x$$

__ตัวอย่างที่ 3__ จงสร้างสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ที่มีผลเฉลยเฉพาะ

$$y = -7xe^{2x}\sin 3x$$

วิธีทำ เนื่องจากพจน์ $xe^{2x}\sin 3x$ มาจาก $m = 2 \pm 3i,\ 2 \pm 3i$

นั่นคือมีตัวดำเนินการ $[(D-2)^2 + 9]^2$

ดังนั้นสมการที่ต้องการ คือ

$$[(D-2)^2 + 9]^2 y = 0$$

หรือ

$$(D^2 - 4D + 4 + 9)^2 y = 0$$

$$(D^2 - 4D + 13)^2 y = 0 \qquad \ldots(4)$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = e^{2x}[(c_1 + c_2x)\cos 3x + (c_3 + c_4x)\sin 3x]$$

เมื่อ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ และ $c_4 = -7$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะ

$$y_p = -7xe^{2x}\sin 3x$$

__วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์__

จากสมการ

$$f(D)y = g(x) \qquad \ldots\ldots(5)$$

ให้รากของสมการช่วย $f(m) = 0$ คือ

$$m = m_1, m_2, \ldots, m_n \qquad \ldots\ldots(6)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (5) คือ

$$y = y_c + y_p \qquad \ldots\ldots(7)$$

สมมติว่าฟังก์ชันขวามือ $g(x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์

$$f_1(D)g(x) = 0 \qquad .....(8)$$

ซึ่งสมการ (8) มีรากของสมการช่วยเป็น

$$M = M_1, M_2, \ldots, M_k$$

(M นี้เราหาได้โดยใช้วิธีการดังตัวอย่างที่ 1,2,3 ดังที่กล่าวมาแล้ว)

พิจารณาสมการ

$$f_1(D)f(D)y = 0 \qquad .....(9)$$

จะพบว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (9) นี้จะประกอบด้วย y_c ของสมการ (7) ด้วย สมมติให้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (9) คือ

$$Y = y_c + y_r$$

และผลเฉลยเฉพาะ (y_p) ของสมการ (5) ต้องสอดคล้องสมการ (9) ด้วย เพราะว่า

$$f_1(D)f(D)y_p = f_1(D)g(x) = 0$$

(เนื่องจาก $f(D)y_p = g(x)$)

และถ้า $f(D)(y_c + y_r) = g(x)$ แล้ว $f(D)y_r = g(x)$

(เนื่องจาก $f(D)y_c = 0$)

ดังนั้นแสดงว่า $y_r = y_p$ เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ใน y_r ซึ่งการกำหนดสัมประสิทธิ์ดังกล่าวทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ข้อสังเกต

การหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์นี้จะทำได้ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน $g(x)$ ต้องอยู่ในรูปผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(D^2 - 4D + 3)y = 2e^{-x} - 2 \qquad .....(10)$$

วิธีทำ รากสมการช่วยของสมการ (10) คือ

$$m = 1,3$$

จะได้ $y_c = c_2e^{x} + c_2e^{3x}$

เนื่องจากฟังก์ชันทางขวามือของสมการ (10) คือ $g(x) = 2e^{-x} - 2$

มาจาก $M = -1,0$

เป็นผลเฉลยของสมการ

$$D(D+1)y = 0$$

พิจารณาสมการ

$$D(D+1)(D^2 - 4D + 3)y = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$[illegible] \quad c_1e^{x} + c_2e^{3x} + c_3 \; [illegible]_4 \, e^{-x}$$

โดยที่ 2 พจน์แรกคือ y_c ดังนั้น

$$y_r = c_3 + c_4e^{-x}$$

เพื่อที่จะหาสัมประสิทธิ์ c_3 และ c_4 เรากำหนด

$$y_p = y_r = c_3 + c_4e^{-x}$$

ให้สอดคล้องสมการ ([illegible])

$$Dy_p = -c_4e^{-x}$$

$$D^2y_p = c_4e^{-x}$$

แทนค่าในสมการ (10) จะได้

$$c_4e^{-x} + 4c_4e^{-x} + 3(c_3 + c_4e^{-x}) = 2e^{-x} - 2$$

$$8c_4e^{-x} + 3c_3 = 2e^{-x} - 2 \qquad .....(11)$$

เนื่องจากสมการ (11) เป็นเอกลักษณ์และฟังก์ชัน e^{-x}, 1 เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เราสามารถเทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$8c_4 = 2$$

$$3c_3 = -2$$

นั่นคือ $c_4 = \frac{1}{4}$ และ $c_3 = -\frac{2}{3}$

ฉะนั้น $y_p = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-x}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-x}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 5**</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^2 + 4)y = \sin 2x + x \qquad \text{.....(12)}$$

<u>**วิธีทำ**</u> ในที่นี้

m □ $\pm 2i$

และ $M = \pm 2i\ ,\ 0,\ 0$

เพราะฉะนั้น

$$y_c = c_1\cos 2x \bullet c_2\sin 2x$$

$$y_p = c_1 + c_2x + c_3x\cos 2x + c_4x\sin 2x \qquad \text{.....(13)}$$

โดยที่ c_1, c_2, c_3, c_4 เป็นค่าคงตัวที่ต้องกำหนด เพื่อให้ y_p สอดคล้องสมการ (12)

$$Dy_p = c_2 + c_3(\cos 2x - 2x\sin 2x) + c_4(\sin 2x + 2x\cos x)$$

$$D^2y_p = -2c_3\sin 2x - 2c_3(\sin 2x + 2x\cos 2x) + 2c_4\cos 2x$$

$$+2c_4(\cos 2x - 2x\sin 2x)$$

$$= -4c_3\sin 2x - 4c_3x\cos 2x \bullet 4c_4\cos 2x - 4c_4x\sin 2x$$

แทนค่าในสมการ (12) จะได้

$$-4c_3\sin 2x - 4c_3x\cos 2x + 4c_4\cos 2x - 4c_4x\sin 2x$$

$$+4c_1 + 4c_2x + 4c_3x\cos 2x + 4c_4\sin 2x = \sin 2x + x$$

หรือ

$$4c_1 + 4c_2x + (4c_4 - 4c_3)\sin 2x - 4c_4x\sin 2x + 4c_4\cos 2x$$

$$= \sin 2x + x \qquad \text{.....(14)}$$

เนื่องจากสมการ (14)เป็นเอกลักษณ์และฟังก์ชัน $1,\ x,\ \sin 2x,\ x\sin 2x,$ $\cos 2x,\ x\cos 2x$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน เราสามารถเทียบสัมประสิทธิ์ได้

c_1 □ □

$4c_2 = 1$

$4c_4 - 4c_3 = 1$

$-4c_4$ □ □

$4c_4$ □ □

ซึ่งสามารถแก้สมการข้างต้นได้ $c_2 = \frac{1}{4}$

$$c_3 = -\frac{1}{4}$$

แทนค่า c_1, c_2, c_3 และ c_4 ในสมการ (13)
เพราะฉะนั้น

$$y_p = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x\cos 2x$$

<u>**ตัวอย่างที่ 6**</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^3 - D)y = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไข $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ และ $y''(0) = 2$

วิธีทำ ในที่นี้ $m = 0, 1, -1$

และ

$$M = -1, 2$$

เพราะฉะนั้น

$$y_c = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x}$$

$$y_p = c_4xe^{-x} + c_5e^{2x} \qquad \ldots\ldots(16)$$

โดยที่ c_4 และ c_5 เป็นค่าคงตัวที่ต้องกำหนดเพื่อให้ y_p สอดคล้องสมการ (15)

$$Dy_p = c_4(e^{-x} - xe^{-x}) + 2c_5e^{2x}$$

$$D^2y_p = c_4(-e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}) + 4c_5e^{2x}$$

$$= c_4(-2x^{-x} + xe^{-x}) + 4c_5e^{2x}$$

$$D^3y_p = c_4(2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x}) + 8c_5e^{2x}$$

$$= c_4(3e^{-x} - xe^{-x}) + 8c_5e^{2x}$$

แทนค่าในสมการ (15) จะได้

$$3c_4e^{-x} - c_4xe^{-x} + 8c_5e^{2x} - c_4e^{-x} + c_4xe^{-x} - 2c_5e^{2x} = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

หรือ

$$2c_4e^{-x} + 6c_5e^{2x} = 4e^{-x} + 3e^{2x} \qquad .....(17)$$

เนื่องจากสมการ (17) เป็นเอกลักษณ์และฟังก์ชัน e^{-x} กับ e^{2x} เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เราสามารถเทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$2c_4 = 4$$

$$6c_5 = 3$$

ดังนั้น $c_4 = 2$

$$c_5 = \frac{1}{2}$$

แทนค่า c_4 และ c_5 ในสมการ (16)

$$y_p = 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

ผลเฉลยทั่วไป

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} \qquad .....(18)$$

เพื่อที่จะหาค่า c_1, c_2 และ c_3 เราหาอนุพันธ์สมการ (18) ได้

$$Y' = c_2e^{x} - c_3e^{-x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} + e^{2x} \qquad .....(19)$$

และ

$$Y'' = c_2e^{x} + c_3e^{-x} - 4e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{2x} \qquad .....(20)$$

เพราะว่า $y(0) = 0$ ฉะนั้นจากสมการ (18) จะได้

$$0 = c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $y'(0) \square -1$ ฉะนั้นจากสมการ(19) จะได้

$$-1 = c_2 - c_3 \bullet 3$$

เพราะว่า $y''(0) = 2$ ฉะนั้นจากสมการ (20) จะได้

$$2 = c_2 + c_3 - 2$$

ซึ่งแก้ระบบสมการข้างต้น จะพบว่า

$$c_1 = -\frac{9}{2}$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 4$$

เพราะฉะนั้น

$$y = -\frac{9}{2} + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

แบบฝึกหัดที่ 6.1

จงสร้างสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากผลเฉลยเฉพาะต่อไปนี้

1. $y = 5e^{3x} + 3e^{-x}$
2. $y = 4 - 2x + \frac{1}{2}e^{4x}$
3. $y = -7e^{x}\sin 3x$
4. $y = x^{2} - 10\cos 2x$
5. $y = xe^{-x}\sin 2x + 13e^{-x}\cos 2x$
6. $y = 8 + 9x + 10x^{2}$
7. $y = x\sin 2x$
8. $y = 6\sinh x$

จงหาว่าผลเฉลยเฉพาะต่อไปนี้มาจากรากของสมการช่วยอะไร

9. $y = 3x^{2}e^{-x} + 5e^{x}$
10. $y = x(e^{2x} + 2)$
11. $y = 7\sin 2x$
12. $y = 6\cos 2x - 8\sin 2x$
13. $y = 13e^{-x}\sin 4x$
14. $y = x\cos 3x - 2\sin 3x$
15. $y = \sin^{2}x$
16. $y = \cos^{3}x$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการในข้อ 17. - 22.

17. $(D^{2} - 6D + 9)y = e^{x}$
18. $(D^{2} + 3D + 2)y = 1 + 3x + x^{2}$
19. $(D^{2} + D)y = -\cos x$
20. $(D^{2} - 1)y = 8xe^{x}$
21. $(D^{2} + 9)y = 5e^{x} - 162x$
22. $(D^{3} - D)y = x$

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในข้อ 23. - 25.

23. $(D^2 + 1)y = 10e^{2x}$ เมื่อ $x = 0,\ y = 0,\ y' = 0$

24. $(D^2 - 4)y = 2 - 8x$ เมื่อ $x = 0,\ y = 0,\ y' = 5$

25. $(D^2 + 3D)y = -18x$ เมื่อ $x = 0,\ y = 0,\ y' = 5$

คำตอบ

1. $(D - 3)(D + 1)y = 0$
2. $D^2(D - 4)y = 0$
3. $[(D - 1)^2 + 9]y = 0$ หรือ $(D^2 - 2D + 10)y = 0$
4. $D^3(D^2 + 4)y = 0$
5. $(D^2 + 2D + 5)^2 y = 0$
6. $D^3 y = 0$
7. $(D^2 + 4)^2 y = 0$
8. $(D^2 - 1)y = 0$
9. $m = -1, -1, -1, 1$
10. $m = 0, 0, 2, 2$
11. $m = \pm 2i$
12. $m = \pm 2i$
13. $m = -1 \pm 4i$
14. $m = \pm 2i, \pm 2i$
15. $m = 0, \pm 2i$
16. $m = \pm i, \pm 3i$

17. $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \frac{1}{4}e^{x}$

18. $y = ce^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2$

19. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

20. $y = c_1 e^{-x} + e^{x}(c_2 - 2x + 2x^2)$

21. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{2} e^{x} - 18x$

22. $y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} - \frac{1}{2} x^2$

23. $y = 2(e^{2x} - \cos x - 2\sin x)$

24. $y = e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x - \frac{1}{2}$

25. $y = 1 + 2x - 3x^2 - e^{-3x}$

6.2 วิธีแปรตัวพารามิเตอร์

เนื่องจากการหา y_p โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่สามารถใช้ได้กับกรณีที่ฟังก์ชันทางขวามือคือ $g(x)$ มีรูปแบบเป็น $\sec x$, $\tan x$, $\cos e^{-x}$ หรืออื่น ๆ แต่วิธีหา y_p โดยแปรตัวพารามิเตอร์ x จะสามารถช่วยแก้ปัญหานี้ได้ และเป็นวิธีที่สามารถใช้ได้กับฟังก์ชันทุกรูปแบบ

วิธีการของวิธีนี้ก็คือใช้ผลเฉลยทั่วไป y_c ที่หาได้มากำหนดเป็น y_p โดยเปลี่ยนค่าคงตัวเป็นตัวแปร จึงได้ชื่อว่าวิธีแปรตัวพารามิเตอร์ เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ พิจารณาสมการอันดับสอง

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x) \qquad .....(1)$$

สมมติว่าเราทราบผลเฉลย y_c คือ

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad .....(2)$$

พิจารณาให้

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \qquad .....(3)$$

โดยที่ $u_1(x)$ และ $u_2(X)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องกำหนดเพื่อให้ y_p เป็นผลเฉลยของสมการ (1)

หาอนุพันธ์สมการ (3) เราได้

$$y' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2 \qquad .....(4)$$

เนื่องจากเราเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไม่ทราบค่า 2 ฟังก์ชันคือ u_1 และ u_2 แต่เรามีเพียงเงื่อนไขเดียวคือ y_p ต้องสอดคล้องสมการ (1) ดังนั้นเราต้องหาอีกเงื่อนไขหนึ่งเพื่อแก้ปัญหานี้ และเราต้องหาอนุพันธ์สมการ (4) อีกครั้ง เพื่อแทนในสมการ (1) ซึ่งจะทำให้ปรากฏพจน์ $u_1''y_1$ และ $u_2''y_2$ (อนุพันธ์ของสองพจน์หลัง) เป็นเหตุให้เราไม่สามารถหา u_1 และ u_2 ได้ เราจึงกำหนดเงื่อนไขให้

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \qquad .....(5)$$

จากนั้น หาอนุพันธ์สมการ (4) ได้

$$y'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2' \qquad .....(6)$$

แทนค่า y' และ y'' ในสมการ (1)

$$a_0(x)(u_1y'' + u_2y'' + u_1'y_1' + u_2'y_2') + a_1(x)(u_1y_1' + u_2y_2') +$$

$$a_2(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x)$$

หรือ

$$u_1(a_0y_1'' + a_1y_1' + a_1y_1 + u_2(a_0y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) +$$

$$a_0(u_1'y_1' + u_2'y_2') = g(x) \qquad \ldots\ldots(7)$$

แต่ u_1 และ u_2 เป็นผลเฉลยของ $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$
ดังนั้นจากสมการ (7) จะเหลือเพียง

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' \; \frac{g(x)}{a_0(x)} \qquad \ldots\ldots(8)$$

จากสมการ (5) และ (8) เราสามารถแก้สมการหา u_1' และ u_2' ได้เพราะว่า

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

เนื่องจาก y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นกัน
ใช้กฎของเครเมอร์ จะได้

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g/a_0 & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \quad \text{และ} \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g/a_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \qquad \ldots.(9)$$

หรือ

$$u_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)} \; ; \; i = 1,2 \qquad \ldots\ldots(10)$$

โดยที่ $W(x)$ คือ วรอนสเกียนของ y_1 และ y_2 และ $W_i(x)$ คือดีเทอร์มินันต์ที่ได้จาก $W(x)$ โดยแทนที่หลักที่ i ด้วย $(0, g/a_0)^T$
จากนั้นเราก็อินทิเกรต จะทำให้ได้ $u_i(x)$

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(D^2 + 1)y = \sec x \qquad \text{. . ...(n)}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x$$

ดังนั้นให้

$$y_p(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x \qquad \text{.....(12)}$$

หาอนุพันธ์

$$y_p'(x) = -u_1\sin x + u_2\cos x + u_1'\cos x + u_2'\sin x$$

กำหนดเงื่อนไขให้

$$u_1'\cos x + u_2'\sin x = 0 \qquad \text{.....(13)}$$

หาอนุพันธ์อันดับสอง

$$y_p''(x) = -u_1\cos x - u_2\sin x - u_1'\sin x + u_2'\cos x$$

แทนค่า y_p'' และ y_p ในสมการ (11) จะได้

$$-u_1\cos x - u_2\sin x - u_1'\sin x + u_2'\cos x + u_1\cos x + u_2\sin x$$

$$= \sec x$$

หรือ

$$-u_1'\sin x + u_2'\cos x = \sec x \qquad \text{.....(14)}$$

แก้สมการ (13) และ (14) โดยใช้กฎของเครเมอร์

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \quad \text{และ} \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & \sec x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}$$

$$u_1' = \frac{-\sin x \sec x}{1} \quad \text{และ} \quad u_2' = 1$$

อินทิเกรต

$$u_1 = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \quad \text{และ} \quad u_2 = \int dx$$

$$u_1 = \ln |\cos x| \qquad \text{และ} \quad u_2 = x$$

แทนค่า u_1 และ u_2 ในสมการ (12)

$$y_p = (\ln |\cos x|) \cos x + x \sin x$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (11) คือ

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + (\ln |\cos x|) \cos x$$

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^2 - 3D + 2)y = \frac{1}{1 + e^{-x}} \qquad \text{.....(15)}$$

<u>**วิธีทำ**</u> จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

ให้

$$y_p = u_1(x) e^x + u_2(x) e^{2x} \qquad \text{.....(16)}$$

จากสมการ (5) และ (8) จะได้

$$u_1' e^x + u_2' e^{2x} = 0$$

$$u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

จากสมการ (10)

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ (1+e^{-x})^{-1} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}} ; \quad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & (1+e^{-x})^{-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}$$

$$u_1'(x) = \frac{-e^{2x}(1+e^{-x})^{-1}}{e^{3x}} , \quad u_2'(x) = \frac{e^{x}(1+e^{-x})^{-1}}{e^{3x}}$$

$$u_1'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} , \quad u_2'(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$$

โดยการอินทิเกรต

$$u_1(x) = -\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = \ln(1+e^{-x})$$

$$u_2(x) = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx = \int \left(e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$= -e^{-x} + \ln(1+e^{-x})$$

ดังนั้นจากสมการ (16) ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = e^{x}\ln(1+e^{-x}) - e^{x} + e^{2x}\ln(1+e^{-x})$$

สำหรับกรณีสมการอันดับ n เราสามารถทำได้โดยวิธีเดียวกันดังนี้

จากสมการเชิงเส้น

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = g(x) \qquad \ldots\ldots(17)$$

สมมติว่า

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) \qquad \ldots\ldots(18)$$

ให้

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x) \qquad \ldots\ldots(19)$$

กำหนดเงื่อนไข

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n = 0$$

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + \ldots + u_n'y_n' = 0$$

$$u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + \ldots + u_n'y_n'' = 0 \qquad \ldots\ldots(20)$$

$$u_1'y_1^{(n-2)} + u_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-2)} = 0$$

$$a_0(u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-1)}) = g(x)$$

ซึ่งจากระบบสมการ n สมการ เราสามารถแก้สมการได้ เนื่องจากวรอนสเกียนของ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ไม่เป็นศูนย์ โดยใช้กฎของเครเมอร์ จะได้ว่า

$$u_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)} \quad ; \; i = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots(21)$$

โดย $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)$

และ $W_i(x)$ คือดีเทอร์มินันต์ ที่ได้จาก $W(x)$ โดยการแทนที่หลักที่ i ด้วย $(0,0,\ldots,0,g/a)^T$

หรือ

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \ldots & y_n' \\ \cdot & & & & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & g/a & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

จากสมการ (21) อินทิเกรตก็จะได้ $u_i(x)$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y''' - y' = x \qquad \text{.....(22)}$$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$(D^3 - D)y = x$$

ซึ่งพบว่า

$$y_c = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$$

กำหนดให้

$$y_c = u_1(x) + u_2(x)e^x + u_3(x)e^{-x}$$

จากสมการ (20) จะได้

$$u_1' + u_2'e^x + u_3'e^{-x} = 0$$

$$u_2'e^x - u_3'e^{-x} = 0$$

$$u_2'e^x + u_3'e^{-x} = x$$

และจากสมการ (21) จะพบว่า

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ x & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2x}{2} = -x$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & x & e^{-x} \end{vmatrix}}{2} = \frac{xe^{-x}}{2}$$

$$u_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^{x} & 0 \\ 0 & e^{x} & 0 \\ 0 & e^{x} & x \end{vmatrix}}{2} = \frac{xe^{x}}{2}$$

โดยการอินทิเกรตจะได้

$$u_1(x) = \int -x\,dx = -\frac{1}{2}x^2$$

$$u_2(x) = \int \frac{xe^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}(-xe^{-x} - e^{-x})$$

$$u_3(x) = \int \frac{xe^{x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}(xe^{x} - e^{x})$$

แทนค่า ใน y_p จะได้

$$y_p = -\frac{2}{2} + \frac{1}{2}(-x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - 1$$

แต่เนื่องจาก -1 เป็นพจน์ค่าคงตัวซึ่งอยู่ใน y_c แล้ว ดังนั้น $y_p = -\frac{1}{2}x^2$

แบบฝึกหัดที่ 6.2

จงใช้วิธีแปรตัวพารามิเตอร์แก้สมการต่อไปนี้

1. $(D^2 - 1)y = e^x + 1$
2. $(D^2 + 1)y = \csc x$
3. $(D^2 + 1)y = \sec^3 x$
4. $(D^2 - 2D + 1)y = e^{2x}(e^x + 1)^{-2}$
5. $(D^2 - 3D + 2)y = \cos(e^{-x})$
6. $(D^2 + 1)y = \sec x \cdot \csc x$
7. $(D^2 + 1)y = \sin^2 x$

a. $Y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$

9. $Y''' + y' = \tan x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

10. $Y''' - 2Y'' - y' + 2y = e^{4x}$

11. จงแสดงว่า x และ e^x ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ
$(1 - x)y'' + xy' - y = 0$
และจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการข้างต้น

12. ถ้า $y(x) = c_1x + c_2(2x^2 - 1)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ
$(2x^2 + 1)y'' - 4xy' + 4y = 0$ จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ
$(2x^2 + 1)y'' - 4xy' + 4y = 2(1 + 6x^2)x^{-3}$

13. จงแก้สมการ $y'' - y = e^x$ โดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์ แต่แทนที่จะกำหนดเงื่อนไข

$u_1'(x)y_1 + u_2'(x)y_2 = 0$ ตามสมการ (5) ให้กำหนดเงื่อนไข

$u_1'(x)y_1 + u_2'(x)y_2 = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

14. พิจารณาสมการเชิงเส้นอันดับสองในรูป

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = g(x) \qquad .....(23)$$

สมมติ ☒ ☐ y_1 เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0 \qquad .....(24)$$

จงแสดงว่าโดยการกำหนดให้ $y = v(x)y_1$ จะทำให้สมการ (23) เปลี่ยนไปเป็น

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' = g \qquad .....(25)$$

และถ้าให้ v' = w สมการ (25) จะกลายเป็น

$$y_1w' + (2y_1' + py_1)w = g \qquad .....(26)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น สามารถแก้สมการหา w ได้ และจาก $v' = w$ สามารถอินทิเกรตได้ v ในที่สุดจะได้ $y = vy_1$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (23) เรียกวิธีการนี้ว่าวิธีลดอันดับ (Reduction of Order)

15. จงใช้วิธีลดอันดับหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - y = e^x$
(เนื่องจาก $y_c = c_1e^x + c_2e^{-x}$ ดังนั้นให้ $y_1 = e^x$)

คำตอบ

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x - 1$

2. $y = c_1\sin x + c_2\cos x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$

3. $y = y_c + \frac{1}{2}\sec x$

4. $Y = y_c + e^x\ln(1 + e^x)$

5. $Y = y_c - e^{2x}\cos(e^{-x})$

6. $Y = y_c - \cos x \ln|\sec x + \tan x| - \sin x \ln|\csc x + \cot x|$

7. $y = y_c + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x\sin 2x$

8. $y = y_c + \frac{1}{x}$

9. $Y = y_c - \ln\cos x - \sin x \ln(\sec x + \tan x)$

10. $Y = y_c + \frac{1}{30}e^{4x}$

11. $y = c_1x + c_2e^x$

12. $y_p = \frac{1}{x}$

15. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$

6.3 วิธีตัวดำเนินการผกผัน

สำหรับสมการเชิงเส้นสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มีอันดับสูง ๆ (มากกว่า 3) การหา y_p โดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์คงจะยุ่งยากพอสมควร เพราะว่าในการหา $u_i(x)$ โดยใช้กฎของเครเมอร์ จะต้องหาดีเทอร์มินันต์ที่มีมิติมากกว่า 3 ด้วยเหตุนี้วิธีตัวดำเนินการผกผันจึงถูกนำมาใช้เพื่อให้ง่ายขึ้น

ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$f(D)y = g(x) \qquad .....(1)$$

เป็นการสะดวกที่จะเขียน

$$y_p = \frac{1}{f(D)} g(x) \qquad .....(2)$$

โดยที่ $\frac{1}{f(D)}$ เรียกว่า ตัวดำเนินการผกผันของ f(D) ซึ่งมีสมบัติว่า

$$f(D)\frac{1}{f(D)} g(x) = g(x) \qquad .....(3)$$

ดังนั้นจากสมการ (2) ถ้าเอาตัวดำเนินการ f(D) กระทำทางซ้ายมือ จะได้

$$f(D)y_p = f(D)\frac{1}{f(D)} g(x)$$

$$= g(x)$$

สมบัติบางประการของตัวดำเนินการผกผัน

1. $$\frac{1}{f(D)} cu(x) = c \frac{1}{f(D)} u(x) \qquad .....(4)$$

2. $$\frac{1}{f(D)} [c_1u_1(x) + c_2u_2(x)] = Cl \frac{1}{f(D)} u_1(x) + c_2 \frac{1}{f(D)} u_2(x) \qquad .....(5)$$

3. $$\frac{1}{f_1(D)f_2(D)} u(x) = \frac{1}{f_1(D)} [\frac{1}{f_2(D)} u(x)] = \frac{1}{f_2(D)} \frac{1}{f_1(D)} u(x)]$$

$$= \frac{1}{f_2(D)f_1(D)} (x) \qquad .....(6)$$

4. $f_1(D)\left[\frac{1}{f_2(D)}u(x)\right] = \frac{1}{f_-(D)}[f_1(D)u(x)]$ .....(7)

ซึ่งเราสามารถแสดงได้ดังนี้

I. ให้ $\frac{1}{f(D)}u(x) = y$

ดังนั้น $u(x) = f(D)y$

คูณตลอดด้วย c

$$cu(x) = f(D)cy$$

จากสมบัติของตัวดำเนินการผกผัน จะได้

$$\frac{1}{f(D)}cu(x) = cy$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{f(D)}cu(x) = c\frac{1}{f(D)}u(x)$$

2. ให้ $\frac{1}{f(D)}u_1(x) = y_1$ และ $\frac{1}{f(D)}u_2(x) = y_2$

ดังนั้น $u_1(x) = f(D)y_1$ และ $u_2(x) = f(D)y_2$

คูณด้วยค่าคงตัว

$$c_1u_1(x) = f(D)c_1y_1 \text{ และ } c_2u_2(x) = f(D)c_2y_2$$

บวกเข้าด้วยกัน จะได้

$$c_1u_1(x) + c_2u_2(x) = f(D)c_1y_1 + f(D)c_2y_2$$
$$= f(D)(c_1y_1 + c_2y_2)$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{f(D)}[c_1u_1(x) + c_2u_2(x)] = c_1y_1 + c_2y_2$$

$$= c_1\frac{1}{f(D)}u_1(x) + c_2\frac{1}{f(D)}u_2(x)$$

3. ให้ $\frac{1}{f_1(D)f_2(D)}u(x) = y_1$

$$u(x) = f_1(D)f_2(D)y_1 \qquad .....(7)$$

$$= f_2(D)f_1(D)y_1$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{f_2(D)f_1(D)}u(x) = y_1$$

ดังนั้น $\frac{1}{f_1(D)f_2(D)}u(x) = \frac{1}{f_2(D)f_1(D)}u(x) \qquad .....(8)$

ให้ $\frac{1}{f_1(D)}[\frac{1}{f_2(D)}u(x)] = y_2$

$$\frac{1}{f_2(D)}u(x) = f_1(D)y_2$$

$$u(x) = f_2(D)f_1(D)y_2$$

$$= f_1(D)f_2(D)y_2$$

$$\frac{1}{f_1(D)}u(x) = f_2(D)y$$

$$\frac{1}{f_2(D)}[\frac{1}{f_1(D)}u(x)] = y_2$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{f_1(D)}[\frac{1}{f_2(D)}u(x)] = \frac{1}{f_2(D)}[\frac{1}{f_1(D)}u(x)] \qquad .....(9)$$

จากสมการ (7)

$$u(x) = f_1(D)f_2(D)y_1$$

$$= f_1(D)[f_2(D)y_1]$$

$$\frac{1}{f_1(D)}u(x) = f_2(D)y_1$$

$$\frac{1}{f_2(D)}[\frac{1}{f_1(D)}u(x)] = y_1$$

$$= \frac{1}{f_1(D)f_2(D)} u(x) \qquad .....(10)$$

จากสมการ (8),(9) และ (10) ทำให้ได้สมบัติตามสมการ (6)

4. ให้ $f_1(D)[\frac{1}{f_2(D)} u(x)] = y$

ถ้าเราสามารถแสดงได้ว่า $f_2(D)y = f_1(D)u$ ก็จะได้สิ่งที่ต้องการ

พิจารณา $f_2(D)y = f_2(D)[f_1(D)\frac{1}{f_2(D)} u(x)]$

$$= f_1(D)f_2(D)\frac{1}{f_2(D)} u(x)$$

$$= f_1(D)\, u(x)$$

ดังนั้น $y = \frac{1}{f_2(D)}[f_1(D)u(x)]$

นั่นคือ

$$f_1(D)[\frac{1}{f_2(D)} u(x)] = \frac{1}{f_2(D)}[f_1(D)u(x)]$$

- พิจารณาตัวดำเนินการผกผัน $\frac{1}{D} u(x)$

ให้ $\frac{1}{D} u(x) = y$

ดังนั้น $u(x) = \frac{dy}{dx}$

$$y = \int u(x)dx$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{D} u(x) = \int u(x)dx \qquad .....(11)$$

จากสมบัติของตัวดำเนินการตามสมการ (6) จะได้

$$\frac{1}{D^n} u(x) = \underbrace{\iint \ldots \int}_{n \text{ อินทิกรัล}} u(x)(dx)^n$$

- พิจารณาตัวดำเนินการผกผัน $\frac{1}{D - a} u(x)$

ให้ $\frac{1}{D - a} u(x) = y$

ดังนั้น $u(x) = (D - a)y$

หรือ $\frac{dy}{dx} - ay = u(x)$

ซึ่งเป็นสมการอันดับหนึ่งเชิงเส้น มี $I.F. = e^{-ax}$

ซึ่งจะได้

$$d(e^{-ax}y) = e^{-ax}u(x)dx$$

$$y = e^{ax}\int u(x)e^{-ax}dx$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{D - a} u(x) = e^{ax}\int e^{-ax}u(x)dx \qquad .....(12)$$

และจากสมบัติของตัวดำเนินการตามสมการ (6) จะได้

$$\frac{1}{(D - m)^n} u(x) = e^{ax} \underbrace{\int\int\int \dots \int}_{n \text{ อินทิกรัล}} e^{-ax}u(x)(dx)^n$$

$$\frac{1}{(D - m_1)(D - m_2)\dots(D - m_n)} u(x) = e^{m_1x}\int e^{(m_2-m_1)x}\int e^{(m_3-m_2)x}\int \dots \int e^{(m_n-m_{n-1})x}\int e^{-m_nx}u(x)dx^n$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2 - D)y = \sin x$

วิธีทำ เขียนสมการโจทย์ในรูปตัวดำเนินการผกผัน จะได้

$$y_p = \frac{1}{D^2 - D}\sin x$$

$$= \frac{1}{(D-1)D} \sin x$$

$$= \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D} \sin x$$

$$= \frac{1}{D-1} \int \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{D-1} (-\cos x)$$

$$= -e^{x} \int e^{-x} \cos x \, dx$$

$$= -e^{x} \frac{1}{2} (-e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x)$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2 + D - 2)y = e^x$

<u>วิธีทำ</u> เขียนสมการโจทย์ในรูปตัวดำเนินการผกผัน จะได้

$$y_p = \frac{1}{D^2 + D - 2} e^{x}$$

$$= \frac{1}{(D-1)(D+2)} e^{x}$$

$$= \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D+2} e^{x}$$

$$= \frac{1}{D-1} e^{-2x} \int e^{2x} \cdot e^{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{D-1} e^{-2x} \int e^{3x} \, dx$$

$$= \frac{1}{D-1} \frac{e^{x}}{3}$$

$$= e^{x} \int e^{-x} \frac{e^{x}}{3}\, dx$$

$$= \frac{xe^{x}}{3}$$

ถ้า $f(D) = (D - m_1)(D - m_2) \ldots (D - m_n)$ แล้วตัวดำเนินการผกผัน $\frac{1}{f(D)}$ สามารถจะแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้

นั่นคือ

$$y_p = \frac{1}{f(D)} g(x) = \left[\frac{A_1}{D - m_1} + \frac{A_2}{D - m_2} + \ldots + \frac{A_n}{D - m_n} \right] g(x)$$

เพราะฉะนั้นจากตัวอย่างที่ 2

$$y_p = \frac{1}{(D - 1)(D + 2)} e^{x}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D - 1} - \frac{1}{D + 2} \right) e^{x}$$

$$= \frac{1}{3} \left[e^{x} \int e^{-x} \cdot e^{x} dx - e^{-2x} \int e^{2x} \cdot e^{x}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{3} xe^{x} - \frac{1}{9} e^{x}$$

แต่พจน์ e^{x} จะปรากฏใน y_c แล้ว ดังนั้น $y_p = \frac{1}{3} xe^{x}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^3 - 2D^2 + D)y = 1$

วิธีทำ เขียนสมการโจทย์ในรูปตัวดำเนินการผกผัน จะได้

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + D} 1$$

$$= \frac{1}{D(D^2 - 2D + 1)} 1$$

$$= \frac{1}{D(D - 1)^2} 1$$