โดยการแยกเศษส่วนย่อย จะได้

$$y_p = \left(\frac{A_1}{D} + \frac{A_2}{D-1} + \frac{A_3}{(D-1)^2} \right) 1$$

ซึ่งจากการแยกเศษส่วนย่อย จะได้ $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $A_3 = 1$
ดังนั้น

$$y_p = \frac{1}{D} 1 - \frac{1}{D-1} 1 + \frac{1}{(D-1)^2} 1$$

$$= \int dx - e^x \int e^{-x} dx + \frac{1}{D-1} e^x \int e^{-x} dx$$

$$= x + 1 - \frac{1}{D-1} 1$$

$$= x + 1 - e^x \int e^{-x} dx$$

$$= x + 2$$

โดยที่พจน์ 2 จะปรากฏใน y_c แล้ว ดังนั้น $y_p = x$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4)y = e^x$$

วิธีทำ เนื่องจาก $D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4 = (D-1)^2(D^2+4)$
จากโจทย์เขียนในรูปตัวดำเนินการผกผันได้

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D^2+4)} e^x$$

$$= \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D+2i} \cdot \frac{1}{D-2i} e^x$$

$$= \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D+2i} e^{2ix} \int e^{x(1-2i)} dx$$

$$= \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D+2i} \cdot \frac{e^x}{1-2i}$$

$$= \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-1} e^{-2ix} \int \frac{e^{x(1-2i)}}{1-2i} dx$$

$$= \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-1} \cdot \frac{e^x}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{1}{D-1} e^x \int e^x \cdot e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{5} \frac{1}{D-1} xe^x$$

$$= \frac{1}{5} e^{-x} \int xe^x . e^{-x} dx$$

$$= \frac{x^2 e^x}{10}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2 + 4)y = \tan 2x$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนในรูปตัวดำเนินการผกผัน จะได้

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \tan 2x$$

$$= \frac{1}{(D - 2i)(D + 2i)} \tan 2x$$

โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$y_p = \frac{1}{4i} \left[\frac{1}{D - 2i} - \frac{1}{D + 2i} \right] \tan 2x \qquad .....(13)$$

พิจารณา

$$\frac{1}{D - 2i} \tan 2x = e^{2ix} \int e^{-2ix} \tan 2x \, dx$$

$$= e^{2ix} \int (\cos 2x - i \sin 2x) \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx$$

$$= e^{2ix} \int \left[\sin 2x - i \frac{(1-\cos^2 2x)}{\cos 2x}\right] dx$$

$$= e^{2ix} \int [\sin 2x - i(\sec 2x - \cos 2x)] dx$$

$$= e^{2ix}\left[-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{i}{2}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + i\frac{\sin 2x}{2}\right]$$

$$= \frac{-e^{2ix}}{2}\left[(\cos 2x - i\sin 2x) + i\ln|\sec 2x + \tan 2x|\right]$$

$$= \frac{-e^{2ix}}{2}\left[e^{-2ix} + i\ln|\sec 2x + \tan 2x|\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 + ie^{2ix}\ln|\sec 2x + \tan 2x|\right] \qquad .....(14)$$

โดยการแทน i ด้วย -i ในสมการ (14) จะได้

$$\frac{1}{D+2i}\tan 2x = -\frac{1}{2}\left[1 - ie^{-2ix}\ln|\sec 2x + \tan 2x|\right] \qquad .....(15)$$

จากสมการ (13), (14) และ (15)

$$y_p = \frac{1}{4i}\left\{-\frac{1}{2}\left[1 + ie^{2ix}\ln|\sec 2x + \tan 2x|\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[1 - ie^{-2ix}\ln|\sec 2x + \tan 2x|\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4i}\left\{-\frac{i}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix})\ln|\sec 2x + \tan 2x|\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\sec 2x + \tan 2x|$$

การหา y_p จาก $\frac{1}{f(D)}g(x)$ ยังสามารถทำให้ง่ายขึ้นอีกในกรณีที่ $g(x)$ มีรูปแบบเฉพาะอย่างดังต่อไปนี้

1. $g(x) = e^{ax}$

จากสมการ (1) และ (3) ในหัวข้อ 4.3 เราทราบว่า

$$f(D)e^{mx} = f(m)e^{mx}$$

และ

$$(D-m)^n(x^n e^{mx}) = n!e^{mx}$$

ดังนั้น

$$f(D)e^{ax} = f(a)e^{ax} \qquad .....(16)$$

และ

$$(D - a)^n(x^n e^{ax}) = n!e^{ax} \qquad .....(17)$$

จากสมการ (16) จะได้ว่า

$$e^{ax} = \frac{1}{f(D)} f(a)e^{ax}$$

หรือได้เป็นสูตรคือ

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax} \ , \ f(a) \neq 0 \qquad .....(18)$$

กรณีที่ $f(a) = 0$ แสดงว่า $f(D)$ ต้องมีตัวประกอบ $D - a$ อย่างน้อยหนึ่งตัว นั่นคือ

$$f(D) = f_1(D)(D - a)^r \qquad .....(19)$$

จากสมการ (17) ทำให้ได้

$$(D - a)^r(x^n e^{ax}) = n!e^{ax}$$

$$f_1(D)(D - a)^r(e^{ax}x^r) = f_1(D)n!e^{ax}$$

$$e^{ax}x^r = \frac{1}{f_1(D)(D - a)^r} n!f_1(D)e^{ax}$$

$$= \frac{1}{f_1(D)(D - a)^r} n!f_1(a)e^{ax}$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{f_1(D)(D - a)^r} e^{ax} = \frac{e^{ax}x^r}{n!f_1(a)} \qquad .....(20)$$

จากสมการ (19) และจากสูตรการหาอนุพันธ์ของไลบ์นิกซ์

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)}$$

หาอนุพันธ์สมการ (19) เทียบกับ D จะได้

$$f^{(n)}(D) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_1^{(n-i)}(D)[(D-a)^r]^{(i)}$$

$$= \binom{n}{0} f_1^{(n)}(D)(D-a)^r + \binom{n}{1} f_1^{(n-1)}(D)[(D-a)^r]'$$

$$+ \binom{n}{2} f_1^{(n-2)}(D)[(D-a)^r]'' + \ldots$$

$$+ \binom{n}{n-1} f_1'(D)[(D-a)^r]^{(n-1)} + \binom{n}{n} f_1(D)[(D-a)^r]^{(n)}$$

จะพบว่า $f^{(n)}(a) = 0$ เมื่อ $n = 0,1,2,\ldots,r-1$ และ

$$f^{(r)}(a) = f_1(a)r!$$

หรือ

$$f_1(a) = \frac{f^{(r)}(a)}{r!}$$

แทนในสมการ (20) จะได้สูตรคือ

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{x^r}{f^{(r)}(a)} e^{ax} \quad , \; f(a) = 0 \qquad \ldots\ldots(21)$$

<u>**ตัวอย่างที่ 6**</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D-2)(D-3)y = 3e^x + 4$$

<u>**วิธีทำ**</u> จากโจทย์เขียนในรูปตัวดำเนินการผกผันคือ

$$y_p = \frac{1}{(D-2)(D-3)}(3e^x + 4)$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D-3)} 3e^x + \frac{1}{(D-2)(D-3)} 4e^{0x}$$

ใช้สูตรตามสมการ (18) โดยที่พจน์แรก $a = 1$ ส่วนพจน์หลัง $a = 0$ จะได้

$$y_p = \frac{1}{(1-2)(1-3)} 3e^x + \frac{1}{(0-2)(0-3)} 4$$

$$= \frac{3}{2} e^x + \frac{2}{3}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D-1)^2(D+1)y = e^x$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนในรูปตัวดำเนินการผกผันคือ

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)} e^x$$

เนื่องจาก $f(D) = (D-1)^2(D+1)$ และ $f(a) = f(1) = 0$

ดังนั้นใช้สูตรตามสมการ (21)

พิจารณา

$$f(D) = (D-1)^2(D+1) \quad , f(1) = 0$$

$$f'(0) = 2(D-1)(D+1) + (D-1)^2 \quad , f'(1) = 0$$

$$f''(0) = 2((D-1) + (D+1)) + 2(D-1)$$

$$= 2(D+1) + 4(D-1) \quad , f''(1) = 4$$

ดังนั้นจากสูตรตามสมการ (21) จะได้

$$y_p = \frac{x^2e^x}{4}$$

เราสามารถทำได้อีกลักษณะหนึ่ง ดังนี้

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)} e^x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} \frac{1}{D+1} e^x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} \frac{1}{(D+1)} e^x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)^2} e^x$$

พิจารณา $f(D) = (D-1)^2 \quad , f(1) = 0$

$f'(D) = 2(D-1) \quad , f'(1) = 0$

$f''(D) = 2 \quad , f''(1) = 2$

จากสูตรตามสมการ (21)

$$y_p = \frac{1}{2} \frac{x^2e^x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} x^2e^x$$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = e^{2x}\cosh x$$

วิธีทำ จากโจทย์สามารถเขียนได้เป็น

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 5D^2 + 7D - 3} e^{2x}\cosh x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2(D-3)} e^{2x} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)^2D-3)} (e^{3x} + e^x)$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(D-1)^2(D-3)} e^x = \frac{1}{(D-1)^2} \frac{1}{D-3} e^x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} \frac{1}{(1-3)} e^x$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)^2} e^x$$

เนื่องจาก $f(D) = (D-1)^2$, $f(1) = 0$

$f'(D) = 2(D-1)$, $f'(1) = 0$

$f''(D) = 2$, $f''(1) = 2$

ฉะนั้น

$$\frac{1}{(D-1)^2(D-3)} e^x = -\frac{1}{2} \frac{x^2e^x}{2} = -\frac{1}{4} x^2e^x$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}e^{3x} = \frac{1}{(D-3)(D-1)^2}e^{3x}$$

$$= \frac{1}{(D-3)}\frac{1}{(D-1)^2}e^{3x}$$

$$= \frac{1}{(D-3)}\frac{1}{(3-1)^2}e^{3x}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{D-3}e^{3x}$$

$$= \frac{1}{4}xe^{3x}$$

เพราะฉะนั้น

$$y_p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}xe^{3x} - \frac{1}{4}x^2e^x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(xe^{3x} - x^2e^x\right)$$

2. $g(x) = \sin(ax + b)$ หรือ $\cos(ax + b)$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$

$$Re(z) = x$$

$$Im(z) = y$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับฟังกชันเชิงซ้อน

$$F(x) = u(x) + iv(x)$$

$$Re(F(x)) = u(x)$$

$$Im(F(x)) = v(x)$$

ยิ่งกว่านั้น $F^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x)$

และเราทราบมาแล้วว่า

$$e^{i(ax+b)} = \cos(ax + b) + i\sin(ax + b)$$

กระทำทางซ้ายด้วยตัวดำเนินการผกผัน จะพบว่า

$$\frac{1}{f(D)} e^{i(ax+b)} = \frac{1}{f(D)} [\cos(ax + b) + i \sin(ax + b)]$$

$$= \frac{1}{f(D)} \cos(ax + b) + i \frac{1}{f(D)} \sin(ax + b)$$

นั่นคือ

$$\text{Re} \frac{1}{f(D)} e^{i(ax+b)} = \frac{1}{f(D)} \cos(ax + b)$$

$$\text{Im} \frac{1}{f(D)} e^{i(ax+b)} = \frac{1}{f(D)} \sin(ax + b)$$

ทำนองเดียวกัน

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos(ax + b) = \text{Re} \frac{1}{f(D^2)} e^{i(ax+b)}$$

$$= \text{Re} \frac{1}{f(-a^2)} e^{i(ax+b)}$$

$$= \text{Re} \frac{1}{f(-a^2)} [(\cos(ax + b)+i \sin(ax + b)]$$

$$= \frac{1}{f(-a^2)} \cos(ax + b) , \ f(-a^2) \neq 0 \qquad .....(22)$$

โดยที่ $f(D^2)$ เป็นตัวดำเนินการที่ได้จากการแทน D ด้วย D^2

$$f(D^2) = a_0 D^{2n} + a_1 D^{2n-2} + \ldots + a_{n-1} D^2 + a_n$$

และทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\frac{1}{f(D^2)} \sin(ax + b) = \frac{1}{f(-a^2)} \sin(ax + b) , \ f(-a^2) \neq 0 \qquad .....(23)$$

สำหรับกรณีที่ $f(-a^2) = 0$ เราสามารถหาสูตรใหม่ได้ดังนี้

จาก $$\frac{1}{f(D^2)} \cos(ax + b) = \text{Im} \frac{1}{f(D^2)} e^{i(ax + b)}$$

$$= \text{Im} \frac{xe^{i(ax+b)}}{f'(-a^2)}$$

$$= \frac{X}{f'(-a^2)} \cos(ax + b) \ , \ f'(-a^2) = 0$$

และถ้า $f'(-a^2) = 0$

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos(ax + b) = \frac{x^2}{f''(-a^2)} \cos(ax + b) \ , \ f''(-a^2) \neq 0$$

.

.

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos(ax + b) = \frac{x^r}{f^{(r)}(-a^2)} \cos(ax + b) \ , \ f^{(r)}(-a^2) \neq 0 \qquad ....(24)$$

และทำนองเดียวกัน

$$\frac{1}{f(D^2)} \sin(ax + b) = \frac{x^r}{f^{(r)}(-a^2)} \sin(ax + b) \ , \ f^{(r)}(-a^2) \neq 0 \qquad ....(25)$$

โดยทั่วไป f(D) จะประกอบด้วย D ที่มีเลขชี้กำลังเป็นเลขคู่ และเลขคี่ จาก

$$f(D) = a_0 D^n + a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

สามารถเขียนใหม่เป็น

$$f(D) = f_1(D^2) + Df_2(D^2)$$

พิจารณา

$$f(-D) = f_1(D^2) - Df_2(D^2)$$

ทำให้

$$f(D)f(-D) = f_1^2(D^2) - D^2 f_2^2(D^2)$$

ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นเลขคู่ทุกพจน์

เช่น

$$f(D) = 3D^5 + 4D^4 - 2D^3 + D^2 - 7D + 6$$

$$= (4D^4 + D^2 + 6) + D(3D^4 - 2D^2 - 7)$$

$$f(-D) = (4D^4 + D^2 + 6) - D(3D^4 - 2D^2 - 7)$$

$$f(D)f(-D) = (4D^4 + D^2 + 6)^2 - D^2(3D^4 - 2D^2 - 7)^2$$

ดังนั้น $\frac{1}{f(D)} \cos(ax + b) = f(-D) \frac{1}{f(-D)f(D)} \cos(ax + b)$

$$= f(-D)\frac{1}{f_1(D^2)}\cos(ax+b)$$

$$= f(-D)\frac{1}{f_1(-a^2)}\cos(ax+b)$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^4 + D^2 + 1)y = \cos 2x$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y_p = \frac{1}{D^4 + D^2 + 1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{(D^2)^2 + D^2 + 1}\cos 2x$$

จากสูตรตามสมการ (22) จะพบว่า

$$y_p = \frac{1}{(-4)^2 + (-4) + 1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{13}\cos 2x$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2 - 2D + 1)y = \sin 3x$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 1}\sin 3x$$

$$= (D^2 + 2D + 1)\frac{1}{(D^2 + 2D + 1)(D^2 - 2D + 1)}\sin 3x$$

$$= (D^2 + 2D = 1)\frac{1}{(D^2 + 1)^2 - 4D^2}\sin 3x$$

จากสูตรตามสมการ (23)

$$y_p = (D^2 + 2D + 1)\frac{1}{(-9 + 1)^2 - 4(-9)}\sin 3x$$

$$= \frac{1}{100}(D^2 + 2D + 1)\sin 3x$$

$$= \frac{1}{100}(-9 \sin 3x + 6 \cos 3x + \sin 3x)$$

$$= \frac{1}{100}(-8 \sin 3x + 6 \cos 3x)$$

$$= \frac{1}{50}(-4 \sin 3x + 3 \cos 3x)$$

เราอาจทำให้ง่ายขึ้นได้ด้วยวิธีการต่อไปนี้

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} \sin 3x$$

$$= \frac{1}{(-9)-2D + 1} \sin 3x$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{D + 4} \sin 3x$$

$$= -\frac{1}{2}(D - 4)\frac{1}{(D - 4)(D + 4)} \sin 3x$$

$$= -\frac{1}{2}(D - 4)\frac{1}{D^2 - 16} \sin 3x$$

$$= -\frac{1}{2}(D - 4)\frac{1}{(-9) - 16} \sin 3x$$

$$= \frac{1}{50}(D - 4)\sin 3x$$

$$= \frac{1}{50}(3 \cos 3x - 4 \sin 3x)$$

$$= \frac{1}{50}(-4 \sin 3x + 3 \cos 3x)$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2 + a^2)y = \cos ax$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y_p = \frac{1}{D^2 + a^2} \cos ax$$

เนื่องจาก $f(-a^2) = 0$

พิจารณา $f(D^2) = D^2 + a^2$, $f(-a^2) = 0$

$f'(D^2) = 2D$, $f'(-a^2) = 2D$

จากสูตรตามสมการ (24)

$$y_p = \frac{x}{2D} \cos ax$$

$$= \frac{x}{2} D \frac{1}{D^2} \cos ax$$

$$= \frac{x}{2} D \left(\frac{1}{-a^2} \cos ax \right)$$

$$= -\frac{x}{2} \left(a \frac{\sin ax}{-a} \right)$$

$$= \frac{x}{2a} \sin ax$$

เราอาจทำแบบอื่นก็ได้ ดังนี้

$$y_p = \frac{1}{D^2 + a^2} \cos ax$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{1}{(D - ai)(D + ai)} (e^{aix} - e^{-aix})$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{2ai} \frac{1}{D - ai} e^{aix} - \frac{1}{2ai} \frac{1}{D + ai} e^{-aix} \right]$$

$$= \frac{1}{4ai} \left(\frac{xe^{aix}}{1!} - \frac{xe^{-aix}}{1!} \right)$$

$$= \frac{x}{2a}\left(\frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2i}\right)$$

$$= \frac{x}{2a}\sin ax$$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^5 - D^4 + 2D^3 - 2D^2 + D - 1)y = \cos x$$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y_p = \frac{1}{D^5 - D^4 + 2D^3 - 2D^2 + D - 1}\cos x$$

$$= \frac{1}{(D^2 + 1)^2 (D - 1)}\cos x$$

$$= \frac{1}{(D^2 + 1)^2}(D + 1)\frac{1}{D^2 - 1}\cos x$$

$$= \frac{1}{(D^2 + 1)^2}(D + 1)\frac{1}{-1 - 1}\cos x$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(D^2 + 1)^2}(-\sin x + \cos x)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(D^2 + 1)^2}\,-\sin x + \frac{1}{(D^2 + 1)^2}\cos x\right]$$

พิจารณา $f(D^2) = (D^2 + 1)^2$, $f(-1^2) = 0$

$f'(D^2) = 4D(D^2 + 1)$, $f(-1^2) = 0$

$f''(D^2) = 12D^2 + 4$, $f''(-1^2) = -8$

ดังนั้น

$$y_p = -\frac{1}{2}\left[\frac{-x^2}{-8}\sin x + \frac{x^2}{-8}\cos x\right]$$

$$= \frac{1}{16}x^2(\cos x - \sin x)$$

3. $g(x) = x^m$, m เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณาสมการ

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)y = x^m \qquad \ldots\ldots(26)$$

หาอนุพันธ์สมการ (26) m ครั้งติดต่อกันจะได้

$$(a_0D^{n+1} + a_1D^n + \ldots + a_{n-1}D^2 + a_nD)y = mx^{m-1}$$

$$(a_0D^{n+2} + a_1D^{n+1} + \ldots + a_{n-1}D^3 + a_nD^2)y = mx^{m-2}$$

$$\vdots \qquad \ldots\ldots(27)$$

$$(a_0D^{n+m} + a_1D^{n+m-1} + \ldots + a_{n-1}D^{m+1} + a_nD^m)y = m!$$

ถ้าให้ $$a_nD^my = m! \qquad \ldots\ldots(28)$$

จะพบว่าผลเฉลยเฉพาะของสมการ (28) จะเป็นผลเฉลยเฉพาะหนึ่งของสมการสุดท้ายของสมการ (27) ด้วย

จากสมการ (28) $$D^my = \frac{m!}{a_n}$$

แทนค่า D^my และอนุพันธ์อันดับสูงกว่า m ซึ่งเป็นศูนย์ ในสมการถัดขึ้นไปของสมการ (27) จะได้ $D^{m-1}y$ ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ จนถึงสมการ (26) ก็จะได้ y_p

<u>**ตัวอย่างที่ 13**</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^2 + 2D - 3)y = x^2 \qquad \ldots\ldots(29)$$

<u>**วิธีทำ**</u> หาอนุพันธ์ 2 ครั้ง ติดต่อกัน จะได้

$$(D^3 + 2D^2 - 3D)y = 2x \qquad \ldots\ldots(30)$$

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = 2$$

ให้ $-3D^2y = 2$

หรือ $D^2y = -\frac{2}{3}$

แทน D^2y ในสมการ (30)

$$2(-\frac{2}{3}) - 3Dy = 2x$$

$$Dy = -\frac{1}{3}(2x + \frac{4}{3})$$

แทน D^2y, Dy ในสมการ (29)

$$-\frac{2}{3} + 2(-\frac{1}{3}(2x + \frac{4}{3})) - 3y = x^2$$

$$-\frac{4}{3}x - \frac{14}{9} - 3y = x^2$$

ดังนั้น $y = -\frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$

$$y_p = -\frac{1}{3}(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{14}{9})$$

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^3 + 3D^2 + 2D)y = x^2 \qquad .....(31)$$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์ 2 ครั้ง ติดต่อกันจะได้

$$(D^4 + 3D^3 + 2D^2)y = 2x \qquad .....(32)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3)y = 2$$

ให้ $2D^3y = 2$

หรือ $D^3y = 1$

แทน D^3y ในสมการ (32)

$$3 + 2D^2y = 2x$$

$$D^2y = x - \frac{3}{2}$$

แทน D^2y , D^3y ในสมการ (31)

$$1 + 3(x - \frac{3}{2}) + 2Dy = x^2$$

$$Dy = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$$

อินทิเกรต

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x\right)$$

ยังมีวิธีการหา y_p กรณี $g(x) = x^m$ อีกลักษณะหนึ่งดังนี้

$$y_p = \frac{1}{f(D)}x^m$$

ให้ $(D - a)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $f(D)$

พิจารณา

$$(D - a)x^m = mx^{m-1} - ax^m \qquad .....*$$

$$(D - a)x^{m-1} = (m - 1)x^{m-2} - ax^{m-1}$$

ดังนั้น

$$(D - a)\frac{m}{a}x^{m-1} = \frac{m(m - 1)}{a}x^{m-2} - mx^{m-1} \qquad .....*$$

$$(D - a)x^{m-2} = (m - 2)x^{m-3} - ax^{m-2}$$

ดังนั้น

$$(D - a)\frac{m(m - 1)}{a^2}x^{m-2} = \frac{m(m - 1)(m - 2)^{m-3}}{a^2} - \frac{m(m - 1)}{a}x^{m-2}$$

$$.....*$$

$$(D - a)x^{m-3} = (m - 3)x^{m-4} - ax^{m-3}$$

ดังนั้น

$$(D-a)\frac{m(m-1)(m-2)}{a^3}x^{m-3} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{a^3}x^{m-4} - \frac{m(m-1)(m-2)}{a^2}x^{m-3}$$

$$.....*$$

$$\vdots$$

$$= (D - a)x^{m-(m-1)} = x^0 - ax$$

ดังนั้น

$$\frac{(D-a)m(m-1)(m-2)\ldots3.2.x}{a^{m-1}} = \frac{m!}{a^{m-1}} - \frac{m(m-1)(m-2)\ldots3.2.x}{a^{m-2}} \qquad \ldots.*$$

$$(D-a)x^{m-m} = -a$$

ดังนั้น

$$(D-a)\frac{m!}{a^m} = -\frac{m!}{a^{m-1}} \qquad \ldots..*$$

บวกสมการ * เข้าด้วยกันจะได้

$$(D-a)(x^m + \frac{m}{a}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^2}x^{m-2} + \ldots + \frac{m!}{a^m}) = -ax^m$$

หรือ

$$\frac{1}{D-a}x^m = -\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!x^{m-k}}{(m-k)!.a^k} \qquad \ldots\ldots(33)$$

จากทฤษฎีบททวินาม เราทราบว่า

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

ถ้าเราพิจารณาตัวดำเนินการผกผัน $\frac{1}{D-a}$ ให้เหมือนกับทฤษฎีบททวินาม

$$\frac{1}{D-a} = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{-D/a+1}\right) = -\frac{1}{a}\left(1-\frac{D}{a}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{1}{a}\left(1 + \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} + \frac{D^3}{a^3} + \ldots + \frac{D^m}{a^3} + \ldots\right)$$

และ

$$\frac{1}{D-a}x^m = -\frac{1}{a}\left(1 + \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} + \frac{D^3}{a^3} + \ldots + \frac{D^m}{a^m} + \ldots\right)x^m$$

$$= -\frac{1}{a}\left(x^m + \frac{m}{a}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^2}x^{m-2} + \ldots + \frac{m!}{a^m}\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!x^{m-k}}{(m-k)!a^k} \qquad \ldots..(34)$$

ซึ่งจะพบว่าสมการ (33) เท่ากับสมการ (34) ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการหาค่า $\frac{1}{D-a}x^m$ เราอาจพิจารณา $\frac{1}{D-a}$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมได้ และถ้า

$$f(D) = (D-a_1)^{m_1}(D-a_2)^{m_2}\ldots(D-a_k)^{m_k}$$

$$\frac{1}{f(D)}x^m = \frac{1}{(D-a_1)^{m_1}}\ \frac{1}{(D-a_2)^{m_2}}\ \ldots\ \frac{1}{(D-a_k)^{m_k}}x^m$$

ซึ่งในที่สุดจะพบว่า

$$\frac{1}{f(D)}x^m = (A_0 + A_1D + A_2D^2 + \ldots + A_mD^m + \ldots)x^m$$

เราจะกระจายอนุกรมจนถึง D^m เท่านั้น เพราะว่า $D^{m+1}x^m = 0$

<u>หมายเหตุ</u>

1. รูปแบบอนุกรมที่ควรจำได้

$$\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1+D)^2} = 1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-D)^2} = 1 + 2D + 3D^2 + 4D^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1+D)^3} = 1 - 3D + 6D^2 - 10D^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-D)^4} = 1 + 3D + 6D^2 + 10D^3 + \ldots$$

2. การหาอนุกรมของตัวดำเนินการผกผัน $\frac{1}{f(D)}$ สามารถทำได้โดยการตั้งหารยาว ดังนี้

เช่น $\frac{1}{D+a}$

$$\frac{1}{D+a} = \frac{1}{a+D}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1/a - D/a^2 + D^2/a^3 - D^3/a^4 \\
a + D & 1 \\
 & \underline{1 + D/a} \\
 & \quad - D/a \\
 & \quad - D/a - D^2/a^2 \\
 & \qquad\qquad D^2/a^2 \\
 & \qquad\qquad D^2/a^2 + D^3/a^3 \\
 & \qquad\qquad\qquad - D^3/a^3 \\
 & \qquad\qquad\qquad - D^3/a^3 - D^4/a^4
\end{array}
$$

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^3 + 3D^2 + 2D)y = x^2$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์

$$y = \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 2D} x^2$$

$$= \frac{1}{2D(1 + \frac{3D + D^2}{2})} x^2$$

$$= \frac{1}{2D} \frac{1}{(1 + \frac{3D + D^2}{2})} x^2$$

$$= \frac{1}{2D} [1 - (\frac{3D + D^2}{2}) + (\frac{3D + D^2}{2})^2 - \ldots] x^2$$

$$= \frac{1}{2D} [1 - \frac{3}{2} D + \frac{7}{4} D^2 - \ldots] x^2$$

$$= \frac{1}{2D} [x^2 - 3x + \frac{7}{2}]$$

$$= \frac{1}{2} [\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{7}{2} x]$$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^2 - D + 1)y = x^3 - 3x^2 + 1 + e^x$$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y = \frac{1}{D^2 - D + 1}(x^3 - 3x^2 + 1 + e^x)$$

$$= \frac{1}{D^2 - D + 1}(x^3 - 3x^2 + 1) + \frac{1}{D^2 - D + 1} e^x$$

$$= \frac{1}{1 + (-D + D^2)}(x^3 - 3x^2 + 1) + \frac{1}{1^2 - 1 + 1} e^x$$

$$= [1 - (-D + D^2) + (-D + D^2)^2 - (-D + D^2)^3 + \ldots]$$
$$(x^3 - 3x^2 + 1) + e^x$$

$$= [1 + D - D^3 + \ldots](x^3 - 3x^2 + 1) + e^x$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 1) + D(x^3 - 3x^2 + 1) - D^3(D^3 - 3x^2 + 1) + e^x$$

$$= x^3 - 3x^2 + 1 + 3x^2 - 6x - 6 + e^x$$

$$= x^3 - 6x - 5 + e^x$$

4. $g(x) = e^{ax} V(x)$

จากสมการ (2) ในหัวข้อ 4.3 เราทราบว่า

$$f(D)[e^{mx}y] = e^{mx} f(D + m)y$$

ดังนั้น

$$f(D)[e^{ax}u(x)] = e^{ax}f(D + a)u(x)$$

หรือ

$$e^{ax}u(x) = \frac{1}{f(D)} e^{ax} f(D + a)u(x) \qquad \ldots\ldots(35)$$

ให้ $f(D + a)u(x) = V(x)$

$$u(x) = \frac{1}{f(D) + a)} V(x)$$

แทนในสมการ (35)

$$e^{ax} \frac{1}{f(D + a)} V(x) = \frac{1}{f(D)} e^{ax} V(x)$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax}V(x) = e^{ax} \frac{1}{f(D + a)} V(x) \qquad .....(36)$$

ตัวอย่างที่ 17 จงหาผลเฉลยเฉพาะจากสมการ $(D^2 + 2D + 5)y = me^x$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y = \frac{1}{D^2 + 2D + 5} xe^x$$

ใช้สูตรตามสมการ (36)

$$y = e^x \frac{1}{(D + 1)^2 + 2(D + 1) + 5} x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2 + 4D + 8} x$$

$$= \frac{1}{8} e^x \frac{1}{1 + \frac{1}{2} D + \frac{D^2}{8}} x$$

$$= \frac{1}{8} e^x [1 - \frac{1}{2}D - ...] x$$

$$= \frac{1}{8} e^x (x - \frac{1}{2})$$

ตัวอย่างที่ 18 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^2 - 6D + 13)y = 8e^{3x} \sin 2x$$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y = \frac{1}{D^2 - 6D + 13} 8e^{3x} \sin 2x$$

$$= 8e^{3x} \frac{1}{(D + 3) - 6(D + 3) + 13} \sin 2x$$

$$= 8e^{3x} \frac{1}{D^2 + 4} \sin 2x$$

$$= 8e^{3x} \left(- \frac{x}{2.2} \cos 2x\right)$$

$$= - \frac{1}{2} xe^{3x} \cos 2x$$

5. $g(x) = xV(x)$

ให้ $y = xu(x)$

$$Dy = x\,Du + u$$

$$D^2y = x\,D^2u + Du + Du$$

$$= x\,D^2u + 2Du$$

$$D^3y = x\,D^3u + D^2u + 2D^2u$$

$$= x\,D^3u + 3D^2u$$

.

.

$$D^ny = x\,D^nu + nD^{n-1}u$$

เพราะฉะนั้น

$$f(D)y = xf(D)u + f'(D)u$$

แทนค่า $y = xu$ จะได้

$$f(D)xu = xf(D)u + f'(D)u \qquad .....(37)$$

ให้ $f(D)u = V(x)$

$$u = \frac{1}{f(D)} V(x)$$

แทนในสมการ (37)

$$f(D)x \frac{1}{f(D)} V(x) = xV(x) + f'(D) \frac{1}{f(D)} V(x)$$

กระทำด้วย $\frac{1}{f(D)}$

$$\frac{1}{f(D)} xV(x) = \frac{1}{f(D)} f(D)[x \frac{1}{f(D)} V(x)] - \frac{1}{f(D)} [f'(D) \frac{1}{f(D)} V(x)]$$

$$= x \frac{1}{f(D)} V(x) - \frac{1}{f(D)} f'(D) \frac{1}{f(D)} V(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{f(D)} xV(x) = [x - \frac{1}{f(D)} f'(D)] \frac{1}{f(D)} V(x) \qquad .....(38)$$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^2 - 2D + 1)y = xe^x \sin x$$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} xe^x \sin x$$

$$y = \frac{1}{(D - 1)^2} e^x x \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{(D + 1 - 1)^2} x \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} x \sin x$$

จากสมการ (38) จะได้

$$y = e^x \ [x - \frac{1}{D^2} .2D] \frac{1}{D^2} \sin x$$

$$= e^x[x - \frac{1}{D^2} 2D](-\sin x)$$

$$= -xe^x \sin x + 2e^x \frac{1}{D^2} \cos x$$

$$= - xe^x \sin x - 2e^x \cos x$$

$$= -e^x(x \sin x + 2 \cos x)$$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2 + 3D + 2)4 = x \cos x$

วิธีทำ จากโจทย์

$$y = \frac{1}{D^2 + 3D + 2} x \cos x$$

จากสมการ (38) จะได้

$$y = [x - \frac{1}{D^2 + 3D + 2}(2D + 3)] \frac{1}{D^2 + 3D + 2} \cos x$$

$$= [x - \frac{1}{D^2 + 3D + 2}(2D + 3)] \frac{1}{-1 + 3D + 2} \cos x$$

$$= [x - \frac{1}{D^2 + 3D + 2}(2D + 3)] (3D - 1) \frac{1}{9D^2 - 1} \cos x$$

$$= [x - \frac{1}{D^2 + 3D + 2}(2D + 3)] (\frac{3D - 1}{-10}) \cos x$$

$$= x \frac{(3D - 1)}{-10} \cos x - \frac{1}{D^2 + 3D + 2} \frac{(2D + 3)(3D - 1)}{-10} \cos x$$

$$= x \frac{(-3 \sin x - \cos x)}{-10} - \frac{1}{D^2 + 3D + 2}(3 - 7D - 6D^2) \frac{\cos x}{10}$$

$$= \frac{x}{10}(\cos x + 3 \sin x) - (3 - 7D - 6D^2) \frac{1}{D^2 + 3D + 2} \frac{\cos x}{10}$$

(เนื่องจาก $3 - 7D - 6D^2$ และ $D^2 + 3D + 2$ ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน)

$$= \frac{x}{10}(\cos x + 3 \sin x) - (3 - 7D - 6D^2) \frac{1}{3D + 1} \frac{\cos x}{10}$$

$$= \frac{x}{10}(\cos x + 3 \sin x) - (3 - 7D - 6D^2)(3D - 1) \frac{1}{9D^2 - 1} \frac{\cos x}{10}$$

$$= \frac{x}{10}(\cos x + 3 \sin x) - (3 - 7D - 6D^2)(3D - 1) \frac{\cos x}{-100}$$

$$= \frac{x}{10}(\cos x + 3 \sin x) - (-3 + 16D - 15D^2 - 18D^3) \frac{\cos x}{-100}$$

$$= \frac{x}{10}(\cos x + 3 \sin x) - \frac{1}{100}(34 \sin x - 12 \cos x)$$

แบบฝึกหัดที่ 6.3

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการต่อไปนี้

1. $(D^2 + D - 2)y = x^2 - x$

2. $(D^2 - 4D + 4)y = x^2e^{2x}$

3. $(D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$

4. $(D^2 + 1)y = \sec x$

5. $(D^2 + 1)y = \sec x$

6. $(D^2 - 3D + 2)y = \sin e^{-x}$

7. $(D^3 - D^2 - 5D - 3)y = 2e^{-x} + e^{4x}$

8. $(D^3 - 3D^2 + 4)y = e^{3x}$

9. $(D^2 - 3D + 2)y = \cosh x$

10. $(D^2 + 4D + 4)y = 2 \sinh 2x$

11. $(D^3 + 1)y = (e^x + 1)^2$

12. $(D^2 + 4)y = \sin 2x$

13. $(D^2 - 2D + 5)y = 10 \sin x$

14. $(D^3 - 4D^2 + 4D - 1)y = e^x + \cos x$

15. $(D^2 + 4)y = \sin^2 x$

16. $(D^4 + 10D^2 + 9)y = \cos(2x + 3)$

17. $(D^2 + D - 2)y = 2(1 + x - x^2)$

18. $(D^2 + 5D + 4)y = x^2 + 7x + 9$

19. $(D^3 + 2D^2 + 4D + 8)y = x$

20. $(D^4 + D^2 + 16)y = 16x^2 + 256$

21. $(D^3 + 5D^2 + 6D)y = x^3$

22. $(D^2 - 2D + 1)y = x^2 e^{3x}$

23. $(D^2 + 2D + 2)y = 2e^{-x}\sin x$

24. $(D^3 - 2D + 4)y = e^x \cos x$

25. $(D - 2)^2 y = e^{2x} x^{-2}$

26. $(D^2 + 9)y = x \cos x$

27. $(D^2 + 3D + 2)y = x \sin x$

คำตอบ

1. $y_p = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

2. $y_p = \frac{1}{12} e^{2x} x^4$

3. $y_p = \frac{1}{2} e^{4x}$

4. $y_p = x \sin x + \cos x \ln |\cos x|$

5. $y_p = -x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$

6. $y_p = -e^{2x} \sin e^{-x}$

7. $y_p = -\frac{1}{4} x^2 e^{-x} + \frac{1}{25} e^{4x}$

8. $y_p = \frac{1}{4} e^{3x}$

9. $y_p = -\frac{1}{2} xe^{x} + \frac{1}{12} e^{-x}$

10. $y_p = \frac{1}{16} e^{2x} - \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$

11. $y_p = \frac{1}{9} e^{2x} + e^{x} + 1$

12. $y_p = -\frac{1}{4} x \cos 2x$

13. $y_p = \cos x + 2 \sin x$

14. $y_p = -xe^{-x} + \frac{1}{30}(\sin x + 3\cos x)$

15. $y_p = \frac{1}{8} - \frac{x}{2}\sin 2x$

16. $y_p = -\frac{1}{15}\cos(2x + 3)$

17. $y_p = x^2$

18. $y_p = \frac{1}{32}(8x^2 + 36x + 23)$

19. $y_p = \frac{1}{16}(2x - 1)$

20. $y_p = x^2 + \frac{127}{8}$

21. $y_p = \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{36}x^3 + \frac{19}{72}x^2 - \frac{65}{216}x$

22. $y_p = \frac{1}{4}e^{3x}(x^2 - 2x + \frac{3}{2})$

23. $y_p = -xe^{-x}\cos x$

24. $y_p = \frac{xe^x}{20}(3\sin x - \cos x)$

25. $y_p = -e^{2x}\ln|x|$

26. $y_p = \frac{1}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x$

27. $y_p = \frac{x}{10}(\sin x - 3\cos x) - \frac{1}{100}(-34\cos x - 12\sin x)$