บทที่ 5
สมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

เราทราบแล้วจากบทที่ 4 ว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์คือ $y_c + y_p$ เมื่อ y_c เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

ในบทนี้เราจะหา y_c ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว

5.1 <u>สมการช่วย</u>

จากสมการเชิงเส้นอันดับ n แบบเอกพันธ์ที่มีประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \qquad \dots\text{(I)}$$

หรือเขียนในรูปของตัวดำเนินการ คือ

$$f(D)y = 0$$

เมื่อ $f(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n$

เราสามารถหาผลเฉลยสมการ (1) ได้โดยการทดลองคำตอบให้

$$y = e^{mx} \qquad \dots(2)$$

แทนค่าในสมการ (1) และใช้สมบัติของตัวดำเนินการ

$$f(D)y = f(D)e^{mx} = f(m)e^{mx} = 0$$

แต่ $e^{mx} \neq 0$ ดังนั้น

$$f(m) = a_0m^n + a_1m^{n-1} + \dots + a_{n-1}m + a_n - 0 \qquad \dots\text{(S)}$$

ซึ่งเราสามารถแก้สมการ (3) หาค่า m ได้ n ราก

จากนั้นแทนค่า m ที่ได้ในสมการ (2) ก็จะได้ผลเฉลยของสมการ (1) เราเรียกสมการ (3) นี้ว่า <u>สมการช่วย</u>

เนื่องจาก f(m) ในสมการช่วย เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี n ทำให้สมการช่วยมีรากได้ n ราก ซึ่งอาจจะเป็นรากที่เป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน หรืออาจจะมีรากบางรากมีค่าซ้ำกันก็ได้ ซึ่งจะพิจารณาเป็นกรณี ๆ ไปดังนี้

5.2 รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน

ให้รากสมการช่วย (3) เป็น $m_1, m_2, \ldots, m_n$ โดยที่แต่ละรากมีค่าต่างกัน ดังนั้น

$$y_1 = e^{m_1 x},\ y_2 = e^{m_2 x}, \ldots,\ y_n = e^{m_n x}$$

ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ (1) และเนื่องจากฟังก์ชันเหล่านี้เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) คือ

$$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \qquad \ldots\ldots(4)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่ เป็น

$$(D^2 - D - 2)y = 0 \qquad \ldots\ldots(5)$$

สมการช่วยของสมการ (5) คือ

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m - 2)(m + 1) = 0$$

จะได้ $m = 2, -1$

ฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^3 - D^2 + 12D)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยของสมการโจทย์ คือ

$$m^3 - m^2 - 12m = 0$$

หรือ

$$m(m^2 - m - 12) = 0$$

$$m(m - 4)(m + 3) = 0$$

จะได้ $m = 0, 4, -3$

ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y_c = c_1 + c_2e^{4x} + c_3e^{-3x}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$x = 0,\ y = 0$ และ $y' - 3$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$(D^2 - 4)y = 0$$

ซึ่งสมการช่วยคือ

$$m^2 - 4 = 0$$

$$m = 2, -2$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} \qquad \ldots\ldots(6)$$

และ $y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}$ $\qquad \ldots\ldots(7)$

จากเงื่อนไข $x = 0,\ y = 0$ และ $y' = 3$

แทนในสมการ (6) และ (7) จะได้

$$0 = c_1 + c_2$$

$$3 = 2c_1 - 2c_2$$

แก้สมการทั้งสอง หาค่า c_1 และ c_2 ได้ $c_1 = \frac{3}{4}$, $c_2 = -\frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยที่ต้องการคือ

$$y = \frac{3}{4}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{-2x}$$

หรือ $y = \frac{3}{2}\sinh 2x$

แบบฝึกหัดที่ 5.2

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการในข้อ 1 - 10

1. $(D^2 + 2D - 3)y = 0$

2. $y'' + 2y' = 0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

4. $(D^2 - 5D + 6)y = 0$

5. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} = 0$

6. $(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)y = 0$

7. $4y''' - 7y' + 3y = 0$

a. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0$

9. $(9D^3 - 7D + 2)y = 0$

10. $(D^3 - 14D + 8)y = 0$

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในข้อ 11 - 12

11. $(D^2 - 2D - 3)y = 0$ เมื่อ $x = 0,\ y = 0,\ y' = -4$

12. $(D^2 - D - 6)y = 0$; $y(0) = 0$ และ $y(1) = e^3$

คำตอบ

1. $y_c = c_1e^{x} + c_2e^{-3x}$

2. $y_c = c_1 + c_2e^{-2x}$

3. $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$

4. $Y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$

5. $y_c = c_1 + c_2e^{5x} + c_3e^{-2x}$

6. $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}$

7. $y_c = c_1e^{x} + c_2\exp(\frac{1}{2}x) + c_3\exp(-\frac{3}{2}x)$

8. $y_c = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-2x}$

9. $y_c = c_1e^{-x} + c_2\exp(\frac{1}{3}x) + c_3\exp(\frac{2}{3}x)$

10. $y_c = c_1e^{-4x} + c_2\exp[(2 + \sqrt{2})x] + c_3\exp[(2 - \sqrt{2})x]$

11. $y = e^{-x} - e^{3x}$

12. $y = (e^{3x} - e^{-2x})/(1 - e^{-5})$

5.3 รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงแต่ซ้ำกัน

จากสมการ

$$f(D)y = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

เมื่อสมการช่วยมีรากซ้ำกัน สมมติว่ารากเป็น a ซ้ำกัน n ราก

$$m = \underbrace{a, a, \ldots, a}_{n \text{ ครั้ง}}$$

ดังนั้น $f(m) = (m - a)^n$

นั่นคือ $f(D) = (D - a)^n$

ทำให้สมการ (1) เขียนได้เป็น

$$(D - a)^n y = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

จากสมบัติของตัวดำเนินการในหัวข้อ 4.3 สมการ (4) ที่ว่า

$$(D - m)^n[e^{mx}y] = e^{mx}D^n y$$

หรือ

$$(D - a)^n(e^{ax}y) = e^{ax}D^n y$$

ถ้าให้ $y = x^k$ จะพบว่า

$$(D - a)^n(e^{ax}x^k) = e^{ax}D^n x^k$$

ซึ่งขวามือของสมการจะเป็นศูนย์เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,n - 1$

นั่นคือ $(D - a)^n(e^{ax}x^k) = 0 \; ; \; k = 0,1,2,\ldots,n - 1$

แสดงว่า ผลเฉลยของสมการ (2) คือ $e^{ax}x^k$; $k = 0,1,2,\ldots,n - 1$

หรือ $y_1 = e^{ax}$, $y_2 = xe^{ax}$,..., $y_n = x^{n-1}e^{ax}$

ฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) คือ

$$y_c = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + \ldots + c_nx^{n-1}e^{ax}$$

หรือ

$$y_c = (c_1 + c_2x + \ldots + c_nx^{n-1})e^{ax} \qquad \ldots\ldots(3)$$

สำหรับกรณีที่รากสมการช่วยมีค่าซ้ำกันบ้างไม่ซ้ำกันบ้าง นั่นคือ f(D) จะอยู่ในรูป

$$f(D) = f_1(D)(D - a)^k \; , \; 0 < k < n$$

ดังนั้นจากสมการ (1) เขียนได้เป็น

$$f_1(D)(D-a)^k y = 0$$

สมการช่วยคือ

$$f_1(m)(m-a)^k = 0$$

ซึ่งรากสมการช่วยคือ

$m = m_1, m_2, \ldots, m_r$.(จาก $f_1(m) = 0$ และ $k + r = n$)

และ $\quad m = \underbrace{a, a, \ldots, a}_{k \text{ ครั้ง}}$

ผลเฉลยที่สมนัยกับรากสมการช่วย คือ

$y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}, \ldots, y_r e^{m_r x}$ และ

$Y_{r+1} = e^{ax}$, $y_{r+2} = xe^{ax}, \ldots, y_{r+k} = y_n = x^{k-1} e^{ax}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_r e^{m_r x} + (c_{r+1} + c_{r+2} + \ldots + c_{r+k} x^{k-l}) e^{ax} \qquad \ldots\ldots(4)$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ

$$m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0$$

หรือ

$$(m-2)^3 = 0$$

$$m = 2,2,2$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงแก้สมการ $(D^3 + 5D^2 + 8D + 4)y = 0$

<u>วิธีทำ</u> สมการช่วยคือ

$$m^3 + 5m^2 + 8m + 4 = 0$$

หรือ

$$(m+1)(m+2)^2 = 0$$

$$m = -1,-2,-2$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)e^{-2x}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{2d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$(D^4 + 2D^3 + D^2)y = 0$$

ซึ่งสมการช่วยคือ

$$m^4 + 2m^3 + m^2 = 0$$

หรือ

$$m^2(m^2 + 2m + 1) = 0$$

$$m^2(m+1)^2 = 0$$

$$m = 0,0,-1,-1$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^{-x}$$

แบบฝึกหัดที่ 5.3

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

1. $(D^2 - 6D = 9)y = 0$

2. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$

3. $(D^2 - 2\sqrt{5}D + 5)y = 0$

4. $(9D^2 - 12D + 4)y = 0$

5. $(4D^3 + 4D^2 + D)y = 0$

6. $(4D^3 - 3D + 1)y = 0$

7. $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 0$

a. $(D^4 + 6D^3 + 9D^2)y = 0$

9. $(D^4 + 3D^3 - 6D^2 - 28D - 24)y = 0$

10. $(D^4 - 5D^2 - 6D - 2)y \square 0$

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในข้อ 11 - 12

11. $(D^3 - 3D - 2)y = 0$; $y(0) \square 0$, $y'(0) = 9$, $y''(0) = 0$

12. $(D^3 + D^2 - D - 1)y = 0$; เมื่อ $x = 0, y = 1$; เมื่อ $x = 2$, $y = 0$
และเมื่อ $x \to \infty$, $y \to 0$

คำตอบ

1. $y_c = (c_1 + c_2x)e^{3x}$

2. $y_c = (c_1 + c_2x)e^{-2x}$

3. $y_c = (c_1 + c_2x)\exp(\sqrt{5}x)$

4. $y_c = (c_1 + c_2x)\exp(2x/3)$

5. $y_c = c_1 + (c_2 + c_3x)\exp(-\frac{1}{2}x)$

6. $y_c = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)\exp(\frac{1}{2}x)$

7. $y_c = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}$

a. $y_c = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^{-3x}$

9. $y_c = c_1e^{3x} + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^{-2x}$

10. $y_c = (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3e^{(1+\sqrt{3})x} + c_4e^{(1-\sqrt{3})x}$

11. $y = 2e^{2x} + (3x - 2)e^{-x}$

12. $y = \frac{1}{2}(2 - x)e^{-x}$

5.4 รากสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ถ้าสมการช่วย $f(m) = 0$ ให้รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน คือ $a + ib$ จากความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน จะพบว่าเราได้รากอีกรากหนึ่งคือ $a - ib$ ด้วยนั่นคือรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะอยู่ในรูป

$$m = a \pm ib$$

ดังนั้น

$$y_c = c_1\exp[(a + ib)x] + c_2\exp[(a - ib)x]$$

$$= c_1e^{ax}e^{ibx} + c_2e^{ax}e^{-ibx} \qquad \ldots(1)$$

จากสูตรของออยเลอร์

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

สมการ (1) จึงเขียนได้เป็น

$$y_c = c_1e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + c_2e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$$

$$= (c_1 + c_2)e^{ax}\cos bx + i(c_1 - c_2)e^{ax}\sin bx$$

ให้ $c_1 + c_2 = c_3$ และ $i(c_1 - c_2) = c_4$

เพราะฉะนั้น

$$y_c = c_3e^{ax}\cos bx + c_4e^{ax}\sin bx$$

หรือ

$$y_c = e^{ax}(c_3\cos ba + c_4\sin bx) \qquad \ldots(2)$$

สำหรับสมการ (2) นี้ สามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งดังนี้

โดยการคูณและหาร ด้วย $\sqrt{c_3^2 + c_4^2}$

$$y_c = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}\, e^{ax}\left(\frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}\cos bx + \frac{c_4}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}\sin bx\right)$$

ให้ α เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\sin \alpha = \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}} , \quad \cos \theta = \frac{c_4}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}$$

และให้ $A = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} y_c &= Ae^{ax} (\sin \alpha \cos bx + \cos \alpha \sin bx) \\ &= Ae^{ax} \sin (bx + \alpha) \qquad \ldots\ldots(3) \end{aligned}$$

โดยวิธีเดียวกัน เราสามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ $y_c = Ae^{ax}\cos(bx+\alpha)$ $\ldots\ldots(4)$

ในกรณีที่สมการช่วย $f(m) = 0$ มีรากเป็นเชิงซ้อนซ้ำกัน k ราก นั่นคือ

$$m = \underbrace{a \pm bi,\ a \pm bi\ \ldots\ a \pm bi}_{k \text{ ครั้ง}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y_c &= (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1})e^{(a+ib)x} + \\ &\quad (C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1})e^{(a-ib)x} \\ &= e^{ax}[(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1})(\cos bx + i \sin bx) + \\ &\quad (C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1})(\cos bx - i \sin bx)] \\ &= e^{ax}[\{(c_1 + C_1) + (c_2 + C_2)x + (c_3 + C_3)x^2 + \ldots + \\ &\quad (c_k + C_k)x^{k-1}\}\cos bx + i\{(c_1 + C_1) + (c_2 + C_2)x + \\ &\quad (c_3 + C_3)x^2 + \ldots + (c_k + C_k)x^{k-1}\}\sin bx] \end{aligned}$$

ถ้าเราให้ $A_r = c_r + C_r$ และ $B_r = i(c_r + C_r)$ เมื่อ $r = 1,2,\ldots,k$

จะได้

$$y_c = e^{ax}[(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots + A_kx^{k-1})\cos bx +$$

$$(B_1 + B_2x + B_3x^2 + \ldots + B_kx^{k-1})\sin bx] \qquad \ldots\ldots(5)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 4y' + 5y = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$(D^2 - 4D' + 5)y = 0$$

สมการช่วยคือ

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$= 2 \pm i$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y^{iv} + 4y'' + 4y = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น $(D^4 + 4D^2 + 4)y = 0$

สมการช่วยคือ $m^4 + 4m^2 + 4 = 0$

หรือ $(m^2 + 2)^2 = 0$

$$m^2 = -2, -2$$

ซึ่งจะได้

$$m = \pm\sqrt{2}i\ ,\ \pm\sqrt{2}i$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = (c_1 + c_2x)\cos\sqrt{2}x + (c_3 + c_4x)\sin\sqrt{2}x$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ

$$m^3 - 3m^2 + 9m + 13 = 0$$

หรือ

$$(m + 1)(m^2 - 4m + 13) = 0$$

จะได้

$$m = -1,\ \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

$$= -1,\ 2 \pm 3j$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_c = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$$

แบบฝึกหัดที่ 5.4

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

1. $(D^2 - 2D + 2)y = 0$

2. $(D^2 + 3D + 3)y = 0$

3. $(4D^2 - 24D + 37)y \quad 0$

4. $(D^2 - 4D + (4 + k^2))y = 0$

5. $(D^2 - 2D + 5)y = 0$

6. $(D^2 - 9)y = 0$

7. $(D^4 + 2D^3 + 10D^2)y = 0$

8. $(D^4 + 18D^2 + 8)y = 0$

9. $(D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D\ 4)y = 0$

10. $(D^3 - 2D^2 + D - 2)y = 0$

คำตอบ

1. $y_c = e^{x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$

2. $y_c = e^{-3x/2}[c_1\cos(\sqrt{3}x/2) + c_2\sin(\sqrt{3}x/2)]$

3. $y_c = e^{3x}(c_1\cos\frac{x}{2} + c_2\sin\frac{x}{2})$

4. $y_c = e^{2x}(c_1\cos kx + c_2\sin kx)$

5. $y_c = e^{x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

6. $y_c = c_1\cosh 3x + c_2\sinh 3x$

7. $y_c = c_1 + c_2x + e^{-x}(c_3\cos 3x + c_4\sin 3x)$

8. $y_c = (c_1 + c_2x)\cos 3x + (c_3 + c_4x)\sin 3x$

9. $y_c = (c_1 + c_2x)e^{x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$

10. $y_c = c_1e^{2x} + c_2\cos + c_3\sin x$