บทที่ 4
สมการเชิงเส้นอันดับ n

รูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n คือ

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = g(x) \qquad .....(1)$$

โดยที่ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ และ g เป็นฟังก์ชันของ x

ถ้า $g(x) \neq 0$ เราเรียกสมการ (1) ว่าสมการไม่เอกพันธ์

ถ้า $g(x) = 0$ เราเรียกสมการ (1) ว่าสมการเอกพันธ์ ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \qquad ......(2)$$

ตัวอย่างเช่น

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 2 และเป็นสมการไม่เอกพันธ์

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 2 แต่เป็นสมการเอกพันธ์

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 3 เป็นสมการเอกพันธ์

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 4 เป็นสมการเอกพันธ์

4.1 ความไม่อิสระเชิงเส้น และอิสระเชิงเส้น

เนื่องจากผลเฉลยของสมการเชิงเส้นจะเกี่ยวข้องกับความเป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้นก่อนอื่นจึงจะขอกล่าวถึงความหมายของฟังก์ชันที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น และเป็นอิสระเชิงเส้น

ความไม่อิสระเชิงเส้น

เราเรียกฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ว่าไม่เป็นอิสระเชิงเส้นในช่วง $a \le x \le b$ ถ้ามีค่าคงตัวตามใจชอบ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันหมด ซึ่งทำให้การรวมเชิงเส้น

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $a \le x \le b$

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ $f_i(x)$; $i = 1,2,3,\ldots,n$ จะไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนช่วงดังกล่าว ก็ต่อเมื่อมี $c_i \neq 0$ ซึ่งทำให้

$$f_i(x) = -\frac{c_1}{c_i} f_1 - \frac{c_2}{c_i} f_2 - \ldots - \frac{c_n}{c_i} f_n$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f_1(x) = \sin 2x$, $f_2(x) = \sin x \cos x$ ในช่วง $-\infty < x < \infty$

พิจารณาการรวมเชิงเส้น $c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$

จะพบว่าเป็นจริงได้โดยเลือก $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -1$

นั่นแสดงว่า f_1 และ f_2 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ในช่วงดังกล่าว

หรือ อาจพิจารณาได้ว่า

$$f_1(x) = 2f_2(x)$$

ความเป็นอิสระเชิงเส้น

เราเรียกฟังก์ชัน $f_i(x)$; $i = 1,2,3,\ldots,n$ ว่าเป็นอิสระเชิงเส้นในช่วง $a \le x \le b$ ถ้า

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

สำหรับทุก x ในช่วงดังกล่าว แล้ว

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

หรือ กล่าวได้ว่า เซตของฟังก์ชันที่ไม่ใช่เซตไม่อิสระเชิงเส้น เรียกว่าเป็นอิสระเชิงเส้น

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> กำหนดให้ $f_1(x) = 2,\ f_2(x) = e^x,\ -\infty < x < \infty$

จะพบว่า $c_1f_1 + c_2f_2 = 2c_1 + c_2e^x = 0$

สำหรับทุกค่า x เมื่อ $c_1 = c_2 = 0$ เท่านั้น

นั่นแสดงว่า f_1 และ f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นในช่วงดังกล่าว

<u>**หมายเหตุ**</u> การหาค่า c_1 & c_2 อาจทำให้ชัดเจนดังนี้

จาก $2c_1 + c_2e^x = 0$ สำหรับทุก x

ให้ $x = 0,\ 2c_1 + c_2 = 0$

ให้ $x = 1,\ 2c_1 + c_2e = 0$

แก้สมการทั้งสอง จะพบว่า $c_1 = c_2 = 0$

จากการทดสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นจากนิยาม จะพบว่าถ้ามีหลาย ๆ ฟังก์ชัน จะยุ่งยากมาก ดังนั้นจึงมีวิธีอื่นที่จะทดสอบได้ดังต่อไปนี้

<u>**บทนิยาม**</u> ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ถึงอันดับ n - 1 บนช่วง $a \le x \le b$ เราเรียกดีเทอร์มิแนนต์

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ว่า <u>วรอนสเกียน</u> ของฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เขียนแทนด้วย $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ถึงอันดับ $n - 1$ บนช่วง $a \le x \le b$ ถ้าฟังก์ชันเหล่านี้ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น แล้ว $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$ สำหรับทุก x ในช่วงดังกล่าว

พิสูจน์ เนื่องจาก $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้นมีค่าคงตัวตามใจชอบ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ที่ทำให้

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

และเนื่องจาก ฟังก์ชันเหล่านี้หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ $n - 1$ ทำให้ได้ระบบสมการคือ

$$\begin{aligned}
c_1 f_1 &+ c_2 f_2 &+ \ldots + c_n f_n &= 0 \\
c_1 f_1' &+ c_2 f_2' &+ \ldots + c_n f_n' &= 0 \\
&\vdots \\
c_1 f_1^{(n-1)} &+ c_2 f_2^{(n-1)} &+ \ldots + c_n f_n^{(n-1)} &= 0
\end{aligned}$$

หรือเขียนในรูปสมการเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

แต่ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เพราะฉะนั้น

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

นั่นคือ $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ถึงอันดับ $n - 1$ ถ้า $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$ สำหรับบาง x ในช่วง $a \leq x \leq b$ แล้วฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$ จะเป็นอิสระเชิงเส้นในช่วงดังกล่าว

พิสูจน์ ใช้กฎเกณฑ์ของตรรกวิทยา ที่ว่า ประพจน์

$p \Rightarrow q = \sim q \Rightarrow \sim p$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาความเป็นอิสระเชิงเส้นของ $f_1(x) = e^{m_1x}$ และ

$f_2(x) = e^{m_2x}$, $m_1 \neq m_2$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$W(e^{m_1x}, e^{m_2x}) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix}$$

$$= (m_2 - m_1)e^{(m_1+m_2)x}$$

$$\neq 0$$

ดังนั้น ฟังก์ชันดังกล่าวเป็นอิสระเชิงเส้นกัน

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาความอิสระเชิงเส้นของ $f_1(x) = x,\ f_2(x) = xe^x$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$W(x, xe^x) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & xe^x + e^x \end{vmatrix}$$

$$= x^2e^x$$

$\neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่าของ x

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันที่กำหนดให้ จึงเป็นอิสระเชิงเส้น

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท เราไม่สามารถสรุปว่า ถ้า $W(f_1, f_2, \ldots) = 0$ แล้ว ฟังก์ชันไม่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $f_1(x) = x,\ f_2(x) = |x|$

ถ้า $x \geq 0$, $W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ถ้า $x < 0$, $W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} x & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

ดังนั้น $W(f_1, f_2) = 0$ สำหรับทุกค่า x

แต่เมื่อพิจารณา

$$c_1x + c_2|x| = 0$$

ให้ $x = 1$, $c_1 + c_2 = 0$

ให้ $x = -1$, $-c_1 + c_2 = 0$

เมื่อแก้สมการทั้งสอง จะพบว่า $c_1 = c_2 = 0$ นั่นคือฟังก์ชันเป็นอิสระเชิงเส้นกัน

แบบฝึกหัดที่ 4.1

1. จงหา วรอนสเกียนของฟังก์ชัน

   $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$; $n > 1$

2. จงแสดงว่า e^x, e^{2x}, e^{3x} เป็นอิสระเชิงเส้นกันสำหรับทุก x

3. จงแสดงว่า e^x, $\cos x$, $\sin x$ เป็นอิสระเชิงเส้นกันสำหรับทุก x

4. จงแสดงว่า 1, $\sin x$, $\cos x$ เป็นอิสระเชิงเส้นกันสำหรับทุก x

5. จงแสดงว่า 1, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

6. จงแสดงว่า $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = xe^x$, $f_4(x) = (2 - 3x)e^x$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

7. กำหนดให้ $f_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & , \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \ 1 < x \le 2 \end{cases}$

   $f_2(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 & , \ 1 < x \le 2 \end{cases}$

   จงแสดงว่า

   ก) $W(f_1, f_2) = 0$, $0 \le x \le 2$

   ข) f1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นกันในช่วง $0 \le x \le 2$

คำตอบ

1. $0!1!2!\ldots(n-1)!$

2. $W(e^{x}, e^{2x}, e^{3x}) = 2e^{6x} \neq 0$

3. $W(e^{x}, \cos x, \sin x) = 2e^{x} \neq 0$

4. $W(1, \sin x, \cos x) = -1 \neq 0$

4.2 ผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า $y_1(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่เป็นเอกพันธ์

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

แล้ว c_1y_1 จะเป็นผลเฉลยของสมการนี้ ด้วย
เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ

พิสูจน์ เนื่องจาก y_1 เป็นผลเฉลยของสมการ (2) ดังนั้น

$$a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0$$

คูณสมการข้างต้นด้วยค่าคงตัวตามใจชอบ c_1 จะได้

$$c_1a_0(x)y_1^{(n)} + c_1a_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + c_1a_n(x)y_1') + c_1a_0(x)y_1 = 0$$

หรือ

$$a_0(x)(c_1y_1)^{(n)} + a_1(x)(c_1y_1)^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(c_1y_1)' + a_0(x)(c_1y_1) = 0$$

แสดงว่า c_1y_1 สอดคล้องสมการ (1)
นั่นคือ c_1y_1 เป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $y = x2$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ แล้วแสดงด้วยว่า $y = cx^2$ ก็เป็นผลเฉลยสมการนี้ด้วย เมื่อ c เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ

วิธีทำ จาก $y = x^2$

$y' = 2x$

$y'' = 2$

ดังนั้น $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2(2) - 3x(2x) + 4x^2$

$= 2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 0$

นั่นคือ $y = x^2$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2y'' - 3xy' + 4y$

สำหรับ $y = cx^2$ ก็สามารถแสดงได้ว่าเป็นผลเฉลยสมการดังกล่าว

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $y_1, y_2, \ldots, y_k$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1) แล้ว $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ky_k$ จะเป็นผลเฉลยของสมการ (1) ด้วยเมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ เป็นค่าคงตัวตามใจชอบซึ่ง $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ky_k$ เรียกว่า การรวมเชิงเส้นของ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$

ทฤษฎีบทที่ 2 การรวมเชิงเส้นของผลเฉลยของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์นั้นด้วย

ตัวอย่างที่ 2 ฟังก์ชัน $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ และ $y_3 = e^{3x}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{2x} - 6y = 0$$

จงแสดงว่า $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าวด้วย

วิธีทำ

$Y = c_1e^X + c_2e^x + c_3e^{3x}$

$y' = c_1e^X + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x}$

$$y'' = c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x}$$

$$y''' = c_1e^x + 8c_2e^{2x} \cdot 27c_3e^{3x}$$

ดังนั้น

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = c_1e^x + 8c_2e^{2x} + 27c_3e^{3x}$$

$$-6(c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x})$$

$$+11(c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x})$$

$$-6(c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x})$$

$$= 0$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> เนื่องจาก $y_1 = x2$, $y_2 = \frac{1}{x}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = 0 \ , \ 0 < x < \infty$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y_c = c_1x^2 + \frac{c_2}{x}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3</u> ให้ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันของสมการเชิงเส้นที่เป็นเอกพันธ์

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

แล้ว $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ จะเป็นผลเฉลยของสมการนี้ด้วย เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ

เราเรียกผลเฉลยนี้ว่า <u>ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2)</u> เขียนแทนด้วย y_c ดังนั้น

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$$

ทฤษฎีบทที่ 4 ให้ y_p เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์

$$a_0(x)y^{(n)} - a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

แล้ว $y = y_c + y_p$ จะเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์

พิสูจน์ เนื่องจาก y_p เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ และ y_c เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ดังนั้น

$$a_0(x)y_p^{(n)} + a_1(x)y_p^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y_p' + a_n(x)y_p = g(x) \quad \ldots(3)$$

$$a_0(x)y_c^{(n)} + a_1(x)y_c^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y_c' + a_n(x)y_c = 0 \quad \ldots(4)$$

พิจารณา

$$a_0(x)(y_c+y_p)^{(n)} + a_1(x)(y_c+y_p)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)(y_c+y_p)' + a_n(x)(y_c+y_p)$$

$$= [a_0(x)y_c^{(n)} + a_1(x)y_c^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y_c' + a_n(x)y_c]$$

$$= [a_0(x)y_p^{(n)} + a_1(x)y_p^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y_p' + a_n(x)y_p]$$

$$= 0 + g(x) = g(x)$$

แสดงว่า $y_c + y_p$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ ต่อไปจะแสดงว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์อยู่ในรูป $y_c + y_p$

ให้ z เป็นผลเฉลยใด ๆ ของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ ดังนั้น

$$a_0(x)z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)z' + a_n(x)z = g(x) \quad \ldots..(5)$$

แต่ y_p เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ ดังนั้น

$$a_0(x)y_p^{(n)} + a_1(x)y_p^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y_p' + a_n(x)y_p = g(x) \quad \ldots(6)$$

สมการ (5) - (6) จะได้

$$a_0(x)[z - y_p)^{(n)} + a_1(x)[z - y_p)^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)[z - y_p]'$$

$$+ a_n(x)[z - y_p)] = 0$$

แสดงว่า $z - y_p$ เป็นผลเฉลยสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ จากทฤษฎีบทที่ 3

$$z - y_p = y_c$$

$$z = y_c + y_p$$

เนื่องจาก z เป็นผลเฉลยใด ๆ ของสมการ ดังนั้นจึงสรุปว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์คือ $y_c + y_p$

เราเรียก y_p <u>ว่าผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์</u>

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> พิจารณาสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$y'' + y = 5 \qquad \ldots\ldots(7)$$

ซึ่งจะพบว่า $y = 5$ เป็นผลเฉลยของสมการ (7)

นั่นคือ $y_p = 5$

และเราสามารถจะตรวจสอบได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ

Y'' ● [illegible]

คือ $y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

ฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (7) คือ

$$Y = y_c + Y_P$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x + 5$$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นฟังก์ชันที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันแล้ว ฟังก์ชันเหล่านี้จะเป็นผลเฉลยของสมการ

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots(8)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการเชิงเส้นที่เป็นเอกพันธ์ซึ่งมีผลเฉลย

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^{x},\ y_3 = e^{-x}$$

วิธีทำ จากสมการ (8)

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{x} & e^{-x} & y \\ 0 & e^{x} & -e^{-x} & y' \\ 0 & e^{x} & e^{-x} & y'' \\ 0 & e^{x} & -e^{-x} & y''' \end{vmatrix} = 0$$

โดยสมบัติของดีเทอร์มินันต์ จะได้

$$e^{x}e^{-x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & y' \\ 0 & 1 & 1 & y'' \\ 0 & 1 & -1 & y''' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \\ 1 & -1 & y''' \end{vmatrix} = 0$$

$$y''' - y'' - y' - (y' - y'' - y''') = 0$$

$$2y''' + 2y' = 0$$

หรือ $y''' + y' = 0$

แบบฝึกหัดที่ 4.2

จงแสดงว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 5y' + 4y = 2x - 3$ อยู่ในรูป

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-4x} + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8}$$

จงแสดงว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 4y = \sin 3x$ อยู่ในรูป

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x$$

3. จงหาสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ซึ่งมีผลเฉลยดังต่อไปนี้

3.1 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

3.2 $y_1 = \cosh x$, $y_2 = \sinh x$

3.3 $y_1 = e^x\cos x$, $y_2 = e^x\sin x$, $y_3 = e^{-x}$

3.4 $y_1 = \cos x$, $y_2 = e^x$, $Y_3 = e^{-x}$

3.5 $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{-x}$

คำตอบ

3. 3.1 $y'' + y = 0$

3.2 $y'' - y = 0$

3.3 $y''' - y' + 2y = 0$

3.4 $y''' \tan(x) - y' - \tan(x)y = 0$

3.5 $xy''' + y - xy' - y = 0$

4.3 ตัวดำเนินการอนุพันธ์

เพื่อความสะดวกในการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไป เราจะใช้สัญลักษณ์แทนอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอิสระ x ดังนี้

ให้ $D = \frac{d}{dx}$, $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, ..., $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$

ดังนั้น

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \; D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}, \; \ldots, \; D^ny = \frac{d^ny}{dx^n}$$

ข้อสังเกต $D^m \cdot D^n = D^{m+n}$

จากสมการเชิงเส้น $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x)$
สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(D)y = (a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_n(x))y = g(x)$$

เราเรียก $f(D) = (a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_n(x))$ ว่า ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ซึ่งจะพบว่าตัวดำเนินการ f(D) นี้อยู่ในรูปเชิงเส้นใน D ซึ่งจะมีความหมายเมื่อกระทำทางซ้ายกับฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ เช่น

$$\begin{aligned}(3D^2 + 4D - 5)e^x &= 3D^2e^x + 4De^x - 5e^x \\ &= 3e^x + 4e^x - 5e^x \\ &= 2e^x\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}(x^2D + 1)e^{3x} &= x^2De^{3x} + e^{3x} \\ &= 3x^2e^{3x} + e^{3x} \\ &= (3x^2 + 1)e^{3x}\end{aligned}$$

สมบัติทางพีชคณิตของการบวกและการคูณของตัวดำเนินการ

ให้ $f_1(D)$, $f_2(D)$ และ $f_3(D)$ เป็นตัวดำเนินการ

1. **สมบัติการสลับที่สำหรับการบวก**

$$f_1(D) + f_2(D) = f_2(D) + f_1(D)$$

2. **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก**

$$\{f_1(D) + f_2(D)\} + f_3(D) = f_1(D) + \{f_2(D) + f_3(D)\}$$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ

$$(f_1(D)f_2(D))f_3(D) = f_1(D)(f_2(D)f_3(D))$$

4. สมบัติการแจกแจง

$$f(D)(f_2(D) + f_3(D)) = f_1(D)f_2(D) + f_1(D)f_3(D)$$

5. ถ้า $f_1(D)$ และ $f_2(D)$ มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แล้วจะมีสมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ นั่นคือ

$$f_1(D)f_2(D) = f_2(D)f_1(D)$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ให้ $f_1(D) = xD + 5$

$$f_2(D) = D + 7$$

จงหา $f_1(D)f_2(D)$ และ $f_2(D)f_1(D)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f_1(D)f_2(D)y &= (xD + 5)(D + 7)y \\ &= (xD + 5)(Dy + 7y) \\ &= xD^2y + 7xDy + 5Dy + 35y \\ &= (xD^2 + (7x + 5)D + 35)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(D)f_1(D)y &= (D + 7)(xD + 5)y \\ &= (D + 7)(xDy + 5y) \\ &= xD^2y + Dy + 7xDy + 35y \\ &= (xD^2 + (1 + 7x)D + 35)y \end{aligned}$$

<u>ข้อสังเกต</u> $f_1(D)f_2(D) \neq f_2(D)f_1(D)$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ให้ $f_1(D) = D + 3$

$$f_2(D) = 2D - 1$$

จงหา $f_1(D)f_2(D)$ และ $f_2(D)f_1(D)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f_1(D)f_2(D)y &= (D + 3)(2D + 1)y \\ &= (D + 3)(2Dy + y) \\ &= 2D^2y + Dy + 6Dy + 3y \\ &= (2D^2 + 7D + 3)y \end{aligned}$$

$$f_2(D)f_1(D)y = (2D + 1)(D + 3)y$$
$$= (2D + 1)(Dy + 3y)$$
$$= 2D^2y + 6Dy + Dy + 3y$$
$$= (2D^2 + 7D + 3)y$$

<u>ข้อสังเกต</u> $\quad f_1(D)f_2(D) = f_2(D)f_1(D)$

<u>สมบัติบางประการของตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว</u>

ให้ $f(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n$

เป็นตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัว เราจะพบว่า

1. $f(D)e^{mx} = f(m)e^{mx}$ .....(1)
2. $f(D)[e^{mx}y] = e^{mx}f(D + m)y$ .....(2)
3. $(D - m)^n(x^ne^{mx}) = n!e^{mx}$ .....(3)

ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

1. สำหรับค่าคงตัวตามใจชอบ m ใด ๆ และจำนวนเต็มบวก k

เราได้ $De^{mx} = me^{mx}$

$$D^2e^{mx} = m^2e^{mx}$$

$$D^ke^{mx} = D^ke^{mx}$$

ดังนั้น

$$f(D)e^{mx} = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)e^{mx}$$

$$= a_0D^ne^{mx} + a_1D^{n-1}e^{mx} + \ldots + a_{n-1}De^{mx} + a_ne^{mx}$$

$$= a_0m^ne^{mx} + a_1m^{n-1}e^{mx} + \ldots + a_{n-1}m + a_n$$

$$= (a_0m^n + a_1m^{n-1} + \ldots + a_{n-1}m + a_n)e^{mx}$$

$$= f(m)e^{mx}$$

2. จาก $D(e^{mx}y) = e^{mx}Dy + me^{mx}y$

$$= e^{mx}(D + m)y$$

$$D^2(e^{mx}y) = D(e^{mx}Dy + me^{mx}y)$$

$$= e^{mx}D^2y + me^{mx}Dy + me^{mx}Dy + m^2e^{mx}y$$

$$= e^{mx}(D^2y + 2mDy + m^2y)$$

$$= e^{mx}(D + m)^2y$$

$$D^k(e^{mx}y) = e^{mx}(D + m)^k y$$

ดังนั้น

$$f(D)[e^{mx}y] = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)[e^{mx}y]$$

$$= a_0D^n[e^{mx}y] + a_1D^{n-1}[e^{mx}y] + \ldots + a_{n-1}D[e^{mx}y] + a_n[e^{mx}y]$$

$$= a_0e^{mx}(D + m)^ny + a_1e^{mx}(D + m)^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}e^{mx}(D + m)y$$

$$+ a_ne^{mx}y$$

$$= e^{mx}[a_0(D + m)^n + a_1(D + m)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(D + m) + a_n]y$$

$$= e^{mx} f(D + m)y$$

<u>**ข้อสังเกต**</u> สมบัติข้อนี้สามารถเขียนใหม่เป็น

$$f(D - m)[e^{mx}y] = e^{mx}f(D)y$$

3. จากสมบัติข้อที่ 2.

$$f(D)[e^{mx}y] = e^{mx}f(D + m)y$$

ถ้า $f(D) = (D - m)^n$ จะได้

$$(D - m)^n[e^{mx}y] = e^{mx}D^ny \qquad \ldots\ldots(4)$$

ถ้าให้ $y = x^n$ เพราะฉะนั้น จากสมการ (4) จะพบว่า

$$(D - m)^n[e^{mx}x^n] = e^{mx}D^n x^n$$
$$= e^{mx}n!$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $D^3(e^{ax}\cos bx)$

วิธีทำ จากสมบัติตามสมการที่ (2)

$$D^3(e^{ax}\cos bx) = e^{ax}(D + a)^3\cos bx$$
$$= e^{ax}(D^3 + 3aD^2 + 3a^2D + a^3)\cos bx$$
$$= e^{ax}[b^3\sin bx - 3ab^2\cos bx - 3a^2b\sin bx$$
$$+ a^3\cos bx]$$
$$= e^{ax}[(b^3 - 3a^2b)\sin bx + (a^3 - 3ab^2)\cos bx],$$

แบบฝึกหัดที่ 4.3

1. จงหาผลคูณของตัวดำเนินการต่อไปนี้

   1.1 $(4D + 1)(D - 2)$

   1.2 $(2D - 3)(2D + 3)$

   1.3 $(D + 2)(D^2 - 2D + 5)$

   1.4 $(D - 2)(D + 1)^2$

2. จงแยกตัวประกอบของตัวดำเนินการต่อไปนี้

   2.1 $2D^2 + 3D - 2$

   2.2 $D^4 - 4D^2$

   2.3 $2D^2 - 5D - 12$

   2.4 $D^3 - 2D^2 - 5D + 6$

   2.5 $D^3 - 21D + 20$

   2.6 $2D^4 + 11D^3 + 18D^2 + 4D - 8$

3. จงหาค่าต่อไปนี้

   3.1 $D^2(e^{-2x}\sin 2x)$

   3.2 $D^3(e^{x}\sin 2x)$

   3.3 $(D^3 + D^2 - D + 1)[e^{2x}(x^2 + x + 1)]$

   3.4 $(D - 2)^5(x^2e^{2x})$

   3.5 $(D - a)^n(e^{ax}f)$

   3.6 $(D^4 + 12D^3 + 54D^2 + 108D + 81)(e^{-3x}x^3)$

คำตอบ

1. 1.1 $4D^2 - 7D - 2$

   1.2 $4D^2 - 9$

   1.3 $D^3 + D + 10$

   1.4 $D^3 - 3D - 2$

2. 2.1 $(D + 2)(2D - 1)$

   2.2 $D^2(D - 2)(D + 2)$

   2.3 $(2D + 3)(D - 4)$

   2.4 $(D - 1)(D + 2)(D - 3)$

   2.5 $(D - 1)(D - 4)(D + 5)$

   2.6 $(D + 2)^3(2D - 1)$

3. 3.1 $e^{-2x}(3 \sin x - 4 \cos x)$

   3.2 $e^{x}(-11\sin 2x - 2\cos 2x)$

   3.3 $e^{2x}(11x^2 + 41x + 40)$

   3.4 0

   3.5 $e^{ax}D^n f$

   3.6 0