บทที่ 3
ประยุกต์ของสมการอันดับหนึ่ง

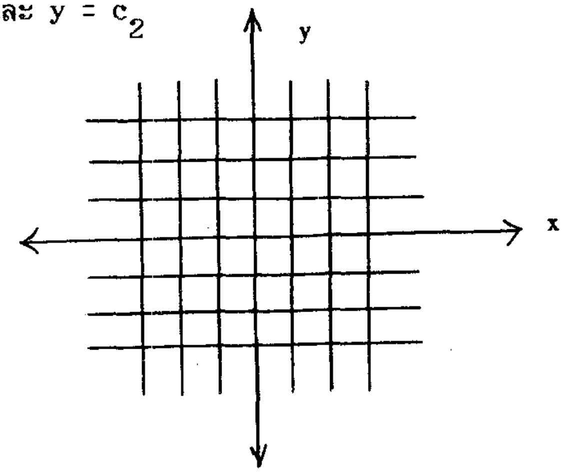
ในบทที่แล้วเราได้ศึกษาการแก้สมการอันดับหนึ่งแบบต่าง ๆ มาแล้ว ในบทนี้จะได้กล่าวถึงการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์จากปรากฏการณ์ต่าง ๆ และการหาผลเฉลยของสมการที่ได้

3.1 <u>ปัญหาทางเรขาคณิต</u>

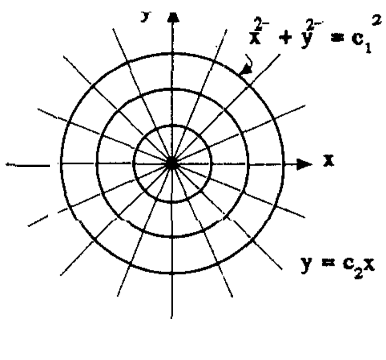
- แนววิถีเชิงตั้งฉาก

ถ้าแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งหนึ่ง ตัดกับแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งอีกชุดหนึ่ง เป็นมุมฉากแล้ว เรากล่าวว่าวงศ์เส้นโค้งทั้งสองเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน เช่น

1) $x = c_1$ และ $y = c_2$



2) $x^2 + y^2 = c_1^2$ และ $y = c_2x$



ระบบพิกัดฉาก

สมมติว่า เส้นโค้งที่กำหนดให้ในระบบ xy ใด ๆ ทำมุม ϕ กับแกน x ดังนั้น เส้นโค้งอีกเส้นหนึ่งที่เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากกับเส้นที่กำหนดให้จะมีความชัน

$$\tan(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\cot \phi$$

$$= -\frac{1}{\tan \phi}$$

$$= -\frac{dx}{dy}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$

วิธีทำ จากวงศ์เส้นโค้งซึ่งเป็นวงกลม $x^2 + y^2 = c^2$

หาความชัน โดยการหาอนุพันธ์

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ดังนั้นความชันของวงศ์เส้นโค้งที่ต้องการ คือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{-x/y} = \frac{y}{x}$$

แก้สมการข้างต้น โดยวิธีแยกตัวแปร

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

อินทิเกรตจะได้ $\ln y = \ln x + c_1$

$$y = cx$$

ซึ่งคือวงศ์ของเส้นตรงนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 2 จงหาแนวดิ่งเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = cx$

วิธีทำ เนื่องจากวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = cx$ ก็คือวงศ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน x และสัมผัสแกน y นั่นเอง หาอนุพันธ์จะได้

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = c$$

แทนค่า c จะได้

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

$$2x^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

หรือ $$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

ดังนั้น ความชันของวงศ์เส้นโค้งที่ต้องการคือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(y^2 - x^2)/2xy} = \frac{-2xy}{y^2 - x^2}$$

หรือ

$$2xydx + y^2dy - x^2dy = 0$$

คูณตลอดด้วยตัวประกอบอินทิเกรต $\frac{1}{y^2}$

$$\frac{2xydx - x^2dy}{y^2} + dy = 0$$

$$d\left(\frac{x^2}{y}\right) + dy = 0$$

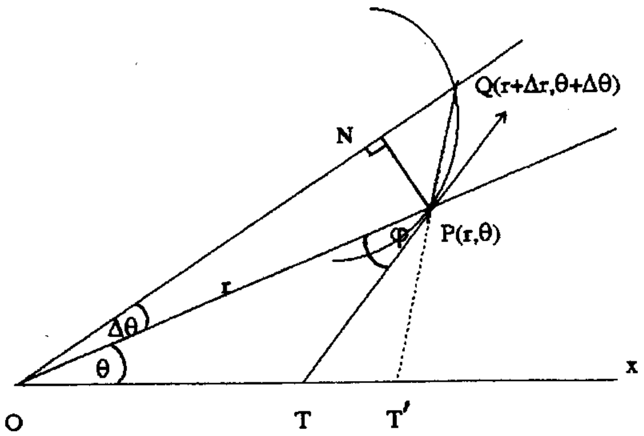
อินทิเกรตจะได้ $\frac{x^2}{y} + y = 0$

หรือ $x^2 + y^2 = cy$

ซึ่งก็คือวงศ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y และสัมผัสแกน x นั่นเอง

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

ถ้าเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) ทำมุม ϕ กับเส้นรัศมีดังรูป



จากรูป จะพบว่า

$$\tan @ = \lim_{Q\to P} \tan NQP$$

$$= \lim_{Q\to P} \frac{NP}{NQ}$$

$$= \lim_{Q\to P} \frac{r\Delta\theta}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta\theta\to 0 \\ \Delta r\to 0}} \frac{r\Delta\theta}{\Delta r}$$

$$= r\,\frac{d\theta}{dr}$$

นั่นคือ ความชันของวงศ์เส้นโค้งที่กำหนดให้คือ

$$\tan \phi = r\,\frac{d\theta}{dr}$$

ดังนั้น ความชันของวงศ์เส้นโค้งที่เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

$$\tan\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\phi$$

$$= -\frac{1}{\tan\phi}$$

$$= -\frac{dr}{rd\theta}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $r = c\cos\theta$

วิธีทำ จาก $r = c\cos\theta$

หาอนุพันธ์ เทียบกับ r จะได้

$$1 = -c\sin\theta\frac{d\theta}{dr}$$

แทนค่า c

$$1 = -\frac{r}{\cos\theta}\sin\theta\frac{d\theta}{dr}$$

หรือ

$$r\frac{d\theta}{dr} = -\cot\theta$$

ดังนั้นความชันของวงศ์เส้นโค้งที่ต้องการ คือ

$$r\frac{d\theta}{dr} = -\frac{1}{-\cot\theta}$$

หรือ $\frac{dr}{r} = \cot\theta\, d\theta$

อินทิเกรตจะได้ $\ln r = \ln\sin\theta + c_1$

นั่นคือ $r = c\sin\theta$

- แนววิถีเชิงเอียง

ถ้าแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งหนึ่ง ตัดกันแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งอีกชุดหนึ่งเป็นมุม $\alpha \neq 90^\circ$ แล้ว เรากล่าวว่าวงศ์เส้นโค้งทั้งสองเป็นแนววิถีเชิงเอียงซึ่งกันและกัน

สมมติว่าสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งที่กำหนดให้ คือ

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$= \tan \phi$$

นั่นคือเส้นโค้งมีมุมเอียง $\tan^{-1} f(x,y)$

ดังนั้น มุมของวงศ์เส้นโค้งที่เป็นแนววิถีเชิงเอียงกับจุดที่กำหนดคือ

$$\alpha + \tan^{-1} f(x,y)$$

เพราะฉะนั้น ความชันของวงศ์เส้นโค้งที่ต้องการคือ

$$\tan(\alpha + \tan^{-1} f(x,y)) = \frac{\tan \alpha + f(x,y)}{1 - f(x,y)\tan \alpha}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาวงศ์เส้นโค้งแนงเอียงกับวงศ์เส้นโค้ง $y = cx$ เป็นมุม 45°

วิธีทำ จาก $y = cx$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = c$

แทนค่า c จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

เนื่องจากความชันของวงศ์เส้นโค้งที่ต้องการคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan \alpha + f(x,y)}{1 - f(x,y)\tan \alpha}$$

โดยที่ $\alpha = 45^\circ$ และ $f(x,y) = \frac{y}{x}$

ฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y/x}{1 - y/x} = \frac{x + y}{x - y}$

ซึ่งเป็นสมการเอกพันธ์ ให้ $y = vx$ จะได้

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v}{1 - v}$$

หรือ $\frac{(v - 1)}{v^2 + 1}\,dv = -\frac{dx}{x}$

อินทิเกรต

$$\frac{1}{2}\ln(v^2 + 1) - \tan^{-1}v = -\ln|x| - \ln|c|$$

$$\ln c^2x^2(v^2 - 1) - 2\tan^{-1}v = 0$$

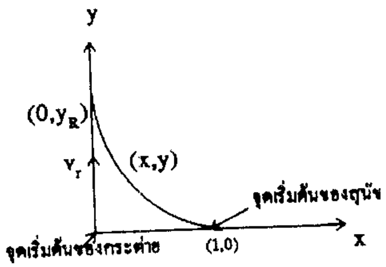
แทนค่า $v = y/x$ จะได้

$$\ln c^2(x^2 + y^2) - 2\tan^{-1}(y/x) = 0$$

- โจทย์ที่น่าสนใจ

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> ปัญหาของสุนัขไล่จับกระต่าย

สมมติให้กระต่ายอยู่ ณ จุดกำเนิด และสุนัขอยู่ที่จุด (1,0) โดยที่กระต่ายหนีขึ้นไปตามแกน y ด้วยความเร็ว v_r และสุนัขไล่จับด้วยความเร็ว v_d ดังรูป จงหาวิถีทางของเส้นโค้งที่สุนัขจะไล่จับกระต่าย



<u>วิธีทำ</u> ณ เวลา t ใด ๆ กระต่ายจะหนีไปได้ไกล y_r โดยที่

$$y_r = v_r t$$

ความชันของเส้นโค้งที่สุนัขไล่จับกระต่าย กำหนดโดย

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - y_r}{x - 0}$$

$$= \frac{Y - v_r t}{x}$$

หรือ $xy' = y - v_r t$ . . ...(1)

หาอนุพันธ์เทียบกับ x

$$x \frac{d^2y}{dx^2} = -v_r \frac{dt}{dx} \quad \text{. . ...(2)}$$

ถ้า s เป็นความยาวเส้นโค้งที่สุนัขไล่จับกระต่าย แล้ว $\frac{ds}{dt} = v_d$

เนื่องจาก $\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{v_d}\sqrt{1 + [y'(x)]^2}$

แทนในสมการ (2)

$$xy'' = \frac{v_r}{v_d}\sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

ให้ $v = \frac{dy}{dx}$ ดังนั้นจะได้

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v_r}{v_d} \text{ J - L - 7}$$

$$\frac{dv}{11 + v^2}$$ kd:,k=vr,vd<1

จากเทคนิคการอินทิเกรต จะได้

$$\ln(v + \sqrt{1 + v^2}) = \ln x^k + C_1$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ ดังนั้น

$$\ln(v + \sqrt{1 + v^2}) = \ln x^k$$

หรือ $\sinh^{-1} v = \ln x^k$

หรือ $v = \sinh(\ln x^k)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[\exp(\ln x^k) - \exp(-\ln x^k)]$$

$$= \frac{1}{2}(x^k - x^{-k})$$

อินทิเกรต

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{-k+1}}{k-1}\right) + C_2$$

หรือ $y = \frac{x}{2}\left(\frac{x^k}{k+1} + \frac{x^{-k}}{k-1}\right) + C_2$

จากเงื่อนไข $y(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น

$$y(x) = \frac{x}{2}\left(\frac{x^k}{k+1} + \frac{x^{-k}}{k-1}\right)$$

แบบฝึกหัดที่ 3.1

จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของชุดเส้นโค้งต่อไปนี้

1. $xy = c$

2. $y = cx^3$

3. $x^2 + y^2 = cx^3$

4. $y(x^2 + c) = 2$

5. $x^2 - xy + y^2 = c^2$

6. $r = c(1 + \cos\theta)$

7. $r^2 = c \sin 2\theta$

8. $r^2(1 - \cos\theta)\sin\theta = c$

9. $r\theta = c$

10. จงหาแนววิถีเชิงเอียงกับชุดเส้นโค้ง $x - 2y = c$ เป็นมุม 45°

11. จงหาแนววิถีเชิงเอียงกับชุดเส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$ เป็นมุม 45°

12. จงหาแนววิถีเชิงเอียงกับชุดเส้นโค้ง $y^2 = cx$ เป็นมุม 60°

คำตอบ

1. $x^2 - y^2 = c$

2. $x^2 + 3Y^2 = c$

3. $x^2y + y^3 = c$

4. $y^3 = 3 \ln x + c$

5. $x - y = c(x + y)^3$

6. $r = c(1 - \cos \theta)$

7. $r^2 = c \cos 2\theta$

a. $r(1 + 2 \cos \theta) = c$

9. $r^2 = ce^{\theta^2}$

10. $y - 3x = c$

11. $\ln(x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1}(y/x) = c$

12. $\ln(\sqrt{3}y^2 - xy + 2\sqrt{3}x^2) - \dfrac{6}{\sqrt{23}} \tan^{-1} \dfrac{2\sqrt{3}y - x}{\sqrt{23}\,x} = c$

3.2 ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

- การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี

ตัวอย่างที่ 1 อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีเป็นสัดส่วนกับปริมาณของสารในขณะนั้น ถ้าพบว่าสารชนิดหนึ่งสลายตัวไปครึ่งหนึ่งในเวลา 1,500 ปี จงหาว่า

ก) สารชนิดนี้จะเหลืออยู่กี่ % หลังจากผ่านไป 4500 ปี

ข) สารชนิดนี้จะใช้เวลากี่ปี จึงจะเหลืออยู่ $\frac{1}{10}$ ของสารเริ่มต้น

วิธีทำ ให้ x เป็นปริมาณสาร ณ เวลา t ใด ๆ

x_0 เป็นปริมาณสารเริ่มต้น

จากโจทย์จะพบว่า

$$\frac{dx}{dt} \propto x \qquad \text{.....(1)}$$

เนื่องจาก x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้น

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad , \quad k > 0 \qquad \text{.....(2)}$$

แก้สมการโดยการแยกตัวแปร จะได้

$$x = Ce^{-kt}$$

เนื่องจาก $x = x_0$ เมื่อ $t = 0$ เราพบว่า $C = x_0$ ดังนั้น

$$x = x_0e^{-kt} \qquad \text{....(3)}$$

จากโจทย์ $x = \frac{1}{2}x_0$ เมื่อ $t = 1,600$ แทนในสมการ (3)

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0e^{-1500k}$$

หรือ $e^{-k} = (\frac{1}{2})^{1/1,500}$

แทนค่า e^{-k} ในสมการ (3)

$$x = x_0(e^{-k})^t$$

$$= x_0[(\tfrac{1}{2})^{1/1,500}]^t$$

$$= x_0(\tfrac{1}{2})^{t/1,500} \qquad \ldots(4)$$

ก) ถ้า $t = 4,500$ แทนในสมการ (4)

$$x = x_0(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8}x_0$$

ดังนั้น ผ่านไป 4,500 ปี จะเหลือสารชนิดนี้อยู่ $\frac{1}{8}x_0$ หรือ 12.5% จากเดิม

ข) ถ้า $x = \frac{1}{10}x_0$ แทนในสมการ (4)

$$\frac{1}{10}x_0 = x_0(\frac{1}{2})^{t/1,500}$$

$$\ln\frac{1}{10} = \frac{t}{1,500}\ln\frac{1}{2}$$

$$t = 1,500\,\frac{\ln 1/10}{\ln 1/2}$$

$$= 1,500\,\frac{\ln 10}{\ln 2}$$

$$\approx 4,985\ 7$$

- การเจริญเติบโตของประชากร

ในที่นี้ประชากรหมายถึงสิ่งมีชีวิตซึ่งอาจจะเป็น คน สัตว์ หรือแบคทีเรีย เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2 สมมติว่าจำนวนพลเมืองของเมือง ๆ หนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนพลเมืองขณะนั้น ถ้าจำนวนพลเมืองเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในเวลา 40 ปี แล้วอีกกี่ปีจำนวนพลเมืองจึงจะเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่า

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนพลเมือง ณ เวลา t ใด ๆ

x_0 เป็นจำนวนพลเมืองในตอนเริ่มแรก

ดังนั้น

$$\frac{dx}{dt} \propto x$$

แต่ x เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น

$$\frac{dx}{dt} = kx \; , \; k > 0 \qquad \ldots(5)$$

แก้สมการโดยการแยกตัวแปร จะได้

$$x = Ce^{kt}$$

เมื่อ $t = 0$, $x = x_0$ จะพบว่า $C = x_0$

$$x = x_0 e^{kt} \qquad \ldots(6)$$

เมื่อ $t = 40$, $x = 2x_0$ แทนในสมการ (6)

$$2x_0 = x_0 e^{40k}$$

หรือ $e^k = 2^{1/40}$

แทนค่า e^k ในสมการ (6) จะได้

$$x = x_0(2^{1/40})^t$$

$$= x_0(2^{t/40}) \qquad \ldots(7)$$

ถ้า $x = 3x_0$ แทนในสมการ (7)

$$3x_0 = x_0(2^{t/40})$$

$$\ln 3 = \frac{t}{40} \ln 2$$

♦ $= 40 \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

~ 63.5 ปี

ตัวอย่างที่ 3 จากการขยายพันธ์ของแบคทีเรียพบว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียขณะนั้น ถ้าเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมง มีแบคทีเรีย 5 ล้านตัว และเวลาผ่านไป 9 ชั่วโมง มีแบคทีเรีย 8 ล้านตัว แล้ว จงหาจำนวนแบคทีเรียเริ่มต้น

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนแบคทีเรีย ณ เวลา t

x_0 เป็นจำนวนแบคทีเรียเริ่มต้น

ดังนั้น $\frac{dx}{dt} \alpha x$

$$\frac{dx}{dt} = kx \ , \ k > 0$$

แก้สมการ จะได้

$$x = Ce^{kt}$$

d o $t = 0$, $x = x_0$ จะพบว่า $c = x_0$

$$x = x_0 e^{kt} \qquad \ldots\ldots(8)$$

เมื่อ t □ 6, ⊠ □ ▯ ⊠ 10^6 ดังนั้น

$$5 \times 10^6 = x_0 e^{6k} \qquad \ldots\ldots(9)$$

d o $t = 9, x = 8 \times 10^6$ ดังนั้น

$$8 \times 10^6 = x_0 e^{9k} \qquad \ldots\ldots(10)$$

(10) - (9) จะได้

$$\frac{8}{5} = e^{3k}$$

แทนค่า e^{3k} ในสมการ (9) จะได้

$$5 \times 10^6 = x_0 (e^{3k})^2$$

5 x 10^6 □ $x_0 \left(\frac{8}{5}\right)^2$

$$x_0 = 5 \times 10^6 \times \left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$= \frac{125}{64} \times 10^6$$

$\sim$ 1.95 ล้านตัว

- กฎการเย็นตัวของนิวตัน

จากกฎการเย็นตัวของนิวตันที่ว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของสิ่งรอบข้าง"

ตัวอย่างที่ 4 วัตถุชนิดหนึ่งใช้เวลา 2 ชั่วโมง เพื่อที่จะลดอุณหภูมิจาก 70°F เหลือ 50°F โดยที่อุณหภูมิของอากาศขณะนั้นเป็น 20°F จงหาว่าวัตถุชนิดนี้ต้องใช้เวลานานเท่าใด จึงจะมีอุณหภูมิ 40°F

วิธีทำ ให้ x เป็นอุณหภูมิของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

จากกฎการเย็นตัวของนิวตัน พบว่า

$$\frac{dx}{dt} \propto (x - 20)$$

หรือ $$\frac{dx}{dt} = -k(x - 20)\ ,\ k > 0 \qquad \ldots(n)$$

แยกตัวแปร $$\frac{dx}{x - 20} = -k\ dt$$

$$\ln(x - 20) = -kt + \ln c$$

$$\ln\left(\frac{x - 20}{C}\right) = -kt$$

$$x = 20 + Ce^{-kt} \qquad \ldots\ldots(12)$$

เมื่อ $t = 0,\ x = 70$ จะได้ $C = 50$

ดังนั้น $$x = 20 + 50e^{-kt} \qquad \ldots\ldots(13)$$

เมื่อ $t = 2\ ,\ x = 50$ แทนในสมการ (13)

$$50 = 20 + 50e^{-2k}$$

$$e^{-2k} = \frac{30}{50} = 0.6$$

$$e^{-k} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}$$

ดังนั้นจากสมการ (13)

$$x = 20 + 50\left(\frac{3}{5}\right)^{t/2}$$

ถ้า x = 40 จะได้

$$40 = 20 + 50(\frac{3}{5})^{t/2}$$

$$50(\frac{3}{5})^{t/2} = 20$$

$$\frac{t}{2}\ln(\frac{3}{5}) = \ln\frac{2}{5}$$

$$t = 2\frac{\ln 2.4}{\ln 0.6}$$

$$\sim \frac{-0.916}{-0.255}$$

~ 3.592 ชั่วโมง

- ของผสม

ปัญหาในของผสมที่จะกล่าวนี้ อาจจะเป็นเกลือ ยา หรือ สิ่งอื่นก็ได้ ซึ่งบรรจุในภาชนะ และทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงได้โดยอนุญาตให้มีการนำสารดังกล่าวเข้า และออกจากภาชนะ ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของสารจะขึ้นกับผลต่างของสารที่เข้าและออกจากภาชนะที่ใส่

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> ถังใบหนึ่งบรรจุน้ำบริสุทธิ 50 แกลลอน ถ้าปล่อยให้น้ำเกลือซึ่งมีเกลือ 2 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลเข้าถังด้วยอัตรา 3 แกลลอนต่อนาที โดยคนส่วนผสมได้เข้ากันตลอดเวลาแล้วขณะเดียวกันก็ปล่อยน้ำเกลือให้ออกจากถังด้วยอัตราเดียวกัน จงหา

ก) ปริมาณเกลือในถัง ณ เวลา t ใด ๆ

ข) ปริมาณเกลือในถังเมื่อผ่านไป 20 นาที

ค) ปริมาณเกลือในถังเมื่อผ่านไปนาน ๆ

<u>วิธีทำ</u> ให้ x เป็นปริมาณเกลือในถัง ณ เวลา t ใด ๆ

ดังนั้น $\frac{dx}{dt}$ = อัตราเกลือที่เข้าถัง - อัตราเกลือที่ออกจากถัง

โดยที่ อัตราเกลือที่เข้าถัง = ความเข้มข้นของเกลือ × อัตราที่เข้า

(ปอนด์/นาที) (ปอนด์/แกลลอน) (แกลลอน/นาที)

และ

อัตราเกลือที่ออกจากถัง = ความเข้มข้นของเกลือ × อัตราที่ออก

ซึ่งในที่นี้

อัตราเกลือที่เข้าถัง = 2 ปอนด์/แกลลอน × 3 แกลลอน/นาที

เนื่องจากอัตราที่น้ำเกลือไหลออกเท่ากับที่ไหลเข้า ถังจุน้ำ 50 แกลลอน และ ณ เวลา t มีเกลืออยู่ x ปอนด์ ดังนั้นความเข้มข้นของเกลือคือ $\frac{x}{50}$ ปอนด์/แกลลอน

$$\text{อัตราเกลือที่ออกจากถัง} = \frac{x}{50} \text{ ปอนด์/แกลลอน} \times 3 \text{ แกลลอน/นาที}$$

$$= \frac{3}{50}x$$

นั่นคือ

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{50}$$

หรือ $$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{50}x = 6$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น ตัวคูณตลอดคือ $e^{3t/50}$ จะได้

$$\frac{d}{dt}\left(e^{3t/50}x\right) = 6e^{3t/50}$$

$$x = Ce^{-3t/50} + 100$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $t = 0$, $x = 0$ จะพบว่า $C = -100$

ก) $x = 100(1 - e^{-3t/50})$

ข) เมื่อ $t = 20$

$$x = 100(1 - e^{-60/50}) \approx 69.9 \text{ ปอนด์}$$

ค) เมื่อ $t \to \infty$

$$x = 100 \text{ ปอนด์}$$

ตัวอย่างที่ 6 ถังใบหนึ่งบรรจุน้ำเกลือ 100 แกลลอน ซึ่งมีเกลือละลายอยู่ 10 ปอนด์ ถ้าให้น้ำเกลือซึ่งมีเกลือ 0.5 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลเข้าถังในอัตรา 1 แกลลอนต่อนาที คนส่วนผสมให้เข้ากันตลอดเวลา และขณะเดียวกันก็ปล่อยน้ำเกลือออกในอัตรา 2 แกลลอนต่อนาที จงหา

ก) ปริมาณเกลือในถัง ณ เวลา t ใด ๆ

ข) ความเข้มข้นของเกลือในถัง

ค) ความเข้มข้นของเกลือในถังเมื่อถังแห้ง

วิธีทำ ให้ x เป็นปริมาณเกลือในถัง ณ เวลา t ใด ๆ

อัตราที่เกลือเข้าถัง $= \frac{1}{2}$ ปอนด์/แกลลอน $\times$ 1 แกลลอน/นาที

แต่เนื่องจากอัตราที่น้ำเกลือไหลเข้า-ออกไม่เท่ากัน ณ เวลา t = 0 ถังมีน้ำเกลือ 100 แกลลอน และน้ำเกลือไหลเข้าในอัตรา 1 แกลลอน/นาที ขณะที่ไหลออกในอัตรา 2 แกลลอน/นาที ดังนั้น ณ เวลา t ใด ๆ จะมีน้ำเกลือในถัง $100 + (1-2)t$ แกลลอน

ความเข้มข้นของน้ำเกลือ ณ เวลา t คือ $\frac{x}{100 - t}$ ปอนด์/แกลลอน

อัตราที่เกลือออกจากถัง $= \frac{x}{100 - t}$ ปอนด์/แกลลอน $\times$ 2 แกลลอน/นาที

นั่นคือ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{2x}{100 - t} \quad , 0 \leq t < 100$$

(ถังจะแห้งเมื่อผ่านไปแล้ว 100 นาที)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{100 - t} = \frac{1}{2} \tag{14}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น มีตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$e^{\int \frac{2}{100-t}\,dt} = e^{-2\ln(100-t)}$$
$$= (100 - t)^{-2}$$

คูณตลอดสมการ (14) จะได้

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x}{(100-t)^2}\right] = \frac{1}{2(100-t)^2}$$

อินทิเกรต

$$\frac{x}{(100-t)^2} = \frac{1}{2(100-t)} + C$$

หรือ

$$x = C(100-t)^2 + \frac{1}{2}(100-t)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 10$ จะได้

$$10 = 10^4 c + 50$$

$$C = -\frac{1}{250}$$

ดังนั้น

ก) $x(t) = -\frac{1}{250}(100-t)^2 + \frac{1}{2}(100-t)$

$$= (100-t)\left(\frac{t}{250} + \frac{1}{10}\right) \quad , 0 < t < 100$$

ข) เนื่องจากความเข้มข้นของเกลือ ณ เวลา t คือ $\frac{x(t)}{100-t}$ ปอนด์/แกลลอน

แทนค่า $x(t)$ จากข้อ ก) จะได้ความเข้มข้นของเกลือในถัง

คือ $\frac{t}{250} + \frac{1}{10}$, $0 \leq t < 100$

ค) ความเข้มข้นของเกลือในถังเมื่อถังแห้งคือเมื่อ $t > 100$ ฉะนั้นจากข้อ ข) จะพบว่าความเข้มข้นคือ 0.5 ปอนด์/แกลลอน

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีเป็นสัดส่วนกับจำนวนสารกัมมันตภาพรังสีขณะนั้น สมมติว่าเริ่มต้นมีสาร 100 กรัม หลังจากนั้น 50 ปี จะเหลือสารเพียง 75 กรัม จงหาปริมาณสาร ณ เวลา t ใด ๆ และจงหาว่าจะใช้เวลากี่ปีสารกัมมันตภาพรังสีจึงจะลดลงเหลือเพียงครึ่งหนึ่ง

2. จากข้อ 1. ถ้าสารกัมมันตภาพรังสีลดลงเหลือครึ่งหนึ่งในเวลา 5 ชั่วโมง จงหาว่าจะใช้เวลานาน เท่าไรสารจึงจะลดลงเหลือ $\frac{1}{10}$ ของปริมาณเริ่มต้น

3. อัตราการสลายตัวของแร่เรเดียมเป็นสัดส่วนกับจำนวนแร่เรเดียมขณะนั้น สมมติว่าในเวลา 25 ปี ปริมาณแร่เรเดียมสลายตัวไป 1.1% จงหาระยะเวลาที่แร่เรเดียมนี้จะสลายตัวไปครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม

4. อัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียขณะนั้น ถ้าในเวลา 10 ชั่วโมงแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า อยากทราบว่าจะใช้เวลาเท่าไร แบคทีเรียจึงจะเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่า

5. ถ้าแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าใน 1 ชั่วโมง และกำหนดให้เริ่มต้นมีแบคทีเรีย 5 ล้านตัว แล้วจงหาจำนวนแบคทีเรียภายหลังเวลาผ่านไป 4 ชั่วโมง

6. อัตราการเพิ่มของพลเมืองเมืองหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนพลเมืองขณะนั้น ถ้าปี พ.ศ. 2520 มีพลเมือง 30,000 คน และปี พ.ศ. 2530 มีพลเมือง 35,000 คน อยากทราบว่า ปี พ.ศ. 2540 จะมีพลเมืองกี่คน

7. ณ เวลาเที่ยงตรง อุณหภูมิภายในห้องปรับอากาศห้องหนึ่งเป็น 75°F และอุณหภูมิข้างนอกห้องเป็น 95°F บังเอิญเครื่องปรับอากาศเสียหลังจากนั้น 4 ชั่วโมง อุณหภูมิภายในห้องวัดได้ 55° F อยากทราบว่า

   ก) อุณหภูมิภายในห้องเป็นเท่าไร ณ เวลา 14.00 น.

   ข) นานเท่าไรอุณหภูมิภายในห้องจึงจะเป็น 80°F

8) ถังน้ำใบหนึ่งจุน้ำเกลือ 100 ลิตร ซึ่งมีเกลือละลายอยู่ 0.5 กิโลกรัมต่อลิตร ถ้าปล่อยให้น้ำเกลือซึ่งมีเกลืออยู่ 0.1 กิโลกรัมต่อลิตรไหลเข้าถังในอัตรา 4 ลิตรต่อนาที และคอยคนส่วนผสมให้เข้ากันตลอดเวลา ขณะเดียวกันก็ปล่อยน้ำเกลือออกในอัตราเดียวกัน จงหา

ก) ปริมาณเกลือในถัง ณ เวลา t ใด ๆ

ข) ความเข้มข้นของเกลือในถัง ณ เวลา t ใด ๆ

9) ถังใบหนึ่งมีขนาด 100 แกลลอน แต่บรรจุน้ำบริสุทธิ์เพียง 50 แกลลอน ถ้าให้น้ำเกลือซึ่งมีความเข้มข้นของเกลือ 0.1 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลเข้าถังด้วยอัตรา 4 แกลลอนต่อนาที คอยคนส่วนผสมให้เข้ากันดีตลอดเวลา และปล่อยน้ำเกลือออกจากถังด้วยอัตรา 2 แกลลอนต่อนาที จงหา

ก) ปริมาณเกลือในถังก่อนที่น้ำเกลือจะล้นถัง

ข) ความเข้มข้นของเกลือในถัง ก่อนที่น้ำเกลือจะล้นถัง

10) ถังใบหนึ่งจุน้ำเกลือ 100 แกลลอน ซึ่งมีความเข้มข้นของเกลืออยู่ 3 ปอนด์ต่อแกลลอน ถ้าเติมน้ำบริสุทธิ์ในอัตรา 3 ปอนด์ต่อแกลลอน และคอยคนให้เข้ากันดีตลอดเวลา แล้วปล่อยน้ำเกลือออกในอัตรา 5 แกลลอนต่อนาที จงหาปริมาณเกลือ ณ เวลา t ใด ๆ

คำตอบ

1. $x = 100 \exp\left(\frac{1}{50} \ln \frac{3t}{4}\right)$, $t = -\frac{50 \ln 2}{\ln(3/4)} \sim 120$ ปี

2. $\frac{5 \ln 10}{\ln 2} \sim 16.6$ ชั่วโมง

3. 1,600 ปี

4. $10 \frac{\ln 3}{\ln 2} \sim 15.8$ ชั่วโมง

5. $5 \exp(4 \ln 2) \sim 80$ ล้านตัว

6. $30{,}000 \left(\frac{7}{6}\right)^2 \sim 40{,}833$ คน

7. ก) $x = 95 - 20e^{1/2}$ ข) $t = 4 \ln(3/4)$

8. ก) $10e^{-t/25} + 10$ ข) $0.4\, e^{-t/25} + 0.1$

9. ก) $\frac{0.4t^2 + 20t}{2t + 50}$, $0 \leq t \leq 25$

 al $\frac{0.4t^2 + 20t}{(2t + 50)^2}$, $0 \leq t \leq 25$

10. $\frac{3}{1{,}000} (100 - 2t)^{5/2}$, $0 \leq t \leq 50$

3.3 ปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุ

จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่ 2

$$F = ma \qquad \ldots(1)$$

เมื่อ F เป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุ

m เป็นมวลของวัตถุ (มีค่าคงตัว)

a เป็นความเร่งของวัตถุ

โดยที่หน่วยที่ใช้สำหรับค่า m,F และระยะขจัด x มีหลายระบบดังนี้

ระบบ \ ปริมาณ	ระยะทาง	มวล	เวลา	แรง	ความเร่ง
อังกฤษ	ฟุต	สลัก	วินาที	ปอนด์	ฟุต/วินาที^{2}
cgs	เซนติเมตร	กรัม	วินาที	ไดน์	เซนติเมตร/วินาที^{2}
mks	เมตร	กิโลกรัม	วินาที	นิวตัน	เมตร/วินาที^{2}

ถ้าพิจารณาวัตถุตกอย่างเสรี (ไม่มีแรงต้านของอากาศ) จะมีแรงที่กระทำต่อวัตถุเพียงอย่างเดียว คือแรงเนื่องจากน้ำหนัก W และให้ g เป็นความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก จากกฎข้อ 2. ของนิวตัน จะพบว่า

$$W = mg$$

$$m = \frac{W}{g}$$

ในระบบอังกฤษ เราใช้ g = 32 ฟุต/วินาที^{2}

ระบบ cgs เราใช้ g = 980 เซนติเมตร/วินาที^{2}

ระบบ mks เราใช้ g = 9.8 เมตร/วินาที^{2}

สำหรับการเคลื่อนที่แนวเส้นตรง

$$v = \frac{dx}{dt}$$

และ

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ยิ่งกว่านั้น $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

ดังนั้น จาก $F = ma$ ทำให้ได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F \qquad .....(2)$$

หรือ $$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \qquad .....(3)$$

หรือ $$mv\frac{dv}{dx} = F \qquad ....(4)$$

ตัวอย่างที่ 1 วัตถุหนัก 4 ปอนด์ ตกจากที่สูงจากสภาพหยุดนิ่ง ขณะที่ตกมีแรงต้านการเคลื่อนที่เป็นครึ่งหนึ่งของความเร็ว จงหาความเร็วและระยะขจัดที่ตกลงมา ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt} q \qquad +$$

โดย $W = 4,\ g = 32$ ดังนั้น

$$\frac{4}{32}\frac{dv}{dt} = 4 - \frac{1}{2}v$$

หรือ $$\frac{dv}{dt} = 4(8 - v)$$

แก้สมการโดยแยกตัวแปร

$$\frac{dv}{8 - V} = 4dt$$

อินทิเกรต

$$-\ln|8 - v| = 4t + c_1$$

$$8 - v = ce^{-4t}$$

$$v = 8 - cc^{-4t}$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง นั่นคือ $v(0) = 0$
ทำให้ได้ $c = 8$ ดังนั้น

$$v = 8(1 - e^{-4t}) \qquad \ldots(5)$$

ถ้า $t \to \infty$, $v = 8$ ซึ่งเรียกว่าลิมิตของความเร็ว

lli $v = \frac{dx}{dt}$ จาก สมการ (5) ทำให้

$$\frac{dx}{dt} = 8(1 - e^{-4t})$$

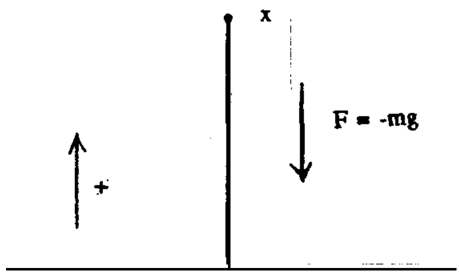
อินทิเกรต $x = 8(t + \frac{1}{4} e^{-4t}) + c_2$

จาก $x(0) = 0$ ทำให้ได้ $c_2 = -2$

$$x = 8(t + \frac{1}{4} e^{-4t}) - 2 \qquad \ldots(6)$$

ตัวอย่างที่ 2 สมมติว่าออกแรกคือวัตถุมวล m จากพื้นดินขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว v_0 จงหาระยะทางที่วัตถุขึ้นไปสูงสุด (สมมติว่าไม่มีแรงต้านการเคลื่อนที่)

วิธีทำ ให้ x เป็นระยะทางที่วัดจากพื้นดินไปยังวัตถุ (ทิศทางเป็นบวก) ณ เวลา t ใดๆ เนื่องจากการเคลื่อนที่อยู่ภายใต้แรงความโน้มถ่วงอย่างเดียว ดังนั้นจากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน



$$F = ma$$

ทำให้ได้ $-w = ma$

$$ma = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

อินทิเกรต

$$\frac{dx}{dt} = -gt + c_1$$

หรือ $v(t) = -gt + c_1$ .....(7)

เนื่องจาก $v(0) = v_0$ ดังนั้น $c_1 = v_0$

$v(t) = -gt + v_0$ .....(8)

แต่ $v(t) = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

อินทิเกรต $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + c_2$ .....(9)

จาก $x(0) = 0$ จะได้ $c_2 = 0$

ดังนั้น $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t$ .....(10)

จากสมการ (8) จะพบว่าความเร็ว v มีค่าเป็นบวกตั้งแต่เริ่มเคลื่อนที่จนกระทั่ง เวลา $t = \frac{v_0}{g}$ ความเร็ว $v = 0$ หลังจากจุดนี้ไปความเร็ว v จะมีค่าเป็นลบ คือช่วงที่วัตถุเคลื่อนที่ลงดังนั้น เวลา $t = \frac{v_0}{g}$ จึงเป็นเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ขึ้นถึงจุดสูงสุด และจากสมการ (10) จะได้ระยะทางเคลื่อนที่สูงสุด เป็น

$$x(v_0/g) = -\frac{1}{2}g(v_0/g)^2 + v_0(v_0/g)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

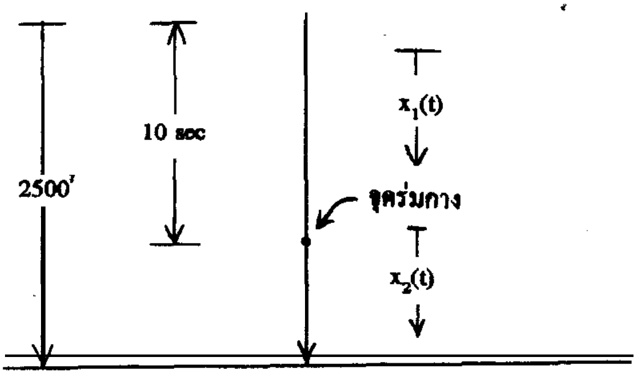
ตัวอย่างที่ 3 นักกระโดดร่มหนัก 200 ปอนด์ (รวมทั้งอุปกรณ์กระโดดร่ม) กระโดดจากเครื่องบินที่มีความสูง 2,500 ฟุต ซึ่งเป็นการตกจากสภาพหยุดนิ่ง หลังจากนั้น 10 นาที เขาจึงดึงให้ร่มกางออก สมมติว่าก่อนร่มกางมีแรงต้านการเคลื่อนที่อันเนื่องจากอากาศเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของความเร็ว แต่หลังจากร่มกางแล้วมีแรงต้านการเคลื่อนที่อันเนื่องจากอากาศเป็น 10 เท่าของความเร็ว จงหา

ก) ความเร็วของนักกระโดดร่ม ณ เวลาที่ร่มเริ่มกาง

ข) เขาตกลงมาเป็นระยะทางเท่าใดก่อนที่ร่มกาง

ค) ลิมิตของความเร็วเป็นเท่าไร หลังจากร่มกาง

วิธีทำ



ก่อนร่มกาง มีแรงต้านการเคลื่อนที่ $\frac{1}{2}\ v_1$

ให้ $x_1(t)$ เป็นระยะทางกางเคลื่อนที่

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน $F = ma$

$$m\,\frac{dv_1}{dt} = W - \frac{1}{-}\ v_1$$

$$\frac{W}{g}\,\frac{dv_1}{dt} = W - \frac{1}{2}\ v_1$$

ในที่นี้ $W = 200$, $g = 32$ ดังนั้น

$$\frac{200}{32}\,\frac{dv_1}{dt} = 200 - \frac{1}{2}\ v_1$$

$$\frac{dv_1}{dt} = 32 - \frac{2}{25}\ v_1$$

$$\frac{dv_1}{400 - v_1} = \frac{2}{25}\,dt$$

อินทิเกรต $-\ln(400 - v_1) = \frac{2}{25}t + c_1$

$$v_1 = 400 + ce^{-2t/25}$$

เนื่องจากเป็นการตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้น $v(0) = 0$

จะได้ $c = -400$

$$v_1(t) = 400(1 - e^{-2t/25}), \quad 0 \le t \le 10 \qquad \text{.....(11)}$$

ก) ความเร็วขณะที่ร่มกาง คือ ณ $t = 10$

$$v_1(10) = 400(1 - e^{-4/5}) \approx 220 \text{ ฟุต/วินาที}$$

ข) จากสมการ (11)

$$\frac{dx_1}{dt} = 400(1 - e^{-2t/25})$$

อินทิเกรต

$$x_1(t) = 400(t + \frac{25}{2}e^{-2t/25}) + c_2$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x_1(0) = 0$ จะได้ $c_2 = -5{,}000$

$$x_1(t) = 400(t + \frac{25}{2}e^{-2t/25}) - 5{,}000 \qquad \text{.....(12)}$$

ระยะทางที่เขาตกลงมาก่อนร่มกางคือ ณ $t = 10$

$$x_1(10) = 400(10 + \frac{25}{2}e^{-4/5}) - 5{,}000 \approx 1{,}247 \text{ ฟุต}$$

<u>**หลังร่มกาง**</u> มีแรงต้านการเคลื่อนที่ $10v_2$

ให้ $x_2(t)$ เป็นระยะทางการเคลื่อนที่

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$m\frac{dv_2}{dt} = W - 10v_2$$

$$\frac{200}{32}\frac{dv_2}{dt} = 200 - 10v_2$$

$$\frac{dv_2}{160 - 8v_2} = \frac{1}{5}\, dt$$

$$\frac{dv_2}{v_2 - 20} = -\frac{8}{5}\, dt$$

อินทิเกรต $\ln |v_2 - 20| = -\frac{8}{5}t + c_3$

$$v_2 = 20 + c_4 e^{-8t/5}$$

เนื่องจาก $t = 10$, $v = 220$

แต่ v_1 จะเป็นความเร็วเริ่มต้นของ v_2

นั่นคือ $v_2(0) = 220$ จะได้

$$c_4 = -200$$

ดังนั้น

$$v_2(t) = 20 - 200e^{-8t/5}$$

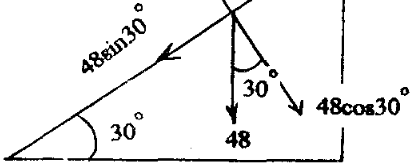
ค) ลิมิตของความเร็วหลังร่มกางคือ $t \to \infty$

$$v_2 = 20 \text{ ฟุต/วินาที}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> วัตถุหนัก 48 ปอนด์ ถูกปล่อยจากสภาพหยุดนิ่ง ณ จุดสูงสุดของพื้นเอียงซึ่งทำมุม 30 กับแนวราบ สมมติว่ามีแรงต้านทานของอากาศเป็น $\frac{1}{2}v$ และแรงต้านการเคลื่อนที่อันเนื่องมาจากความเสียดทานเป็น $\frac{1}{4}N$ เมื่อ N เป็นแรงที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่

(โดยทั่วไปแรงเสียดทานคือ μN เรียก μ ว่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทาน)

<u>วิธีทำ</u>



แรงที่กระทำกับวัตถุมีดังนี้

1. แรงเนื่องจากน้ำหนักวัตถุบนพื้นเอียงคือ $48 \sin 30^\circ = 24$

2. แรงเนื่องจากความเสียดทานของพื้นเอียงคือ $\frac{1}{4} N$ แต่

$N = 48 \cos 30^\circ$ ดังนั้น $\frac{1}{4} N = 6\sqrt{3}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับแรงแรก

3. แรงต้านเนื่องจากอากาศคือ $\frac{1}{2} v$

จากกฎข้อที่ 2. ของนิวตัน

$$F = ma$$

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

แต่ $m = \frac{W}{g} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$

ดังนั้น จะได้

$$\frac{3}{2} \frac{dv}{dt} = 24 - 6\sqrt{3} - \frac{1}{2} v$$

หรือ $$\frac{dv}{48 - 12\sqrt{3} - v} = \frac{dt}{3}$$

อินทิเกรต $v = 48 - 12\sqrt{3} - c_1 e^{-t/3}$

เนื่องจาก $v(0) = 0$ จะได้ $c_1 = 48 - 12\sqrt{3}$

$$v = (48 - 12\sqrt{3})(1 - e^{-t/3})$$

แต่ $v = \frac{dx}{dt}$ ดังนั้น

$$x(t) = (48 - 12\sqrt{3})(t + 3e^{-t/3}) + c_2$$

จาก $x(0) = 0$ จะได้ $c_2 = -3(48 - 12\sqrt{3})$

เพราะฉะนั้น

$$x(t) = (48 - 12\sqrt{3})(t + 3e^{-t/3}) - 3(48 - 12\sqrt{3})$$

แบบฝึกหัดที่ 3.3

1. วัตถุหนัก 8 ปอนด์ ตกจากที่สูงจากสภาพหยุดนิ่ง ขณะที่ตกลงมามีแรงต้านทานเคลื่อนที่เป็นสองเท่าของความเร็ว จงหาความเร็วและระยะขจัดที่ตกลงมา ณ เวลา t ใด ๆ
2. วัตถุหนัก 20 ปอนด์ เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในแนวราบด้วยแรงที่มีค่าคงตัวเท่ากับ 12 ปอนด์ สมมติว่ามีแรงต้านการเคลื่อนที่ครั้งนี้เป็น 4 เท่าของความเร็ว กำหนดว่าวัตถุนี้เคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิ่ง จงหาระยะทางเมื่อเวลา t ใด ๆ
3. นักกระโดดร่มหนัก 160 ปอนด์ (รวมทั้งอุปกรณ์กระโดดร่ม) กระโดดจากเครื่องบินในสภาพหยุดนิ่ง หลังจากนั้น 5 วินาที เขาดึงร่มให้กางออก สมมติว่าก่อนร่มกางมีแรงต้านการเคลื่อนที่เป็น $\frac{1}{2}v$ และหลังร่มกางออกแล้วมีแรงต้านเป็น $\frac{5}{8}v^2$ จงหาความเร็วของเขาทั้งก่อนและหลังร่มกาง
4. กระป๋องนมใบหนึ่งหนัก 24 ปอนด์ ถูกปล่อยจากจุดสูงสุดของพื้นเอียงซึ่งยาว 30 ฟุต และเอียง 45° กับแนวระดับ ในสภาพหยุดนิ่ง กำหนดให้แรงต้านของอากาศเป็น $\frac{1}{3}$ เท่าของความเร็ว และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเป็น 0.4 จงหา
   ก) ความเร็วของกระป๋องนม หลังจากเคลื่อนที่แล้ว 1 วินาที
   ข) ความเร็วเมื่อกระป๋องนมมาถึงจุดต่ำสุดของพื้นเอียง

คำตอบ

1. $v = 4(1 - e^{-8t})$, $x = 4(t + \frac{1}{8}e^{-8t} - \frac{1}{8})$
2. $x = 3[t + \frac{32}{}(e^{-32t/5} - 1)$
3. $v_1 = 320(1 - e^{-t/10})$

   $v_2 = 16\left(\frac{ce^{-4t} + 1}{1 - ce^{-4t}}\right)$, $c = \frac{110}{142}e^{20}$
4. ก) 10.96 ฟุต/วินาที ข) 20.46 ฟุต/วินาที