บทที่ 2
สมการอันดับหนึ่ง

2.1 แบบแยกตัวแปร

ได้แก่สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \qquad .....(1)$$

โดยที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และ $g(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (1) โดยอินทิเกรตได้เลย

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy = c \qquad .....(2)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $2(y + 3)dx - xydy = 0$

วิธีทำ ถ้า $x \neq 0$ และ $y + 3 \neq 0$ เราสามารถจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปแบบแยกตัวแปรได้คือ

$$\frac{2dx}{x} - \frac{ydy}{y + 3} = 0$$

หรือ

$$\frac{2dx}{x} - [1 - \frac{3}{y + 3}]dy = 0$$

อินทิเกรต จะได้

$$2\int \frac{dx}{x} - \int [1 - \frac{3}{y + 3}]dy = c_1$$

หรือ

$$2 \ln x - y + 3 \ln(y + 3) = \ln c$$

ดังนั้น $y = 2 \ln x + 3 \ln(y + 3) - \ln c$

$$y = \ln x^2(y + 3)^3 c$$

หรือ $e^y = cx^2(y + 3)^3$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $y' = e^{x+y}$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$

วิธีทำ สมการโจทย์อาจเขียนได้เป็น

$$y' = e^{x} \cdot e^{y}$$

ซึ่งสามารถจัดในรูปแยกตัวแปรได้คือ

$$e^{-y}dy = e^{x}dx$$

อินทิเกรตจะได้ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$-e^{-y} = e^{x} + c$$

เมื่อ $x = 0$, $y = 0$ จะพบว่า

$$-1 = 1 + c$$

$$c = -2$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ

$$e^{-y} = 2 - e^{x}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $y' \cot x + y = 2$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

วิธีทำ ถ้า $y \neq 2$ และ $\cot x \neq 0$ สมการสามารถจัดได้ในรูป

$$\frac{dy}{y - 2} + \tan x \, dx = 0$$

อินทิเกรต $\int \frac{dy}{y - 2} + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = c$

หรือ $\ln|y - 2| - \ln|\cos x| = c$

$$\ln\left|\frac{y - 2}{\cos x}\right| = c$$

$$y = 2 + c_1 \cos x$$

จะหาผลเฉลยเฉพาะได้ โดยการแทนค่า $x = \frac{\pi}{3}$ และ $y = 0$

ในผลเฉลยทั่วไป จะได้

$$0 = 2 + c_1 \cos\frac{\pi}{3}$$

$$c_1 = -4$$

ดังนั้นผลเฉลยที่ต้องการคือ $y = 2 - 4\cos x$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y^2)}{1+x^2}$

วิธีทำ สมการสามารถเขียนในรูปแยกตัวแปรได้

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

อินทิกรต $\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dy}{1+y^2} = 0$

หรือ $\arctan x + \arctan y = C$

แบบฝึกหัดที่ 2.1

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

1. $(1 - x)y' = y^2$
2. $\sin x \sin y \, dx + \cos x \cos y \, dy = 0$
3. $xy^3 dx + e^{x^2} dy = 0$
4. $\frac{dV}{dP} = -\frac{V}{P}$
5. $x^2 dx + y(x - 1)dy = 0$
6. $(xy + x)dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy$
7. $x\cos^2 y \, dx + \tan y \, dy = 0$
8. $y' = y\sec x$
9. $xy^3 dx + (y + 1)e^{-x} dx = 0$
10. $\sqrt{1 - x^2}\, dy + \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0$

จงหาผลเฉลยเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด

11. $xyy' - y^2 = 1$; $x = 2$, $y = 1$
12. $xy^2 dx + e^x dy = 0$; $x \to \infty$, $y \to \frac{1}{2}$
13. $y' = xe^{-y-x^2}$; $y(0) = 0$
14. $\frac{dr}{dt} = -2rt$. ; $t = 0$, $r = r_0$
15. $v\frac{dv}{dx} - g = 0$; $x = x_0$, $v = v_0$

คำตอบ

1. $y \ln|c(1 - x)| = 1$
2. $\sin y = c \cos x$
3. $e^{-x^2} + y^{-2} = c$
4. $PV = c$
5. $(x + 1)^2 + y^2 + 2 \ln|c(x - 1)| = 0$
6. $\ln(x^2 + 1) = y^2 - 2y + 4\ln|c(y + 1)|$
7. $x^2 + \tan^2 y = c^2$
8. $y = c(\sec x + \tan x)$
9. $e^x(x - 1) = \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + c$
10. $\arcsin y + \arcsin x = \arcsin c$
11. $x^2 - 2y^2 = 2$
12. $y = \dfrac{e^x}{2e^x - x - 1}$
13. $2e^y = 3 - e^{-x^2}$
14. $r = r_0 e^{-t^2}$
15. $v^2 - v_0^2 = 2g(x - x_0)$

2.2 สมการแน่นอน

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \ldots(1)$$

เรียกว่าสมการแน่นอน ถ้ามีฟังก์ชัน $u(x,y)$ ซึ่ง

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad \ldots(Z)$$

นั่นคือซ้ายมือของสมการ (1) อยู่ในรูปค่าเชิงอนุพันธ์รวม
ดังนั้น สมการ (1) จะเขียนได้เป็น

$$du = 0 \quad \ldots(S)$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u(x,y) = c \quad \ldots(4)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการแน่นอนหรือไม่

1. $xdy + ydx = 0$
2. $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$
3. $ydx - xdy = 0$

วิธีทำ 1) จาก $xdy + ydx = 0$

พิจารณาซ้ายมือของสมการ จะพบว่าสามารถเขียนได้ในรูป

$$d(xy) = xdy + ydx$$

แสดงว่าเป็นสมการแน่นอน

2) $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$

พิจารณาซ้ายมือของสมการจะพบว่าสามารถเขียนได้ในรูป

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$$

แสดงว่าเป็นสมการแน่นอน

3) $ydx - xdy = 0$

เนื่องจากซ้ายมือไม่สามารถเขียนในรูปค่าเชิงอนุพันธ์รวมจึงไม่ใช่สมการแน่นอน

จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่าสำหรับสมการง่าย ๆ เราพอจะพิจารณาหาฟังก์ชัน $u(x,y)$ ได้ (ถ้าเป็นสมการแน่นอน) แต่สำหรับสมการที่ยุ่งยากขึ้น จะเป็นปัญหามากถ้าจะตรวจสอบสมการแน่นอนโดยการหา $u(x,y)$ ที่มีคุณสมบัติตามสมการ (2) ฉะนั้นจึงต้องพยายามหาเงื่อนไขที่จะตรวจสอบสมการแน่นอน ดังต่อไปนี้

จากแคลคูลัสเราทราบว่า

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad \text{.....(5)}$$

ดังนั้นจากสมการ (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Mdx + Ndy$$

นั่นคือ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = M \, , \; \frac{\partial u}{\partial y} = N \qquad$ .....(6)

โดยหาอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \, , \; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ซึ่งจากแคลคูลัสเราทราบว่า (สำหรับฟังก์ชันทั่ว ๆ ไป)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

เพราะฉะนั้น เงื่อนไขที่ต้องการคือ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{.....(7)}$$

<u>**ทฤษฎีบท**</u> สมการ (1) เป็นสมการแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

<u>**วิธีการหาคำตอบ**</u>

เนื่องจากคำตอบของสมการแน่นอน คือ $u(x,y) = c$

เราสามารถหา $u(x,y)$ ได้โดยต้องสอดคล้องสมการ (6) คือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \, , \; \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

ถ้าอินทิเกรตสมการ $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ เทียบกับ x โดยให้ y ตรึงจะได้

$$u = \int^{x} M dx + C(y) \qquad .....(8)$$

โดย C(y) เป็นฟังก์ชันตามใจชอบของ y

หาอนุพันธ์สมการ (8) เทียบกับ y แล้วให้เท่ากับ N (นั่นคือ $\frac{\partial u}{\partial y} = N$) จะได้

$$\int^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + C'(y) = N$$

$$C'(y) = N - \int^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx \qquad .....(9)$$

ซึ่งหา C(y) ได้โดยอินทิเกรตเทียบกับ y

ทำนองเดียวกัน เราอาจใช้เงื่อนไข $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ ก่อนก็ได้

อินทิเกรตสมการ $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ เทียบกับ y

$$u = \int^{y} N dy = C(x)$$

โดย C(x) เป็นฟังก์ชันตามใจชอบของ x

หาอนุพันธ์ u ที่ได้ เทียบกับ x แล้วให้เท่ากับ M (นั่นคือ $\frac{\partial u}{\partial x} = M$) จะได้

$$\int^{y} \frac{\partial N}{\partial x} dx + C'(x) = M$$

$$C'(x) = M - \int^{Y} \frac{\partial N}{\partial x} dx$$

ซึ่งหา C(x) ได้โดยอินทิเกรตเทียบกับ x

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $3x(xy - 2)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$ .....(10)

วิธีทำ $M(x, y) = 3x^2y - 6x$ และ $N(x,y) = x^3 + 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$$

ดังนั้นเป็นสมการแน่นอน และคำตอบคือ $u(x, y) = c$: โดยที่

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = 3x^2y - 6x \qquad \text{.....(n)}$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^3 + 2y \qquad \text{.....(12)}$$

อินทิเกรตสมการ (11) เทียบกับ x

$$u = \int^x (3x^2y - 6x)dx$$

$$= x^3y - 3x^2 + C(y) \qquad \text{.....(13)}$$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + C'(y)$$

ใช้เงื่อนไขสมการที่ (12)

$$x^3 + C'(y) = x^2 + 2y$$

$$C'(y) = 2y$$

$$C(y) = y^2 + c_1$$

(ค่าคงตัวตามใจชอบ c_1 สามารถละไว้ได้ เพราะจะไปปรากฏในผลเฉลยทั่วไป $u(x,y)=c$)

แทนค่า $C(y)$ ในสมการ (13)

$$u(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 + c_1$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (10) คือ

$$x^3y - 3x^2 + y^2 = c$$

ในการหา $u(x,y)$ เราอาจหาได้โดยวิธีจัดกลุ่ม และใช้ความรู้แคลคูลัสที่ว่า

$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ ดังต่อไปนี้ จากสมการ (10) เขียนใหม่เป็น

$$3x^2ydx - 6xdx + x^3dy + 2ydy = 0$$

หรือ

$$(3x^2ydx + x^3dy) - 6xdx + 2ydy = 0$$

หรือ

$$d(x^3y) - d(3x)^2 + d(y^2) = 0$$

$$d(x^3y - 3x^2 + y^2) = 0$$

โดยการอินทิเกรตจะได้ $x^3y - 3x2 + y^2 = c$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $e^{-y}dx - (2y + x\ e^{-y})dy = 0$ .....(14)

วิธีทำ $M(x,y) = e^{-y}$, $N(x,y) = -(2y + xe^{-y})$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y} , \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-Y}$$

ดังนั้นเป็นสมการแน่นอน จะต้องมี $u(x,y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial u}{6X} = M = e^{-y} \qquad .....(15)$$

และ $\frac{au}{\partial y} = N = -(2y + xe^{-y})$ .....(16)

อินทิเกรตสมการ (15) เทียบกับ x จะได้

$$u = \int^X e^{-y}dx + C(y)$$

$$= e^{-y}x + C(y)$$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y

$$\frac{au}{\partial y} = -xe^{-y} + C'(y)$$

ใช้เงื่อนไขสมการ (16)

$$-xe^{-y} + C'(y) = -(2y + xe^{-y})$$
$$C'(y) = -2y$$
$$C(y) = -y^2$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (14) คือ

$$u(x,y) = e^{-y}x - y^2 = c$$

วิธีจัดกลุ่ม จากสมการ (14) เขียนใหม่เป็น

$$e^{-y}dx - 2ydy - xe^{-y}dy = 0$$

หรือ $(e^{-y}dx - xe^{-y}dy) - 2ydy = 0$

หรือ $d(e^{-y}x) - d(y^2) = 0$

หรือ $d(e^{-y}x - y^2) = 0$

อินทิเกรตจะได้ $e^{-y}x - y^2 = c$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ

$$(x^3e^{x+y} + 3x^2e^{x+y} - x)dx + (x^3e^{x+y} + y)dy = 0 \qquad \ldots\ldots(17)$$

วิธีทำ $M(x,y) = x^3e^{x+y} + 3x^2e^{x+y} - x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^3e^{x+y} + 3x^2e^{x+y}$$

$$N(x,y) = x^3e^{x+y} + y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = x^3e^{x+y} + 3x^2e^{x+y}$$

ดังนั้นเป็นสมการแน่นอน จะต้องมี $u(x,y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = x^3e^{x+y} + 3x^2e^{x+y} - x$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^3e^{x+y} + y$$

ซึ่งจะพบว่า $\int^x Mdx$ จะยากกว่า $\int^y Ndy$

ดังนั้น พิจารณา $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ ก่อน

อินทิเกรต $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ เทียบกับ y จะได้

$$u = \int^{y} N dy = \int^{y} (x^3 e^{x+y} + y) dy$$

$$= x^3 e^{x+y} + \frac{y^2}{2} + C(x)$$

หาอนุพันธ์ u เทียบกับ x จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 e^{x+y} + 3x^2 e^{x+y} + C'(x)$$

เงื่อนไข $\frac{\partial u}{\partial x} = M$

$$x^3 e^{x+y} + 3x^2 e^{x+y} + C'(x) = x^3 e^{x+y} + 3x^2 e^{x+y} - x$$

$$C'(x) = -x$$

อินทิเกรตเทียบกับ x

$$C(x) = -\frac{x^2}{2}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u(x,y) = x^3 e^{x+y} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c$$

วิธีจัดกลุ่ม จากสมการ (17) เขียนใหม่เป็น

$$(x^3 e^{x+y} + 3x^2 e^{x+y}) dx + x^3 e^{x+y} dy - x dx + y dy = 0$$

หรือ

$$d(x^3 e^{x+y}) - d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0$$

หรือ

$$d\left(x^3e^{x+y} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) = 0$$

โดยการอินทิเกรตจะได้

$$x^3e^{x+y} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

จงตรวจสอบสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการแน่นอนหรือไม่ แล้วแก้สมการเหล่านี้ด้วย

1. $(x \square y)dx \square (x - y)dy \square \square$

2. $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y)dy = 0$

3. $(y^2 - 2xy + 6x)dx - (x^2 - 2xy + 2)dy = 0$

4. $(1 + y^2)dx + (x^2 y + y)dy = 0$

5. $v(2uv^2 - 3)du + (3u^2 v^2 - 3u + 4v)dv = 0$

6. $(\cos 2y - 3x^2 y^2)dx + (\cos 2y - 2x \sin 2y - 2x^3 y)dy = 0$

7. $(\sin \theta - 2r\cos^2 \theta)dr + r\cos \theta(2r\sin \theta + 1)d\theta = 0$

8. $[2x + y\cos(xy)]dx + x\cos(xy\ My = 0$

9. $3y(x^2 - 1)dx + (x\ 3 + 8y - 3x)dy = 0$, $y(0) = 1$

10. $(1 - xy)\text{-}2dx + [y2 + x^2(1 - xy)^{-2}]dy = 0$, $y(2) = 1$

คำตอบ

1. $x^2 + 2xy - y^2 = c$

2. $x^2 y - x^3 + \frac{y^2}{2} = c$

3. $xy^2 - x^2 y + 3x^2 - 2y = c$

4. $2 \arctan x + \ln(1 + y^2) = c$

5. $v(u^2 v^2 - 3u + 2v) = c$

6. $\frac{1}{2} \sin 2y + x\cos 2y - x^3 y^2 = c$

7. $r\sin\theta - r^2 \cos^2\theta = c$

8. $x^2 + \sin(xy) = c$

9. $xy(x^2 - 3) = 4(1 - y^2)$

10. $xy^4 - y^3 + 5xy - 3x = 5$

2.3 ตัวประกอบอินทิเกรต

บทนิยาม ฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ เรียกว่าตัวประกอบอินทิเกรตของสมการ

$$Mdx + Ndy = 0$$

ถ้าสมการ $\mu(Mdx + Ndy) = 0$ . . ...(l)

เป็นสมการแน่นอน

การหาตัวประกอบอินทิเกรตสามารถทำได้ดังต่อไปนี้

1. การสังเกตหมู่เทอม

$$xdy + ydx = d(xy) \quad \text{. . ...(2)}$$

$$xdx + ydy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) \quad \text{. . ...(3)}$$

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{. . ...(4)}$$

$$\frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = d(\sqrt{x^2 - y^2}) \quad \text{. . ...(5)}$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{Y}) \quad \text{. . ...(6)}$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = -d(\frac{y}{x}) \quad \text{.....(7)}$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d(\arctan \frac{x}{y}) \quad \text{. . ...(8)}$$

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = d(\ln|x| - \ln|y|) \quad \text{.....(9)}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$

วิธีทำ เขียนสมการใหม่โดยสังเกตหมู่เทอม จะได้

$$(x^2 + y^2)dx + txdx + y^2dy) = 0$$

$$(x^2 + y^2 Mx + \frac{1}{2} d(x^2 \cdot y^2) = 0$$

คูณตลอดด้วย $1/(x^2 + y^2)$

$$dx + \frac{1}{2.2}\frac{d(x^2 + y^2)}{(x + y^2)} = 0$$

อินทิเกรต จะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = c$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $ydx - (x^2y + x)dy = 0$

วิธีทำ เขียนใหม่โดยสังเกตหมู่เทอม จะได้

$$ydx - xdy - x^2ydy = 0$$

คูณตลอดด้วย $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} - ydy = 0$$

หรือ $d(y/x) + ydy = 0$

อินทิเกรต จะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0$

วิธีทำ เขียนสมการใหม่ โดยสังเกตหมู่เทอม จะได้

$$xy(ydx + xdy) - xdy = 0$$

$$xyd(xy) - xdy = 0$$

คูณตลอดด้วย $1/xy$

$$d(xy) - \frac{dy}{y} = 0$$

อินทิเกรตจะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$xy - \ln|y| = c$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $y(x^3 - y)dx - x(x^3 + y)dy = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$x^3(ydx - xdy) - y(ydx + xdy) = 0$$

ทราบว่า $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ และ $d(xy) = ydx + xdy$

ดังนั้น โดยการหารตลอดด้วย y^2 จะได้

$$x^3 d(\frac{x}{y}) - \frac{d(xy)}{y} = 0$$

ซึ่งสามารถทำให้เป็นสมการแน่นอนได้โดยหาตัวมาคูณ ที่จะทำให้ ส.ป.ส ของ $d(\frac{x}{y})$ อยู่ในรูปฟังก์ชันของ $\frac{x}{y}$ และ ส.ป.ส ของ $d(xy)$ อยู่ในรูปฟังก์ชันของ xy โดยมีเทคนิคดังนี้

สมมติว่าคูณด้วย $x^m y^n$ ฉะนั้น

$$x^{m+3}y^n d(\frac{x}{y}) - x^m y^{n-1} d(xy) = 0 \qquad .....(10)$$

เพื่อให้ ส.ป.ส. ของ $d(\frac{x}{y})$ เป็นฟังก์ชันของ $\frac{x}{y}$ เลขชี้กำลังของ x และ y ต้องเท่ากัน แต่เครื่องหมายตรงข้ามกัน

$$m + 3 = -n$$

ในทำนองเดียวกัน ส.ป.ส.ของ $d(xy)$ จะเป็นฟังก์ชันของ xy ถ้า

$$m = n - 1$$

แก้สมการหาค่า m และ n จะได้ $m = -2,\ n = -1$

ฉะนั้นจากสมการ (10) จะได้

$$\frac{x}{y} d(\frac{x}{y}) \frac{d(xy)}{x^2y^2} = 0$$

อินทิเกรต

$$\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2 + \frac{1}{xy} = c_1$$

หรือ $x^3 + 2y = cxy^2$

2. รูปแบบที่แน่นอน

จากสมการ (1) ซึ่งเป็นสมการแน่นอน จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

หรือ

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \qquad \ldots\ldots(11)$$

ถ้าให้ $\mu = \mu(v)$ โดยที่ v เป็นฟังก์ชันของ x และ y แล้ว
จากสมการ (11) จะได้ว่า

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial v}{\partial x} - M \frac{\partial v}{\partial y}} \qquad \ldots\ldots(12)$$

และถ้า ขวามือของสมการ (12) เป็นฟังก์ชันของ v อย่างเดียว ให้เท่ากับ $f(v)$ นั่นคือ

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv} = f(v)$$

ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรต คือ

$$\mu = \exp\left(\int f(v)dv\right) \qquad \ldots\ldots(13)$$

สำหรับกรณีเฉพาะบางกรณีของ v และฟังก์ชัน $f(v)$ ที่สมนัยกัน กำหนดได้ดังนี้

v	$f(v)$
x	$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$
y	$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$
$x \pm y$	$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \mp M}$

xy	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}$
$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)y^2}{(yN - xM)}$
$x^2 + y^2$	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{2(xN - yM)}$

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $(x^2y + y + 1) + x(1 + x^2)y' = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $M = x^2y + y + 1, \quad N = x(1 + x^2)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 + 1 \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 3x^2$$

พิจารณา
$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x(1 + x^2)}(x^2 + 1 - 1 - 3x^2)$$
$$= \frac{-2x}{1 + x^2}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\mu = \exp\int \frac{-2x}{1 + x^2}\,dx = \exp(-\ln(1 + x^2))$$
$$= (1 + x^2)^{-1}$$

นำไปคูณสมการโจทย์ จะได้สมการแน่นอนคือ

$$(x^2y + y + 1)(1 + x^2)^{-1} + x(1 + x^2)(1 + x^2)^{-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

หรือ $((x^2 + 1)y + 1)(1 + x^2)^{-1} + x\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$Y + \frac{1}{1+x^2} + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$xdy + ydx + \frac{dx}{1+x^2} = 0$$

$$d(xy) + \frac{dx}{1+x^2} = 0$$

อินทิเกรต

$$xy + \arctan x = c$$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $M = 2xy^2 - y$, $N = y^2 + x + y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1 \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

พิจารณา $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{2xy^2 - y}(1 - 4xy + 1)$

$$= \frac{2(1-2xy)}{-y(1-2xy)} = -\frac{2}{y}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\mu = \exp\left(\int -\frac{2}{y}\,dy\right) = \exp(-2\ln y0 = y^{-2}$$

นำไปคูณสมการโจทย์ จะได้สมการแน่นอนคือ

$$(2x - \frac{1}{y})dx + (1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y})dy = 0$$

หรือ $2x\,dx - (\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy) + dy + \frac{1}{y}dy = 0$

หรือ $d(x^2) - d(\frac{x}{y}) + dy + d(\ln y) = 0$

อินทิเกรต $x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln y = c$

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $(y - \frac{1}{x})dx + \frac{dy}{y} = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $M = y - \frac{1}{x}$, $N = \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

พิจารณา $$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)y^2}{yN - xM} = \frac{(1 - 0)y^2}{1 - xy + 1} = \frac{1}{x/y}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x/y ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\mu = \exp\left(\int \frac{1}{x/y}\, d(x/y)\right) = \exp(\ln|x/y|) = \frac{x}{y}$$

นำไปคูณสมการโจทย์ จะได้สมการแน่นอนคือ

$$(x - \frac{1}{y})dx + \frac{x}{y^2}\, dy = 0$$

หรือ $x\,dx - \left(\frac{1}{y}\, dx - \frac{x}{y^2}\, dy\right) = 0$

หรือ $d(x^2/2) - d(x/y) = 0$

อินทิเกรต $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{y} = c$

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $\left(2y + \frac{1}{(x + y)^2}\right)dx + \left(3y + x + \frac{1}{(x + y)^2}\right)dy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $M = 2y + \frac{1}{(x + y)^2}$, $N = 3y + x + \frac{1}{(x + y)^2}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 - \frac{2}{(x + y)^3} , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - \frac{2}{(x + y)^3}$$

พิจารณา $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \frac{1}{x + y}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $x + y$ ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\mu = \exp\left(\int \frac{1}{x+y}\, d(x+y)\right) = \exp(\ln|x+y|)$$

$$= x + y$$

นำไปคูณตลอดสมการโจทย์ จะได้สมการแน่นอนคือ

$$\left[2(x+y)y + \frac{1}{x+y}\right]dx + \left[(3y+x)(x+y) + \frac{1}{x+y}\right]dy = 0$$

หรือ $\left[2xy + 2y^2 + \frac{1}{x+y}\right]dx + \left[4xy + x^2 + 3y^2 + \frac{1}{x+y}\right]dy = 0$

หรือ

$$(2xydx + x^2dy) + (2y^2dx + 4xydy) + \frac{1}{x+y}\, d(x+y) + 3y^2dy = 0$$

$$d(x^2y) + d(2xy^2) + d(\ln|x+y|) + dy^3 = 0$$

อินทิเกรต

$$x^2y + 2xy^2 + \ln|x+y| + y^3 = c$$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

จงแก้สมการข้อ 1 - 10 โดยสังเกตหมู่เทอม

1. $(y + x^3y^2)dx + x\,dy = 0$
2. $(4x^2 + y)dx - x\,dy = 0$
3. $(x^2 + y^2 + y)dx - x\,dy = 0$
4. $y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1 + y^2}$
5. $xy^2(xy' + y) = 1$
6. $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$
7. $y^2dx + (xy + \tan xy)dy = 0$
8. $y(x^2 + y^2 + 1)dx + x(x^2 + y^2 - 1)dy = 0$
9. $y(x^4 - y^2)dx + x(x^4 + y^2)dy = 0$
10. $y(y^2 + 1)dx + x(y^2 - 1)dy = 0$

จงแก้สมการข้อ 11 - 15 โดยหาตัวประกอบอินทิเกรตที่มีรูปแบบที่แน่นอน

il. $(x - y^2) + 2xyy' = 0$
12. $Y + (y^2 - x)y'$
13. [illegible] $+ x(1 - 3x^2y^2)y'$
14. $(3xy + y^2) + (3xy + x^2)y' = 0$
15. $(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + yy' = 0$

คำตอบ

1. $-\frac{1}{xy} + \frac{x^2}{2} = c$

2. $4x - \frac{y}{x}$ 5 c

3. x ⊡ ☐☐♍ $\tan\frac{x}{y}$ ☐ ♍

4. $\sqrt{1 + y^2} = xy + c$

5. $2x^3y^3 - 3x^2 = c$

6. $y^2 = x^2(c - 2y)$

7. $y \sin xy = c$

8. $xy + \arctan\frac{x}{y} = c$

9. $3x^4Y + Y^3 = cx^3$

18. $x(y^2 + 1) = cy$

11. x^{-2} , $Y^2 + x \ln x = cx$

12. Y^{-2} , $y^2 + x = cy$

13. $(xy)^{-3}$, $y^6 = c\exp(-\frac{1}{x^2y^2})$

14. $(x + y)$, $x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$ ☐ ♍

15. $\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$, $(c + 2x)(x^2 + y^2) = 1$

2.4 สมการเชิงเส้น

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือ

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = C(x)$$

โดยการหารตลอดด้วย $A(x)$ จะได้รูปแบบ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad .....(1)$$

ซึ่งเราเลือกให้เป็นรูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง และเราสามารถแก้สมการได้โดยใช้วิธีหาตัวประกอบอินทิเกรต ดังนี้

จาก (1) เขียนใหม่ให้อยู่ในรูป

$$Mdx + Ndy = 0$$

โดย $M = Py - Q$, $N = 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

พิจารณา $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = P(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\mu(x) = \exp\left(\int P(x)dx\right)$$

นำไปคูณตลอดสมการ (1)

$$\exp\left(\int P(x)dx\right)\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = \exp\left(\int P(x)dx\right)Q(x) \qquad .....(2)$$

ซึ่งซ้ายมือของสมการ (2) นี้คือ อนุพันธ์ของ $\exp\left(\int P(x)dx\right)y$

$$\left[\exp\left(\int P(x)dx\right)y\right]' = \left[\exp\left(\int P(x)dx\right)\right]'y + \exp\left(\int P(x)dx\right)y'$$

$$= \exp\left(\int P(x)dx\right)P(x)y + \exp\left(\int P(x)dx\right)y'$$

ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) คือ

$$\exp\left(\int P(x)dx\right)y = \int \exp\left(\int P(x)dx\right)Q(x)dx + c$$

หรือ

$$y = c\exp[-\int P(x)dx] + \exp[-\int P(x)dx]\int \exp(\int P(x)dx)Q(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = x^2$

วิธีทำ จากสมการเชิงเส้นในรูปมาตรฐาน จะพบว่า $P(x) = \dfrac{1}{x}$

ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\exp(\int \dfrac{1}{x}dx) = x$

คูณสมการโจทย์ด้วย x จะได้สมการแน่นอน

$$x(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y) = x^3$$

หรือ $(xy)' = x^3$

อินทิเกรต $xy = \dfrac{x^4}{4} + C$

$$y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y' - 2xy = x \ ; \ y(0) = 1$$

วิธีทำ จากสมการเชิงเส้นในรูปมาตรฐาน จะพบว่า $P(x) = -2x$

ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\exp(-\int 2xdx) = \exp(-x^2)$

คูณสมการโจทย์ด้วย $\exp(-x^2)$ จะได้สมการแน่นอน

$$\exp(-x^2)(y' - 2xy) = x\exp(-x^2)$$

หรือ

$$(y\exp(-x^2))' = x\exp(-x^2)$$

อินทิเกรต

$$y\exp(-x^2) = \int x\exp(-x^2)dx + C$$

$$= -\frac{1}{2}\exp(-x^2) + C$$

$$y = -\frac{1}{2} + c\ \exp(x^2)$$

จาก เงื่อนไข $y(0) = 1$

$$1 = -\frac{1}{2} + C$$

$$c = 3/2$$

ดังนั้นผลเฉลยที่ต้องการคือ

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\exp(x^2)$$

บางครั้งสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ไม่สามารถจัดให้เป็นสมการเชิงเส้น

ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(y)$$

แต่สามารถจัดให้เป็นสมการเชิงเส้นในรูป

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(x)$$

ได้ นั่นคือเป็นเชิงเส้นในรูปตัวแปร x นั่นเอง

จริง ๆ แล้วผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ และ ของ $\frac{dx}{dy} = 1/f(x,y)$

ถูกกำหนดโดยเส้นโค้งชุดเดียวกัน เมื่อฟังก์ชัน f ต่อเนื่อง และไม่เป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $(2e^y - x)y' = 1$

วิธีทำ เขียนใหม่ในรูป $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e^y - x}$

จะพบว่าไม่สามารถเขียนในรูปสมการเชิงเส้นในตัวแปร y ได้ แต่ถ้าพิจารณาใน ตัวแปร x สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dx}{dy} = 2e^y - x$$

หรือ

$$\frac{dx}{dy} + x = 2e^{y} \qquad .....(3)$$

ซึ่งตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\exp(\int dy) = e^{y}$ คูณสมการ (3) จะได้สมการแน่นอน

$$e^{y}\left(\frac{dx}{dy} + x\right) = 2e^{2y}$$

หรือ $(e^{y}x)' = 2e^{2y}$

อินทิเกรต $e^{y}x = e^{2y} + c$

$$x = e^{y} + ce^{-y}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $y\,dx + (3x - xy + 2)dy = 0$

วิธีทำ เขียนใหม่ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{3x - xy + 2}$

นั่นคือ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3x - xy + 2}{-y}$, $y \neq 0$

หรือ $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{(3 - 1)}{y}x = -\dfrac{2}{y}$ $\qquad . . ...(4)$

ซึ่งตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\exp\left(\int \frac{3 - 1}{y}\,dy\right) = \exp(3\ln|y| - y)$$

$$= |y|^{3} e^{-y}$$

ถ้า $y > 0$, ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $y^{3}e^{-y}$

ถ้า $y < 0$, ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $-y^{3}e^{-y}$

แต่ทั้งสองกรณีเมื่อคูณสมการ (4) แล้ว จะได้สมการแน่นอนเดียวกันคือ

$$y^{3}e^{-y}\left(\frac{dx}{dy} + \frac{3 - 1}{y}x\right) = -2y^{2}e^{-y}$$

หรือ $(y^{3}e^{-y}x)' = -2y^{2}e^{-y}$

อินทิเกรต

$$y^3e^{-y}x = -2\int y^2e^{-y}dy + c$$

$$= 2y^2e^{-y} + 4ye^{-y} + 4e^{-y} + c$$

$$xy^3 = 2y^2 + 4y + 4 + ce^y$$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

จงหาผลเฉลยทั่วไป

1. $(x^5 + 3y)dx - x\,dy = 0$
2. $2(2xy + 4y - 3)dx + (x + 2)^2 dy = 0$
3. $y' = x - 2y$
4. $u\,dx + (1 - 3u)x\,du = 3u^2 e^{3u} du$
5. $u\,dx + (1 - 3u)x\,du = 3u\,du$
6. $y' = \csc x - y \cot x$
7. $y' = \dfrac{1}{e^{-y} - x}$

a. $2y(y^2 - x)dy = dx$

คำตอบ

1. $2y = x^5 + cx^3$
2. $Y = 2(x + 2)^{-1} + c(x + 2)^{-4}$
3. $4Y = 2x - 1 + ce^{-2x}$
4. $xu = (u^3 + c)e^{3u}$
5. $xu = ce^{3u} - u - \frac{1}{3}$
6. $y \sin x = x + c$
7. $x = e^{-y}(y + c)$
8. $x - y^2 - 1 + c\exp(-y^2)$

2.5 การเปลี่ยนตัวแปร

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสามารถแก้ได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร หรือแทนค่าซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

1. $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$; .....(1)

เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ และ

$f(ax + by + c)$ เป็นฟังก์ชันของ $ax + by + c$

($ax + by + c$ อยู่ในรูปเชิงเส้นของตัวแปร x และ y)

ตัวอย่างของ $f(ax + by + c)$ เช่น

$$(2x + 3y - 1),\ (2x + 3y - 1)^2,\ \sin(x + y)$$

การแก้สมการทำได้โดยเปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = ax + by + c$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x

$$\frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right)$$

แทนค่า v แล $\frac{dy}{dx}$ ในรูปบแบสมการ (1)

ดังนั้น $\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right) = f(v)$

หรือ $\frac{dv}{dx} = bf(v) + a$

หรือ $\frac{dv}{bf(v) + a} = dx$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบแยกตัวแปร

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปรให้ $v = 4x + y + 1$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x

$$\frac{dv}{dx} = 4 + \frac{dy}{dx}$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 4$

แทนในสมการโจทย์ จะได้

$$\frac{dv}{dx} - 4 = v^2$$

หรือ $\frac{dv}{dx} = 4 + v^2$

ซึ่งแยกตัวแปรได้เป็น $\frac{dv}{4 + v^2} = dx$

อินทิเกรตจะได้ $\frac{1}{2} \text{arc} \tan \frac{v}{2} = x + c$

$$\text{arc} \tan \frac{v}{2} = 2x + c_1 \qquad c_1 = 2c$$

$$v = 2\tan(2x + c_1)$$

แทนค่า v

$$4x + y + 1 = 2\tan(2x + Cl)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $(x + y + 1)y' = 1$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่คือ

$$y' = \frac{1}{x + y + 1} \qquad \ldots(Z)$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $v = x + y + 1$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$

แทนค่า v และ $\frac{dy}{dx}$ ในสมการ (2) จะได้

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{1}{v}$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{1}{v} = \frac{v + 1}{v}$$

ซึ่งแยกตัวแปรได้

$$\left(\frac{v}{v + 1}\right)dv = dx$$

หรือ $\left(1 - \frac{1}{v + 1}\right)dv = dx$

อินทิเกรตจะได้ $v - \ln|v + 1| = x + c$

หรือ $\ln(v + 1) = v - x - c$

$$v + 1 = c_1 e^{v-x}, \quad c_1 = e^{-c}$$

แทนค่า $v = x + y + 1$

$$x + y + 2 = c_1 \exp(y + 1)$$

หรือ $x + y + 2 = c_2 \exp(y), \quad c_2 = c_1 e$

__ตัวอย่างที่ 3__ จงแก้สมการ $(x - y)^2 \frac{dy}{dx} = 4$

__วิธีทำ__ จากโจทย์เขียนใหม่คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(x - y)^2} \qquad \ldots(S)$$

เปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = x - y$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dv}{dx}$

แทนค่า v และ $\frac{dy}{dx}$ ในสมการ (3)

$$1 - \frac{dv}{dx} = \frac{4}{v^2}$$

$$1 - \frac{4}{v^2} = \frac{dv}{dx}$$

หรือ $dx = \frac{v^2}{v^2 - 4} dv$

$$= (1 + \frac{4}{v^2 - 4})dv$$

$$= [1 + (\frac{1}{v - 2} - \frac{1}{v + 2})]dv$$

อินทิเกรตจะได้ $x = v + \ln \left| \frac{v - 2}{v + 2} \right| + c$

แทนค่า $v = x - y$

$$x = x - y + \ln \left| \frac{x - y - 2}{x - y + 2} \right| + c$$

$$y - c = \ln \left| \frac{x - y - 2}{x - y + 2} \right|$$

$$\frac{x - y - 2}{x - y + 2} = c_1 \exp(y)$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $(x + y)(dx - dy) = dx + dy$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่ คือ

$$(x + y - 1)dx = (x + y + 1)dy$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}$ . . ...(4)

เปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

แทนค่า v และ $\frac{dy}{dx}$ ในสมการ (4)

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v - 1}{v + 1}$$

หรือ $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{v + 1}$

$$2dx = \frac{v + 1}{v} dv$$

อินทิเกรตจะได้ $2x = v + \ln|v| + c$

แทนค่า $v = x + y$

$$2X = x + y + \ln|x + y| + c$$

หรือ $x - y - c = \ln|x + y|$

$$x + y = c_1 \exp(x - y)$$

2 . $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ . . ...(5)

โดยที่ $f(\frac{y}{x})$ เป็นฟังก์ชันของ $\frac{y}{x}$ เช่น

$$2(\frac{y}{x}) + 3(\frac{y}{x})$$

$$(\frac{y}{x})^2 - (\frac{y}{x}) + 5$$

$$\frac{y/x}{1 + (y/x)^2}$$

รูปแบบที่ 2 นี้ จะเหมือนกับรูปแบบ

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}),$$ . . ...(6)

a_1, b_1, a_2, b_2 เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ

เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{a_1 + b_1 y/x}{a_2 + b_2 y/x} \right) = f\left(\frac{y}{x} \right)$

ในรูปแบบนี้ เราสามารถแก้สมการได้โดยเปลี่ยนตัวแปรให้ $v = \frac{y}{x}$ หรือ $y = vx$

โดยการหาค่าเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$dy = vdx + xdv$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ และ $\frac{dy}{dx}$ ในรูปแบบที่ 2 ตามสมการ (5)

$$x \frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

หรือ $x \frac{dv}{dx} = f(v) - v$

หรือ $\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{1}{x} dx$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบแยกตัวแปร

สำหรับโจทย์บางข้อ จะเป็นการสะดวกกว่าถ้าจะเปลี่ยนตัวแปรให้ $v = \frac{x}{y}$ หรือ

$x = vy$

หมายเหตุ ตำราหลายเล่มจะเรียกรูปแบบที่ 2 นี้ว่าสมการเอกพันธ์ทั้งนี้เพราะว่า เขานิยามสมการเอกพันธ์ดังนี้

สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ .....(7)

หรือสมการ $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ .....(8)

เรียกว่าสมการเอกพันธ์ ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีเดียวกัน โดยที่ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n ก็ต่อเมื่อ

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ .....(9)

เช่น