$$f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$$

$$f(x,y) = 2y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x,y) = \sin \frac{x}{y}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{x + y}$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2,1,0 และ -1 ตามลำดับ เพราะว่า

$$(\lambda x)^2 - 3(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 - 3xy + y^2)$$

$$2(\lambda y) + \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \lambda(2y + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\sin \frac{\lambda x}{\lambda y} = \sin \frac{x}{y}$$

$$\frac{1}{\lambda x + \lambda y} = \lambda^{-1} \frac{1}{x + y}$$

จากสมการ (9) ถ้า $\lambda = \frac{1}{x}$ จะพบว่า

$$x^n f(1, \frac{y}{x}) = f(x,y) \qquad .....(10)$$

ดังนั้นจากสมการเอกพันธ์ (8)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{x^n M(1,y/x)}{x^n N(1,y/x)}$$

$$= F(y/x)$$

ซึ่งก็รูปแบบเดียวกับสมการ (5) นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $(x + 2y)dx - xdy = 0$

วิธีทำ เนื่องจากเป็นสมการเอกพันธ์ เปลี่ยนตัวแปรให้

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

แทนค่า y และ dy ในโจทย์

$$(x + 2vx)dx - x(vdx + xdv) = 0$$

ถ้า $x \neq 0$ จะได้

$$(1 + 2v)dx - vdx - xdv = 0$$

$$(1 + v)dx - xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v + 1}$$

อินทิเกรตจะได้ $\ln|x| = \ln|v + 1| + \ln c$

$$x = c(v + 1)$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$

$$x = c\left(\frac{y}{x} + 1\right)$$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$

วิธีทำ เขียนสมการใหม่เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3y}{2x} - \frac{x}{2y} \qquad .....(11)$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบที่ 2

เปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{หรือ} \quad y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ และ $\frac{dy}{dx}$ ใน (11)

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3}{2}v - \frac{1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

ซึ่งแยกตัวแปรได้

$$\frac{dx}{x} = \frac{2vdv}{v^2 - 1}$$

อินทิเกรต

$$\ln|x| = \ln|v^2 - 1| + \ln c$$

$$x = c(v^2 - 1)$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$

$$x = c\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)$$

$$x^3 = c(y^2 - x^2)$$

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x + 1)$

วิธีทำ เขียนสมการใหม่เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right) \qquad .....(12)$$

ซึ่งขวามือเป็นฟังก์ชันของ $\frac{y}{x}$ ตามรูปแบบที่ 2 เปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = \frac{y}{x}, \quad \text{หรือ } y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ และ $\frac{dy}{dx}$ ในสมการ (12)

$$v + x\frac{dv}{dx} = v(\ln v + 1)$$

$$x\frac{dv}{dx} = v\ \ln v$$

$$\frac{dv}{v\ \ln v} = \frac{dx}{x} \quad ; \ v \neq 0\ ,\ x \neq 1$$

อินทิเกรต จะได้

$$\ln|\ln|v|| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|v| = cx$$

หรือ $v = e^{cx}$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$

$$y = xe^{cx}$$

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \exp(x/y)}{\exp(x/y)[x.y - 1]}$ .....(13)

วิธีทำ ทางขวามือเป็นฟังก์ชันของ $\frac{y}{x}$ ตามรูปแบบที่ 2 แต่เป็นการสะดวกกว่า ที่จะเปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = \frac{x}{y} \quad \text{หรือ} \quad x = vy$$

$$dx = vdy + ydv$$

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

แทนค่า $v = \frac{x}{y}$ และจาก $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ทำให้สมการ (13) กลายเป็น

$$v + y\frac{dv}{dx} = \frac{\exp(x/y)[x/y-1]}{1 + \exp(x/y)}$$

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{\exp(v)[v - 1]}{1 + \exp(v)}$$

หรือ

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{\exp(v)[v - 1]}{1 + \exp(v)} - v$$

$$= -\frac{v + \exp(v)}{1 + \exp(v)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \exp(v)}{v + \exp(v)}\,dv$$

อินทิเกรตจะได้ $\ln|y| = -\ln|v + \exp(v)| + \ln c$

นั่นคือ $y(v + \exp(v)) = c$

แทนค่า $v = \frac{x}{y}$ จะได้

$$x + y\exp(\frac{x}{y}) = c$$

3. $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad .....(14)$$

a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 และ c_2 เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ ซึ่งขวามือขึ้นกับอัตราส่วนของรูปเชิงเส้น $ax + by + p$ และ $cx + dy + q$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ แล้วสมการ (14) จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้

$$x = u + h$$

$$y = v + k$$

เมื่อ h และ k เป็นค่าคงตัวที่จะต้องถูกกำหนด

ดังนั้น $a_1x + b_1y + c_1 = a_1u + b_1v + a_1h + b_1k + c_1$

$a_1x + b_2y + c_2 = a_2u + b_2v + a_2h + b_2k + c_2$

ถ้าเราเลือก h และ k ซึ่งทำให้

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0 \qquad .....(15)$$

แล้วสมการ (14) จะอยู่ในรูป

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v} \right)$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบที่ 2 หรือสมการเอกพันธ์ เราสามารถแก้สมการได้
และจากสมการ (15) เราสามารถ หาค่า h และ k ได้ เมื่อ

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

แต่ถ้า $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ แล้ว $a_1x + b_2y$ และ $a_2x + b_2y$
จะเป็นสัดส่วนกัน นั่นคือสมการจะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2} \right)$$

หรือ $$\frac{dy}{dx} = f(a_1x + b_1y)$$

ซึ่งก็คือรูปแบบที่ 1 นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $(x + 2y - 4)dx - (2x + y - 5)dy = 0$

วิธีทำ เนื่องจากสมการอยู่ในรูปแบบที่ 3 และ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ดังนั้นแก้สมการ

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$2x + y - 5 = 0$$

จะได้จุดตัดคือ (2, 1) เปลี่ยนตัวแปรให้

$$x = u + 2$$

$$y = v + 1$$

แทนในสมการโจทย์ จะได้

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v} = \frac{1 + 2v/u}{2 + v/u} \qquad .....(16)$$

ซึ่งเป็นรูปแบบที่ 1 ดังนั้นเปลี่ยนตัวแปรให้

$$z = \frac{v}{u} \quad \text{หรือ} \quad v = uz$$

$$dv = udz + zdu$$

$$\frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z$$

แทนค่า $z = \frac{v}{u}$ และ $\frac{dv}{du}$ ในสมการ (16)

$$u\frac{dz}{du} + z = \frac{1 + 2z}{2 + z}$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{1 - z^2}{2 + z}$$

$$\frac{(2 + z)}{1 - z^2}\,dz = \frac{du}{u}$$

โดยแยกเศษส่วนย่อยจะได้ว่า

$$\left(\frac{3}{2(1 - z)} + \frac{1}{2(1 + z)}\right)dz = \frac{du}{u}$$

หรือ $\frac{3dz}{1 - z} + \frac{dz}{1 + z} = 2\,\frac{du}{u}$

อินทิเกรตจะได้ $-3\ln|1 - z| + \ln|1 + z| + \ln c = 2\ln u$

หรือ $u^2(1 - z)^3 = c(1 + z)$

แทนค่า $z = \frac{v}{u}$

$$(u - v)^3 = c(u + v)$$

แต่ $u = x - 2$ และ $v = y - 1$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$(x - y - 1)^3 = c(x + y - 3)$$

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $(2x + 3y - 1)dx + (2x + 3y + 2)dy = 0$

วิธีทำ จากโจทย์สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{2x + 3y - 1}{2x + 3y + z}\right) \qquad .....(17)$$

ซึ่งเป็นรูปแบบที่ 1 ดังนั้นเปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = 2x + 3y$$

$$\frac{dv}{dx} = 2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{dv}{dx} - \frac{2}{3}$$

แทนค่า v และ $\frac{dy}{dx}$ ในสมการ (17)

$$\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} - \frac{2}{3} = -\left(\frac{v - 1}{v + 2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = 2 - 3\,\frac{(v - 1)}{v + 2} = \frac{7 - v}{v + 2}$$

$$\frac{v + 2}{7 - v}\,dv = dx$$

$$\frac{v + 2}{v - 7}\,dv + dx = 0$$

$$\left(1 + \frac{9}{v - 7}\right)dv + dx = 0$$

อินทิเกรตจะได้ $v + 9\ln|v - 7| + x = c$

แทนค่า $v = 2x + 3y$

$$2x + 3y + 9\ln|2x + 3y + 7| + x = c$$

$$x + y + 3\ln|2x + 3y - 7| = c_1$$

จากเงื่อนไข $x = 1,\ y = 3$

$$4 + 3\ln 4 = c_1$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ

$$x + y + 3\ln|2x + 3y - 7| = 4 + 3\ln 4$$

$$x + y - 4 + 3\ln\left[\frac{1}{4}(2x + 3y - 7)\right] = 0$$

4. $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad .....(18)$$

โดยที่ n เป็นค่าคงตัวที่ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม เรียกสมการ (18) ว่าสมการเบอร์นูลลี

กรณีที่ $n = 0$ จะเป็นสมการเชิงเส้น

กรณีที่ $n = 1$ จะแยกตัวแปรได้

ดังนั้น พิจารณากรณี $n \neq 1$ สมการ (18) เขียนได้เป็น

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{n-1} = Q(x) \qquad .....(19)$$

เปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = y^{1-n}$$

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

หรือ $y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{dv}{dx}$

แทนในสมการ (19)

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

หรือ $\dfrac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 11 จงแก้สมการ $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่ได้

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$$

ซึ่งเป็นสมการเบอร์นูลลี, คูณตลอดด้วย y^{-3}

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad .....(20)$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $v = y^{-2}$

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$$

ดังนั้นจากสมการ (20) จะได้

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^2}$$

หรือ $$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = -\frac{2}{x^2} \qquad .....(21)$$

เป็นสมการเชิงเส้น ตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\exp\left(\int -\frac{4}{x}\,dx\right) = x^{-4}$$

นำไปคูณตลอดสมการ (21) จะได้

$$x^{-4}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v\right) = -2x^{-6}$$

หรือ $$(x^{-4}v)' = -2x^{-6}$$

อินทิเกรตจะได้ $$x^{-4}v = \frac{2}{5}x^{-5} + c$$

$$v = \frac{2}{5}x^{-1} + cx^4$$

แต่ $v = y^{-2}$ ดังนั้น

$$y = \left(\frac{2}{5}x^{-1} + cx^4\right)^{-1/2}$$

ตัวอย่างที่ 12 จงแก้สมการ $y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$

วิธีทำ จัดรูปใหม่เป็น

$$\frac{dy}{dx} - \frac{(x+1)}{2x}y = -\frac{3y^3}{x}$$

ซึ่งเป็นสมการเบอร์นูลี , คูณตลอดด้วย y^{-3}

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{(x+1)}{2x}y^{-2} = -\frac{3}{x} \qquad .....(22)$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $v = y^{-2}$

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

หรือ $$y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$$

จากสมการ (22) จะได้

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - \frac{(x+1)}{2x}v = -\frac{3}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{(x+1)}{x}v = \frac{6}{x} \qquad .....(23)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น ตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\exp\left(\int \frac{x+1}{x}dx\right) = \exp(x + \ln x) = xe^x$$

นำไปคูณสมการ (23) จะได้

$$xe^x\left(\frac{dv}{dx} + \frac{x+1}{x}v\right) = 6e^x$$

หรือ $(xe^x v)' = 6e^x$

อินทิเกรต $xe^x v = 6e^x + c$

แต่ $v = y^{-2}$ ดังนั้น

$$xe^x y^{-2} = 6e^x + c$$

$$xe^x = (6e^x + c)y^2$$

ตัวอย่างที่ 13 จงแก้สมการ $6y^2dx - x(2x^3 + y)dy = 0$

วิธีทำ ถ้าเราจัดรูปดูจะพบว่าไม่เป็นสมการเบอร์นูลลี แต่ถ้าให้ x เป็นตัวแปรตาม จะได้รูปแบบสมการเบอร์นูลลี $\left(\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)x^n\right)$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{6y} = \frac{y^{-2}}{3}x^4$$

คูณตลอดด้วย x^{-4} จะได้

$$x^{-4}\frac{dx}{dy} - \frac{x^{-3}}{6y} = \frac{y^{-2}}{3} \qquad .....(24)$$

เปลี่ยนตัวแปรให้

$$v = x^{-3}$$

$$\frac{dv}{dy} = -3x^{-4}\frac{dx}{dy}$$

$$x^{-4}\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{3}\frac{dv}{dy}$$

จากสมการ (24) จะได้

$$-\frac{1}{3}\frac{dv}{dy} - \frac{v}{6y} = \frac{y^{-2}}{3}$$

หรือ $$\frac{dv}{dy} + \frac{v}{2y} = -y^{-2} \qquad .....(25)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น ตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\exp\left(\int \frac{1}{2y}\,dy\right) = y^{1/2}$$

คูณตลอดสมการ (25) จะทำให้ได้

$$y^{1/2}\left(\frac{dv}{dy} + \frac{v}{2y}\right) = -y^{-3/1}$$

หรือ $$(y^{1/2}v)' = -y^{-3/2}$$

อินทิเกรต $$y^{1/2}v = 2y^{-1/2} + c$$

$$v = 2y^{-1} + cy^{-1/2}$$

แต่ $v = x^{-3}$

$$x^{-3} = 2y^{-1} + cy^{-1/2}$$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{2}{y} + \frac{c}{y^{1/2}}$$

คูณตลอดด้วย x^3y

$$y = 2x^3 + cx^3y^{1/2}$$

$$y - 2x^3 = cx^3y^{1/2}$$

$$(y - 2x^3)^2 = c_1x^6y$$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\,f(xy)}{x\,g(xy)}$ .....(26)

หรือ $y\,f(xy)dx + x\,g(xy)dy = 0$ .....(27)

โดยที่ $f(xy)$ และ $g(xy)$ เป็นฟังก์ชันของ xy เช่น

$(xy)^2 + (xy) - 2$

$(xy)\sin(xy) - \cos(xy)$

$(xy) - 1$

มีวิธีการแก้สมการดังนี้

เปลี่ยนตัวแปรให้ $v = xy$

$$\frac{dv}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{y}{x}$$

แทนค่าในสมการ (26)

$$\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y\,f(v)}{x\,g(v)}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2} = \frac{v\,f(v)}{x^2 g(v)}$$

$$x\frac{dv}{dx} - v = v^2\frac{f(v)}{g(v)}$$

$$x\frac{dv}{dx} = v + v^2\frac{f(v)}{g(v)}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v + v^2 f(v)/g(v)}$$

ซึ่งอยู่ในรูปแยกตัวแปร

ตัวอย่างที่ 14 จงแก้สมการ $y(1 + 2xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปรให้ $v = xy$

$$dv = x\,dy + y\,dx$$

$$dy = \frac{1}{x}(dv - y\ dx)$$

แทนในสมการโจทย์

$$\frac{v}{x}(1 + 2v)dx + x(1 - v)\frac{1}{x}(dv - y\ dx) = 0$$

$$v(1 + 2v)dx + x(1 - v)(dv - \frac{v}{x}dx) = 0$$

$$[v(1 + 2v) - v(1 - v)]dx + x(1 - v)dv = 0$$

$$3v^2dx + x(1 - v)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 - v}{3v^2}dv = 0$$

อินทิเกรตจะได้ $\ln x - \frac{1}{3}v^{-1} - \frac{1}{3}\ln v = c$

$$\ln\frac{x^3}{v} = \frac{1}{v} + c_1$$

แทนค่า $v = xy$

$$\ln\frac{x^2}{y} = \frac{1}{xy} + c_1$$

$$\frac{x^2}{y} = c_2\ \exp(1/xy)$$

$$y = c_3x^2\exp(-1/xy)$$

ตัวอย่างที่ 15 จงแก้สมการ $(xy^2 + 2x^2y^3)dx + (x^2y - x^3y^2)dy = 0$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ได้เป็น

$$y(xy + 2x^2y^2)dx + x(xy - x^2y^2)dy = 0 \qquad .....(28)$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $v = xy$

$$dv = x\ dy + y\ dx$$

$$dy = \frac{1}{x}(dv - \frac{v}{x}dx)$$

ทนในสมการ จะได้

$$\frac{v}{x}(v + 2v^2)dx + x(v - v^2)\frac{1}{x}(dv - \frac{v}{x}dx) = 0$$

$$\frac{v}{x}(v + 2v^2)dx + (v - v^2)(dv - \frac{v}{x}dx) = 0$$

$$[\frac{v}{x}(v + 2v^2) - \frac{v}{x}(v - v^2)]dx + (v - v^2)dv = 0$$

$$\frac{3v^3}{x}dx + (v - v^2)dv = 0$$

$$3\frac{dx}{x} + \frac{1 - v}{v^2}dv = 0$$

อินทิเกรตจะได้ $3 \ln x - v^{-1} - \ln v = c$

แทนค่า $v = xy$

$$\ln x^3 - \frac{1}{xy} - \ln xy = c$$

$$\ln (x^2/y) - \frac{1}{xy} = c$$

แบบฝึกหัดที่ 2.5

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{2x + y - 1}$

2. $(x + y)^2 \dfrac{dy}{dx} = 1$

3. $2(x + y)dy = (1 - 3x - 3y)dx$

4. $(x + 2y - 1)dx + 3(x + 2y)dy = 0$

5. $(x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0$

6. $3(3x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

7. $(x - 2y)dx + (2x + y)dy = 0$

8. $ydx = (x + \sqrt{y^2 - x^2})dy$

9. $x \sin(y/x) \dfrac{dy}{dx} = y \sin(y/x) - x$

10. $(10x + 5y)dx + (3x + y)dy = 0$; เส้นโค้งผ่านจุด $(1,-3)$

11. $(y - 2)dx - (x - y - 1)dy = 0$

12. $(x - 4y - 9)dx + (4x + y - 2)dy = 0$

13. $(x + y - 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$

14. $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y + 1}\right)^2$

15. $y' = y - xy^3e^{-2x}$

16. $y' + 2y = y^2e^x$

17. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$

18. $y' = y^4\cos x + y \tan x$

19. $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

20. $(x^2y^2 + xy + 1)ydx + (x^2y^2 - xy + 1)xdy = 0$

21. $y(1 - xy)dx - x(1 + xy)dy = 0$

22. $(xy \sin xy + \cos xy)ydx + (xy \sin xy - \cos xy)xdy = 0$

23. จากสมการริกคาตี (Riccati Equation) ซึ่งมีรูปแบบสมการคือ

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 \qquad .....(*)$$

สมมติว่า $y_1(x)$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการริกคาตี โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

จงแสดงว่าสมการ (*) จะเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นในรูป

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3$$

(จากสมการ (*) จะพบว่า ถ้า $q_3(x) = 0$ จะได้สมการเชิงเส้น และถ้า $q_1(x) = 0$ จะได้สมการเบอร์นูลลี)

24. จงแสดงว่าผลเฉลยเฉพาะที่กำหนด สอดคล้องสมการริกคาตีในข้อนั้น ๆ และใช้ผลจากข้อ 23. หาผลเฉลยทั่วไปด้วย

ก) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \; ; \; y_1(x) = x$

ข) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2 \; ; \; y_1(x) = \frac{1}{x}$

ค) $y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x} \; ; \; y_1(x) = \sin x$

25. พิจารณาสมการริกคาตี ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = Ax^{1/m}$$

ก) ถ้า $m = -4$ จงหาสมการใหม่ เมื่อเปลี่ยนตัวแปรให้ $u = \frac{1}{x}$,

$$v = \frac{1}{2}x - x^2y$$

ข) ถ้า $m = -\frac{4}{3}$ จงหาสมการใหม่ เมื่อเปลี่ยนตัวแปรให้ $u = x^{-1/2}$,

$$v = -\frac{3A}{ab}$$

คำตอบ

1. $2x + y = c\ \exp(y)$

2. $y = \arctan(x + y) + c$

3. $3x + 2y + 2\ \ln|1 - x - y| = c$

4. $x + 3y + c = 3\ \ln|x + 2y + 2|$

5. $(y - x)\exp(y/x) = c$

6. $x^3 = c(9x^2 + y^2)$

7. $\ln(x^2 + y^2) + 4\ \arctan(y/x) = c$

8. $\arcsin(x/y) = \ln|y/c|$

9. $x = c\ \exp[\cos(y/x)]$

10. $y + 3x = (y + 4x)\ln(y + 4x)$

11. $x - 3 = (2 - y)\ln|c(y - 2)|$

12. $\ln[(x - 1)^2 + (y - 1)^2] - 8\ \arctan\dfrac{x - 1}{y + 2} = c$

13. $x + 2y + c = 3\ln|x + y + 2|$

14. $\ln|y + 2| + 2\arctan\dfrac{y + 2}{x - 1} = c$

15. $e^{2x} = y^2 (x^2 + c)$

16. $y(e^x + ce^{2x}) = 1$

17. $y(x + 1)(\ln|x + 1| + c) = 1$

18. $y^{-3} = c \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x$

19. $y^2(c - x) = x^3$

20. $xy - \frac{1}{xy} + \ln(x/y) = c$

21. $\ln(x/y) - xy = c$

22. $(x/y) \sec(xy) = c$

24. ก) $y = x + (c - x)^{-1}$

ข) $y = x^{-1} + 2x(c - x^2)^{-1}$

ค) $y = \sin x + (\cos x - \frac{1}{2} \sin x)^{-1}$

25. ก) $\frac{dv}{du} + av^2 = A$ ข) $\frac{dv}{du} + av^2 + 9Au^{-4}$

2.6 ตัวประกอบอินทิเกรตเพิ่มเติม

มีโจทย์บางประเภทสามารถใช้ตัวประกอบอินทิเกรตที่นอกเหนือจากที่เคยกล่าวแล้วในหัวข้อ 2.3 ดังนี้

1. สมการที่อยู่ในรูป

$$y\,f(xy)dx + x\,g(xy)dy = 0$$

หรือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\,f(xy)}{x\,g(xy)}$

ซึ่งก็คือรูปแบบที่ 5 ของหัวข้อ 2.5 นั่นเอง นอกจากจะแก้สมการโดยเปลี่ยนตัวแปรแล้ว ยังสามารถใช้วิธีหาตัวประกอบอินทิเกรตมาคูณได้ด้วย โดยที่ตัวประกอบอินทิเกรต คือ

$\dfrac{1}{Mx - Ny}$ ถ้า $Mx - Ny \neq 0$

เราสามารถแสดงได้ว่า $\dfrac{y}{Mx - Ny} f(xy)dx + \dfrac{x}{Mx - Ny} g(xy)dy = 0$

เป็นสมการแน่นอน โดยแสดงว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y\,f(xy)}{Mx - Ny}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x\,g(xy)}{Mx - Ny}\right] \qquad .....(1)$$

พิจารณาซ้ายมือของสมการ (1)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y\,f(xy)}{Mx - Ny}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y\,f(xy)}{xy(f(xy) - g(x))}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(xy)}{x(f(xy) - g(xy))}\right]$$

$$= \frac{x^2(f(xy) - g(xy))f' - x^2f(f' - g')}{x^2(f - g)^2}$$

$$= \frac{x^2(fg' - gf')}{x^2(f - g)^2}$$

$$= \frac{fg' - gf'}{(f - g)^2}$$

พิจารณาขวามือของสมการ (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x\,g(xy)}{Mx - Ny}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x\,g(xy)}{xy(f(xy) - g(xy))}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g(xy)}{y(f(xy) - g(xy))}\right]$$

$$= \frac{y^2(f(xy) - g(xy))g' - y^2 g(f' - g')}{y^2(f - g)^2}$$

$$= \frac{fg' - gf'}{(f - g)^2}$$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า $Mx - Ny = 0$

$$\frac{M}{N} = \frac{x}{y}$$

สมการจะอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = -\frac{x}{y}$ ซึ่งแก้สมการได้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงแก้สมการ $y(1 + 2xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $M(x,y) = y(1 + 2xy)$

$N(x,y) = x(1 - xy)$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{xy[1 + 2xy - 1 + xy]}$$

$$= \frac{1}{3x^2y^2}$$

คูณสมการโจทย์จะได้

$$\frac{1}{3x^2y}(1 + 2xy)dx + \frac{1}{3xy^2}(1 - xy)dy = 0$$

หรือ

$$\left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x}\right)dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}\right)dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแน่นอน ดังนั้นจัดกลุ่มได้

$$\frac{2}{3}\ x\ dx - \frac{1}{3Y}\ dy + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2 y}\ dx + \frac{1}{xy^2}\ dy\right) = 0$$

$$\frac{2}{3}\ d(\ln x) - \frac{1}{3}\ d(\ln y) + \frac{1}{3}\ d\left(-\frac{1}{xy}\right) = 0$$

อินทิเกรต

$$\frac{2}{3}\ \ln x - \frac{1}{3}\ \ln y - \frac{1}{3xy} = c$$

$$\ln \frac{x^2}{y} = c_1 + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{x^2}{y} = c_2 \exp(1/xy)$$

$$Y = c_3 x^2 \exp(-1/xy)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $(xy^2 + 2x^2y^3)dx + (x^2y - x^3y^2)dy = 0$

วิธีทำ จากโจทย์สามารถจัดได้ในรูป

$$y(xy + 2x^2y^2)dx + x(xy - x^2y^2dy) = 0 \qquad (2)$$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{xy(xy + 2x^2y^2 - xy + x^2y^2}$$

$$= \frac{1}{3x^3y^3}$$

นำไปคูณสมการ (2)

$$\frac{1}{3x^3y^2}(xy + 2x^2y^2)dx + \frac{1}{3x^2y^3}(xy - x^2y^2)dy = 0$$

หรือ

$$\left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x}\right)dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}\right)dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแน่นอน ดังนั้นจัดกลุ่มได้

$$\frac{2}{x}\,dx - \frac{1}{3y}\,dy + \left(\frac{dx}{x^2y} + \frac{dy}{xy^2}\right) = 0$$

$$2d(\ln x) - d(\ln y) + d\left(-\frac{1}{xy}\right) = 0$$

อินทิเกรตจะได้ $\ln x^2 - \ln y - \frac{1}{xy} = c$

$$\ln(x^2/y) - \frac{1}{xy} = c$$

2. สมการเอกพันธ์ $Mdx + Ndy = 0$ ซึ่ง $Mx + Ny \neq 0$ ตัวประกอบอินทิเกรต คือ $\frac{1}{Mx + Ny}$

สิ่งจำเป็นที่จะแสดงได้ว่าตัวประกอบอินทิเกรตของสมการเอกพันธ์ดังกล่าวคือ $\frac{1}{Mx + Ny}$ ก็คือทฤษฎีบทของออยเลอร์ซึ่งมีใจความดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้า $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n แล้ว

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = nF$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n จากสมการ (10) หัวข้อ 2.5 ดังนั้น

$$F(x,y) = x^n f(y/x) \qquad \text{.....(3)}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x

$$\frac{\partial F}{\partial x} = nx^{n-1}f(y/x) + x^n f'(y/x)(-y/x^2)$$

$$= nx^{n-1}f(y/x) - yx^{n-2}f'(y/x)$$

หาอนุพันธ์สมการ (3) เทียบกับ y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^n f'(y/x)(1/x) = x^{n-1}f'(y/x)$$

เพราะฉะนั้น

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = nx^n f(y/x) - yx^{n-1} f'(y/x) + yx^{n-1} f'(y/x)$$

$$= nx^n f(y/x)$$

$$= nF(x,y)$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{M}{Mx + Ny} dx + \frac{N}{Mx + Ny} dy = 0$ (4)

เป็นสมการแน่นอน

พิจารณา

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{M}{Mx + Ny}\right] = \frac{(Mx + Ny)\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial}{\partial y}(Mx + Ny)}{(Mx + Ny)^2}$$

$$= \frac{(Mx + Ny)\frac{\partial M}{\partial y} - M(x\frac{\partial M}{\partial y} + N + y\frac{\partial N}{\partial y})}{(Mx + Ny)^2}$$

$$= \frac{Ny\frac{\partial M}{\partial y} - MN - My\frac{\partial N}{\partial y}}{(Mx + Ny)^2}$$

พิจารณา

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N}{Mx + Ny}\right] = \frac{(Mx + Ny)\frac{\partial N}{\partial x} - N\frac{\partial}{\partial x}(Mx + Ny)}{(Mx + Ny)^2}$$

$$= \frac{(Mx + Ny)\frac{\partial N}{\partial x} - N(M + x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial x})}{(Mx + Ny)^2}$$

$$= \frac{Mx\frac{\partial N}{\partial x} - MN - Nx\frac{\partial M}{\partial x}}{(Mx + Ny)^2}$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{M}{Mx + Ny}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N}{Mx + Ny}\right]$$

$$= \frac{Ny \frac{\partial M}{\partial y} - My \frac{\partial N}{\partial y} - Mx \frac{\partial N}{\partial x} + Nx \frac{\partial M}{\partial x}}{(Mx + Ny)^2}$$

$$= \frac{N(x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial M}{\partial y}) - M(x \frac{\partial N}{\partial x} + y \frac{\partial N}{\partial y})}{(Mx + Ny)^2}$$

$$= \frac{N(nM) - M(nN)}{(Mx + Ny)^2}$$ โดยใช้ทฤษฎีบทของออยเลอร์

$$= 0$$

แสดงว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{M}{Mx + Ny}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N}{Mx + Ny}\right]$$

นั่นคือ สมการ (4) เป็นสมการแน่นอน

หรือ $\frac{1}{Mx + Ny}$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรต

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า $Mx + Ny = 0$

$$\frac{M}{N} = -\frac{y}{x}$$

สมการจะอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = \frac{y}{x}$ ซึ่งแก้สมการได้

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

และสมการที่ให้เป็นสมการเอกพันธ์ ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{(x^2y - 2xy^2)x - (x^3 - 3x^2y)y}$$

$$= \frac{1}{x^2y^2}$$

คูณตลอดสมการโจทย์ จะได้

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right)dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแน่นอน ดังนั้น

$$\left(\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy\right) - \frac{2}{x}\,dx + \frac{3}{y}\,dy = 0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) - 2d(\ln x) + 3d(\ln y) = 0$$

อินทิเกรตจะได้ $\frac{x}{y} - \ln x^2 + \ln y^3 = \ln c$

หรือ $\frac{x}{y} = \ln(cx^2/y^3)$

$$cx^2/y^3 = \exp(x/y)$$

$$cx^2 = y^3\exp(x/y)$$

3. สมการในรูป

$$x^a y^b\,(Aydx + Bxdy) + x^c y^d(Cydx + Dxdy) = 0 \qquad .....(5)$$

(โดยที่ a,b,A,B,c,d,C,D เป็นค่าคงตัวใด ๆ)

มีตัวประกอบอินทิเกรตเป็นแบบ $x^m y^n$ ถ้า $AD - BC \neq 0$ สามารถแสดงได้ดังนี้

คูณสมการ (5) ด้วย $x^m y^n$ จะได้

$$x^{a+m}y^{b+n}(Aydx + Bxdy) + x^{c+m}y^{d+n}(Cydx + Dxdy) = 0$$

หรือ

$$(Ax^{a+m}y^{b+n+1} + Cx^{c+m}y^{d+n+1})dx + (Bx^{a+m+1}y^{b+n} + Dx^{c+m+1}y^{d+n})dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแน่นอน ดังนั้น

$$M = Ax^{a+m}y^{b+n+1} + Cx^{c+m}y^{d+n+1}$$

$$N = Bx^{a+m+1}y^{b+n} + Dx^{c+m+1}y^{d+n}$$

พิจารณาให้ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

นั่นคือ $A(b + n + 1)x^{a+m}y^{b+n} + C(d + n + 1)x^{c+m}y^{d+n}$

$$= B(a + m + 1)x^{a+m}y^{b+n} + D(c + m + 1)x^{c+m}y^{d+n}$$

โดยการเทียบ ส.ป.ส. ของ $x^{a+m}y^{b+n}$ และ $x^{c+m}y^{d+n}$ จะพบว่า

$$A(b + n + 1) = B(a + m + 1)$$

และ $C(d + n + 1) = D(c + m + 1)$

หรือ $An - Bm = B(a + 1) - A(b + 1)$ .....(6)

และ $Cn - Dm = D(c + 1) - C(d + 1)$ .....(7)

ซึ่งเราสามารถแก้สมการ (6) และ (7) หาค่า m และ n ได้ ถ้า $AD - BC \neq 0$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $(2ydx + 3xdy) + 2xy(3ydx + 4xdy) = 0$

วิธีทำ เขียนสมการใหม่ จะได้

$$(2ydx + 3xdy) + xy(6ydx + 8xdy) = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบตามสมการ (5)

ให้ $x^m y^n$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรต นำไปคูณตลอดจะได้

$$2x^m y^{n+1}dx + 3x^{m+1}y^n dy + 6x^{m+1}y^{n+2}dx + 8x^{m+2}y^{n+1}dy = 0$$

หรือ

$$(2x^m y^{n+1} + 6x^{m+1}y^{n+2})dx + (3x^{m+1}y^n + 8x^{m+2}y^{n+1})dy = 0$$

โดยที่ .....(8)

$$M = 2x^m y^{n+1} + 6x^{m+1}y^{n+2}$$

$$N = 3x^{m+1}y^n + 8x^{m+2}y^{n+1}$$

เนื่องจากเป็นสมการแน่นอน ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

นั่นคือ

$$2(n + 1)x^m y^n + 6(n + 2)x^{m+1}y^{n+1} = 3(m + 1)x^m y^n + 8(m + 2)x^{m+1}y^{n+1}$$

โดยการเทียบ ส.ป.ส.ของ $x^m y^n$ และ $x^{m+1}y^{n+1}$

$$2(n + 1) = 3(m + 1)$$

และ $6(n + 2) = 8(m + 2)$

หรือ $2n - 3m = 1$ .....(9)

และ $6n - 8m = 4$ .....(10)

แก้สมการ (9) และ (10) จะได้

$$m = 1,\ n = 2$$

เพราะฉะนั้น ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $x^m y^n = xy^2$

จากสมการ (8)

$$(2xy^3 + 6x^2y^4)dx + (3x^2y^2 + 8x^3y^3)dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแน่นอน โดยการจัดกลุ่ม

$$(2xy^3dx + 3x^2y^2dy) + (6x^2y^4dx + 8x^3y^3dy) = 0$$

$$d(x^2y^3) + d(2x^3y^4) = 0$$

อินทิเกรตจะได้ $x^2y^3 + 2x^3y^4 = c$

แบบฝึกหัดที่ 2.6

1. $(x^2y^2 + xy + 1)ydx + (x^2y^2 - xy + 1)xdy = 0$

2. $y(1 - xy)dx - x(1 + xy)dy = 0$

3. $(xy \sin xy + \cos xy)ydx + (xy \sin xy - \cos xy)xdy = 0$

4. $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$

5. $xydx - (x^2 + 2y^2)dy = 0$

6. $v^2dx + x(x + v)dv = 0$

7. $v(u^2 + v^2)du - u(u^2 + 2v^2)dv = 0$

8. $x(4ydx + 2xdy) + y^3(3ydx + 5xdy) = 0$

9. $(3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$

10. $(3xy + 2y^2)dx + (4x^2 + 5xy)dy = 0$

คำตอบ

1. $xy - \dfrac{1}{xy} + \ln(x/y) = c$

2. $\ln(x/y) - xy = c$

3. $(x/y)\sec(xy) = c$

4. $y = c\ \exp(-x^3/3y^3)$

5. $x^2 = 4y^2 \ln|y/c|$

6. $xv^2 = c(x + 2v)$

7. $u^2 = 2v^2 \ln|cv^2/u|$

8. $x^4y^2 + x^3y^5 = c$

9. $x^3y + x^2y^2 = c$

10. $x^3y^4 + x^2y^5 = c$

2.7 สมการอันดับสองที่ทำให้เป็นสมการอันดับหนึ่งได้

เราสามารถเขียนสมการอันดับสองในรูป

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0 \qquad .....(1)$$

ก) ถ้าตัวแปรตาม y ไม่ปรากฏในสมการ (1) สมการจะอยู่ในรูป

$$G(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0 \qquad .....(2)$$

โดยการให้ $v = \frac{dy}{dx}$ จะได้ว่า

$$G(x, v, \frac{dv}{dx}) = 0 \qquad .....(3)$$

ถ้าเราสามารถแก้สมการ (3) หา v ได้ จะทำให้ได้ผลเฉลยจาก

$$\frac{dy}{dx} = v(x)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $x\frac{d^2y}{dx^2} = 2[(\frac{dy}{dx})^2 - \frac{dy}{dx}]$ .....(4)

วิธีทำ จะพบว่าตัวแปรตาม y ไม่ปรากฏในสมการ ดังนั้นให้

$$v = \frac{dy}{dx}$$

จากโจทย์จะได้

$$x\frac{dv}{dx} = 2(v^2 - v)$$

ซึ่งอยู่ในรูปแยกตัวแปร

$$\frac{dv}{v^2 - v} = 2\frac{dx}{x}$$

หรือ $(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v})dv = 2\frac{dx}{x}$

อินทิเกรตจะได้ $\ln \left|\frac{v-1}{v}\right| = 2\ln|x| + c_1$

หรือ $\frac{v-1}{v} = cx^2$

ดังนั้น $v = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-cx^2}$

ถ้า c เป็นบวกให้ $c = a^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-a^2x^2}$$

อินทิเกรตจะได้ $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+ax}{1-ax}\right| + c_2$

ถ้า c เป็นลบให้ $c = -b^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+b^2x^2}$$

อินทิเกรตจะได้ $y = \frac{1}{6}\tan^{-1}bx + c_2$

ข) ถ้าตัวแปรอิสระ x ไม่ปรากฏในสมการ (1) สมการจะอยู่ในรูป

$$H\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \qquad .....(3)$$

โดยการให้ $v = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = v\,\frac{dv}{dy}$$

ดังนั้น สมการจะอยู่ในรูป

$$H\left(y,v,v\,\frac{dv}{dy}\right) = 0 \qquad .....(6)$$

ซึ่งเป็นสมการอันดับหนึ่งบนตัวแปร v ถ้าสามารถแก้สมการหา v ได้ จะทำให้ได้ผลเฉลย

จาก $\frac{dy}{dx} = v(x)$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงแก้สมการ $y \frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{dy}{dx})^2 + 2\frac{dy}{dx}$ .....(7)

<u>วิธีทำ</u> จะพบว่าตัวแปรอิสระ x ไม่ปรากฏในสมการ ดังนั้นให้

$$\frac{dy}{dx} = v$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{dv}{dy}$$

จากสมการ (7) จะได้

$$yv\frac{dv}{dy} = v^2 + 2v$$

หรือ $y\frac{dv}{dy} = v + 2$

ซึ่งแยกตัวแปรได้

$$\frac{dv}{v+2} = \frac{dy}{y}$$

อินทิเกรตจะได้ $\ln|v + 2| = \ln|y| + c$

$$v = c_1y - 2$$

แต่ $v = \frac{dy}{dx}$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = c_1y - 2$$

อยู่ในรูปแยกตัวแปร

$$\frac{dy}{c_1y - 2} = dx$$

อินทิเกรตจะได้ $\frac{1}{c_1}\ln|c_1y - 2| = x + c$

$$y = \frac{1}{c_1}(c_2e^{c_1x} + 2)$$

แบบฝึกหัดที่ 2.7

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

1. $2x \dfrac{dy}{dx} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx} \right)^2 + 1$

2. $2x \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx} \right)^2 - 1$

3. $\left(\dfrac{dy}{dx} - x \right) \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y^{-3} = 0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx} \right)^3 = 0$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + e^{-y} \dfrac{dy}{dx} = 0$

คำตอบ

1. $y = \pm\frac{2}{3c_1}(c_1x - 1)^{3/2} + c_2$

2. $y = -x - \frac{2}{c_2}\ln|c_1x - 1| + c_2$

3. $y = \frac{x^2}{2} \pm \{\frac{x}{2}(x^2 + c_1)^{1/2} + \frac{c_1}{2}\ln|x + (x^2 + c_1)^{1/2}\} + c_2$

4. $y = \pm[c_1(x + c_2)^2 - c_1]^{1/2}$

5. $y = \pm(2x + c_2)^{1/2} + c_1$

6. $y = \ln\left(\frac{c_2e^{c_1} - 1}{c_1}\right)$