บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความหมาย

สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ ซึ่งอาจเขียนในรูปเชิงอนุพันธ์ก็ได้

ตัวอย่างที่ 1 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' + 2xy = 0 \qquad .....(1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \qquad .....(2)$$

$$x\,dy = (1 - y)dx \qquad .....(3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \qquad .....(4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad .....(5)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf \qquad .....(6)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad ....(7)$$

สมการ (1) - (4) เกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ หรือเรียกสั้น ๆ ว่าสมการเชิงอนุพันธ์

ส่วนสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระหลายตัวเรียกว่า <u>สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย</u> ดังตัวอย่างในสมการ (5) - (7) ซึ่งในหนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึงเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้น

อันดับ ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ

จากตัวอย่างที่ 1 สมการ (1),(3),(6) เป็นสมการอันดับหนึ่ง

สมการ (2),(4),(5),(7) เป็นสมการอันดับสอง

ผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ และตัวแปรซึ่งไม่อยู่ในรูปอนุพันธ์ และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า $y = ce^{2x}$, c เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ เป็นผลเฉลยของสมการ $y' - 2y = 0$

วิธีทำ จาก $y = cx^{2x}$

$$y' = 2ce^{2x}$$

ดังนั้น $y' - 2y = 2ce^{2x} - 2ce^{2x} = 0$

จะพบว่า $y = ce^{2x}$, สอดคล้องกับสมการ $y' - 2y = 0$

จึงเป็นผลเฉลยของสมการ $y' - 2y = 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $y = c_1\cos kx + c_2\sin kx$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$$

วิธีทำ จาก $y = c_1\cos kx + c_2\sin kx$

$$\frac{dy}{dx} = -c_1k\sin kx + c_2k\cos kx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c_1k^2\cos kx - c_2k^2\sin kx$$

ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = -c_1k^2\cos kx - c_2k^2\sin k +$

$$k^2(c_1\cos kx + c_2\sin kx) = 0$$

แสดงว่า $y = c_1\cos kx + c_2\sin kx$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$$

ผลเฉลยที่ติดค่าคงตัวตามใจชอบ (ดังตัวอย่างที่ 2 และที่ 3) เรียกว่า**ผลเฉลยทั่วไป** ส่วนผลเฉลยที่ไม่มีค่าคงตัวตามใจชอบปรากฏอยู่เรียกว่า**ผลเฉลยเฉพาะ** ซึ่งหาได้จากผลเฉลยทั่วไปโดยการแทนค่า c บางค่าลงไป โดยที่ค่า c อาจหาได้จากข้อมูลที่กำหนดให้ในรูปของเงื่อนไขเริ่มต้น หรือเงื่อนไขขอบเขต

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยเฉพาะ จากผลเฉลยทั่วไป $y = ce^{2x}$ กำหนดเงื่อนไขคือ $x = 0,\ y = 3$

วิธีทำ จาก $y = ce^{2x}$

ถ้า $x = 0,\ y = 3$ ทำให้ได้

$3 = c$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $y = 3e^{2x}$

หมายเหตุ เงื่อนไข $x = 0,\ y = 3$ อาจจะเขียนในรูป $y(0) = 3$

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่า $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ และจงหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อกำหนดให้ $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

วิธีทำ จาก $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$

$$\frac{dy}{dx} = -3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9c_1e^{-3x} + 4c_2e^{2x}$$

ดังนั้น
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 9c_1e^{-3x} + 4c_2e^{2x} + (-3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x}) - 6(c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}) = 0$$

แสดงว่า $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

จากเงื่อนไข $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 2$

7 3 x - h $c_1 + c_2 = 1$

และ $-3c_1 + 2c_2 = 2$

ซึ่งแก้สมการหา c_1 และ c_2 ได้ 3

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = 0$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = 1$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $y = e^{2x}$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงบอกว่าข้อใดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อใดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย พร้อมทั้งบอกอันดับของสมการด้วย

   1.1 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$

   1.2 $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

   1.3 YY'' □ ☒

   1.4 $L\frac{di}{dt} + Ri = E$

   1.5 $y''' - 3y' + 2y = 0$

   1.6 $(\frac{d^3w}{dx^3})^2 - 2(\frac{dw}{dx})^4 + yw = 0$

   1.7 $x(y'')^3 + (y')^4 - y = 0$

   1.8 $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

   1.9 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

   1.10 $a\,da + b\,db = 0$

2. จงแสดงว่า $\sin kx$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการในข้อ 1.1

3. จงแสดงว่า $\frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการในข้อ 1.3 เมื่อ $x > 0$

4. จงแสดงว่า e^{-2x} เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการในข้อ 1.5

5. จงแสดงว่า $3e^{-2x} + 4e^{x}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการในข้อ 1.5

6. จงแสดงว่า $J_0(x)$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ $xy'' + y' + xy = 0$ เมื่อ $J_0(x)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซล ซึ่งกำหนดโดย

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

คำตอบ

1.

ข้อ 1.8 และ 1.9 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ส่วนข้ออื่น ๆ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

ข้อ 1.2, 1.4, 1.10 เป็นสมการอันดับหนึ่ง

ข้อ 1.1, 1.3, 1.7, 1.8, 1.9 เป็นสมการอันดับสอง

ข้อ 1.5, 1.6 เป็นสมการอันดับสอง

1.2 การกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบ

เราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับค่าคงตัวตามใจชอบ (นั่นคือกำหนดผลเฉลยทั่วไปให้) โดยการกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบเหล่านั้น จะเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ได้ ซึ่งอันดับของสมการที่จะสร้างขึ้นต้องเท่ากับจำนวนของค่าคงตัวตามใจชอบ

ตัวอย่างที่ 1 จงกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบจากความสัมพันธ์

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} \qquad .....(1)$$

วิธีทำ เนื่องจากมีค่าคงตัวตามใจชอบสองตัว เราจะได้สมการอันดับสอง

$$y' = -2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x} \qquad .....(2)$$

$$y'' = 4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{3x} \qquad .....(3)$$

โดยกำจัด c_1 จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$$y' + 2y = 5c_2e^{3x}$$

และกำจัด e_1 จากสมการ (2) และ (3) จะได้

$$y'' + 2y' = 15c_2e^{3x}$$

ดังนั้น

$$y'' + 2y' = 3(y' + 2y)$$

หรือ

$$y'' - y' - 6y = 0$$

จากสมการ (1),(2) และ (3) เราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

เราทราบว่าระบบสมการ (1),(2) และ (3) หาผลเฉลยของตัวไม่ทราบค่า (c_1 และ c_2) ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{vmatrix} -y & e^{-2x} & e^{3x} \\ -y' & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ -y'' & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

โดยสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ จะได้

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & -2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

ซึ่งผลที่ได้ก็คือสมการ

$$y'' - y' - 6y = 0$$

ตัวอย่างที่ 2 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์จากสมการ $(x - a)^2 + y^2 = a^2$

วิธีทำ โดยการหาอนุพันธ์ทั้งสมการ จะได้ $2(x - a) + 2yy' = 0$

นั่นคือ $a = x + yy'$

แทนค่า a ในสมการโจทย์

$$(x - (x + yy'))^2 + y^2 = (x + yy')^2$$

$$(yy')^2 + y^2 = (x + yy')^2$$

หรือ $y^2 = x^2 + 2xyy'$

ซึ่งเขียนในรูปเชิงอนุพันธ์คือ

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

อีกวิธีหนึ่งที่สามารถทำได้คือ

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

เขียนใหม่เป็น

$x^2 + y^2 -$ [illegible]

หรือ

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = 2a$$

หาอนุพันธ์ทั้งสมการ

$$\frac{x(2xdx + 2ydy) - (x^2 + y^2)dx}{x^2} = 0$$

หรือ $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงกำจัด A และ α จากความสัมพันธ์

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad \ldots(4)$$

โดยที่ ω เป็นตัวพารามิเตอร์ซึ่งไม่ต้องกำจัด

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ x เทียบกับ t

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \alpha) \qquad \ldots(5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha) \qquad \ldots(6)$$

จากสมการ (4) และ (6) จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

ตัวอย่างที่ 4 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์จากความสัมพันธ์ $cxy + c^2x + 4 = 0$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ทั้งสมการ

$$c(xy' + y) + c^2 = 0$$

เนื่องจาก $c \neq 0$

$$c = -(xy' + y)$$

แทนค่า c ในสมการโจทย์จะได้

$$-(xy' + y)xy + (xy' + y)^2x + 4 = 0$$

$$-x^2yy' - xy^2 + x^3(y')^2 + 2x^2yy' + xy^2 + 4 = 0$$

$$x^3(y')^2 + x^2yy' + 4 = 0$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n จะประกอบด้วยค่าคงตัวตามใจชอบ n ค่า

แบบฝึกหัดที่ 1.2

จงกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบ

1. $x^3 - 3x^2 y = c$

2. $y \sin x - xy^2 = c$

3. $x^2 y = 1 + cx$

4. $x = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$; w เป็นตัวพารามิเตอร์

5. $y = mx + \frac{h}{m}$; h เป็นตัวพารามิเตอร์

6. $y = ax^2 + bx + c$

7. $y = c_1 + c_2 e^{-4x}$

8. $y = x^2 + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

9. $y = c_1 e^{2x} \cos 3X + c_2 e^{2x} \sin 3x$

10. $y = c_1 x + c_2 e^x$

คำตอบ

1. $(x - 2y)dx + xdy = 0$

2. $y(\cos x - y)dx + (\sin x - 2xy)dy = 0$

3. $(x^2y + 1)dx + x^3dy = 0$

4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$

5. $y = xy' + \dfrac{h}{y'}$

6. $y''' = 0$

7. $Y'' + 4Y' = 0$

8. $Y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$

9. $Y'' - 4y' + 13y = 0$

10. $(x - 1)y'' + xy' + y = 0$