ภาคผนวก

1. เทคนิคของการอินทิเกรต
(Technique of integration)

การอินทิเกรตที่ได้ศึกษามาแล้วในแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เป็นการอินทิเกรตได้โดยตรงโดยการใช้สูตร แต่ในบทนี้จะได้กล่าวถึงเทคนิคของการอินทิเกรตแบบต่าง ๆ อันได้แก่ การอินทิเกรตโดยการแทนค่า การอินทิเกรตโดยการแยกส่วน การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณในรูป $\sin^n x \ \cos^m x$ การอินทิเกรตโดยใช้การแทนค่าฟังก์ชันตรีโกณ การอินทิเกรตทีละส่วนเป็นต้น อย่างไรก็ตามในการอินทิเกรตยังจำเป็นต้องใช้สูตรต่าง ๆ ที่เคยศึกษามาแล้ว ซึ่งสูตรที่ควรทราบมีดังนี้

1. ฟังก์ชันพีชคณิต

$$\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$$

$$\int cu\,dx = c\int u\,dx$$

2. ฟังก์ชันในรูปยกกำลัง

$$\int u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \operatorname{cosec} u \cot u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$$

4. **ฟังก์ชันตรีโกณผกผัน**

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} u + C \\ -\cos^{-1} u + C \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \tan^{-1} u \\ \cot^{-1} u \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \sec^{-1} u + C \\ -\operatorname{cosec}^{-1} u + C \end{cases}$$

5. **ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก**

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{cosech} u \coth u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$$

6. **ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน**

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \sinh^{-1} u + C = \ln (u + \sqrt{1+u^2}) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u + C = \ln (u + \sqrt{u^2-1}) + C$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \tanh^{-1} u + C, & |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + C, & |u| > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{sech}^{-1} |u| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\operatorname{cosech}^{-1} |u| + C$$

1.1 การอินทิเกรตโดยการแทนค่า

ปัญหาของการอินทิเกรต คือ ตัวถูกอินทิเกรตไม่ได้อยู่ในรูปที่สามารถอินทิเกต ได้ดังข้างต้น วิธีการแทนค่าเป็นวิธีหนึ่งซึ่งช่วยในการแก้ปัญหา การอินทิเกรต ซึ่งในการแทนค่าเราจะสมมติตัวที่ยุ่งยากหรือกลุ่มที่ทำให้มีปัญหาในการอินทิเกรตแทนด้วย u แล้วเปลี่ยน $\int f(x)\, dx$ ในรูป $\int g(u)\, du$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง **จงหาค่าของ** $\int x(x^2+3)^4 dx$

แนวคิด จะเห็นว่า มี 2 กลุ่ม คือ x กับ $(x^2+3)^4$ ถ้าเราสมมติ $u = x$ แล้ว ตัวถูกอินทิเกรตยังยุ่งยากเหมือนเดิม แต่ถ้าสมมติ $u = x^2+3$ จะสามารถหาค่าอินทิเกรตได้โดยง่าย

วิธีทำ ให้ $u = x^2+3$

$du = 2x\,dx$

แทนค่าจะได้

$$\int x.(x^2+3)^4\,dx = \int u^4 \frac{1}{2}du$$
$$= \frac{1}{2}\frac{u^5}{5}+C$$
$$= \frac{1}{10}(x^2+3)^5+C$$

ตัวอย่าง **จงหาค่าของ** $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

แนวคิด เราควรสมมติ $u = x+1$ เพื่อสะดวกในการหาค่า

ให้ $u = x+1, x = u-1$

$du = dx$

แทนค่าจะได้

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\,du$$
$$= \int (u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}})\,du$$
$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$

แนวคิด ถ้าจะสมมติ $u = e^{2x}$ หรือ $u = e^{-2x}$ เมื่อแทนค่าจะไม่สะดวก แต่ถ้าสมมติ $u = e^{2x}+e^{-2x}$ จะเห็นว่าอนุพันธ์ของ u มีส่วนที่สอดคล้องกับเศษ จึงทำให้การอินทิเกรตง่ายขึ้น

วิธีทำ ให้

$$u = e^{2x}+e^{-2x}$$
$$du = 2(e^{2x}-e^{-2x})dx$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้

$$\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$
$$= \frac{1}{2}\ell n\,|u|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ell n\,|e^{2x}+e^{-2x}| + C$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \frac{\sin^2\sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$

แนวคิด ควรสมมติ $u = \sin\sqrt{x}$ เพราะว่าเมื่อเขียนในรูปผลต่างเชิงอนุพันธ์ (differential) พบว่ามีรูปที่เป็น $\cos\sqrt{x}$ อยู่ด้วย จึงทำให้สะดวกในการอินทิเกรต

วิธีทำ ให้

$$u = \sin\sqrt{x}$$

$$du = \cos\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\cos\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}} = 2\, du$

แทนค่าจะได้

$$\int \frac{\sin^2\sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}} = \int u^2(2du)$$

$$= 2\int u^2 du$$

$$= \frac{2u^3}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3}(\sin\sqrt{x})^3 + C$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3\sqrt{x} + C$$

1.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การอินทิเกรตของฟังก์ชันตรีโกณที่กล่าวในแคลคูลัส 1 เป็นเพียงการอินทิเกรตโดยใช้สูตรเบื้องต้นเท่านั้น แต่ในตอนนี้จะได้กล่าวถึงเทคนิคในการแก้ปัญหาของฟังก์ชันตรีโกณแบบต่าง ๆ ดังนี้

(1) ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป $\sin mx \cos nx$, $\sin mx \sin nx$, $\cos mx \cos nx$ นั่นคือต้องการหาค่า $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$

การอินทิเกรตข้างต้นทำได้โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\ \sin (m-n)x + \sin (m+n)x$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\cos (m-n)x - \cos (m+n)x$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\cos (m-n)x + \cos (m+n)x$$

แล้วเราจะหาค่าอินทิกรัลได้ทันทีเพราะอยู่ในรูปที่ใช้สูตรพื้นฐานได้แล้ว

หมายเหตุ ความสัมพันธ์ที่เป็นสูตร 3 สูตรข้างบน พิสูจน์ได้ จากสูตรตรีโกณ

$$\sin (mx+nx) = \sin mx \cos nx + \cos mx \sin nx$$

$$\cos (mx+nx) = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$

แนวคิด ใช้ความสัมพันธ์ $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} \quad \sin (m-n)x + \sin (m+n)x$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\int \sin 2x \cos 3x\, dx &= \frac{1}{2}\int \quad \sin(-x) + \sin 5x \quad dx \\
&= \frac{1}{2}\int (-\sin x + \sin 5x)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \quad -\int \sin x dx + \int \sin 5x\, dx \\
&= \frac{1}{2}(\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x) + C \\
&= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \cos 4x \cos 5x\, dx$

แนวคิด ใช้ความสัมพันธ์ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \quad \cos (m-n)x + \cos (m+n)x$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\int \cos 4x \cos 5x\, dx &= \frac{1}{2}\int \quad \cos(-x) + \cos 9x + \quad dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 9x)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \quad \int \cos x\, dx + \int \cos 9x\, dx \\
&= \frac{1}{2}(\sin x + \frac{1}{9}\sin 9x) + C \\
&= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{18}\sin 9x + C
\end{aligned}
$$

(2) ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป $\sin^m x \cdot \cos^n x$

นั่นคือ $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$

สำหรับการอินทิเกรตฟังก์ชันแบบนี้จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 : m หรือ n ตัวใดตัวหนึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นเลขคี่

สมมติ m เป็นเลขคี่

โดยอาศัยความสัมพันธ์ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\sin^m x &= \sin^{m-1} x \quad \sin x \\
&= (1-\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \sin x
\end{aligned}
$$

และเทอมที่เหลือคือ $\sin x\, dx$ เปลี่ยนได้เป็น $-d \cos x$ ซึ่งอยู่ในรูป $\cos x$ ทั้งหมดจึงสามารถอินทิเกรตได้โดยง่าย

หมายเหตุ สำหรับกรณี n เป็นเลขคี่ก็ใช้วิธีการอันเดียวกัน

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \sin^3x \cos^2x\,dx$

แนวคิด แยก $\sin^3x$ เป็น $(\sin^2x)(\sin x)$ และเปลี่ยน $\sin^2x$ เป็นรูป $\cos x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sin^3x \cos^2x\,dx &= \int \sin x(\sin^2x)\cos^2x\,dx \\ &= \int (1-\cos^2x)\cos^2x \sin x\,dx \\ &= -\int (\cos^2x-\cos^4x)d\cos x \\ &= -\int \cos^2x\,d\cos x + \int \cos^4x\,d\cos x \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3x + \frac{1}{5}\cos^5x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \cos^5x\,dx$

แนวคิด แยก $\cos^5x$ เป็น $\cos^4x$ กับ $\cos x$ แล้วเปลี่ยน $\cos^4x$ ในรูป $\sin x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \cos^5x\,dx &= \int \cos^4x \cos x\,dx \\ &= \int (1-\sin^2x)^2\,d(\sin x) \\ &= \int (1-2\sin^2x+\sin^4x)\,d(\sin x) \\ &= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x+C\end{aligned}$$

วิธีการข้างต้นแก้ปัญหาได้เสมอสำหรับฟังก์ชันที่มีกำลังตัวใดตัวหนึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นเลขคี่โดยไม่คำนึงว่าอีกตัวจะเป็นบวก ลบ หรือเศษส่วนก็ตาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \sin^{\frac{2}{5}}x\cos^3x\,dx$

แนวคิด แยก $\cos^3x$ เป็น $\cos^2x$ กับ $\cos x$ แล้วเปลี่ยน $\cos^2x$ ในรูป $\sin x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sin^{\frac{2}{5}}x\cdot\cos^3x\,dx &= \int \sin^{\frac{2}{5}} \cos^2x \cos x\,dx \\ &= \int \sin^{\frac{2}{5}}x(1-\sin^2x)\,d(\sin x) \\ &= \int (\sin^{\frac{2}{5}}x-\sin^{\frac{12}{5}}x)\,d(\sin x) \\ &= \frac{5}{7}\sin^{\frac{7}{5}}x - \frac{5}{17}\sin^{\frac{17}{5}}x+C\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 : เมื่อทั้ง m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นเลขคู่ หรือศูนย์ การแก้ปัญหาต้องใช้สูตรมุมครึ่งช่วยเพื่อลดกำลังลงมา

$$\sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \sin^2 3x \ \cos^2 3x \ dx$

แนวคิด ใช้สูตรมุมครึ่ง

$$\sin^2 3x = \frac{1-\cos 6x}{2}$$

$$\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 3x \ \cos^2 3x \, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 6x) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-\frac{1+\cos 12x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 12x) dx \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin 12x + C
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต ตัวอย่าง 1.12 ทำได้อีกวิธีหนึ่งโดยใช้ความสัมพันธ์

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 3x \ \cos^2 3x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2}\sin 6x\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \sin^2 6x \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 12x}{2} dx \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin 12x + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \sin^4 x \, dx$

แนวคิด ใช้สูตรมุมครึ่งลดกำลังของ $\sin^4 x = \frac{(1-\cos 2x)^2}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1-2\cos 2x+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int (3-4\cos 2x+\cos 4x) dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

(3) ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป $\tan^m x \sec^n x$

นั่นคือ $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง $\tan x$ กับ $\sec x$ ช่วยในการแก้ปัญหาคือ

$$1+\tan^2 x = \sec^2 x$$

หรือ $$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

ซึ่งแยกพิจารณาได้เป็น 2 กรณีเช่นเดียวกัน

กรณีที่ 1 : กำลังของ $\sec x$ เป็นเลขคู่

กรณีนี้เราแยก $\sec^2 x$ ออกมาแล้วเปลี่ยนที่เหลือทั้งหมดเป็นรูป $\tan x$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$

แนวคิด แยก $\sec^2 x$ ออกมา แล้วเปลี่ยน $\sec^4 x$ เป็นรูป $\tan x$ แล้วอาศัยความจริงที่ว่า

$$\sec^2 x \, dx = d(\tan x)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x \cdot \sec^6 x \, dx &= \int \tan^4 x \ \sec^4 x \ \sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^4 x (1+\tan^2 x)^2 \, d(\tan x) \\
&= \int \tan^4 x (1+2\tan^2 x+\tan^4 x) \, d(\tan x) \\
&= \int (\tan^4 x+2\tan^6 x+\tan^8 x) \, d(\tan x) \\
&= \frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{2}{7}\tan^7 x+\frac{1}{9}\tan^9 x+C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \sec^8 x \, dx$

แนวคิด แยก $\sec^8 x$ ออกเป็น $\sec^6 x$ กับ $\sec^2 x$ แล้วเปลี่ยน $\sec^6 x$ ในรูปของ $\tan x$

วิธีทำ โดยใช้สูตรผลบวกกำลังสามช่วย

$$\begin{aligned}
\int \sec^8 x \, dx &= \int \sec^6 x \quad \sec^2 x \, dx \\
&= \int (1+\tan^2 x)^3 \, d(\tan x) \\
&= \int (1+3\tan^2 x-3\tan^4 x+\tan^6 x) \, d(\tan x) \\
&= \tan x+\tan^3 x+\frac{3}{5}\tan^5 x+\frac{1}{7}\tan^7 x+C
\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 : กำลังของ $\tan x$ เป็นเลขคี่ ให้จัดรูป $\sec x \tan x$ ไว้ ส่วนที่เหลือเปลี่ยนเป็นรูป $\sec x$ ทั้งหมด เช่น

$$\begin{aligned}
\frac{\tan^3 x}{\sqrt[3]{\sec x}} &= \sec^{-\frac{1}{3}} x \tan^3 x \\
&= \sec^{-\frac{4}{3}} x(\sec^2 x-1) \sec x \tan x
\end{aligned}$$

และใช้ความจริงที่ว่า $\sec x \tan x\, dx = d(\sec x)$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \tan^3 x \sqrt{\sec x}\, dx$

แนวคิด จัดให้มีกลุ่ม $\sec x \tan x$ แล้วที่เหลือเปลี่ยนเป็นรูป $\sec x$ ทั้งหมด

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sqrt{\sec x}\, dx &= \int \tan x(\sec^2 x - 1)\sqrt{\sec x}\, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1) \frac{1}{\sec^{\frac{1}{2}} x} \sec x \cdot \tan x\, dx \\
&= \int (\sec^{\frac{3}{2}} x - \sec^{-\frac{1}{2}} x)\, d(\sec x) \\
&= \frac{2}{5} \sec^{\frac{5}{2}} x - 2\sec^{\frac{1}{2}} x + C
\end{aligned}$$

หมายเหตุ $\int \tan x\, dx = -\ell n|\cos x| + C$

(4) ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป $\cot^m x \operatorname{cosec}^n x$

นั่นคือ $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x\, dx$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง $\cot x$ กับ $\operatorname{cosec} x$ ช่วยในการแก้ปัญหา คือ

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

หรือ

$$\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

ซึ่งใช้วิธีการแบบเดียวกันกับ $\tan^m x \sec^n x$ ในการแก้ปัญหาโจทย์

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^3 x\, dx$

แนวคิด จัดอยู่ในรูป $\cot x \operatorname{cosec} x$ แล้วเปลี่ยนที่เหลือในรูป $\operatorname{cosec} x$ และใช้ความจริงที่ว่า

$$d \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x\, dx$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^3 x\, dx &= \int \cot^4 x \operatorname{cosec}^2 x(\cot x \operatorname{cosec} x)dx \\
&= -\int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)^2 \operatorname{cosec}^2 x\, d(\operatorname{cosec} x) \\
&= -\int (-\operatorname{cosec}^4 x - 2\operatorname{cosec}^2 x + 1)\operatorname{cosec}^2 x\, d(\operatorname{cosec} x) \\
&= -\int (\operatorname{cosec}^6 x - 2\operatorname{cosec}^4 x + \operatorname{cosec}^2 x)\, d(\operatorname{cosec} x) \\
&= -\left[\frac{\operatorname{cosec}^7 x}{7} - \frac{2 \operatorname{cosec}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{cosec}^3 x}{3}\right] + C \\
&= -\frac{1}{7}\operatorname{cosec}^7 x + \frac{2}{5}\operatorname{cosec}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C
\end{aligned}$$

อย่างไรก็ตาม การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณในแบบอื่น ๆ ที่นอกเหนือจากที่กล่าวมาแล้วต้องใช้เทคนิคอย่างอื่น ๆ ดังจะได้กล่าวต่อไป

1.3 การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิตที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายราก จะสามารถอาศัยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณในการแก้ปัญหาเพื่อฟังก์ชันอยู่ในรูปต่อไปนี้

(1) $\sqrt{a^2-u^2}$

(2) $\sqrt{a^2+u^2}$

(3) $\sqrt{u^2-a^2}$

แบบที่ 1 $\sqrt{a^2-u^2}$ ให้สมมติ $u = a\sin\theta$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-u^2} &= \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\\ &= a\sqrt{1-\sin^2\theta}\\ &= a\cos\theta\end{aligned}$$

แบบที่ 2 $\sqrt{a^2+u^2}$ ให้สมมติ $u = a\tan\theta$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+u^2} &= \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}\\ &= a\sqrt{1+\tan^2\theta}\\ &= a\sec\theta\end{aligned}$$

แบบที่ 3 $\sqrt{u^2-a^2}$ ให้สมมติ $u = a\sec\theta$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sqrt{u^2-a^2} &= \sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}\\ &= a\sqrt{\sec^2\theta-1}\\ &= a\tan\theta\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

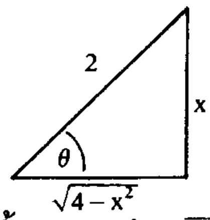
แนวคิด พิจารณาภายใต้เครื่องหมายราก คือ $4-x^2$ หรือ 2^2-x^2 ดังนั้น จึงควรสมมติ $x = 2\sin\theta$

วิธีทำ ให้
$$\begin{aligned}x &= 2\sin\theta\\ dx &= 2\cos\theta\, d\theta\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx &= \int 8\sin^3\theta\,(\sqrt{4-4\sin^2\theta})(2\cos\theta\, d\theta)\\ &= \int 8\sin^3\theta(4\cos^2\theta)d\theta\\ &= 32\int \sin^3\theta\cdot\cos^2\theta\, d\theta\\ &= 32\int \sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\, d\theta\end{aligned}$$

$$= 32\int (1-\cos^2\theta)\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$$
$$= -32\int (\cos^2\theta - \cos^4\theta)\, d(\cos\theta)$$
$$= -\frac{32}{3}\cos^3\theta + \frac{32}{5}\cos^5\theta + C$$

จาก $\quad x = 2\sin\theta$ ดังนั้น



จากรูป $\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

ดังนั้น $\quad \int x^3\sqrt{4-x^2} = -\frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 + \frac{32}{5}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^5 + C$

$$= -\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} + C$$

หมายเหตุ การหาค่า $\cos\theta$ ในตัวอย่าง 1.18 อาจหาจากสูตร

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ ก็ได้

นั่นคือ $\quad \cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

แนวคิด พิจารณา $\sqrt{1+x^2}$ พบว่าอยู่ในรูปแบบ $\sqrt{a^2+u^2}$ ดังนั้น ควรสมมติ $x = \tan\theta$

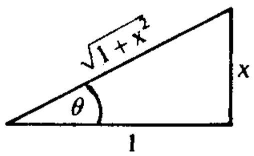
วิธีทำ ให้ $\quad x = \tan\theta$

$\quad dx = \sec^2\theta\, d\theta$

ดังนั้น $\quad \int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \tan^3\theta \sqrt{1+\tan^2\theta}\,(\sec^2\theta\, d\theta)$

$$= \int \tan^3\theta \cdot \sec^3\theta\, d\theta$$
$$= \int \tan^2\theta \sec^2\theta(\sec\theta \tan\theta\, d\theta)$$
$$= \int (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta\, d(\sec\theta)$$
$$= \int (\sec^4\theta - \sec^2\theta)\, d(\sec\theta)$$
$$= \frac{1}{5}\sec^5\theta - \frac{1}{3}\sec^3\theta + C$$

จาก $\quad x = \tan\theta$ ดังนั้น



เพราะว่า $\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ดังนั้น $\quad \sec\theta = \sqrt{1+x^2}$

เพราะฉะนั้น $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

1.4 การอินทิเกรตโดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ก่อน

แบบนี้ตัวถูกอินทิเกรตจะอยู่ในรูปพหุนามกำลังสอง ax^2+bx+c แต่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ ในวิธีปฏิบัติต้องทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์เสียก่อน คือ

$$\begin{aligned} ax^2+bx+C &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right) + C \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

แล้วสมมติ $u = x+\frac{b}{2a}$ แล้วจะทำให้ตัวถูกอินทิเกรตลดรูปลงมา ทำให้อินทิเกรตลดรูปลงมา ทำให้อินทิเกรตได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{9x^2-12x+20}$

แนวคิด พิจารณาส่วน $9x^2-12x+20$ พบว่าสามารถทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ และเมื่อจัดรูปโดยสมมติ u แล้วสอดคล้องกับสูตร $\tan^{-1}u$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} 9x^2-12x+20 &= 9\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+20-4 \\ &= 9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + 16 \end{aligned}$$

ให้
$$\begin{aligned} u &= x-\frac{2}{3} \\ du &= dx \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{9x^2-12x+20} &= \int \frac{du}{9u^2+16} \\ &= \frac{1}{16}\int \frac{du}{1+\left(\frac{3u}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{4}{3}\right)\int \frac{d\left(\frac{3u}{4}\right)}{1+\left(\frac{3u}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{12}\tan^{-1}\left(\frac{3u}{4}\right) + C \\ &= \frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right) + C \\ &= \frac{1}{12}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)+C \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

แนวคิด พหุนาม $5-2x+x^2$ จัดให้รูปกำลังสองได้ แล้วใช้วิธีการของการแทนค่าฟังก์ชันตรีโกณแก้ปัญหาต่อไป

วิธีทำ จาก

$$5-2x+x^2 = 4+1-2x+x^2$$
$$= 4+(1-x)^2$$

ให้

$$u = 1-x$$
$$du = -dx$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{4+u^2}}$$
$$= -\int \frac{du}{\sqrt{4+u^2}}$$

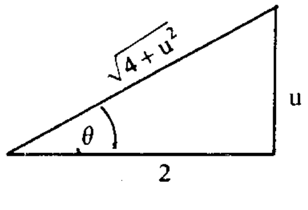
ให้

$$u = 2\tan\theta$$
$$du = 2\sec^2\theta\, d\theta$$

$$-\int \frac{du}{\sqrt{4+u^2}} = -\int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}}$$
$$= -\int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{2\sec\theta}$$
$$= -\int \sec\theta\, d\theta$$
$$= -\int \frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)\, d\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$$
$$= -\int \frac{(\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta)\, d\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$$
$$= -\int \frac{d(\tan\theta+\sec\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}$$
$$= -\ell n|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

จาก $u = 2\tan\theta$ ดังนั้น $\tan\theta = \frac{u}{2}$

$$= \frac{1-x}{2}$$



$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4+u^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{4+(1-x)^2}}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = -\ell n\left|\frac{\sqrt{4+(1-x)^2}}{2} + 1-x\right| + C$$

1.5 การอินทิเกรตโดยการแยกเศษส่วนย่อย

พิจารณาฟังก์ชันเศษส่วน-ตัวอย่างเช่น $\int \frac{3x^4 - 4x^3 + 2\,dx}{x^3 + 2x}$ พบว่าเราไม่สามารถอินทิเกรตอย่างง่าย ๆ โดยใช้สูตร หรือตารางอินทิกรัลได้ แต่เราสามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบนี้ได้โดยใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อย

(1) การแยกเศษส่วนย่อย

พิจารณาฟังก์ชันเศษส่วนในรูป $\frac{F(x)}{G(x)}$ จะมีขั้นตอนในการแยกเศษส่วนย่อยดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : ถ้าเศษส่วนไม่เป็นเศษส่วนอย่างต่ำให้ทำเป็นจำนวนคละเสียก่อน "ใช้ในกรณีที่กำลังของเศษมากกว่าหรือเท่ากับกำลังของส่วน"

หมายเหตุ การทำเป็นจำนวนคละใช้วิธีตั้งหาร

ขั้นตอนที่ 2 : แยกตัวประกอบของส่วน

ขั้นตอนที่ 3 : แยกเศษส่วนตามรูปแบบต่อไปนี้

1. ถ้าตัวประกอบของส่วนไม่ซ้ำกันเลย ให้แยกอยู่ในรูป

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นค่าคงที่

2. ถ้าตัวประกอบของส่วนมีตัวซ้ำกัน ให้แยกตัวซ้ำในรูป

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นค่าคงที่

3. ถ้าตัวประกอบของส่วนมีตัวที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ ที่แยกตัวประกอบไม่ได้ ให้แยกอยู่ในรูป $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

A, B เป็นค่าคงที่

4. ถ้าตัวประกอบของส่วนมีตัวที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ และซ้ำกันด้วย ให้แยกอยู่ในรูป $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

$A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ เป็นค่าคงที่

ตัวอย่างเช่น

(1) $\dfrac{2x-1}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{(x+3)}$

(2) $\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x+2)^2} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+2)} + \dfrac{C}{(x+2)^2}$

(3) $\dfrac{2x}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

(4) $\dfrac{1-x}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+x+1} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$

ขั้นตอนที่ 4 : หาค่าตัวคงที่โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ซึ่งทำได้โดยการหา ค.ร.น. ของเศษส่วนที่ถูกแยก พิจารณาเศษที่เท่ากันเทียบสัมประสิทธิ์โดยจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังเท่ากันย่อมเท่ากัน

ขั้นตอนที่ 5 : นำค่าคงที่ที่ได้ไปแทน จะได้เศษส่วนที่แยกเรียบร้อยตามต้องการ

ตัวอย่าง จงแยกเศษส่วน $\dfrac{2x+41}{x^2+5x-14}$ ในรูปเศษส่วนย่อย

แนวคิด แยกตัวประกอบของส่วนได้ไม่ซ้ำกัน ดังนั้นใช้รูปแบบที่ 1

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{2x+41}{x^2+5x-14} &= \frac{2x+41}{(x+7)(x-2)}\\ &= \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-2}\\ &= \frac{A(x-2) + B(x+7)}{(x+7)(x-2)}\\ &= \frac{(A+B)x + (7B-2A)}{(x+7)(x-2)}\end{aligned}$$

ดังนั้น $2x+41 = (A+B)x + (7B-2A)$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x^1 : $A+B = 2$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x^0 : $7B-2A = 41$

แก้สมการหาค่า A, B ได้ $A = -3,\ B = 5$

ดังนั้น $\dfrac{2x+41}{x^2+5x-14} = -\dfrac{3}{x+7} + \dfrac{5}{x-2}$

หมายเหตุ การหาค่าคงที่ A, B, ... นอกจากการเทียบสัมประสิทธิ์แล้วยังใช้การแทนค่า x ด้วยค่าที่ทำให้แก้สมการได้ง่ายทั้งสองข้าง ดังตัวอย่าง

$$2x+41 = A(x-2) + B(x+7)$$

จะเห็นว่าถ้าแทน $x = 2$ จะหาค่า B ได้ทันที และถ้าแทน $x = -7$ จะหาค่า A ได้ทันทีเช่นเดียวกัน

แทนค่า $x = 2$; $\quad 2(2)+41 = A(0) + B(9)$

$$45 = 9B$$

$$B = 5$$

แทนค่า $x = -7$; $\quad 2(-7)+41 = A(-9) + B(0)$

$$27 = -9A$$

$$A = -3$$

ตัวอย่าง จงแยกเศษส่วน $\dfrac{3x^2+11x+4}{x^3+4x^2+x-6}$ ในรูปเศษส่วนย่อย

แนวคิด เพราะว่ากำลังสูงสุดของเศษน้อยกว่ากำลังสูงสุดของส่วน ดังนั้น จึงแยกส่วนได้ทันที และพบว่าส่วนไม่มีตัวประกอบซ้ำกัน ดังนั้น ใช้แบบที่ 1

วิธีทำ เพราะว่า $x^3+4x^2+x-6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

ดังนั้น

วิธีที่ 1

$$\frac{3x^2+11x+4}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

$$= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{A(x^2+5x+6) + B(x^2+2x-3) + C(x^2-x-2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (5A+2B+C)x + (6A-3B-2C)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

ดังนั้น $\quad 3x^2+11x+4 = (A+B+C)x^2 + (5A+2B+C)x + (6A-3B-2C)$

เทียบสัมประสิทธิ์ x^2: $\quad A+B+C = 3$

เทียบสัมประสิทธิ์ x^1: $\quad 5A+2B+C = 11$

เทียบสัมประสิทธิ์ x^0: $\quad 6A-3B-2C = 4$

แก้สมการหาค่า A, B, C จะได้ $A = \frac{3}{2}$, $B = 2$ และ $C = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\quad \dfrac{3x^2+11x+4}{x^3+4x^2+x-6} = \dfrac{3}{2(x-1)} + \dfrac{2}{(x+2)} - \dfrac{1}{2(x+3)}$

วิธีที่ 2 จาก $3x^2+11x+4 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$

โดยการแทนค่า x ทั้งสองข้าง จะได้

แทนค่า $x = 1$; $\quad 3+11+4 = A(3)(4)$

$$A = \frac{18}{12}$$

$$= \frac{3}{2}$$

แทนค่า $x = -2$; $\quad 12-22+4 = B(-3)(1)$

$$B = 2$$

แทนค่า $x = -3$; $\quad 27-33+4 = C(-4)(-1)$

$$C = -\frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง จงแยกเศษส่วน $\frac{3x^3+3x^2+3x+2}{x^4+x^3}$ เป็นรูปเศษส่วนย่อย

แนวคิด พิจารณาส่วน x^4+x^3 พบว่าแยกแล้วได้ x^3 กับ $x+1$ ซึ่งเป็นกรณีที่ส่วนซ้ำกันด้วยจึงใช้แบบที่ 2

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{3x^3+3x^2+3x+2}{x^4+x^3} &= \frac{3x^3+3x^2+3x+2}{x^3(x+1)} \\
&= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1} \\
&= \frac{Ax^2(x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)+Dx^3}{x^3(x+1)} \\
&= \frac{Ax^3+Ax^2+Bx^2+Bx+Cx+C+Dx^3}{x^3(x+1)} \\
&= \frac{(A+D)x^3+(A+B)x^2+(B+C)x+C}{x^3(x+1)}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\quad 3x^3+3x^2+3x+2 = (A+D)x^3+(A+B)x^2+(B+C)x+C$

เทียบสัมประสิทธิ์ x^3: $\quad A+D = 3$

เทียบสัมประสิทธิ์ x^2: $\quad A+B = 3$

เทียบสัมประสิทธิ์ x^1: $\quad B+C = 3$

เทียบสัมประสิทธิ์ x^0: $\quad C = 2$

แก้สมการหาค่า A, B, C และ D จะได้ $A = 2$, $B = 1$, $C = 2$ และ $D = 1$

ดังนั้น

$$\frac{3x^3+3x^2+3x+2}{x^3(x+1)} = \frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{(x+1)}$$

ตัวอย่าง จงแยกเศษส่วน $\frac{x^6-2}{x^4+x^2}$ เป็นรูปเศษส่วนย่อย

แนวคิด จะเห็นว่ากำลังสูงสุดของเศษมากกว่ากำลังสูงสุดของส่วนจึงต้องทำเป็นจำนวนคละก่อนที่จะใช้รูปแบบแยกเศษส่วนย่อย

วิธีทำ ทำเป็นจำนวนคละ จะได้

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-1 \\ \hline
x^4+x^2 & x^6-2 \\
 & \underline{x^6+x^4} \\
 & -x^4-2 \\
 & \underline{-x^4-x^2} \\
 & x^2-2
\end{array}
$$

$$\frac{x^6-2}{x^4+x^2} = x^2-1+\frac{x^2-2}{x^4+x^2}$$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-2}{x^4+x^2} &= \frac{x^2-2}{x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \\
&= \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x^2)}{x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x^2-2 = (A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$
\begin{aligned}
A+C &= 0 \\
B+D &= 1 \\
A &= 0 \\
B &= -2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จะได้ $A = 0$, $B = -2$, $C = 0$ และ $D = 3$

เพราะฉะนั้น $\frac{x^6-2}{x^4+x^2} = x^2-1-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^2+1}$

(2) การอินทิเกรตโดยการแยกเศษส่วนย่อย

เมื่อเราสามารถแยกเศษส่วนเป็นรูปเศษส่วนย่อยข้างต้นแล้ว การอินทิเกรตต่อไปก็ทำได้โดยไม่ยาก

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \frac{2x+41}{x^2+5x-14}dx$

แนวคิด อาศัยการทำเป็นเศษส่วนย่อย แล้วใช้การอินทิเกรตตลอด

วิธีทำ จากตัวอย่าง 1.26 ได้ว่า

$$\frac{2x+41}{x^2+5x-14} = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+7}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \frac{2x+41}{x^2+5x-14}dx = \int \frac{5}{x-2}dx - \int \frac{3}{x+7}dx$$

$$= 5\int \frac{1}{x-2}dx - 3\int \frac{1}{x+7}dx$$

$$= 5\,\ell n|x-2| - 3\,\ell n|x+7| + C$$

1.6 การอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts)

สูตรอนุพันธ์แต่ละสูตรเป็นแนวทางสำหรับสูตรอินทิกรัล แต่มีสูตรหนึ่งซึ่งไม่สามารถนำไปใช้ได้โดยตรง คือ

$$d(uv) = udv + vdu$$

แต่อย่างไรก็ตามโดยการเปลี่ยนตำแหน่งและอินทิเกรตทั้งสองข้างจะได้

$$\int udv = uv - \int vdu$$

สมการข้างบนเป็นสูตรการอินทิเกรตที่มีชื่อว่าอินทิเกรตทีละส่วน

วิธีการอินทิเกรตทีละส่วนมีหลักการดังนี้

(1) ใช้อินทิเกรตฟังก์ชันในรูปผลคูณ

(2) แยกส่วนที่เป็น u และ dv โดยที่ส่วนที่เป็น dv ต้องอินทิเกรตหาค่า v ได้

(3) $\int vdu$ ต้องเป็นอินทิกรัลที่หาค่าได้ง่ายกว่า $\int udv$

(4) ถ้า $\int vdu$ ยังไม่สามารถอินทิเกรตได้ทันที ต้องใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วนซ้ำอีกที

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int x\,\ell n\,x\,dx$

แนวคิด จะเห็นว่าฟงก์ชันอยู่ในรูปผลคูณของ x กับ $\ell n\,x$ ดังนั้น ในการใช้การอินทิเกรตทีละส่วนจึงมีกรณีที่เป็นไปได้ 2 กรณี ในการเลือก u และ dv นั่นคือ

(1) ให้ $u = x \quad dv = \ell n\,xdx$

(2) ให้ $u = \ell n\,x \quad dv = xdx$

จะเห็นว่ากรณีที่ 1 ไม่สามารถหาค่า v ได้ แต่กรณีที่ 2 หาค่า v ได้

วิธีทำ ให้

$$u = \ell n\, x \longrightarrow dv = xdx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \longleftarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int \ell n\, x(xdx) = (\ell n\, x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x}dx\right)$$
$$\int x\, \ell n\, xdx = \frac{x^2}{2}\ell n\, x - \frac{1}{2}\int xdx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ell n\, x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int x^2e^xdx$

แนวคิด อินทิเกรตทีละส่วนของ x^2 กับ e^x ถ้าสมมติ $u = x^2$, $dv = e^xdx$ **ตัวที่จะต้อง**หาค่าต่อไปคือ $\int 2xe^xdx$ แต่ในทางกลับกัน ถ้าสมมติ $u = e^x$, $dv = x^2dx$ **ตัวที่ต้องหาค่า**ต่อไปคือ $\int \frac{x^3}{3}e^xdx$ ซึ่งจะเห็นว่ากรณีแรกจะทำได้ง่ายกว่า

วิธีทำ ให้

$$u = x^2 \longrightarrow dv = e^xdx$$
$$du = 2xdx \longleftarrow v = e^x$$

เพราะฉะนั้น
$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int e^x2xdx$$
$$= x^2e^x - 2\int xe^xdx$$

พิจารณา $\int xe^xdx$ พบว่าจะต้องใช้การอินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้

$$u = x \longrightarrow dv = e^xdx$$
$$du = dx \longleftarrow v = e^x$$

ดังนั้น
$$\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx$$
$$= xe^x - e^x + C_1$$

ดังนั้น จะได้ว่า
$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

ในบางครั้งการอินทิเกรตทีละส่วนของฟังก์ชันบางฟังก์ชันไม่ได้ทำให้ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น แต่เมื่อใช้การอินทิเกรตทีละส่วน 2 ครั้ง ตัวถูกอินทิเกรตจะกลับมาอยู่ในรูปเดิมในตอนเริ่มแรก อาจต่างกันเพียงค่าคงที่ที่คูณอยู่เท่านั้น ซึ่งดูเทคนิคการทำได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int e^x \sin x\, dx$

แนวคิด ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน 2 ครั้ง

วิธีทำ ให้

$$u = e^x \longrightarrow dv = \sin x\,dx$$
$$du = e^x dx \longleftarrow v = -\cos x$$

ดังนั้น $\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$

ใช้อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้งโดยสมมติให้

$$u = e^x \longrightarrow dv = \cos x\,dx$$
$$du = e^x dx \longleftarrow v = \sin x$$

ดังนั้น $\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$

เพราะฉะนั้น $\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx + C_1$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C_1$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

แนวคิด ทำเช่นเดียวกันกับตัวอย่าง 1.36

วิธีทำ ให้

$$u = e^{2x} \longrightarrow dv = \cos 3x\,dx$$
$$du = 2e^{2x}dx \longleftarrow v = \frac{1}{3}\sin 3x$$

เพราะฉะนั้น $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

ใช้อินทิเกรตทีละส่วนสำหรับ $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ อีกครั้ง

ให้

$$u = e^{2x} \longrightarrow dv = \sin 3x\,dx$$
$$du = 2e^{2x}dx \longleftarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x$$

ดังนั้น $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

เพราะฉะนั้น $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{x}\sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right)$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x + C_1$$

ดังนั้น $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + C$

สำหรับการอินทิเกรตฟังก์ชันตัวเดียวโดด ๆ เช่น $\int \ell n\, x\,dx$, $\int \sin^{-1}x\,dx$ เป็นต้น สามารถใช้การอินทิเกรตทีละส่วนได้เช่นเดียวกันโดยคิดว่าฟังก์ชันนั้นคูณอยู่กับ 1 และการอินทิเกรต $\int f(x)dx$ จะสมมติให้

$$u = f(x) \qquad dv = 1dx$$
$$du = f'(x)dx \qquad v = x$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int \ell n\, x\, dx$

แนวคิด ใช้อินทิเกรตทีละส่วนโดยคิดว่าตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณระหว่าง $\ell n\, x$ กับ 1

วิธีทำ ให้

$$u = \ell n\, x \longrightarrow dv = 1\, dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \longleftarrow v = x$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \ell n\, x\, dx &= x\, \ell n\, x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x\, \ell n\, x - \int dx \\ &= x\, \ell n\, x - x + C\end{aligned}$$

2. ตารางอินทิกรัล

ELEMENTARY FORMS

1. $\int a\, dx = ax$
2. $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$
3. $\int \phi(y) dx = \int \frac{\phi(y)}{y'} dy$, where $y' = \frac{dy}{dx}$
4. $\int (u+v) dx = \int u\, dx + \int v\, dx$, where u and v are any functions of x
5. $\int u\, dv = u \int dv - \int v\, du = uv - \int v\, du$
6. $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$
7. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, except $n = -1$
8. $\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \log f(x)$, $\left(df(x) = f'(x) dx\right)$
9. $\int \frac{dx}{x} = \log x$
10. $\int \frac{f'(x) dx}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{f(x)}$, $\left(df(x) = f'(x) dx\right)$
11. $\int e^x\, dx = e^x$
12. $\int e^{ax}\, dx = e^{ax}/a$
13. $\int b^{ax} dx = \frac{b^{ax}}{a \log b}$, $(b > 0)$
14. $\int \log x\, dx = x \log x - x$
15. $\int a^x \log a\, dx = a^x$, $(a > 0)$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

17. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tan h^{-1}\frac{x}{a} \\ \text{or} \\ \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}, \qquad (a^2>x^2) \end{cases}$

18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \begin{cases} -\frac{1}{a}\cot h^{-1}\frac{x}{a} \\ \text{or} \\ \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}, \qquad (x^2>a^2) \end{cases}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \sin^{-1}\frac{x}{|a|} \\ \text{or} \\ -\cos^{-1}\frac{x}{|a|}, \end{cases}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{|a|}\sec^{-1}\frac{x}{a}$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}} = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}\right)$

23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}, \qquad (a<0) \\ \text{or} \\ \frac{-2}{\sqrt{a}}\tan h^{-1}\sqrt{\frac{a+bx}{a}} \\ \text{or} \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} \end{cases}$

รูปที่มี $(a+bx)$

สำหรับรูปที่มี $a+bx$ แต่ไม่ได้กรอกลงในตาราง แทนค่า $u = \frac{a+bx}{x}$ อาจช่วยในการพิสูจน์

24. $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}, \qquad (n \neq -1)$

25. $\int x(a+bx)^n dx = \frac{1}{b^2(n+2)}(a+bx)^{n+2} - \frac{a}{b^2(n+1)}(a+bx)^{n+1}, \qquad (n \neq -1, -2)$

26. $\int x^2(a+bx)^n dx = \frac{1}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^{n+3}}{n+3} - 2a\frac{(a+bx)^{n+2}}{n+2} + a^2\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1}\right]$

27. $\int x^m(a+bx)^n dx = \frac{x^{m+1}(a+bx)^n}{m+n+1} + \frac{an}{m+n+1}\int x^m(a+bx)^{n-1}dx$

28. $$\int x^m(a+bx)^n dx = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)}\left[-x^{m+1}(a+bx)^{n+1} + (m+n+2)\int x^m(a+bx)^{n+1}dx\right] \\ \text{or} \\ \frac{1}{b(m+n+1)}\left[x^m(a+bx)^{n+1} - ma\int x^{m-1}(a+bx)^n dx\right] \end{cases}$$

29. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log(a+bx)$

30. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$

31. $\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b(a+bx)^2}$

32. $$\int \frac{xdx}{a+bx} = \begin{cases} \frac{1}{b^2}\left[a+bx-a\log(a+bx)\right] \\ \text{or} \\ \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\log(a+bx) \end{cases}$$

33. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right]$

34. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right]$

35. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right]$, $n \neq 1,2$

36. $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\log(a+bx)\right]$

37. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\log(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right]$

38. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^3}\left[\log(a+bx) + \frac{2a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2}\right]$

39. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bx)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right]$,

$n \neq 1, 2, 3$

40. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}$

41. $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}$

42. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^3} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2a+bx}{a+bx}\right)^2 + \log\frac{x}{a+bx}\right]$$

43. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}$$

44. $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)} = \frac{2bx-a}{2a^2x^2}+\frac{b^2}{a^3}\log\frac{x}{a+bx}$$

45. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -\frac{a+2bx}{a^2x(a+bx)} + \frac{2b}{a^3}\log\frac{a+bx}{x}$$

รูปที่มี $c^2 \pm x^2,\ x^2-c^2$

46. $$\int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c}$$

47. $$\int \frac{dx}{ax^2+c} = \frac{1}{\sqrt{ac}}\tan^{-1}\left(x\sqrt{\frac{a}{c}}\right), \quad (a,\ c > 0)$$

48. $$\int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{c+x}{c-x}, \quad (c^2>x^2)$$

49. $$\int \frac{dx}{ax^2+c} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-ac}}\log\dfrac{x\sqrt{a}-\sqrt{-c}}{x\sqrt{a}+\sqrt{-c}}, & (a>0,\ c<0) \\ \text{or} & \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-ac}}\log\dfrac{\sqrt{c}+x\sqrt{-a}}{\sqrt{c}-x\sqrt{-a}}, & (a<0,\ c>0) \end{cases}$$

50. $$\int \frac{dx}{x^2-c^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{x-c}{x+c}, \quad (x^2>c^2)$$

รูปที่มี $a+bx$ และ $a'+b'x$

51. $$\int \frac{dx}{(a+bx)(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b}\log\left(\frac{a'+b'x}{a+bx}\right)$$

52. $$\int \frac{xdx}{(a+bx)(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b}\left[\frac{a}{b}\log(a+bx) - \frac{a'}{b'}\log(a'+b'x)\right]$$

53. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b}\left(\frac{1}{a+bx} + \frac{b'}{ab'-a'b}\log\frac{a'+b'x}{a+bx}\right)$$

54. $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} = \frac{-a}{b(ab'-a'b)(a+bx)} - \frac{a'}{(ab'-a'b)^2}\log\frac{a'+b'x}{a+bx}$$

55. $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} = \frac{a^2}{b^2(ab'-a'b)(a+bx)}$$
$$+\frac{1}{(ab'-a'b)^2}\left[\frac{a'^2}{b'}\log(a'+b'x) + \frac{a(ab'-2a'b)}{b^2}\log(a+bx)\right]$$