

บทที่ 5

ระบบสมการเชิงเส้น

(System of Linear Equation)

จากบทก่อน ๆ ที่กล่าวมาแล้ว พบว่าสมการดิฟเฟอเรนเชียลเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชัน 2 ตัวแปรคือ y, x แต่ในบทนี้จะได้กล่าวถึงสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่มีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวแปร ซึ่งอาจจะเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา หรือเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียลก็ได้ อย่างไรก็ตามในบทนี้จะได้กล่าวถึงเฉพาะระบบสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาเท่านั้น และเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงที่เท่านั้น ตัวอย่างเช่น

$$(1) \begin{cases} \frac{2dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 1 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} + 2x + z = 1 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + y + 2z = 0 \end{cases}$$

ระบบสมการ (1) และ (2) อาจเขียนอยู่รูปตัวดำเนินการ D ได้ดังนี้

$$1) \begin{cases} 2(D-2)x + (D-1)y = e^t \\ (D+3)x + y = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} Dx + (D+1)y = 1 \\ (D+2)x - (D-1)z = 1 \\ (D+1)y + (D+2)z = 0 \end{cases}$$

สำหรับวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นมีกล่าวไว้ 3 แบบ คือ

- (1) กำจัดตัวแปรในรูปอนุพันธ์
- (2) แก้สมการตัวดำเนินการ D โดยกำจัดตัวแปร x, y, \dots
- (3) ใช้ Cramer's Rule ช่วยในการคำนวณ

ตัวอย่างเช่น

MA 216 (S)

ตัวอย่าง 5.1 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$$

$$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0$$

วิธีทำ วิธีที่ 1 : จาก

$$2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) - 2 \times (2)$$

$$\frac{dy}{dt} - 3y - 10x = e^t \quad \dots\dots\dots (3)$$

ดิฟเฟอเรนทิเอต (2) จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) - (1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x + y = -e^t \quad \dots\dots\dots (5)$$

แทนค่า (2) ใน (5) จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -e^t$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{D^2 + 1} e^t \\ &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2} e^t \end{aligned}$$

$$\text{จาก (2) จะได้ } y = -\frac{dx}{dt} - 3x$$

$$\begin{aligned} &= -\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t - \frac{1}{2} e^t\right) - 3\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2} e^t\right) \\ &= (C_1 - 3C_2) \sin t - (3C_1 + C_2) \cos t + 2e^t \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 : ใช้ตัวดำเนินการ D จะได้สมการ คือ

$$2(D - 2)x + (D - 1)y = e^t \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(D + 3)x + y = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2) x (D - 1) จะได้

$$(D - 1)(D + 3)x + (D - 1)y = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

(3) - (1) จะได้

$$\begin{aligned}(D - 1)(D + 3)x - 2(D - 2)x &= -e^t \\ [(D - 1)(D + 3) - 2(D - 2)]x &= -e^t \\ (D^2 + 2D - 3 - 2D + 4)x &= -e^t \\ (D^2 + 1)x &= -e^t\end{aligned}$$

จะได้คำตอบเช่นเดียวกับวิธีที่ 1

วิธีที่ 3 : ใช้ Cramer's Rule จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{จาก } 2(D - 2)x + (D - 1)y &= e^t \\ (D + 3)x + y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2(D - 2) & D - 1 \\ D + 3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D - 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และ } \begin{vmatrix} 2(D - 2) & D - 1 \\ D + 3 & 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2(D - 2) & e^t \\ D + 3 & 0 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned}\text{จาก (1) } [2(D - 2) - (D + 3)(D - 1)]x &= e^t \\ &= -(D^2 + 1)x = e^t \\ (D^2 + 1)x &= -e^t\end{aligned}$$

$$\text{ได้ } x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2} e^t$$

จาก (2) จะได้

$$\begin{aligned}-(D^2 + 1)y &= -(D + 3)e^t \\ -(D^2 + 1)y' &= -4e^t \\ (D^2 + 1)y &= 4e^t\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } y = C_3 \cos t + C_4 \sin t + 2e^t$$

ซึ่งถ้านำไปเปรียบเทียบกับวิธีที่ 1 จะพบว่า $C_3 = -(3C_1 + C_2)$ และ $C_4 = C_1 - 3C_2$ แต่อย่างไรก็ตามคำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบทั่วไปตามต้องการ ซึ่งค่าคงที่ตามใจชอบจะเขียนพจน์แบบเดียวกันหรือต่างกันได้ ซึ่งจะเห็นว่าวิธีการใช้กฎของ Cramer นิยมใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการกันมาก

ตัวอย่าง 5.2 จงหาคำตอบของระบบสมการ

- 1) $(D - 1)x + Dy = 2t + 1$
- 2) $(2D + 1)x + 2Dy = t$

วิธีทำ โดยใช้ Cramer's Rule จะได้

$$\begin{vmatrix} D - 1 & D \\ 2D + 1 & 2D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2t + 1 & D \\ t & 2D \end{vmatrix}$$

$$(2D^2 - 2D - 2D^2 - D)x = 4t - 1$$

$$-3Dx = 3$$

$$Dx = -1$$

$$x = -t + c,$$

และ $\begin{vmatrix} D - 1 & D \\ 2D + 1 & 2D \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D - 1 & 2t + 1 \\ 2D + 1 & t \end{vmatrix}$

$$3Dy = (1 - t) - (4 + 2t + 1)$$

$$= 4 - 3t$$

$$Dy = t + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3}t + C_2$$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาคำตอบของระบบสมการ

- 1) $(D - 3)x + 2(D + 2)y = 2\sin t$
- 2) $2(D + 1)x + (D - 1)y = \cos t$

วิธีทำ โดยใช้ Cramer's Rule จะได้

$$\begin{vmatrix} D - 3 & 2(D + 2) \\ 2(D + 1) & D - 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2\sin t & 2(D + 2) \\ \cos t & D - 1 \end{vmatrix}$$

$$(D^2 - 4D + 3 - 4D^2 - 12D - 8)x = 2\cos t - 2\sin t - 2(-\sin t + 2\cos t)$$

$$(-3D^2 - 16D - 5)x = -2\cos t$$

$$(3D^2 + 16D + 5)x = 2\cos t$$

$$x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t/3} + \frac{1}{3D^2 + 16D + 5} 2\cos t$$

$$= C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t/3} + \frac{1}{8D+1} \cos t$$

$$= C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t/3} + \frac{1}{65} (8\sin t + \cos t)$$

และ
$$\begin{vmatrix} D-3 & 2(D+2) \\ 2(D+1) & (D-1) \end{vmatrix} Y = \begin{vmatrix} D-3 & 2\sin t \\ 2(D+1) & \cos t \end{vmatrix}$$

$$-(3D^2 + 16D + 5)y = -\sin t - 3\cos t - 4(\cos t + \sin t)$$

$$-(3D^2 + 16D + 5)y = -5\sin t - 7\cos t$$

$$(3D^2 + 16D + 5)y = 5\sin t + 7\cos t$$

$$y = C_3 e^{-5t} + C_4 e^{-t/3} + \frac{1}{3D^2 + 16D + 5} (5\sin t + 7\cos t)$$

(ให้ทำต่อเป็นแบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 5.4 จงหาคำตอบเฉพาะของระบบสมการ

1) $(D^2 - 2)x - 3y = e^{2t}$

2) $(D^2 + 2)y + x = 0$

เมื่อกำหนด $x = y = 1, Dx = Dy = 0$ เมื่อ $t = 0$

วิธีทำ โดยใช้ Cramer's Rule จะได้

$$\begin{vmatrix} D^2 - 2 & -3 \\ 1 & D^2 + 2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^{2t} & -3 \\ 0 & D^2 + 2 \end{vmatrix}$$

$$(D^4 - 1)x = 6e^{2t}$$

ได้ $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t + \frac{2}{5} e^{2t}$

จากสมการ (1) $y = \frac{1}{3} [(D^2 - 2)x - e^{2t}]$

$$= -\frac{1}{3} (C_1 e^t + C_2 e^{-t}) - (C_3 \cos t + C_4 \sin t) - \frac{1}{15} e^{2t}$$

เมื่อ $t = 0$ จะได้

$$x = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{2}{5} = 1 \quad \dots \dots (1)$$

$$Dx = C_1 - C_2 + C_4 + \frac{4}{5} = 0 \quad \dots \dots (2)$$

$$y = -\frac{1}{3} (C_1 + C_2) - C_3 - \frac{1}{15} = 1 \quad \dots \dots (3)$$

$$Dy = -\frac{1}{3} (C_1 - C_2) - C_4 - \frac{2}{15} = 0 \quad \dots \dots (4)$$

แก้สมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{7}{4}, C_3 = -\frac{19}{10}, C_4 = \frac{1}{5}$$

ดังนั้นคำตอบเฉพาะคือ

$$x = \frac{1}{4} (3e^t + 7e^{-t}) - \frac{1}{10} (19\cos t - 2\sin t) + \frac{2}{5} e^{2t}$$

$$Y = -\frac{1}{12} (3e^t + 7e^{-t}) + \frac{1}{10} (19 \cos t + 2 \sin t) - \frac{1}{15} e^{2t}$$

แบบฝึกหัด 5.1

จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

1. $Dx - (D+1)y = -e^t$

$$x + (D-1)y = e^{2t}$$

2. $(D+2)x + (D+1)y = t$

$$5x + (D+3)y = t^2$$

3. $(D-t-1)x + (2D+7)y = e^t + 2$

$$-2x + (D+3)y = e^t - 1$$

4. $(D-1)x + (D+3)y = e^{-t} - 1$

$$(D+2)x + (D-1)y = e^{2t} + t$$

5. $(D^2+16)x - 6Dy = 0$

$$6Dx + (D^2+16)y = 0$$

คำตอบแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดบทที่ 1

แบบฝึกหัด 1.1

1. 1.1) อันดับ 1 hi 1 1.2) อันดับ 2 ดีกรี 1 1.3) อันดับ 3 hi 1
 1.4) อันดับ 1 ดีกรี 1 1.5) อันดับ 2 ดีกรี 2 1.6) อันดับ 1 ดีกรี 1
 1.7) อันดับ 2 ดีกรี 4
2. 2.1) $\frac{dy}{dx} = x^2$ 2.2) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+y-2)\frac{dy}{dx} + y = 0$
3. 3.1) $y' = \frac{y}{x}$ 3.2) $y'' = 0$
 3.3) $y' = y$ 3.4) $y' = \frac{y}{\tan x}$
 3.5) $(y')^2 = 1 - y^2$ 3.6) $y'' = y'$
 3.7) $y'' = x(y')^3$ 3.8) $xy_3'' = yy' + x(y')^2$
 3.9) $y(y')^2 + xy' - y = 0$ 3.10) $y'' + 2x^3y' - 4x^2y = 0$

แบบฝึกหัด 1.2

3. 3.1) คำตอบทั่วไป 3.2) คำตอบเฉพาะ 3.3) คำตอบทั่วไป
4. $y = 2x + 3e^x$

แบบฝึกหัดบทที่ 2

แบบฝึกหัด 2.1

1. 1.1) $3x^4 + 4(y+1)' = c$ 1.2) $(x-4)y^4 = cx$
 1.3) $x^4y = c$ 1.4) $(1+2y)^2 = c\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$
 1.5) $y = x + Cxy$ 1.6) $(1+y) = C(1+x)$
 1.7) $r = c \cos \theta$ 1.8) $y^2(1+x^2) = C$
 1.9) $y+x = \ln(Cx(y+1))$ 1.10) $\sin^2 y = C\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
2. 2.1) $y^2(1+x^2) = I$ 2.2) $x^2y = 4$
 2.3) $(1+y) = 2(1+x)$ 2.4) $\ln(1+y^2) = x^2 - 1$
 2.5) $y^3 \sin^2 x = 8$

แบบฝึกหัด 2.2

- $2x^2y^2 = x^4 + C$
- $x + y \ln x = c y$
- $Cx - \sqrt{x^2 + y^2} = x \ln(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$
- $x^2 + 4xy + 3y^2 = c$
- $x^4 + 4xy^3 + C = 0$
- $x \sin \frac{y}{x} = C$
- $1 + \ln x = \tan \frac{y}{x}$

แบบฝึกหัด 2.3

- $\ln(2x + 3y + 2) = 2y - x + C$
- $(y + 1) = C(x + 1)$
- $x + 2y = \ln(x + y) + c$
- $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = c$
- $\ln[4y^2 + (x - 1)^2] + \arctan \frac{2y}{x - 1} = C$
- $\ln x = xy - \frac{1}{2}x^2y^2 + C$
- $y = Cx^2e^{-1/xy}$

แบบฝึกหัด 2.4

- $xy = \frac{x^3}{3} + c$
- $xy^2 + \frac{x^3}{3} = c$
- $x^2 + 2y \sin x = C$
- $x(1 + e^{2y}) = C$
- $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 5y = C$
- $x^4y^3 + \ln\left(\frac{x}{y}\right) = C$
- $(x^2 + y^2)^2 = 3xy + C$
- $e^{x^2y} + e^{xy^2} + x - y^2 = C$
- $y = Cx + xe^x$
- $\arctan y = \ln \frac{x}{x+1} + C$
- $x^2y - \frac{x^5}{5} = c$
- $y^2 + x = Cy$
- $3y^2 + x \ln(xy) = cx$
- $x^2y(1 + xy) = C$
- $x^2y^2(y^2 - x^2) = c$

แบบฝึกหัด 2.5

- $x^2(y^2 + 1) = 2 + 4 \ln y$
- $x^4y^3 - x^2y = C$
- $e^{3xy} - x^2 = C$
- $x^6y^3 + x^4y^5 = C$
- $3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = C$
- $y + x^2 + 1 = Cx$
- $(C + 2x)(x^2 + y^2) = 1$
- $x \cos y + y \sin x = C$

แบบฝึกหัด 2.6

$$1. \text{th}y - \frac{x^2}{4y^2} = c$$

$$3. y^4 = 4x^4 \text{th}x + Cx^4$$

$$5. y^2 = 2x^2 \text{th}x + Cx^2$$

$$2. xy^2 = C(2y+x)$$

$$4. x^2 = 2y^2 \text{th} Cy^2 - 2xy^2$$

แบบฝึกหัด 2.7

$$1. y = 2x + Ce^{-x}$$

$$3. \frac{1}{y} = 1 - x + Ce^{-x}$$

$$5. y = e^x + Cx^2$$

$$7. xy = 3(y-1) + Ce^{-y}$$

$$9. (1+y^2)^2 x = 2 \text{th}y + y^2 + C$$

$$11. y = x \sin(y+C)$$

$$13. y = x^2 \cos x + Cx \cos x$$

$$15. x(\sec y + \tan y) = y^2 + C$$

$$2. 3y = 2 + Ce^{-3x}$$

$$4. y = -\frac{1}{2}(3 \sin 2x + \cos 2x) + Ce^{6x}$$

$$6. (C+x)ye^x = -1$$

$$8. \frac{2}{y^5} = cx' + 5x^3$$

$$10. y^2 = 1 + Ce^{x^2}$$

$$12. \frac{y}{x^2} = \cos y + y \sin y + C$$

$$14. 3x^2 = (4x^3 + C)y^4$$

แบบฝึกหัด 2.8

$$1. y = \frac{x^4}{12} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$3. y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x$$

$$5. y = 3 \cos x + \frac{x}{2} - 2$$

$$2. y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$4. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

$$6. y = \frac{x^2}{2} - \text{th}x + \frac{1}{2}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

แบบฝึกหัด 3.1

$$1. x^2 + y^2 = c$$

$$3. r = Ce^\theta$$

$$5. 4x' + 12xy^2 - 3y^4 = 204$$

$$6. (1) y(y^2 + 3x^2) = C$$

$$(3) xy = C$$

$$(5) (x^2 + y^2)^2 = C(2x^2 + y^2)$$

$$(7) x = y - 1 + Ce^{-y}$$

$$(9) r = C(1 - \sin \theta)$$

$$2. y^2 = cx$$

$$4. x + C = 2\sqrt{2x+3y} - 4 \text{th}(2 + \sqrt{2x+3y})$$

$$(2) y^9 = kx^6$$

$$(4) y = Cx^2$$

$$(6) x^2 - y^2 = C$$

$$(8) r = C \sin \theta$$

$$10) r = Ce^{-\sin \theta}$$

แบบฝึกหัด 3.2

1. 1) เมื่อเวลา 2 วินาที 29.40 เมตร เมื่อเวลา 4 วินาที 19.60 เมตร
 2) 30.625 เมตร
2. 1) 50 ฟุต ต่อวินาที
 2) $V = 50 - 10e^{-0.64t}$
 $x = 50t + \frac{125}{8}(e^{-0.64t} - 1)$
3. $x = \frac{1}{2}gt^2$
4. $x = 10 \cos 3t$
5. 295°K
6. 7.6 ฟุต ต่อวินาที

แบบฝึกหัด 3.3

1. $x = \frac{\left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{a+b}{b}\right) a_0 b_0 (1 - e^{\frac{b^2-a^2}{ab} kt})}{\left(\frac{a+b}{b}\right) b_0 - \left(\frac{a+b}{a}\right) a_0 e^{\frac{b^2-a^2}{ab} kt}}$
2. 0.07%
3. 18 กรัม
4. $Q = 30 - 25e^{-\frac{1}{3}}$
5. 4.2%
6. $Q = \frac{60(1 - (\frac{2}{3})^{3t})}{4 - (\frac{2}{3})^{3t}}$

แบบฝึกหัด 3.4

1. 1) $Q = \frac{1}{2(25 + 36\pi^2)^2} \sin(120\pi t - \phi) + \frac{3\pi e^{-100t}}{25 + 36\pi^2}$
 เมื่อ $\sin \phi = \frac{12\pi}{(100 + 144\pi^2)^2}$ $\cos \phi = \frac{10}{(100 + 144\pi^2)^2}$
- 2) $I = \frac{60\pi}{(25 + 36\pi^2)^2} \cos(120\pi t - \phi) - \left(\frac{300\pi}{25 + 36\pi^2} - 5\right) e^{-100t}$
2. $J = 10(1 - e^{-5t})$

แบบฝึกหัด 3.5

1. 25 เท่า
2. 8×10^5 ตัว
3. $10(3)^3$ ล้านคน
4. $t = 30 \frac{\log 3}{\log 2}$ ปี

แบบฝึกหัดบทที่ 4

แบบฝึกหัด 4.1

1. เป็นทุกข้อ
2. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \sin x$

แบบฝึกหัด 4.2

1. $y = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-3x}$
2. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x}$
3. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x} + C_4 x e^{-3x}$
4. $y = e^{-x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + C_4 e^{4x}$
5. $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$
6. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$
7. $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
8. $y = C_1 e^x + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$
9. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$
10. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x) \cos 2x + (C_5 + C_6 x) \sin 2x$

แบบฝึกหัด 4.3

1. $Y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x} - \frac{5x^3}{24}$
2. $Y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}$
3. $Y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} - \frac{x^2}{8}$
4. $Y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + e^{2x}$
5. $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2$
6. $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^x(x^2 - x)$

7. $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x$
8. $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \sin x - x \cos x$
9. $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$
10. $Y = \frac{x e^x}{2}$
11. $Y = \frac{x^3 e^{2x}}{6} + e^x$
12. $Y = \frac{1}{2} (\cos x - \sin x)$
13. $Y = -\frac{1}{4} x \cos 2x$
14. $Y = -x^2 - 2$
15. $Y = \frac{1}{2} (x^3 + x^2 - 3x - 1) + \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{7} \cos 3x$
16. $Y = -\frac{1}{3} e^x \cos x$
17. $Y = \frac{1}{32} e^{3x} (4x - 3)$
18. $Y = \frac{e^x}{3} + 1$
19. $Y = -\frac{e^x}{8} (\sin 2x + \cos 2x)$
20. $Y = -\frac{x}{9} - \frac{e^{2x}}{5} + \frac{1}{13} \sin 2x$
21. $Y = 2x \cos x + x^2 \sin x$
22. $Y = \sin 2x \ln (\sec 2x + \tan 2x) - 1$
23. $Y = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x - e^{3x}) \ln(1 + e^{-x})$
24. $Y = -e^x \operatorname{si} e^{-x}$
25. $Y = e^{-x} \ln(1 + e^x) - 1$

แบบฝึกหัดบทที่ 5

แบบฝึกหัด 5.1

1. $x = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t + \frac{3}{5} e^{2t}$
 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{2}{5} e^{2t} + \frac{e^t}{2}$

$$2. \quad x = \frac{C_1 - 3C_2}{5} \sin t - \frac{3C_1 + C_2}{5} \cos t - t^2 + t + 3$$

$$Y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 - 3t - 4$$

$$3. \quad x = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} [\cos(t + C_2) - \sin(t + C_2)] - \frac{5}{26} e^t + \frac{13}{17}$$

$$Y = C_1 e^{-4t} \sin(t + C_2) + \frac{2}{13} e^t + \frac{3}{17}$$

$$4. \quad x = 2C_1 e^{-7t/3} + \frac{5}{17} e^{2t} + \frac{3}{7} t - \frac{1}{49}$$

$$Y = 3C_1 e^{-7t/3} - \frac{1}{17} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{7} t - \frac{26}{49}$$

$$5. \quad x = C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t + C_3 \cos 8t + C_4 \sin 8t$$

$$Y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + C_3 \cos 8t - C_4 \sin 8t$$