บทที่ 4
สมการเชิงเส้นอันดับ n
(Linear Equations of Order n)

4.1 สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบเชิงเส้น

สมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นที่มีอันดับ n เขียนอยู่ในรูป

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_ny = Q$$

เมื่อ $P_0 \neq 0$, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ และ Q เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x หรือเป็นค่าคงที่
ในกรณีที่ Q = 0 รูปของสมการ คือ

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_ny = 0$$

เรียกว่าสมการเอกพันธ์ (homogeneous)

พิจารณาตัวอย่างสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

(1) $$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - xy = \sin x$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 3

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 2

จากตัวอย่างจะเห็นว่าสมการ (1) ไม่เป็นสมการเอกพันธ์แต่สมการที่ (2) เป็นสมการเอกพันธ์

จากสมการ

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_ny = Q$$

จะเห็นว่าในกรณีที่ n = 1 สมการคือ

$$P_0\frac{dy}{dx} + P_1y = Q$$

ซึ่งเป็นแบบสมการเชิงเส้นที่เคยศึกษามาแล้วในบทที่ 2 แต่อย่างไรก็ตามในบทที่ 4 สมการเชิงเส้นเป็นแบบอันดับ n ใด ๆ แต่สัมประสิทธิ์ $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ เป็นค่าคงที่ ตัวอย่างเช่น

$$3\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 1 + x + x^2$$

เป็นต้น

ในการหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลเราจะเริ่มต้นจากการหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่เป็นสมการเอกพันธ์เสียก่อน

กำหนดให้สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบเชิงเส้นที่เป็นสมการเอกพันธ์ คือ

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_ny = 0 \qquad (*)$$

ให้ $y = y_1(x)$ เป็นคำตอบของสมการ $(*)$

ดังนั้น $y = C_1y_1(x)$ เป็นคำตอบของสมการ $(*)$ ด้วย

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ $y = y_1(x), y = y_2(x), \dots\ y = y_n(x)$ **เป็นคำตอบของสมการ $(*)$** แล้ว จะได้ว่า

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$$

เป็นคำตอบของสมการ $(*)$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบท **4.1** เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า ถ้า $y = y_1(x), y = y_2(x)$ เป็นคำตอบของสมการ $(*)$ แล้ว $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ เป็นคำตอบของ $(*)$

ให้ $y = y_1(x),\ y = y_2(x)$ เป็นคำตอบของ $(*)$

ดังนั้น $P_0y_1^{(n)} + P_1y_1^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}y_1' + P_ny_1 = 0$ .... (1)

และ $P_0y_2^{(n)} + P_1y_2^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}y_2' + P_ny_2 = 0$ .... (2)

$(1)\times C_1 + (2)\times C_2$ จะได้

$$P_0(C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)}) + P_1(C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)}) + \dots +$$
$$P_{n-1}(C_1y_1' + C_2y_2') + P_n(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

จะได้ว่า

$$P_0(C_1y_1 + C_2y_2)^{(n)} + P_1(C_1y_1 + C_2y_2)^{(n-1)} + \dots +$$
$$P_{n-1}(C_1y_1 + C_2y_2)' + P_n(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

ดังนั้น $y = C_1y_1 + C_2y_2$ เป็นคำตอบของ $(*)$

สำหรับในกรณีที่มี n คำตอบก็ทำได้โดยวิธีการเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบเชิงเส้น $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ จงแสดงว่า $y = e^{-x}$, $y = e^{2x}$ เป็นคำตอบของสมการ และ $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้ด้วย

วิธีทำ จาก $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

จาก

$$y = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$$

ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = e^{-x} - (-e^{-x}) - 2e^{-x} = 0$

ดังนั้น $y = e^{-x}$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

จาก

$$y = e^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{2x}$$

ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 4e^{2x} - (2e^{2x}) - 2(e^{2x}) = 0$

ดังนั้น $y = e^{2x}$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

จาก

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}, \quad C_1, C_2 \text{ เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ}$$

$$\frac{dy}{dx} = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2Y &= (C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x}) - (-C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x}) \\ &\quad - 2(C_1e^{-x} + C_2e^{2x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

4.2 ความเป็นอิสระเชิงเส้น และ ความไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

Linearly independence and linearly dependence

นิยาม 4.1 ชุดของฟังก์ชัน $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$ **เรียกว่าเป็นอิสระเชิงเส้น** (linearly independent) กัน ก็ต่อเมื่อถ้าสมการ $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)=0$ แล้ว $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$

นิยาม 4.2 ชุดของฟังก์ชัน $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$ เรียกว่าไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent) กันก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่ n ตัว $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด ที่ทำให้ $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)=0$

ตัวอย่าง 4.2 ตัวอย่างชุดที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

(1) $\sin x, \cos x$ เป็น linearly independent

เพราะว่า $C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$

ก็ต่อเมื่อ $C_1 = C_2 = 0$ ซึ่งจะหา C_1, C_2 ได้ดังนี้

จาก $C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$ ....(1)

หาอนุพันธ์ของ (1) จะได้

$$C_1 \cos x - C_2 \sin x = 0 \qquad \text{.......(2)}$$

(1) x sin x + (2) x cos x จะได้

$$C_1 \sin^2 x + C_1 \cos^2 x = 0$$

$$C_1(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$C_1 = 0 \qquad (\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $C_2 = 0$

(2) e^{-x}, e^{x} เป็น linearly independent

เพราะว่า $C_1e^{-x}+C_2e^{x} = 0$ ....(1)

หาอนุพันธ์ของ (1) จะได้

$$-C_1e^{-x}+C_2e^{x} = 0 \qquad \text{.......(2)}$$

(1) + (2) จะได้ $2C_2e^{x} = 0$

$$C_2 = 0 \qquad (\because e^{x}>0)$$

แทนค่า $C_2 = 0$ จะได้ $C_1e^{-x} = 0$

$$C_1 = 0$$

ตัวอย่าง 4.3 ตัวอย่างชุดที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

(1) $4x, 5x$ เป็น linearly dependent

เพราะว่าถ้าให้ $C_1 = 5, C_2 = -4$ จะได้

$$5(4x) + (-4)(5x) = 0$$

(2) $e^x, 2e^x, e^{-x}$ เป็น linearly dependent

เพราะว่า ถ้าให้ $C_1 = -2, C_2 = 1, C_3 = 0$ จะได้

$$(-2)e^x + (1)(2e^x) + 0(e^{-x}) = 0$$

นิยาม 4.3 Wronskian ของ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ คือค่าตัวกำหนดอันดับที่ n

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ซึ่งจะเขียนสั้น ๆ ว่า $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

จากนิยามของ Wronskian จะได้ข้อสรุปว่า ถ้า $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นชุด linearly independent แล้ว $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ และถ้า $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ แล้ว จะได้ว่า ชุด $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นชุด linearly independent

ตัวอย่าง 4.4 จงหา Wronskian ของชุดของฟังก์ชัน e^x, e^{2x}, e^{3x}

วิธีทำ

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$= e^x\, e^{2x}\, e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= e^{6x}\left[(18-12) - (9-3) + (4-2)\right]$$

$$= e^{6x}(6-6+2)$$

$$= 2e^{6x}$$

ตัวอย่าง 4.5 จงแสดงโดยใช้ Wronskian ว่าชุดของฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น linearly independent ;
1, sin x, cos x

วิธีทำ

$$W(1, \sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix}$$

$$= -\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= -(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= -1 \neq 0$$

ดังนั้น I, sin x, cos x เป็น linearly independent

กำหนดให้สมการเชิงเส้นอันดับที่ n

$$(1) \quad P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q(x)$$

เป็นสมการเชิงเส้นแบบทั่วไป ($Q(x) \neq 0$) และ

$$(2) \quad P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

เป็นสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ($Q(x) = 0$)

จากทฤษฎีบท 4.1 ถ้า $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นคำตอบ n คำตอบซึ่งเป็นอิสระกันของ (2) แล้ว $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ เป็นคำตอบของสมการ (2) ซึ่งเรียกว่าคำตอบประกอบ (complementary solutions) ซึ่งจะแทนด้วย y_c

ถ้า $y = R(x)$ เป็นคำตอบของ (1) ซึ่งไม่มีค่าคงที่ตามใจชอบอยู่ด้วยแล้วเราเรียกว่า $y = R(x)$ ว่าคำตอบเฉพาะ (particular solutions) ซึ่งมักจะแทนด้วย y_p

ดังนั้น $$y = y_c + y_p$$

ดังนั้น กล่าวได้ว่าคำตอบทั่วไปของสมการเชิงเส้นอันดับที่ n (สมการ (1)) เขียนได้ในรูป

$$y = \underbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)}_{y_c} + \underbrace{R(x)}_{y_p}$$

ข้อสรุป **ดังนั้น** ในการแสดงว่า $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + . + C_ny_n(x)$ เป็นคำตอบของสมการเอกพันธ์ (2) เราเพียงแต่แสดงว่า $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้น หรือ $W(y_1, y_2, \ldots y_n) \neq 0$ ก็พอ

ตัวอย่าง 4.0 จงแสดงว่าสมการดิฟเฟอเรนเชียล $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 6x\frac{dy}{dx} + 12y = 0$ มี 3 คำตอบซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นกัน ซึ่งอยู่ในรูป $y = x^n$

วิธีทำ ให้

$$y = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

แทนค่าในสมการ $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 6x\frac{dy}{dx} + 12y = 0$

$$x^3[n(n-1)(n-2)x^{n-3}] - 6x(nx^{n-1}) + 12x^n = 0$$

$$n(n-1)(n-2) - 6n + 12 = 0$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n - 6n + 12 = 0$$

$$n^3 - 3n^2 - 4n + 12 = 0$$

$$(n+2)(n-2)(n-3) = 0$$

$$n = -2, 2, 3$$

จะได้คำตอบคือ $y = x^{-2}$, $y = x^2$ และ $y = x^3$

ซึ่งคำตอบทั้ง 3 เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เพราะว่า

$$W(x^{-2}, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^2 & x^3 \\ -2x^{-3} & 2x & 3x^2 \\ 6x^{-4} & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

$$= x^{-2}(12x^2 - 6x^2) - x^2(-12x^{-2} - 18x^{-3}) + x^3(-4x^{-3} - 12x^{-q})$$

$$= 6 + 30 - 16$$

$$= 20 \neq 0$$

ดังนั้น คำตอบของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$Y = C_1x^{-2} + C_2x^2 + C_3x^3$$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent) หรือไม่

   1) $\sin ax,\ \cos ax$

   2) $1,\ x,\ x^2$

   3) $\ln x,\ x \ln x,\ x^2 \ln x$

   4) $e^{ax} \sin bx,\ e^{ax} \cos bx$

   5) $e^{ax}, e^{bx}, e^{cx},\ a \neq b, b \neq c, a \neq c$

2. จงแสดงว่าสมการดิฟเฟอเรนเชียล $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ มีคำตอบที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน 2 คำตอบซึ่งอยู่ในรูป $y = e^{ax}$

3. กำหนดสมการดิฟเฟอเรนเชียล $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = \cos x + 3\sin x$ และ มี $y = -\sin x$ เป็นคำตอบเฉพาะแล้ว จงหาคำตอบทั่วไปของสมการนี้

4. กำหนดสมการดิฟเฟอเรนเชียล $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ จงแสดงว่าคำตอบที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันอยู่ในรูป $y = e^{ax}$

5. กำหนดสมการดิฟเฟอเรนเชียล $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} - 8y = 0$ จงแสดงว่าคำตอบที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันของสมการที่กำหนดให้อยู่ในรูป $y = x^n e^{ax}$ มีเพียง 3 คำตอบเท่านั้น

4.3 การหาคำตอบของสมการเอกพันธ์ที่สัมประสิทธิ์เป็นตัวคงที่

กำหนดสมการเอกพันธ์เชิงเส้น

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_ny = 0$$

เมื่อ $P_0 \neq 0$, $P_1, P_2, \dots$ เป็นค่าคงที่

เพื่อสะดวกในการเขียนหรือการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลเพื่อหาคำตอบ ต่อไปเราจะใช้สัญลักษณ์ของตัวดำเนินการ $D, D^2, D^3, \dots, D^n$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ 1, 2, 3, ..., n นั่นคือ

$$Dy = \frac{dy}{dx}$$

$$D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$D^3y = \frac{d^3y}{dx^3}$$

....

....

$$D^ny = \frac{d^ny}{dx^n}$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวดำเนินการ $D, D^2, \dots, D^n$ เป็นตัวดำเนินการที่กระทำบน y ดังนั้น สมการข้างต้นจะเขียนได้ในรูป

$$(P_0D^n + P_1D^{n-1} + \dots + P_{n-1}D + P_n)y = 0$$

ซึ่งจะเห็นว่าพจน์ข้างหน้าเป็นฟังก์ชันของตัวแปร D ดังนั้น อาจเขียนสมการเสียใหม่ได้ว่า

$$F(D)y = 0$$

ดังนั้น สำหรับสมการเชิงเส้นแบบทั่วไปซึ่ง $Q(x) \neq 0$ เราจะได้สมการในรูปตัวดำเนินการ D เช่นเดียวกัน คือ

$$F(D)y = Q(x)$$

คุณสมบัติของตัวดำเนินการ D

ถ้า u, v เป็นฟังก์ชันของ x และมีอนุพันธ์ด้วย และ a เป็นค่าคงที่ตามใจชอบแล้ว จะได้ว่า

1) $D^n(u+v) = D^nu + D^nv$
2) $D^n(au) = aD^nu$
3) $F(D)(u+v) = F(D)u + F(D)v$
4) $F(D)(au) = aF(D)u$

ในบางครั้งเราเรียกคำตอบของสมการเอกพันธ์ว่าคำตอบประกอบ ซึ่งใช้แทนด้วย y_c ดังนั้น ในหัวข้อต่อไปนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการหาคำตอบประกอบ y_c หรือคำตอบทั่วไปของสมการ

$$F(D)y = 0$$

ถ้าให้ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นคำตอบของสมการ $F(D)y = 0$ n คำตอบที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันแล้วจะได้ว่าคำตอบ y_c คือ

$$y_c = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n$$

พิจารณาสมการ $F(D)y = 0$

แทน y ด้วย e^{mx} จะได้

$$D(e^{mx}) = me^{mx}$$

$$D^2(e^{mx}) = m^2e^{mx}$$

$$D^3(e^{mx}) = m^3e^{mx}$$

$$D^n(e^{mx}) = m^ne^{mx}$$

ดังนั้น $F(D)e^{mx} = F(m)e^{mx}$

ดังนั้น เมื่อแทน $y = e^{mx}$ ลงในสมการ $F(D)y = 0$ จะได้

$$F(D)e^{mx} = 0$$

$$F(m)e^{mx} = 0$$

$$F(m) = 0$$

ซึ่งเป็นสมการของตัวแปร m ซึ่งมีดีกรีเป็น n และเราเรียกสมการ $F(m) = 0$ นี้ว่า *สมการช่วย* (auxiliary equation) ของสมการ $F(D)y = 0$ เมื่อแก้สมการ $F(m) = 0$ จะได้ m ทั้งหมด n ค่า ซึ่งอาจเป็นทั้งค่าจริงหรือค่าจำนวนเชิงซ้อนก็ได้

สมมติว่าคำตอบของสมการช่วย $F(m) = 0$ ได้คำตอบออกมา n ค่า คือ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ เราจะได้คำตอบของสมการ $F(D)y = 0$ โดยแยกกล่าวเป็นกรณีต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : รากไม่ซ้ำกันเลย และเป็นรากจริง

คำตอบคือ $C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + \ldots + C_ne^{m_nx}$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y = 0$

วิธีทำ จะได้สมการในรูป D คือ

$$(D^2+D-6)y = 0$$

ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2+m-6 = 0$$

$$(m+3)(m-2) = 0$$

$$m = -3, 2$$

ดังนั้น คำตอบคือ $y = C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$

ตัวอย่าง 4.8 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y = 0$

วิธีทำ จะได้สมการในรูปของ D คือ

$$(D^3-D^2-4D+4)y = 0$$

ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^3-m^2-4m+4 = 0$$

$$m^2(m-1) - 4(m-1) = 0$$

$$(m-1)(m^2-4) = 0$$

$$(m-1)(m-2)(m+2) = 0$$

จะได้ $m = 1, 2, -2$

ดังนั้น คำตอบคือ $y = C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}$

กรณีที่ 2 : รากจริงซ้ำกัน

พิจารณาสมการ $(D^2-4D+4)y = 0$ จะเห็นว่าเมื่อให้ $y = e^{mx}$ ได้สมการช่วย คือ $m^2-4m+4 = 0$ ซึ่งได้ค่า m 2 ค่า คือ 2, 2 ดังนั้นคำตอบของสมการ $(D-4D+4)y = 0$ ซึ่งน่าจะเป็น $y = C_1e^{2x}+C_2e^{2x}$ แต่จะเห็นว่าคำตอบนี้รวมกันได้คือ $y = (C_1+C_2)e^{2x}$ $= C_3e^{2x}$ ซึ่งจะเห็นว่ามีเพียงคำตอบเดียว ดังนั้นการหาคำตอบแบบเดียวกับรากไม่ซ้ำจึงไม่ถูกต้อง

แต่อย่างไรก็ตาม ในการแก้ปัญหารากซ้ำเมื่อเราทราบราก ๆ หนึ่งแล้ว สมมติคือ $y_1(x)$ แล้ว เมื่อเราแทน $y = vy_1(x)$ ลงไปในสมการที่กำหนดให้ ค่า v ที่หาได้ออกมาจะทำให้เราได้คำตอบทั่วไปได้ จากตัวอย่างข้างต้นได้ว่า e^{2x} เป็นคำตอบ ๆ หนึ่งของ $F(D)y = 0$

แทนค่า $y = ve^{2x}$

$$Dy = v'e^{2x} + 2ve^{2x}$$

$$D^2y = v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x}$$

แทนค่าจะได้ $(v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x}) - 4(v'e^{2x} + 2ve^{2x}) + 4ve^{2x} = 0$

จะได้ $v''e^{2x} = 0$

$$v'' = 0$$

โดยการอินทิเกรตเทียบกับ x จะได้ (อินทิเกรต 2 ครั้ง)

$$v = C_1 + C_2x$$

ดังนั้นคำตอบคือ $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$

ดังนั้น สำหรับทั่ว ๆ ไปถ้ามีรากซ้ำ k ราก และมีรากคือ $m = m_1$ แล้ว จะได้คำตอบโดยวิธีการข้างต้น คือ

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1})e^{m_1x}$$

ตัวอย่าง 4.8 จงหาคำตอบของสมการ $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0$

วิธีทำ ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$

$$(m-1)^3 = 0$$

$$m = 1, 1, 1$$

เป็นกรณีที่รากซ้ำกัน 3 ตัว

ดังนั้น คำตอบคือ $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$

หรือ $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0$

วิธีทำ จะได้สมการในรูปของ D คือ

$$(D^3 - 2D^2 - 4D + 8)y = 0$$

ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = 0$$

โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือในการแยกตัวประกอบ

ให้ $m = 2$ จะได้ $\quad 8-8-8+8 = 0$

ดังนั้น $(m-2)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่ง

จะได้
$$(m-2)(m^2-4) = 0$$
$$(m-2)(m-2)(m+2) = 0$$

ได้ $m = -2, 2, 2$

ดังนั้น คำตอบคือ $y = C_1e^{-2x} + (C_2+C_3x)e^{2x}$

หรือ $y = C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$

กรณีที่ 3 : รากเป็นจำนวนเชิงซ้อนไม่ซ้ำกันเลย

จากสมการ $F(m) = 0$ ถ้ารากของสมการนี้เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วเราจะได้ว่า ค่าสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้นเป็นรากของสมการด้วย นั่นคือ ถ้า $a+bi$ เป็นรากของ $F(m) = 0$ แล้ว $a-bi$ เป็นรากของ $F(m) = 0$ ด้วย ดังนั้นสำหรับราก $a \pm bi$ คำตอบคือ

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{(a+bi)x} + C_2e^{(a-bi)x} \\ &= e^{ax}(C_1e^{bix} + C_2e^{-bix}) \\ &= e^{ax}\left[C_1(\cos bx+i\sin bx) + C_2(\cos bx-i\sin bx)\right] \\ &= e^{ax}\left[(C_1+C_2)\cos bx + i(C_1-C_2)\sin bx\right] \end{aligned}$$

ให้ $A = C_1+C_2$, $B = i(C_1-C_2)$ จะได้

$$y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$$

หมายเหตุ บางครั้งก็เขียนคำตอบของรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

$$\begin{aligned} y &= Pe^{ax}\sin(bx+Q) \\ &= Pe^{ax}\cos(bx+R) \end{aligned}$$

ซึ่งได้มาจากสูตรตรีโกณมิติ $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ และ $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ แล้วจัดรูปให้เหมือนกับคำตอบข้างบนได้

ตัวอย่าง 4.11 จงหาคำตอบของสมการ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

วิธีทำ จะได้สมการในรูปของ D คือ

$$(D^2-4D+5)y = 0$$

ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$= 2 \pm i$$

เป็นรากจินตภาพ ดังนั้น จะได้คำตอบ คือ

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

ตัวอย่าง 4.12 จงหาคำตอบของ $(D^4 - 5D^2 - 36)y = 0$

วิธีทำ ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^4 - 5m^2 - 36 = 0$$

$$(m^2 - 4)(m^2 + 9) = 0$$

$$(m + 2)(m - 2)(m + 3i)(m - 3i) = 0$$

$$m = \pm 2, \pm 3i$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$$

ตัวอย่าง 4.15 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

วิธีทำ จะได้สมการในรูปของ D คือ

$$(D^4 + D^3 + 2D^2 - D + 3)y = 0$$

ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^4 + m^3 + 2m^2 - m + 3 = 0$$

$$(m^2 + 2m + 3)(m^2 - m + 1) = 0$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}, \qquad m = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \qquad = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}i \qquad = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

ดังนั้น คำตอบของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$y = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x) + e^{\frac{1}{2}x}(C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

กรณีที่ 4 : รากเป็นจำนวนเชิงซ้อนและรากซ้ำ

เช่นเดียวกันกับกรณีที่รากเป็นจำนวนจริงและรากซ้ำ ดังนั้นคำตอบกรณีที่เป็นรากจำนวนเชิงซ้อนซ้ำกัน k ราก คือ

$$y = e^{ax}\left[(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \dots + A_kx^{k-1})\cos bx + (B_1 + B_2x + B_3x^2 + \dots + B_kx^{k-1})\sin bx\right]$$

ตัวอย่าง 4.14 จงหาคำตอบของสมการ $(D^2 - 2D + 5)^2 y = 0$

วิธีทำ ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$(m^2 - 2m + 5)^2 = 0$$

$$(m^2 - 2m + 5)(m^2 - 2m + 5) = 0$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2}, \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

$$m = 1 \pm 2i, \ 1 \pm 2i$$

เป็นกรณีรากจำนวนเชิงซ้อนและรากซ้ำ

ดังนั้น คำตอบคือ $y = e^x[(C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x]$

อย่างไรก็ตาม ปัญหาโจทย์ทั่ว ๆ ไปอาจมีรากที่เป็นทั้งจำนวนจริง ซ้ำหรือไม่ซ้ำ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซ้ำหรือไม่ซ้ำก็ได้ ในการหาคำตอบก็อาศัยหลักการอันเดิมแต่มีข้อที่น่าสังเกตอยู่อย่างหนึ่งก็คือ จำนวนค่าคงที่ตามใจชอบจะเท่ากับจำนวนรากหรือจำนวนดีกรีของสมการอนุพันธ์นั้น ๆ ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 4.15 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ $F(D)y = 0$ ซึ่งได้รากของสมการช่วยคือ $-1, 2, 3, 3, 3, 2 \pm 3i, 2 \pm 3i$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้มีทั้งหมด 9 ราก แบ่งได้ดังนี้

(1) ไม่ซ้ำ ; $m = -1, m = 2$

(2) ซ้ำกัน 3 ราก ; $m = 3$

(3) รากจำนวนเชิงซ้อนซ้ำกัน 2 ครั้ง ; $m = 2 \pm 3i$

จาก (1) – (3) จะได้คำตอบของสมการ คือ

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + (C_3 + C_4x + C_5x^2)e^{3x} + e^{2x}[(C_6 + C_7x)\cos 3x + (C_8 + C_9x)\sin 3x]$$

แบบฝึกหัด 4.2

จงหาคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้

1. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} = 0$
2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 6y = 0$
3. $(D^4 + 6D^3 + 5D^2 - 24D - 36)y = 0$
4. $(D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4)y = 0$
6 5. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} = 0$
6. $(D^2 + 2D - 15)y = 0$
7. $(D^2 - 4D + 13)y = 0$
8. $(D^3 - D^2 + 9D - 9)y = 0$
9. $(D^4 + 4D^2)y = 0$
10. $(D^6 + 9D^4 + 24D^2 + 16)y = 0$

4.4 การหาคำตอบของสมการ $F(D)y = Q(x)$ โดยที่ $Q(x) \neq 0$

การหาคำตอบของสมการ $F(D)y = 0$ เราได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อ 4.3 ในตอนนี้เป็นการหาคำตอบของสมการ $F(D)y = Q(x)$ ซึ่งคำตอบทั่วไป $y = y_c + y_p$ โดยที่ y_c คือคำตอบของสมการ $F(D)y = 0$ ส่วน y_p คือ คำตอบเฉพาะที่ได้มาจากสมการ $F(D)y = Q(x)$ เมื่อนำ y_c และ y_p มารวมกันจะได้คำตอบทั่วไปตามต้องการ

ข้อสรุป การหาคำตอบของสมการ $F(D)y = Q(x)$

(1) หา y_c จาก $F(D)y = 0$

(2) หา y_p

(3) คำตอบ $y = y_c + y_p$

ในตอนนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการหาคำตอบ y_p

การหาคำตอบเฉพาะ (y_p) ของสมการ $F(D)y = Q(x)$

การหาคำตอบเฉพาะของสมการ $F(D)y = Q(x)$ มีได้หลายแบบด้วยกัน ซึ่งในที่นี้จะได้แสดงวิธีการหาคำตอบเฉพาะไว้ 5 แบบ คือ

(1) วิธีการลดอันดับ (reduction of order method)

(2) วิธีการแยกเศษส่วนย่อย (partial fraction method)

(3) วิธีลัด (short method)

(4) วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (undetermined coefficients method)

(5) วิธีแปรตัวพารามิเตอร์ (variation of parameters method)

ซึ่งจะได้แยกกล่าวรายละเอียดของแต่ละวิธีดังนี้

(1) **วิธีการลดอันดับ** (reduction of order method)

จากสมการ $F(D)y = Q(x)$

สำหรับตัวดำเนินการ $F(D)$ จะมีตัวดำเนินการ $\frac{1}{F(D)}$ ซึ่งกระทำกับสมการข้างบนแล้วจะได้

$$\frac{1}{F(D)} \cdot F(D)y = y$$

ดังนั้น
$$y = \frac{1}{F(D)}Q(x)$$

เพราะว่า $F(D)$ สามารถแยกตัวประกอบได้ ดังนั้น อาจเขียนได้ว่า

$$Y = \frac{1}{F(D)} \cdot Q(x)$$

$$= \frac{1}{D-m_1} \cdot \frac{1}{D-m_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{D-m_n} Q(x)$$

ขั้นตอนของวิธีการลดรูปมีวิธีการแก้ปัญหาดังนี้

กำหนด	แก้สมการ	คำตอบ
$u = \frac{1}{D-m_n} Q(x)$	$\frac{du}{dx} - m_n u = Q(x)$	$u = e^{m_n x}\int Q(x)e^{-m_n x}dx$
$\overline{\quad m_{n-1}}$		$v = e^{m_{n-1}x}\int ue^{-m_{n-1}x}dx$
....	....	....
$y = \frac{1}{D-m_1} w$	$\frac{dy}{dx} - m_1 y = w$	$y = e^{m_1 x}\int we^{-m_1 x}dx$

สำหรับขั้นตอนสุดท้ายเมื่อหาค่า y ได้แล้วเขียนรวมทั้งหมดจะได้

$$y = e^{m_1 x}\int e^{(m_2-m_1)x}\int e^{(m_3-m_2)x} \ldots\ldots\ldots \int e^{(m_n-m_{n-1})x}\int Qe^{-m_n x}(dx)^n$$

เพื่อให้เข้าใจวิธีการข้างต้นดียิ่งขึ้นจะให้ดูวิธีการแก้ปัญหาของสมการเชิงเส้นดีกรี 2 ซึ่งอยู่ในรูป $(D-m_1)(D-m_2)y = Q$

จะได้ $$Y = \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)} Q$$

$$= \frac{1}{(D-m_1)} \frac{1}{(D-m_2)} Q$$

ให้ $$u = \frac{1}{D-m_2} Q$$

$$\frac{du}{dx} - m_2 u = Q$$

$$u = e^{m_2 x}\int Qe^{-m_2 x}dx$$

ให้ $$y = \frac{1}{D-m_1} u$$

$$\frac{dy}{dx} - m_1 y = u$$

$$Y = e^{m_1 x}\int ue^{-m_1 x}dx$$

แทนค่า u จะได้ $$Y = e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x}(e^{m_2 x}\int Qe^{-m_2 x}dx)dx$$

$$= e^{m_1 x}\int e^{(m_2-m_1)x}\int Qe^{-m_2 x}\,dxdx$$

$$= e^{m_1 x}\int e^{(m_2-m_1)x}\int Qe^{-m_2 x}(dx)^2$$

ตัวอย่าง 4.16 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(D^2-3D+2)y = e^{5x}$

วิธีทำ (1) หาคำตอบประกอบ y_c จาก $(D^2-3D+2)y = 0$

ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2-3m+2 = 0$$
$$(m-2)(m-1) = 0$$
$$m = 1, 2$$

ดังนั้น $y_c = C_1e^x + C_2e^{2x}$

(2) หาคำตอบเฉพาะ y_p

จาก
$$Y = \frac{1}{D^2-3D+2}e^{5x}$$
$$= \frac{1}{(D-1)(D-2)}e^{5x}$$
$$= \frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}e^{5x}$$
$$= e^x\int e^{(2-1)x}\int e^{5x}e^{-2x}(dx)^2$$
$$= e^x\int e^x\int e^{3x}dxdx$$
$$= e^x\int e^x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}e^x\int e^{4x}dx$$
$$= \frac{1}{3}e^x\left(\frac{1}{4}e^{4x}\right)$$
$$= \frac{1}{12}e^{5x}$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$y = C_1e^x + C_3e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$$

ตัวอย่าง 4.17 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(D^3-5D^2+8D-4)y = e^{2x}$

วิธีทำ (1) หาคำตอบ y_c จาก $(D^3-5D^2+8D-4)y = 0$

ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^3-5m^2+8m-4 = 0$$
$$(m-1)(m^2-4m+4) = 0$$
$$(m-1)(m-2)(m-2) = 0$$
$$m = 1, 2, 2$$

ดังนั้น $y_c = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{2x}$

(2) หาคำตอบเฉพาะ y_p

จาก
$$
\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{(D-1)(D-2)(D-2)}e^{2x} \\
&= \frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{D-2}e^{2x} \\
&= e^x\int e^{(2-1)x}\int e^{(2-2)x}\int e^{2x}e^{-2x}\,dx\,dx\,dx \\
&= e^x\int e^x\int e^0\int e^0dx\,dx\,dx \\
&= e^x\int e^x\int\int 1dx\,dx\,dx \\
&= e^x\int e^x\int xdx\,dx \\
&= e^x\int e^x\left(\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}e^x\int x^2e^xdx \\
&= \frac{1}{2}e^x(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - 2x + 2)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น คำตอบของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - 2x + 2)$$

หมายเหตุ $\int x^2e^xdx$ หาค่าได้โดยใช้เทคนิคอินทิเกรตแบบอินทิเกรตทีละส่วน (integration by part) ดูภาคผนวกท้ายเล่ม

ตัวอย่าง 4.18 จงหาคำตอบของสมการ $(D^2+9)y = x\cos x$

วิธีทำ (1) หาคำตอบประกอบ y_2 จาก $(D^2+9)y = 0$

ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการช่วย คือ

$$
\begin{aligned}
m^2+9 &= 0 \\
(m+3i)(m-3i) &= 0 \\
m &= \pm 3i
\end{aligned}
$$

จะได้ $y_c = C, \cos 3x + C_2\sin 3x$

(2) **หาคำตอบเฉพาะ y_p**

จาก $(D^2+9)y = x\cos x$

$$y_p = \frac{1}{D^2+9}x\cos x$$

$$= \frac{1}{D+3i}\cdot\frac{1}{D-3i}x\cos x$$

$$= e^{-3ix}\int e^{(3i+3i)x}\int x\cos x\, e^{-3ix}\,dx\,dx$$

$$= e^{-3ix}\int e^{6ix}\int x\cos x\, e^{-3ix}\,dx\,dx$$

จาก $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ดังนั้น จะได้

$$y_p = \frac{1}{2}e^{-3ix}\int e^{6ix}\int x(e^{ix}+e^{-ix})e^{-3ix}dx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{-3ix}\int e^{6ix}\int (xe^{-2ix}+xe^{-4ix})dx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{-3ix}\int e^{6ix}\left(\frac{1}{2}ixe^{-2ix}+\frac{1}{4}e^{-2ix}+\frac{1}{4}ixe^{-4ix}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}e^{-4ix}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{-3ix}\int\left(\frac{1}{2}ixe^{4ix}+\frac{1}{4}e^{4ix}+\frac{1}{4}ixe^{2ix}+\frac{1}{16}e^{2ix}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{-3ix}\left(\frac{1}{8}xe^{4ix}+\frac{1}{32}ie^{4ix}-\frac{1}{16}ie^{4ix}+\frac{1}{8}xe^{2ix}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}ie^{2ix}-\frac{1}{32}ie^{2ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}x(e^{ix}+e^{-ix}) - \frac{1}{64}i(e^{ix}-e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{8}x\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการในโจทย์คือ

$$Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x$$

(2) **วิธีการทำเป็นเศษส่วนย่อย** (partial fraction method)

จาก $F(D)y = Q(x)$

$$y = \frac{1}{F(D)} Q(x)$$

$$= \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2) \ . \ . \ . \ (D-m_n)} Q(x)$$

$$= \left(\frac{A_1}{D-m_1} + \frac{A_2}{D-m_2} + \cdot \cdot + \frac{A_n}{D-m_n}\right) Q(x)$$

ให้ $y_1 = \frac{A_1}{D-m_1} Q(x)$

ดังนั้น $\frac{dy_1}{dx} - m_1 y_1 = A_1 Q(x)$

$$y_1 = A_1 e^{m_1 x} \int Q(x) e^{-m_1 x} dx$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $y_2, y_3, \ldots \ y_n$ จะได้

$$y_2 = A_2 e^{m_2 x} \int Q(x) e^{-m_2 x} dx$$

....

....

$$y_n = A_n e^{m_n x} \int Q(x) e^{-m_n x} dx$$

ดังนั้น คำตอบเฉพาะ y_p หาได้จาก

$$y_p = y_1 + y_2 + \cdot \ \cdot \ \cdot + y_n$$

$$= A_1 e^{m_1 x} \int Q(x) e^{-m_1 x} dx \ + \ A_2 e^{m_2 x} \int Q(x) e^{-m_2 x} dx$$

$$+ \ \ldots \ + \ A_n e^{m_n x} \int Q(x) e^{-m_n x} dx$$

ตัวอย่าง 4.19 จงหาคำตอบเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียลในตัวอย่าง 4.16 โดยใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อย

วิธีทำ จากสมการ $(D^2 - 3D + 2)y = e^{5x}$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-2)} e^{5x}$$

$$= \left(-\frac{1}{D-1} + \frac{1}{D-2}\right) e^{5x}$$

(ดูวิธีการแยกเศษส่วนย่อยในภาคผนวกท้ายเล่ม)

$$= -e^{x} \int e^{5x} e^{-x} dx + e^{2x} \int e^{5x} e^{-2x} dx$$

$$= -e^{x} \int e^{4x} dx + e^{2x} \int e^{3x} dx$$

$$= -e^{x} \left(\frac{1}{4} e^{4x}\right) + e^{2x} \left(\frac{1}{3} e^{3x}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{5x}$$

$$= \frac{1}{12}e^{5x}$$

ตัวอย่าง 4.20 จงหาคำตอบเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(D^2+5D+4)y = 2x-3$

94

วิธีทำ จาก $(D^2+5D+4)y = 2x-3$

$$y_p = \frac{1}{D^2+5D+4}(2x-3)$$

$$= \frac{1}{(D+1)(D+4)}2x-3$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{D+1} - \frac{1}{D+4}\right]2x-3$$

$$= \frac{1}{3}e^{-x}\int(2x-3)e^{x}dx - \frac{1}{3}e^{-4x}\int(2x-3)e^{4x}dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{-x}\int(2xe^{x}-3e^{x})dx - \frac{1}{3}e^{-4x}\int(2xe^{4x}-3e^{4x})dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{-x}(2xe^{x}-2e^{x}-3e^{x}) - \frac{1}{3}e^{-4x}\left(\frac{xe^{4x}}{2}-\frac{e^{4x}}{8}-\frac{3}{4}e^{4x}\right)$$

$$= \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{7}{24}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{11}{8}$$

คำตอบเฉพาะคือ $y_p = \frac{1}{2}x - \frac{11}{8}$

แต่อย่างไรก็ตาม ในการแยกเศษส่วนย่อยถ้าเกิดมีตัวประกอบซ้ำ เช่น $\frac{1}{(D-1)(D-2)(D-2)}$ ซึ่งเมื่อใช้การแยกเป็นเศษส่วนย่อยแล้วจะมีพจน์ $\frac{A}{(D-2)^2}$ ซึ่งการหาค่า $\frac{A}{(D-2)^2}Q(x)$ จะหาแบบวิธีข้างต้นไม่ได้ แต่อย่างไรก็ตามเราใช้วิธีการลดอันดับแก้ปัญหาได้เสมอ

(3) วิธีลัด (Short method)

วิธีที่จะกล่าวต่อไปนี้ ใช้แก้ปัญหาโจทย์สมการเชิงเส้น $F(D)y = Q(x)$ ซึ่ง $Q(x)$ มีรูปเฉพาะดังต่อไปนี้เท่านั้น

(1) $Q(x)$ อยู่ในรูป e^{ax}

(2) $Q(x)$ อยู่ในรูป $\sin(ax+b)$ หรือ $\cos(ax+b)$

(3) $Q(x)$ อยู่ในรูป x^m

(4) Q(x) อยู่ในรูป $e^{ax}V(x)$

(5) Q(x) อยู่ในรูป $x\,V(x)$

ซึ่งจะแยกกล่าวรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1) Q(x) อยู่ในรูป e^{ax}

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนด $F(D)y = e^{ax}$ แล้วคำตอบเฉพาะ

$$y = \frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{F(a)}e^{ax}\ ;\ F(a) \neq 0$$

พิสูจน์ สำหรับ $y = e^{ax}$

$$Dy = ae^{ax}$$

$$D^2y = a^2e^{ax}$$

....

....

$$D^ny = a^ne^{ax}$$

ดังนั้น $F(D)e^{ax} = F(a)e^{ax}$

จะได้ว่า $\frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{F(a)}e^{ax}$

ตัวอย่าง 4.21 จงแก้สมการ

$$(D^3-2D^2-5D+6)y = e^{4x}$$

วิธีทำ จากโจทย์ $(D^3-2D^2-5D+6)y = e^{4x}$

คำตอบประกอบได้จากการให้ $y = e^{mx}$ แทนในสมการ $(D^3-2D^2-5D+6)y = 0$ ได้สมการช่วยคือ

$$m^3-2m^2-5m+6 = 0$$

$$(m-1)(m^2-m-6) = 0$$

$$(m-1)(m-3)(m+2) = 0$$

$$m = -2,\ 1,\ 3$$

คำตอบประกอบ $y_c = C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+C_3e^{3x}$

คำตอบเฉพาะ y_p ได้จาก

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}e^{4x}$$

$$= \frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)}e^{4x}$$

$$= \frac{1}{3\cdot 1\cdot 6}\, e^{4x}$$

$$= \frac{1}{18}\, e^{4x}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x} + \frac{1}{18}e^{4x}$$

ตัวอย่าง 4.22 จงหาคำตอบของสมการ $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = (e^{2x} + 3)^2$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 4.21 จะได้คำตอบประกอบ y_c คือ

$$y_c = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x}$$

คำตอบเฉพาะ y_p หาได้จาก

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}\,(e^{2x}+3)^2 \\
&= \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}\,(e^{4x}+6e^{2x}+9) \\
&= \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}\,e^{4x} + \frac{6}{(D-1)(D-3)(D+2)}\,e^{2x} \\
&\quad + \frac{9}{(D-1)(D-3)(D+2)}\,e^{0x} \\
&= \frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)}\,e^{4x} + \frac{6}{(2-1)(2-3)(2+2)}\,e^{2x} \\
&\quad + \frac{9}{(0-1)(0-3)(0+2)}\,e^{0x} \\
&= \overline{18}\,e_{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการในโจทย์ คือ

$$Y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x} + \frac{1}{18}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$$

อย่างไรก็ตามถ้าเกิดกรณีที่ $F(a) = 0$ แล้วจะใช้วิธีการนี้ไม่ได้ แต่ก็สามารถดึงเอาตัวประกอบที่ทำให้ส่วนเป็นศูนย์ออกมาเสียก่อนแล้วใช้ทฤษฎีบท เฉพาะตัวประกอบที่เหลือสุดท้ายก็ใช้วิธีการลดอันดับ หาคำตอบต่อไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้.

ตัวอย่าง 4.23 จงหาคำตอบของสมการ $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^{3x}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 4.21 จะได้ว่าคำตอบประกอบ y_c คือ

$$y_c = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x}$$

สำหรับคำตอบเฉพาะ y_p ได้จาก

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{3x}$$

แต่จะเห็นว่า $F(3) = 0$ หาค่า y_p โดยทฤษฎีบท 4.2 ไม่ได้
อย่างไรก็ตามถ้าจัดรูปใหม่ จะได้

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{(D-3)}\left(\frac{1}{(D-1)(D+2)} e^{3x}\right) \\
&= \frac{1}{D-3}\left(\frac{1}{(3-1)(3+2)} e^{3x}\right) \\
&= \frac{1}{D-3}\left(\frac{1}{2\cdot 5} e^{3x}\right) \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{D-3} e^{3x}\right) \\
&= \frac{1}{10} e^{3x}\int e^{3x}e^{-3x}dx \\
&= \frac{1}{10} e^{3x}\int 1\, x \\
&= \frac{x}{10} e^{3x}
\end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการคือ

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x} + \frac{x}{10}e^{3x}$$

ตัวอย่าง 4.24 จงแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล $(D^3-5D^2+8D-4)y = e^{2x}+2e^{x}+3e^{-x}$

วิธีทำ หาคำตอบประกอบ y_c ได้จากสมการ $(D^3-5D^2+8D-4)y = 0$

ให้ $y = e^{mx}$ ได้สมการช่วยคือ

$$\begin{aligned}
m^3-5m^2+8m-4 &= 0 \\
(m-1)(m^2-4m+4) &= 0 \\
(m-1)(m-2)(m-2) &= 0 \\
m &= 1,\ 2,\ 2
\end{aligned}$$

คำตอบประกอบคือ $y_c = C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$
คำตอบเฉพาะหาได้จาก

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{(D-1)(D-2)(D-2)} (e^{2x}+2e^{x}+3e^{-x}) \\
&= \frac{1}{(D-1)(D-2)(D-2)} e^{2x} + \frac{2}{(D-1)(D-2)(D-2)} e^{x}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{(D-1)(D-2)(D-2)} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D-2)}\left(\frac{1}{D-1} e^{2x}\right) + \frac{2}{D-1}\left(\frac{1}{(D-2)(D-2)} e^{x}\right)$$

$$+ \frac{3}{(D-1)(D-2)(D-2)} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D-2)}\left(\frac{e^{2x}}{2-1}\right) + \frac{2}{D-1}\left(\frac{1}{(1-2)(1-2)} e^{x}\right)$$

$$+ \frac{3}{(-1-1)(-1-2)(-1-2)} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)^2} e^{2x} + \frac{2}{D-1} e^{x} - \frac{1}{6} e^{-x}$$

$$= e^{2x}\int\int dxdx + e^{x}\int dx - \frac{1}{6}e^{-x}$$

$$= e^{2x}\cdot\frac{x^2}{2} + xe^{x} - \frac{1}{6}e^{-x}$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x} + xe^{x} - \frac{1}{6}e^{-x}$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการในโจทย์ คือ

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x} + \frac{x^2}{2}e^{2x} + xe^{x} - \frac{1}{6}e^{-x}$$

3.2) $Q(x)$ อยู่ในรูป $\cos(ax+b)$ หรือ $\sin(ax+b)$

ทฤษฎีบท 4.8 กำหนด $F(D^2)y = \cos(ax+b)$ (หรือ $\sin(ax+b)$)

แล้วคำตอบเฉพาะ = $y = \frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b)$

$$= \frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b),\ F(-a^2) \neq 0$$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)$

พิสูจน์ สำหรับ $y = \cos(ax+b)$

$Dy = -a\sin(ax+b)$

$D^2y = -a^2\cos(ax+b)$

ดังนั้น $F(D^2)y = F(-a^2)\cos(ax+b)$

นั่นคือ $F(D^2)\cos(ax+b) = F(-a^2)\cos(ax+b)$

จะได้ว่า $\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b)$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $y = \sin(ax+b)$ จะได้

$$\frac{1}{F(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \sin(ax+b)$$

ตัวอย่าง 4.26 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ $(D^2+4y) = \sin 3x$

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้ คำตอบประกอบ y_c คือ

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

และคำตอบเฉพาะ y_p ได้จาก

$$y_p = \frac{1}{D^2+4} \sin 3x$$

$$= \frac{1}{-(3^2)+4} \sin 3x$$

$$= -\frac{1}{5} \sin 3x$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการ คือ

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$$

ตัวอย่าง 4.28 จงหาคำตอบของสมการ $(D^4+10D^2+9)y = \cos(2x-1)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้

$$(D^2+1)(D^2+9)y = \cos(2x-1)$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการคือ

$$y_c = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$$

คำตอบเฉพาะ y_p ได้จาก

$$y_p = \frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)} \cos(2x-1)$$

$$= \frac{1}{(-2^2+1)(-2^2+9)} \cos(2x-1)$$

$$= \frac{1}{(-3)(5)} \cos(2x$$

$$= -\frac{1}{15} \cos(2x-1)$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการ คือ

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x - \frac{1}{15} \cos(2x-1)$$

ในการหาคำตอบของสมการ $F(D)y = Q(x)$ เมื่อ $Q(x)$ อยู่ในรูป $\cos(ax+b)$ หรือ $\sin(ax+b)$ จะเห็นว่า ส่วนต้องแยกตัวประกอบได้ในรูป D^2 และ $F(-a^2) \neq 0$ แต่อย่างไรก็ตามถ้าส่วนไม่ได้อยู่ในรูปตัวประกอบของ D^2 หรือ $F(-a^2) = 0$ เราก็สามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้ คือสำหรับถ้ารูปส่วนไม่ได้อยู่ในพจน์ D^2 เราทำให้เป็นรูป D^2 ได้โดยใช้ตัวคอนจูเกต (conjugate) คูณทั้งเศษและส่วน ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{D-1}\cos 2x \\
&= \frac{D+1}{D^2-1}\cos 2x \\
&= D+1\left(\frac{1}{D^2-1}\cos 2x\right) \\
&= D+1\left(\frac{1}{-2^2-1}\cos 2x\right) \\
&= D+1\left(-\frac{1}{5}\cos 2x\right) \\
&= -\frac{1}{5}(-2\sin 2x + \cos 2x)
\end{aligned}$$

ส่วนกรณีที่ $F(-a^2) = 0$ ก็สามารถแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการลดอันดับหรือแยกเศษส่วนย่อย และอาศัยสูตรต่อไปนี้ช่วยในการแก้ปัญหาได้

$$\begin{aligned}
e^{iax} &= \cos ax + i\sin ax \\
\cos ax &= \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2} \\
\sin ax &= \frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 4.27 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ $(D^2+4)y = \cos 2x$

วิธีทำ คำตอบประกอบ คือ

$$y_c = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

คำตอบเฉพาะได้จาก

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\cos 2x$$

จะเห็นว่าใช้ทฤษฎีบท 4.3 ไม่ได้เพราะว่า $F(-a^2) = F(-2^2) = -4+4 = 0$ ดังนั้นใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อยจะได้

$$y_p = \frac{i}{4}\left[\frac{1}{D+2i} - \frac{1}{D-2i}\right]\cos 2x$$

$$= \frac{i}{4}e^{-2ix}\int \cos 2x\, e^{2ix}dx - \frac{i}{4}e^{2ix}\int \cos 2x\, e^{-2ix}dx.$$

$$= \frac{i}{4}e^{-2ix}\int \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)e^{2ix}dx$$

$$- \frac{i}{4}e^{2ix}\int \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)e^{-2ix}dx$$

$$= \frac{i}{8}e^{-2ix}\int (e^{4ix}+1)dx - \frac{i}{8}e^{2ix}\int (1+e^{-4ix})dx$$

$$= \frac{i}{8}e^{-2ix}\left(\frac{e^{4ix}}{4i}+x\right) - \frac{i}{8}e^{2ix}\left(x-\frac{e^{-4ix}}{4i}\right)$$

$$= \frac{i}{16}\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{x}{4}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{x}{4}\sin 2x$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x$$ โดยไม่รวมพจน์

$\frac{1}{16}\cos 2x$ เพราะว่าซ้ำกับพจน์ในคำตอบประกอบ

3.3) $Q(x)$ อยู่ในรูป x^m

จากสมการ $F(D)y = x^m$

$$Y = \frac{1}{F(D)}x^m$$

$$= (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_m D^m + \ldots)x^m$$

ซึ่ง $(a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_m D^m + \ldots)$ ได้จากการใช้ F(D) ไปหาร 1 โดยตรง เช่น

$$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{D^2 - D + 1} = \frac{1}{1 - D + D^2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 + D - D^3 - D^4 \\
\hline
1 - D + D^2 & 1 \\
 & \underline{1 - D + D^2} \\
 & \quad D - D^2 \\
 & \quad \underline{D - D^2 + D^3} \\
 & \qquad -D^3 \\
 & \qquad \underline{-D^3 + D^4 - D^5}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
-D^4+D^5 \\
\underline{-D^4+D^5-D^6} \\
D^6
\end{array}
$$

ดังนั้น $\dfrac{1}{F(D)} = \dfrac{1}{1-D+D^2} = (1+D-D^3-D^4+\ldots..)$

ซึ่งจะเห็นว่าการตั้งหารเราจะคำนวณเพียงเฉพาะพจน์ D^m เท่านั้น เพราะว่าพจน์ตั้งแต่ m ขึ้นไปคือ $D^{m+1}, D^{m+2}, \ldots$ เมื่อกระทำกับ x^m แล้ว มีค่าเท่ากับศูนย์ทั้งสิ้น

นั่นคือ $D^n x^m = 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า $n > m$.

ตัวอย่าง 4.28 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ $(2D^2+2D+3)y = x^2+2x-1$

วิธีทำ (1) หาคำตอบประกอบ y_c จาก $(2D^2+2D+3)y = 0$

ให้ $y = e^{mx}$ ได้สมการช่วย คือ

$$2m^2+2m+3 = 0$$

$$m = \frac{-2\pm\sqrt{4-24}}{4}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{5}\,i}{2}$$

ดังนั้น คำตอบประกอบ y_c คือ

$$y_c = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)$$

(2) หาคำตอบเฉพาะ y_p จาก

$$Y = \frac{1}{2D^2+2D+3}(x^2+2x-1)$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{2}{27}D^2+\ldots \\
\hline
3+2D+2D^2 & 1 \\
 & \underline{1+\frac{2}{3}D+\frac{2}{3}D^2} \\
 & -\frac{2}{3}D-\frac{2}{3}D^2 \\
 & \underline{-\frac{2}{3}D-\frac{4}{9}D^2-\frac{4}{9}D^3} \\
 & -\frac{2}{9}D^2+\frac{4}{9}D^3
\end{array}
$$

$$-\frac{2}{9}D^2-\frac{4}{27}D^3-\frac{4}{27}D^4$$

$$\frac{16}{27}D^3+\frac{4}{27}D^4$$

....

$$y_p = \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{2}{27}D^2+\ldots\right)(x^2+2x-1)$$

$$y_p = \frac{1}{3}(x^2+2x-1) - \frac{2}{9}D(x^2+2x-1) - \frac{2}{27}D^2(x^2+2x-1)$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x-1) - \frac{2}{9}(2x+2) - \frac{2}{27}(2)$$

$$= \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}-\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}-\frac{4}{27}$$

$$= \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{25}{27}$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการในโจทย์คือ

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right) + \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{25}{27}$$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 4.28 จะเห็นว่าเราใช้เฉพาะพจน์ D^2 เพราะว่า $D^3(x^2+2x-1)=0$

ตัวอย่าง 4.28 จงหาคำตอบเฉพาะของสมการ $(D^3-2D+4)y = x^4+3x^2-5x+2$

วิธีทำ หาคำตอบเฉพาะได้จาก

$$y = \frac{1}{D^3-2D+4}(x^4+3x^2-5x+2)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{4}+\frac{1}{8}D+\frac{1}{16}D^2-\frac{1}{32}D^3-\frac{3}{64}D^4+\ldots \\
\hline
4-2D+D^3 & 1 \\
 & 1-\frac{1}{2}D \qquad +\frac{1}{4}D^3 \\
\cline{2-2}
 & \frac{1}{2}D \qquad -\frac{1}{4}D^3 \\
 & \frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2 \qquad +\frac{1}{8}D^4 \\
\cline{2-2}
 & \frac{1}{4}D^2-\frac{1}{4}D^3-\frac{1}{8}D^4
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{8}D^3 \qquad + \frac{1}{16}D^5 \\
\hline
\quad -\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{8}D^4 - \frac{1}{16}D^5 \\
\quad -\frac{1}{8}D^3 + \frac{1}{16}D^4 \qquad -\frac{1}{32}D^6 \\
\hline
\qquad -\frac{3}{16}D^4 - \frac{1}{16}D^5 + \frac{1}{32}D^6 \\
\qquad -\frac{3}{16}D^4 + \frac{3}{32}D^5 \qquad -\frac{3}{64}D^7 \\
\hline
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

$$Y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}D + \frac{1}{16}D^2 - \frac{1}{32}D^3 - \frac{3}{64}D^4 + \ldots\right)(x^4 + 3x^2 - 5x + 2)$$

$$
\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{4}(x^4 + 3x^2 - 5x + 2) + \frac{1}{8}D(x^4 + 3x^2 - 5x + 2) \\
&\quad + \frac{1}{16}D^2(x^4 + 3x^2 - 5x + 2) - \frac{1}{32}D^3(x^4 + 3x^2 - 5x + 2) \\
&\quad - \frac{3}{64}D^4(x^2 + 3x^2 - 5x + 2) \\
&= \frac{1}{4}(x^4 + 3x^2 - 5x + 2) + \frac{1}{8}(4x^3 + 6x - 5) + \frac{1}{16}(12x^2 + 6) \\
&\quad \frac{1}{32}(24x) - \frac{3}{64}(24) \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{32}{2}x - \frac{5}{4}x - \frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

(3.4) Q(x) อยู่ในรูป $e^{ax}V(x)$; V(x) เป็นฟังก์ชันของ x

ทฤษฎีบท 4.4 ทฤษฎีบทการเลื่อนตัวดำเนินการ (operator - shift method)
ถ้า U(x) เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว จะได้ว่า

(1) $F(D)\left[e^{ax}U(x)\right] = e^{ax}F(D + a)U(x)$

และ (2) $\frac{1}{F(D)}\left[e^{ax}V(x)\right] = e^{ax}\left[\frac{1}{F(D+a)}V(x)\right]$

พิสูจน์ ให้

$$
\begin{aligned}
Y &= e^{ax}U(x) \\
Dy &= e^{ax}DU + ae^{ax}U \\
&= e^{ax}(D+a)U
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $D[e^{ax}U] = e^{ax}(D+a)U$

$$D^2y = e^{ax}D^2U + 2ae^{ax}DU + a^2e^{ax}U$$
$$= e^{ax}(D^2 + 2aD + a^2)U$$
$$= e^{ax}(D + a)^2U$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$D^ny = e^{ax}(D+a)^nU$$

ดังนั้น จะได้ว่า $F(D)y = F(D)\,[e^{ax}U(x)]$

$$= e^{ax}F(D+a)\,U(x) \qquad \ldots (*$$

ให้ $V(x) = F(D+a)\,U(x)$

จะได้ว่า $U(x) = \frac{1}{F(D+a)}V(x)$

แทนค่าใน (*) จะได้ว่า

$$F(D)\left[e^{ax}\cdot\frac{1}{F(D+a)}V(x)\right] = e^{ax}F(D+a)\cdot\frac{1}{F(D+a)}V(x)$$
$$= e^{ax}V(x)$$
$$e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}V(x) = \frac{1}{F(D)}\left[e^{ax}V(x)\right]$$

ทฤษฎีบทนี้เปรียบเสมือนการเลื่อน e^{ax} มาไว้ข้างหน้าแล้วเปลี่ยน $\frac{1}{F(D)}$ เป็น $\frac{1}{F(D+a)}$ และนำมากระทำกับ $V(x)$ ต่อไป ให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.30 จงหาคำตอบเฉพาะของสมการ $(D^2+2D+4)y = e^x \sin 2x$

วิธีทำ คำตอบเฉพาะได้จาก

$$Y = \frac{1}{D^2+2D+4}e^x\sin 2x$$
$$= e^x\frac{1}{(D+1)^2+2(D+1)+4}\sin 2x$$
$$= e^x\frac{1}{D^2+4D+7}\sin 2x$$
$$= e^x\frac{1}{-2^2+4D+7}\sin 2x$$
$$= e^x\frac{1}{4D+3}\sin 2x$$
$$= e^x\frac{4D-3}{16D^2-9}\sin 2x$$

$$= e^x \frac{(4D-3)}{-64-9}\sin 2x$$

$$= \frac{e^x}{-73}(4D\sin 2x - 3\sin 2x)$$

$$= \frac{e^x}{-73}(4\cdot 2\cos 2x - 3\sin 2x)$$

$$= -\frac{e^x}{73}(8\cos 2x - 3\sin 2x)$$

ตัวอย่าง 4.91 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 4xe^{3x} - 8e^x\cos 2x$

วิธีทำ เขียนสมการในรูปตัวดำเนินการ D จะได้

$$(D^2 - 4D + 3)y = 4xe^{3x} - 8e^x\cos 2x$$

คำตอบประกอบของสมการ คือ $y_c = C_1e^x + C_2e^{3x}$

คำตอบเฉพาะได้จาก

$$Y = \frac{1}{D^2-4D+3}(4xe^{3x} - 8e^x\cos 2x)$$

$$= 4\left[\frac{1}{D^2-4D+3}(e^{3x}x)\right] - 8\left[\frac{1}{D^2-4D+3}(e^x\cos 2x)\right]$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2 - 4(D+3) + 3}(x) - 8e^x\frac{1}{(D+1)^2 - 4(D+1) + 3}\cos 2x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{D^2+2D}x - 8e^x\frac{1}{D^2-2D}\cos 2x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D+2}(x)\right) - 8e^x\frac{1}{-2^2-2D}\cos 2x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{D}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}D + \ldots\right)(x)\right] + \frac{8}{2}e^x\frac{1}{D+2}\cos 2x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + 4e^x\frac{D-2}{D^2-4}\cos 2x$$

$$= 4e^{3x}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right) + 4e^x\frac{D-2}{-8}\cos 2x$$

$$= 4e^{3x}\left(\frac{x^2-x}{4}\right) + 4e^x\left(\frac{-2\sin 2x - 2\cos 2x}{-8}\right)$$

$$= e^{3x}(x^2-x) + e^x(\sin 2x + \cos 2x)$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$Y = C_1e^x + C_2e^{3x} + e^{3x}(x^2-x) + e^x(\sin 2x + \cos 2x)$$

หมายเหตุ $\frac{1}{D}F(x) = \int F(x)\,dx$

(3.5) $Q(x)$ อยู่ในรูป $xV(x)$

ทฤษฎีบท 4.5 กำหนดให้ $F(D)y = xV(x)$ แล้ว จะได้ว่า

$$y = \frac{1}{F(D)}xV(x) = x\frac{1}{F(D)}V(x) - \frac{F'(D)}{[F(D)]^2}V(x)$$

พิสูจน์ ในตอนแรกจะพิสูจน์ว่า $F(D)xU = xF(D)U + F'(D)U$

ให้
$$y = xU$$
$$Dy = xDU + U$$
$$D^2y = xD^2U + 2DU$$
$$D^3y = xD^3U + 3D^2U$$
....

....
$$D^ny = xD^nU + nD^{n-1}U$$

ดังนั้น $F(D)y = xF(D)U + F'(D)U$

นั่นคือ $F(D)xU = xF(D)U + F'(D)U$ ....(*)

ให้ $V(x) = F(D)U(x)$

แทนค่าใน (*) จะได้

$$F(D)x\frac{1}{F(D)}V(x) = xV(x) + F'(D)\frac{1}{F(D)}V(x)$$
$$xV(x) = F(D)x\frac{1}{F(D)}V(x) - \frac{F'(D)}{F(D)}V(x)$$
$$\frac{1}{F(D)}xV(x) = \frac{1}{F(D)}F(D)x\frac{1}{F(D)}V(x) - \frac{1}{F(D)}\frac{F'(D)}{F(D)}V(x)$$
$$= x\frac{1}{F(D)}V(x) - \frac{F'(D)}{[F(D)]^2}V(x)$$

ตัวอย่าง 4.32 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(D^2 + 3D + 2)y = x\sin 2x$

วิธีทำ จากสมการ $(D^2+3D+2)y = 0$ จะได้คำตอบประกอบ คือ

$$y_c = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

คำตอบเฉพาะได้จาก

$$y = \frac{1}{D^2+3D+2}x\sin 2x$$
$$= x\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x - \frac{2D+3}{(D^2+3D+2)^2}\sin 2x$$

$$x\frac{1}{-4+3D+2}\sin 2x - \frac{2D+3}{D^4+6D^3+13D^2+12D+4}\sin 2x$$

$$= x\frac{1}{3D-2}\sin 2x - \frac{(2D+3)\sin 2x}{(-4)^2+6(-4)D+13(-4)+12D+4}$$

$$= x\frac{3D+2}{9D^2-4}\sin 2x + \frac{(2D+3)}{12D+32}\sin 2x$$

$$= x\frac{(3D+2)}{-40}\sin 2x + \frac{1}{4}\frac{(2D+3)(3D-8)}{9D^2-64}\sin 2x$$

$$\frac{(6\cos 2x + 2\sin 2x)}{-40} + \frac{(6D^2-7D-24)}{-400}\sin 2x$$

$$= \frac{x}{20}(3\cos 2x + \sin 2x) + \frac{24\sin 2x + 7\cos 2x}{200}$$

$$= -\frac{(30x-7)}{200}\cos 2x - \frac{5x-12}{100}\sin 2x$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - \frac{(30x-7)}{200}\cos 2x - \left(\frac{5x-12}{100}\right)\sin 2x$$

(4) วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (undetermined coefficient method)

จากสมการ $F(D)y = Q(x)$ เรากำหนดให้คำตอบคือ $y_p = A_1U_1(x) + A_2U_2(x) + \ldots + A_mU_m(x)$ ซึ่ง $U_1(x), U_2(x), \ldots, U_m(x)$ เป็นพจน์ของ $Q(x)$ หรือพจน์ที่ได้จากการดิฟเฟอเรนทิเอต $Q(x)$ ต่อไปเรื่อย ๆ และ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ เป็นค่าคงที่

หลังจากนั้นนำคำตอบ y_p แทนลงในสมการ $F(D)y = Q(x)$ แล้วเทียบสัมประสิทธิ์หาค่าคงที่ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ จะได้คำตอบตามต้องการ

พิจารณาตัวอย่างของ $Q(x)$ และการสมมติ y_p

ตัวอย่าง $Q(x)$	**การสมมติ** y_p
1. $Q(x) = x^3$	$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ ได้จากการหาอนุพันธ์ของ x^3 ต่อไปเรื่อย $x^3, 3x^2, 6x, 6$ (คิดเฉพาะตัวแปรค่าคงที่ไม่ต้องนำมาเขียน)
2. $Q(x) = e^x + e^{3x}$	$y_p = Ae^x + Be^{3x}$
3. $Q(x) = \sin 4x$	$y_p = A\sin 4x + B\cos 4x$
4. $Q(x) = e^{2x}\sin 3x$	$y_p = A_1e^{2x}\sin 3x + A_2e^{2x}\cos 3x$

แต่อย่างไรก็ตาม สำหรับฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์แล้วไม่สิ้นสุดคือ มีอนุพันธ์เป็นจำนวนอนันต์ การใช้เทียบสัมประสิทธิ์ทำไม่ได้ แต่เราอาจหาคำตอบโดยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปในหัวข้อที่ (5)

สำหรับวิธีเทียบสัมประสิทธิ์แยกกล่าวรายละเอียดดังนี้

(1) พจน์ของ $Q(x)$ ไม่เหมือนกันกับพจน์ของคำตอบประกอบ y_c เลย ในกรณีแบบนี้เราสมมติ y_p แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ได้เลย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.33 จงหาคำตอบของสมการ $(D^2-2D)y = e^x \sin x$

วิธีทำ ให้ $y = e^{mx}$ สำหรับสมการ $(D^2-2D)y = 0$ จะได้สมการช่วย คือ $m^2-2m = 0$ ได้ $m = 0, 2$ ดังนั้น คำตอบประกอบคือ

$$y_c = c_1 + C_2e^{2x}$$

ซึ่งทุก ๆ พจน์ใน y_c ไม่เหมือนกับพจน์ใน $Q(x)$

ดังนั้น สมมติ $y_p = Ae^x \sin x + Be^x \cos x$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
Dy &= Ae^x \sin x + Ae^x \cos x + Be^x \cos x - Be^x \sin x \\
&= (A - B)e^x \sin x + (A + B)e^x \cos x \\
D^2y &= (A - B)e^x \sin x + (A - B)e^x \cos x \\
&\quad + (A + B)e^x \cos x - (A + B)e^x \sin x \\
&= -2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x
\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
(D^2-2D)y &= -2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x - 2(A - B)e^x \sin x \\
&\quad - 2(A + B)e^x \cos x \\
&= -2Ae^x \sin x - 2Be^x \cos x
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $-2Ae^x \sin x - 2Be^x \cos x = e^x \sin x$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า
$$-2A = 1$$
$$-2B = 0$$

จะได้ $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$

ดังนั้น $y_p = -\frac{1}{2}e^x \sin x$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x \sin x$$

ตัวอย่าง 4.34 จงหาคำตอบของสมการ $(D^2-2D+3)y = x^3 + \sin x$

วิธีทำ คำตอบประกอบของสมการหาได้จากสมการช่วย

$$m^2-2m+3 = 0$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$$

$$m = 1 \pm \sqrt{2}\, i$$

ดังนั้น $y_c = C_1 e^x \cos \sqrt{2}\, x + C_2 e^x \sin \sqrt{2}\, x$

ซึ่งจะเห็นว่าไม่ซ้ำกับพจน์ใน Q(x)

ดังนั้น สมมติ $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + E + F \sin x + G \cos x$

(พจน์เหล่านี้ได้จากอนุพันธ์ของพจน์ใน Q(x))

ดังนั้น

$$Dy = 3Ax^2 + 2Bx + C + F \cos x - G \sin x$$

$$D^2y = 6Ax + 2B - F \sin x - G \cos x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(D^2 - 2D + 3)y &= 6Ax + 2B - F \sin x - G \cos x - 2(3Ax^2 + 2Bx \\ &\quad + C + F \cos x - G \sin x) + 3(Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ &\quad + E + F \sin x + G \cos x) \\ &= 3Ax^3 + 3(B - 2A)x^2 + (3C - 4B + 6A)x \\ &\quad + (3E - 2C + 2B) + 2(F + G)\sin x + 2(G - F)\cos x \\ &= x^3 + \sin x\end{aligned}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} 3A &= 1 \\ B - 2A &= 0 \\ 3C - 4B + 6A &= 0 \\ 3E - 2C + 2B &= 0 \\ 2(F + G) &= 1 \\ G - F &= 0 \end{aligned}\right\}$$

จะได้ $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$

$C = \frac{2}{9}$, $E = -\frac{8}{27}$

$F = G = \frac{1}{4}$

ดังนั้น $y_p = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$y = e^x(C_1 \cos\sqrt{2}\, x + C_2 \sin \sqrt{2}\, x) + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x$$

$$- \frac{8}{27} + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$$

(2) พจน์ใน Q(x) บางพจน์เหมือนกับพจน์ใน y_c สมมติว่าในคำตอบประกอบ y_c มีพจน์ U(x) ซึ่งได้มาจากรากของ m ซึ่งซ้ำกัน p ครั้งแล้ว จะได้ข้อสรุปว่า

(2.1) ถ้า U(x) อยู่ใน Q(x) แล้วสมมติ y_p ดังนี้

$$y_p = x^p U(x) + \text{พจน์จากการหาอนุพันธ์}$$

(2.2) ถ้า $x^q U(x)$ อยู่ใน Q(x) แล้วสมมติ y_p ดังนี้

$$y_p = x^{p+q} U(x) + \text{พจน์จากการหาอนุพันธ์}$$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4 . 3 5 จงหาคำตอบของสมการ $(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = e^x + x^2$

วิธีทำ คำตอบประกอบ $y_c = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$

เพราะว่า e^x อยู่ทั้งในคำตอบประกอบและ Q(x)

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ใน y_p คือ xe", e^x, x^2, x, I

สมมติ $y_p = Ax^2 + Bx + C + Exe^x + Fe^x$

จะได้ว่า $Dy = 2Ax + B + Exe^x + (E + F)e^x$

D^2y = 2A + Exe" + $(2E + F)e^x$

D^3y = Exe' + $(3E + F)e^x$

ดังนั้น $(D^3 + 2D^2 - D - 2)y$ = Exe" + $(3E + F)e^x$ + 2(2A + Exe" + $(2E + F)e^x$)

- (2Ax + B + Exe" + $(E + F)e^x$)

- 2(Ax^2 t Bx + C + Exe" + Fe")

$= -2Ax^2 - 2(A + B)x + (4A - B - 2C) + 6Ee^x$

$= e^x + x^2$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$-2A = I$$

$$A+B = 0$$

$$4A - B - 2C = 0$$

$$6E = I$$

ได้ $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{4}$ $E = \frac{1}{6}$

ดังนั้น $y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}xe^x + Fe^x$

ดังนั้น $Y = y_c + y_p$

$= C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 +$ f x - $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}xe^x + Fe^x$

$= (C, + F)e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}xe^x$

$= C_4e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}xe^x$

ดังนั้น จะเห็นว่าในการสมมติ y_p พจน์ Fe^x ไม่จำเป็นเพราะอยู่ในคำตอบประกอบอยู่แล้ว

ตัวอย่าง 4.36 จงหาคำตอบของสมการ $(D^2-4D+4)y = x^3e^{2x}+xe^{2x}$

วิธีทำ คำตอบประกอบ $y_c = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

เพราะว่า e^{2x} เป็นส่วนหนึ่งของ $Q(x)$ และเป็นพจน์ในคำตอบประกอบด้วย และเป็นกรณีที่รากซ้ำกัน 2 ครั้ง ดังนั้น พจน์ใน y_p คือ

$$x^5e^{2x},\ x^4e^{2x},\ x^3e^{2x},\ x^2e^{2x},\ xe^{2x},\ e^{2x}$$

แต่พจน์ xe^{2x}, e^{2x} อยู่ในคำตอบประกอบแล้วในการสมมติ y_p จึงไม่จำเป็น

ดังนั้น $y_p = Ax^5e^{2x}+Bx^4e^{2x}+Cx^3e^{2x}+Ex^2e^{2x}$

จะได้ว่า $D\ \ y = 2Ax^5e^{2x} + (SA + 2B)x^4e^{2x} + (4B + 2C)x^3e^{2x} + (3C+2E)x^2e^{2x} + 2Exe^{2x}$

$$D^2y = 4Ax^5e^{2x} + (20A + 4B)x^4e^{2x} + (20A + 16B + 4C)x^3e^{2x} + (12B + 12C + 4E)x^2e^{2x} + (6C + 8E)xe^{2x} + 2Ee^{2x}$$

แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}(D^2-4D+4)y &= 20Ax^3e^{2x} + 12Bx^2e^{2x} + 6Cxe^{2x} + 2Ee^{2x}\\ &= x^3e^{2x} + xe^{2x}\end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}20A &= 1\\ 12B &= 0\\ 6C &= 1\\ 2E &= 0\end{aligned}$$

จะได้ $A = \frac{1}{20}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{6}$, $E = 0$

ดังนั้น คำตอบเฉพาะคือ $y_p = \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$

คำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$$

ตัวอย่าง 4.37 จงหาคำตอบของสมการ $(D^2+4)y = x^2 \sin 2x$

ลีรีnl คำตอบประกอบ $y_c = C, \cos 2x + C_2 \sin 2x$

เพราะว่า $x^2 \sin 2x$ อยู่ใน $Q(x)$ และอยู่ในคำตอบประกอบด้วย

ดังนั้น พจน์ใน y_p คือ

$$x^3\sin 2x,\ x^3\cos 2x,\ x^2\sin 2x,\ x^2\cos 2x,\ x\sin 2x,\ x\cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 2x$$

แต่ $\sin 2x$, $\cos 2x$ เป็นพจน์ในคำตอบประกอบแล้ว ดังนั้น ในการสมมติ y_p ไม่จำเป็น

$$\begin{aligned}
y_p &= Ax^3\cos 2x + Bx^3\sin 2x + Cx^2\cos 2x + Ex^2\sin 2x \\
&\quad + Fx\cos 2x + Gx\sin 2x
\end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
D\,y &= 2Bx^3\cos 2x - 2Ax^3\sin 2x + (3A+2E)x^2\cos 2x \\
&\quad + (3B-2C)x^2\sin 2x + (2C+2G)x\cos 2x + (2E-2F)x\sin 2x \\
&\quad + F\cos 2x + Ci\sin 2x \\
D^2y &= -4Ax^3\cos 2x - 4Bx^3\sin 2x + (12B-4C)x^2\cos 2x \\
&\quad + (-12A-4E)x^2\sin 2x + (6A+8E-4F)x\cos 2x \\
&\quad + (6B-8C-4G)x\sin 2x + (2C+4G)\cos 2x + (2E-4F)\sin 2x
\end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
(D^2+4)y &= 12Bx^2\cos 2x - 12Ax^2\sin 2x + (6A+8E)x\cos 2x \\
&\quad + (6B-8C)x\sin 2x + (2C+4G)\cos 2x + (2E-4F)\sin 2x \\
&= x^2\sin 2x
\end{aligned}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned}
-12A &= 1 \\
12B &= 0 \\
6A+8E &= 0 \\
6B-8C &= 0 \\
2C-4G &= 0 \\
2E-4F &= 0
\end{aligned}\right|
\qquad
\begin{aligned}
&A = -\frac{1}{12},\ B = 0,\ C = 0 \\
&E = \frac{1}{16},\ F = \frac{1}{32},\ G = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบเฉพาะ คือ

$$y_p = -\frac{1}{12}x^3\cos 2x + \frac{1}{16}x^2\sin 2x + \frac{1}{32}x\cos 2x$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{12}x^3\cos 2x + \frac{1}{16}x^2\sin 2x + \frac{1}{32}x\cos 2x$$

(5) วิธีแปรตัวพารามิเตอร์ (variation of parameters method)

วิธีแปรตัวพารามิเตอร์ใช้ในการหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ไม่สามารถแก้ปัญหาดังกล่าวข้างต้น ซึ่งอันที่จริงแล้วการเทียบสัมประสิทธิ์จะแก้ปัญหาได้เกือบทุกแบบเว้นแต่กรณีที่ $Q(x)$ หาอนุพันธ์ได้ไม่สิ้นสุด (*infinite*) เช่น $\ln x$, $\sec^{-1} x$, ... เป็นต้น ซึ่งวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์มีขั้นตอนดังนี้

จาก $F(D)y = Q(x)$

(1) หาคำตอบประกอบ y_c สมมติ

$$y_c = C_1U_1(x) + C_2U_2(x) + \ldots + C_nU_n(x)$$

(2) เปลี่ยนตัวคงที่ตามใจชอบ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ เป็นตัวพารามิเตอร์ $L_1(x)$, L,(x),..., $L_n(x)$ แล้วกำหนดให้เป็น y_p

$$y_p = L,(x)\ U,(x) + L,(x)\ U_2(x) + \ldots + L''(X)\ U''(X)$$

(3) กำหนดเงื่อนไข

$$L_1'U_1 + L_2'U_2 + \ldots + L_n'U_n = 0$$
$$L_1'U_1' + L_2'U_2' + \ldots + L_n'U_n' = 0$$
$$L_1'U_1'' + L_2'U_2'' + \ldots + L_n'U_n'' = 0$$

....

....

$$L_1'U_1^{(n-2)} + L_2'U_2^{(n-2)} + \ldots + L_n'U_n^{(n-2)} = 0$$

(4) ดิฟเฟอเรนทิเอต y_p และใช้เงื่อนไขในข้อ (3) จะได้

$$y' = L_1U_1' + L_2U_2' + \ldots + L_nU_n'$$
$$y'' = L_1U_1'' + L_2U_2'' + \ldots + L_nU_n''$$

....

....

$$y^{(n-1)} = L_1U_1^{(n-1)} + L_2U_2^{(n-1)} + \ldots + L_nU_n^{(n-1)}$$
$$y^{(n)} = L_1U_1^{(n)} + L_2U_2^{(n)} + \ldots + L_nU_n^{(n)} + L_1'U_1^{(n-1)} + L_2'U_2^{(n-1)} + \ldots + L_n'U_n^{(n-1)}$$

(5) แทนค่า $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ในข้อ **(4)** ลงใน $F(D)y = Q(x)$ จะได้

$$F(D)y = L_1F(D)U_1 + L_2F(D)U_2 + \ldots + L_nF(D)U_n + a_0(L_1'U_1^{(n-1)} + L_2'U_2^{(n-1)} + \ldots + L_n'U_n^{(n-1)})$$

จะได้ว่า $a_0(L_1'U_1^{(n-1)}+L_2'U_2^{(n-1)}+ \ldots + L_n'U_n^{(n-1)}) = Q(x)$

(6) แก้สมการหาค่า $L_1', L_2', \ldots, L_n'$ จากสมการในข้อ (3) ซึ่งมี $(n-1)$ สมการกับสมการในข้อ (5) แล้วหา $L_1, L_2, \ldots, L_n$ โดยการอินทิเกรต

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.30 จงหาคำตอบของสมการ $(D^2+1)y = \tan x$

วิธีทำ จากสมการ $(D^2+1)y = \tan x$

จะได้คำตอบประกอบ คือ $y_c = C, \cos x + C_2 \sin x$

สมมติคำตอบเฉพาะ $y_p = L,(x) \cos x + L_2(x) \sin x$

$$Dy = -L,(x) \sin x + L_2(x) \cos x + L;(x) \cos x + L;(x) \sin x$$

กำหนดเงื่อนไขให้ $L_1'(x) \cos x + L_2'(x) \sin x = 0$ ....(1)

$$D^2y = -L,(x) \cos x - L,(x) \sin x - L;(x) \sin x + L_2'(x) \cos x$$

$$(D^2+1)y = -L;(x) \sin x + L_2'(x) \cos x$$

จะได้ว่า $-L_1'(x)\sin x + L_2'(x)\cos x = \tan x$ ....(2)

$(1)\times\sin x + (2)\mathrm{x}\cos x$ จะได้

$$L;(x) \sin^2 x + L_2'(x) \cos^2 x = \sin x$$

$$L_2'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x$$

$$L;(x) = \sin x$$

แทนค่าจะได้ $$L_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

ดังนั้น $$L_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$$

$$= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx$$

$$= \int \cos x dx - \int \sec x dx$$

$$= \sin x - \ell n(\sec x + \tan x)$$

$$L_2(x) = \int \sin x dx$$

$$= -\cos x$$

ดังนั้น $$y_p = [\sin x - \ell n(\sec x + \tan x)]\cos x$$

$$+ [\ \cos x]\sin x$$

$$= -\cos x\ \ell n(\sec x + \tan x)$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x \,\ell n(\sec x + \tan x)$$

ตัวอย่าง 4.30 จงหาคำตอบของสมการ $(D^3 + D)y = \text{cosec}x$

วิธีทำ จากสมการ $(D^3 + D)y = \text{cosec } x$

จะได้คำตอบประกอบ $y_c = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

สมมติคำตอบเฉพาะ $= L_1(x) + L_2(x) \cos x + L_3(x) \sin x$

$$Dy = (-L_2(x) \sin x + L_3(x) \cos x) + (L_1'(x) + L_2'(x)\cos x + L_3'(x) \sin x)$$

กำหนดเงื่อนไขให้

$$L_1'(x) + L_2'(x) \cos x + L_3'(x) \sin x = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$D^2y = (-L_2(x) \cos x - L_3(x) \sin x). + (-L_2'(x) \sin x + L_3'(x) \cos x)$$

กำหนดเงื่อนไข ให้

$$-L_2'(x) \sin x + L_3'(x) \cos x = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

และ $D^3y = (L_2(x) \sin x - L_3(x) \cos x) + (-L_2'(x) \cos x - L_3'(x) \sin x)$

ดังนั้น $(D^3 + D)y = -L_2'(x) \cos x - L_3'(x) \sin x$

จะได้ว่า $-L_2'(x) \cos x - L_3'(x) \sin x = \text{cosec}x \quad \dots\dots\dots(3)$

(1) + (3) จะได้

$$L_1'(x) = \text{cosec}x$$

$$L_1(x) = \int \text{cosec}x \, dx$$

$$= -\ln(\text{cosec}x + \cot x)$$

จาก (2) และ (3) จะได้

$$L_3'(x) = -1$$

$$L_3(x) = -x$$

และ $L_2'(x) = \cot x$

$$L_2(x) = -\int \cot x \, dx$$

$$= -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= -\int \frac{1}{\sin x} d\sin x$$

$$= -\ln(\sin x)$$

ดังนั้น $y_p = -\ln(\operatorname{cosec}x + \cot x) + (-\ln(\sin x))\cos x + (-x)\sin x$

$= -\ln(\operatorname{cosec}x + \cot x) - \cos x \ln(\sin x) - x\sin x$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \ln(\operatorname{cosec}x + \cot x) - \cos x\ln(\sin x) - x\sin x$$

อย่างไรก็ตาม สำหรับกรณีที่ Q(x) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ มีรูปจำกัด ซึ่งเคยแก้ปัญหาด้วยวิธีการต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว ก็สามารถแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ได้เช่นเดียวกัน แต่จะเสียเวลาในการแก้ปัญหาโจทย์มากกว่าที่เคยทำมาแล้ว ตัวอย่างเช่น $Q(x) = e^x\sin x$ อนุพันธ์ของ Q(x) คือ $e^x\sin x$, $e^x\cos x$ เท่านั้น จึงอาจใช้เทียบสัมประสิทธิ์หรือวิธีลัดที่เคยกล่าวมาแล้วข้างต้น แต่ในตอนนี้จะใช้วิธีการแปรตัวพารามิเตอร์

ตัวอย่าง 4.40 จงแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$(D^2 - 2D)y = e^x\sin x$$

วิธีทำ จากสมการ $(D^2 - 2D)y = e^x\sin x$

จะได้คำตอบประกอบ $y_c = C_1 + C_2e^{2x}$

สมมติคำตอบเฉพาะ $y_p = L_1(x) + L_2(x)e^{2x}$

ดังนั้น $Dy = 2L_2(x)e^{2x} + (L_1'(x) + L_2'(x)e^{2x})$

กำหนดเงื่อนไข ให้

$$L_1'(x) + L_2'(x)e^{2x} = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$D^2y = 4L_2(x)e^{2x} + 2L_2'(x)e^{2x}$$

ดังนั้น $(D^2 - 2D)y = 2L_2'(x)e^{2x} = e^x\sin x \quad \ldots\ldots(2)$

จาก (2) $L_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$

แทนค่าใน (1) ได้ $L_1'(x) = \frac{1}{2}e^x\sin x$

จาก $L_1'(x) = \frac{1}{2}e^x\sin x$

จะได้ $L_1(x) = -\frac{1}{2}\int e^x\sin x\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^x\sin x - \frac{1}{2}e^x\cos x\right)$

$= \frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x)$

จาก $L_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$

จะได้ $$L_2(x) = \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x \right)$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

(หมายเหตุ : ดูเทคนิคการอินทิเกรตในภาคผนวกท้ายเล่ม)

ดังนั้น $$y_p = -\frac{1}{4} e^{x} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{4} e^{-x} (\sin x + \cos x) e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{4} e^{x} (\sin x \quad \cos x) \quad \frac{1}{4} e^{x} (\sin x + \cos x)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{x} \sin x$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^{x} \sin x$$

แบบฝึกหัด 4.3

จงหาคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้

1. $(D^5 - 4D^3)y = 5$
2. $(D^2 - 4D + 3)y = 1$
3. $(D^3 - 4D)y = x$
4. $(D^2 - 6D + 9)y = e^{2x}$
5. $(D^2 + D - 2)y = 2(1 + x \quad x^2)$
6. $(D^2 - 1)y = 4x e^x$
7. $(D' - 1)y = \sin^2 x$
8. $(D^2 + 1)y = \operatorname{cosec} x$
9. $(D^2 - 3D + 2)y = \sin e^{-x}$

จงหาคำตอบเฉพาะของข้อต่อไปนี้

10. $(D^2 - 1)y = e^x$
11. $(D^2 - 4D + 4)y = e^x + xe^{2x}$
12. $(D^3 + 1)y = \cos x$
13. $(D^4 - 1)y = \sin 2x$
14. $(D^2 - 1)y = x^2$
15. $(D^2 + 2)y = x^3 + x^2 + e^{-2x} + \cos 3x$
16. $(D^2 - 2D - 1)y = e^x \cos x$
17. $(D^2 - 1)y = xe^{3x}$
18. $(D^2 + 2)y = e^x + 2$
19. $(D^2 - 1)y = e^x \sin 2x$
20. $(D^2 - 9)y = x + e^{2x} - \sin 2x$
21. $(D^2 + 1)y = -2\sin x + 4x \cos x$
22. $(D^2 + 4)y = 4\sec^2 2x$
23. $(D^2 - 4D + 3)y = (1 + e^{-x})^{-1}$
24. $(D^2 - 1)y = e^{-x} \sin e^{-x} + \cos e^{-x}$
25. $(D^2 - 1)y = (1 + e^{-x})^{-2}$