บทที่ 3
การประยุกต์ของสมการดิฟเฟอเรนเชียล
(Applications of Differential Equations)

จากบทที่ 2 เราได้ทราบเกี่ยวกับการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับ 1 มาแล้ว ในบทที่ 3 นี้เราจะได้นำสมการดิฟเฟอเรนเชียลไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาในสาขาวิชาต่าง ๆ ซึ่งในบทนี้จะได้แยกกล่าวเป็นเรื่อง ๆ ดังนี้

(1) การประยุกต์ทางเรขาคณิต

(2) การประยุกต์ทางฟิสิกส์

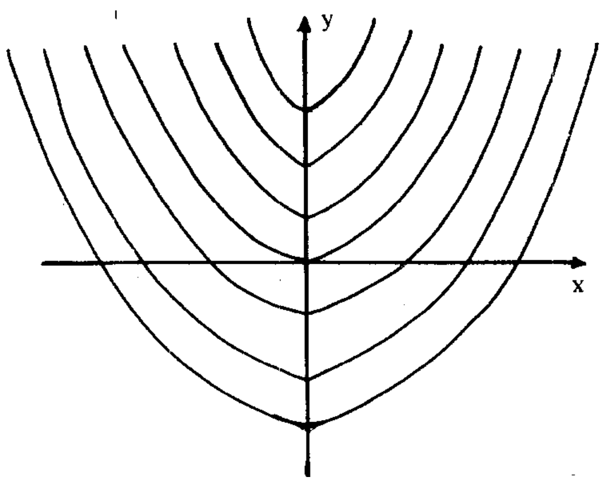
(3) การประยุกต์ทางเคมี

(4) การประยุกต์ทางไฟฟ้า

(5) การประยุกต์ทางด้านอื่น ๆ

3.1 การประยุกต์ทางเรขาคณิต

พิจารณาสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับ 1 ตัวอย่างเช่น $\frac{dy}{dx} = 2x$ จะได้ว่า $y = x^2+C$ คือคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลข้างต้น ซึ่งคำตอบนี้ขึ้นกับค่า C ซึ่งเป็นค่าคงที่ตามใจชอบ ดังนั้น เราจะเรียก $y = x^2+C$ ว่าชุดของเส้นโค้ง (family of curves) ซึ่งชุดของเส้นโค้ง $y = x^2+C$ เขียนแสดงได้ดังรูป 3.1



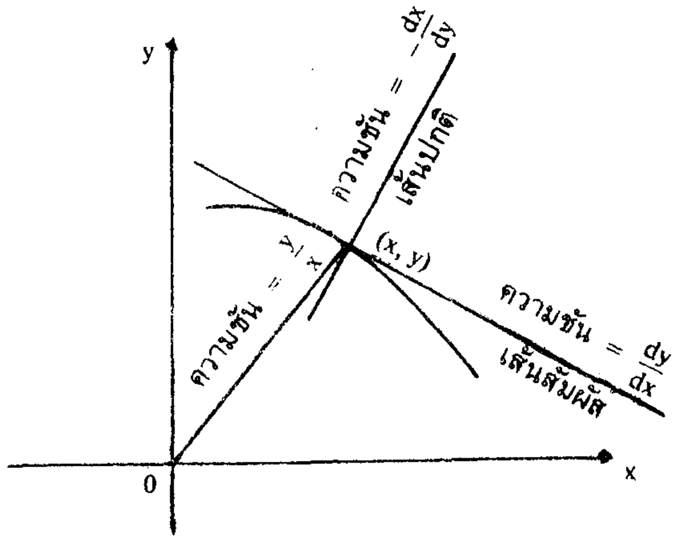
รูป 3.1

นั่นคือ เราจะได้ข้อสรุปว่าสำหรับสมการดิฟเฟอเรนเชียล $f(x, y, y') = 0$ จะได้คำตอบคือ $g(x, y, C) = 0$ ซึ่งเป็นชุดของโค้งชุดหนึ่ง

ในตอนนี้เราจะได้ศึกษาถึงความสัมพันธ์ของอนุพันธ์กับเส้นโค้งโดยเราจะแยกกล่าวออกเป็น 2 ระบบ คือ ระบบแกนฉาก (rectangular coordinates) กับระบบเชิงขั้ว (polar coordinates)

(1) ระบบแกนฉาก

ให้ (x, y) เป็นจุดใด ๆ ของเส้นโค้ง $F(x, y) = 0$



รูป 3.2

จะได้ว่า

1. $\frac{dy}{dx}$ คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y)

2. $-\frac{dx}{dy}$ คือความชันของเส้นปกติที่จุด (x, y)

3. $(y - y_0) = \frac{dy}{dx}(x - x_0)$ คือสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เมื่อ (x_0, y_0) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นสัมผัส

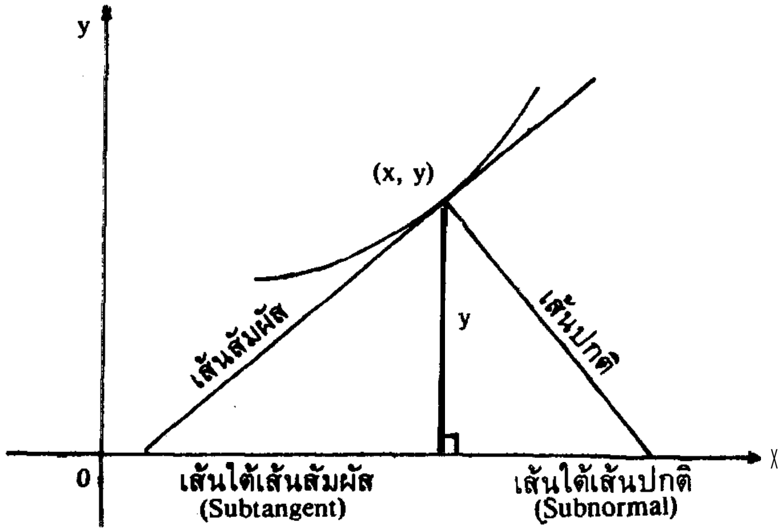
4. $(y - y_0) = -\frac{dx}{dy}(x - x_0)$ คือสมการเส้นปกติของเส้นโค้ง เมื่อ (x_0, y_0) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นปกติ

5. $x - y\frac{dx}{dy}$ คือระยะตัดแกน x ของเส้นสัมผัส

$y - x\frac{dy}{dx}$ คือระยะตัดแกน y ของเส้นสัมผัส

6. $x + y\dfrac{dy}{dx}$ คือระยะตัดแกน x ของเส้นปกติ

$y + x\dfrac{dx}{dy}$ คือระยะตัดแกน y ของเส้นปกติ



รูป 3.3

7. $y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$ คือความยาวของเส้นสัมผัสจาก (x, y) ถึงแกน x

$x\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ คือความยาวของเส้นสัมผัสจาก (x, y) ถึงแกน y

8. $y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ คือความยาวของเส้นปกติจาก (x, y) ถึงแกน x

$x\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$ คือความยาวของเส้นปกติจาก (x, y) ถึงแกน y

9. $y\dfrac{dx}{dy}$ คือความยาวของเส้นใต้เส้นสัมผัส (subtangent)

$y\dfrac{dy}{dx}$ คือความยาวของเส้นใต้เส้นปกติ (subnormal)

10. ความยาวส่วนโค้งย่อย
$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\
&= dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\
&= dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}
\end{aligned}
$$

11. ส่วนย่อยของพื้นที่ คือ ydx หรือ xdy

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ ตัดแกน y ได้ระยะตัดแกน y เท่ากับ $2xy^2$ จงหาเส้นโค้งนั้น

วิธีทำ ระยะตัดแกน y ของเส้นสัมผัส คือ $y - x\dfrac{dy}{dx}$

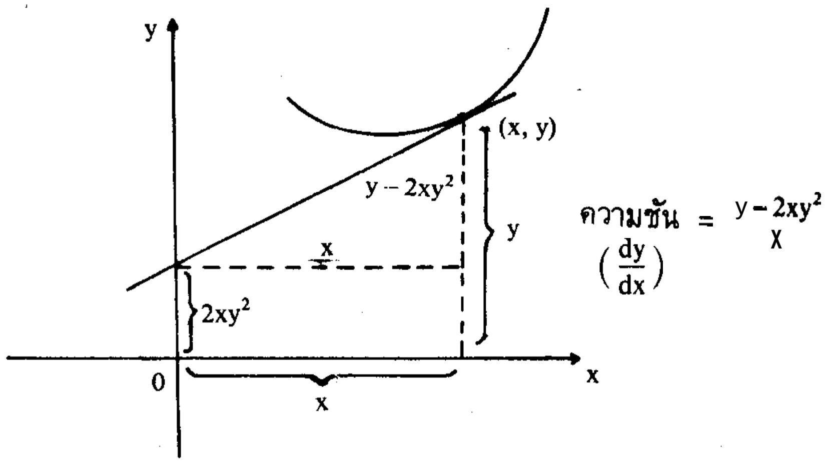
ดังนั้น
$$y - x\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$
$$ydx - xdy = 2xy^2dx$$

จัดรูปใหม่จะได้
$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 2xdx$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = 2xdx$$

อินทิเกรตตลอดจะได้
$$\frac{x}{y} = x^2 + C$$

หรือ
$$x = x^2y + Cy$$
$$x - x^2y = cy$$ เป็นชุดของเส้นโค้งตามต้องการ

หมายเหตุ ตัวอย่าง 3.1 แสดงให้เห็นจริงได้ดังรูป 3.4



รูป 3.4

ตัวอย่าง 3.2 จงหาชุดของเส้นโค้งซึ่งความยาวของเส้นสัมผัสจากจุด (x, y) ไปยังแกน y มีค่าเท่ากับระยะตัดแกน y ของเส้นสัมผัสนั้น

วิธีทำ ความยาวของเส้นสัมผัสจากจุด (x, y) ไปยังแกน y $= x\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

ระยะตัดแกน y ของเส้นสัมผัส $= y - x\dfrac{dy}{dx}$

ดังนั้น $$y - x\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$$

เป็นรูปสมการเอกพันธ์ ซึ่งแก้ปัญหาได้โดย

ให้ $$Y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

แทนค่าจะได้ $$(v^2x^2 - x^2)dx - 2x(vx)(vdx + xdv) = 0$$

$$(v^2 - 1)dx - 2v(vdx + xdv) = 0$$

$$(1 + v^2)dx + 2vxdv = 0$$

$$\frac{dx}{X} + \frac{2v}{v^2+1}dv = 0$$

$$\ell n\, x + \ell n(v^2+1) = \ell n\, C$$

$$Pn\, x(v^2+1) = enc$$

$$x(v^2+1) = c$$

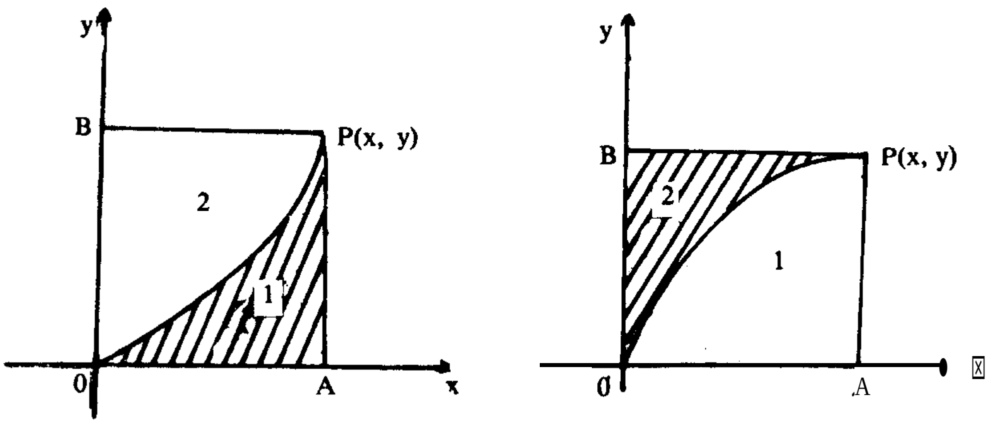
แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ จะได้ชุดของเส้นโค้ง คือ

$$x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = C$$

หรือ $$x^2 + y^2 = CX$$

ตัวอย่าง 3.9 เส้นโค้งชุดหนึ่งผ่านจุดกำเนิด (*origin*) โดยที่สำหรับจุด (x, y) ใด ๆ บนเส้นโค้งนี้ ลากเส้นตรงตั้งได้ฉากกับแกน x และแกน y ตามลำดับ จะได้ว่าเส้นโค้งแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็น 2 ส่วน ถ้าพื้นที่ส่วนใหญ่มีค่าเท่ากับ 3 เท่าของพื้นที่ส่วนเล็กแล้ว จงหาเส้นโค้งชุดนี้

วิธีทำ ลักษณะเส้นโค้งมีได้ 2 กรณี ดังรูป 3.5



กรณีที่ 1 *กรณีที่ 2*

รูป 3.5

กรณีที่ 1 :

$$\text{พื้นที่ (1)} = \frac{1}{3}\text{ พื้นที่ (2)}$$

$$= \frac{1}{3}(\text{พื้นที่สี่เหลี่ยม OAPB} - \text{พื้นที่ (1)})$$

$$\int_0 y dx = \frac{1}{3}(xy - \int_0^x ydx)$$

$$4\int_0^x ydx = xy$$

ดิฟเฟอเรนทิเอต เทียบกับ x ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$4y = y + \frac{x\,dy}{dx}$$

$$3y = \frac{x\,dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$$

$$\frac{1}{3y}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{3}\ell n\ y = \ell n\ x + \ell n\ C$$

$$Pn\ y^{\frac{1}{3}} = \ell n\ Cx$$

$$y^{\frac{1}{3}} = cx$$

หรือ $$Y = Cx^3$$

กรณีที่ 2 :

$$\text{พื้นที่ (1)} = 3\ \text{พื้นที่ (2)}$$

$$= 3\ (\text{พื้นที่สี่เหลี่ยม OAPB} - \text{พื้นที่ (1)})$$

$$4\ \text{พื้นที่ (1)} = 3\ \text{พื้นที่สี่เหลี่ยม OAPB}$$

$$4\int_0^x y\,dx = 3xy$$

ดิฟเฟอเรนทิเอตเทียบกับ x ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$4Y = 3y + 3x\frac{dy}{dx}$$

$$3x\frac{dy}{dx} \quad y \qquad 0$$

$$3\frac{1}{Y}dy = \frac{1}{X}dx$$

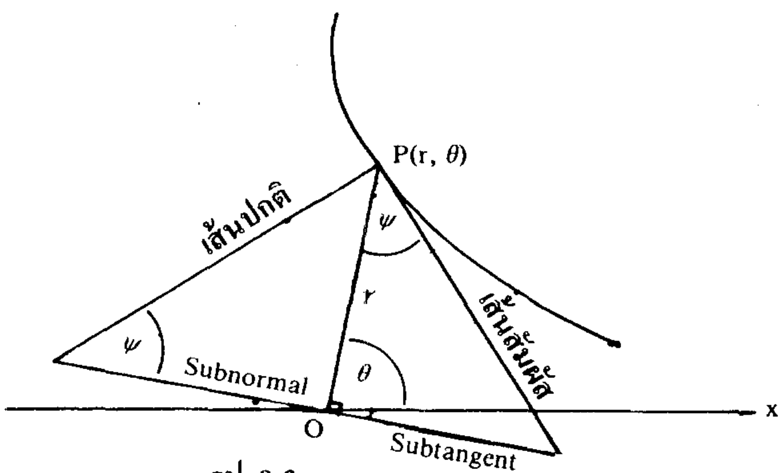
$$3\ \ell n\ y = \ell n\ x + \ell n\ C$$

$$\ell n\ y^3 = Pn\ \ Cx$$

$$y^3 = cx$$

(2) ระบบแกนเชิงขั้ว

ให้ P(r, θ) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง $r = f(S)$



รูป 3.6

จะได้ว่า

1. ความยาวของเส้นใต้เส้นสัมผัส $= \dfrac{r^2\,d\theta}{dr}$

ความยาวของเส้นใต้เส้นปกติ $= \dfrac{dr}{d\theta}$

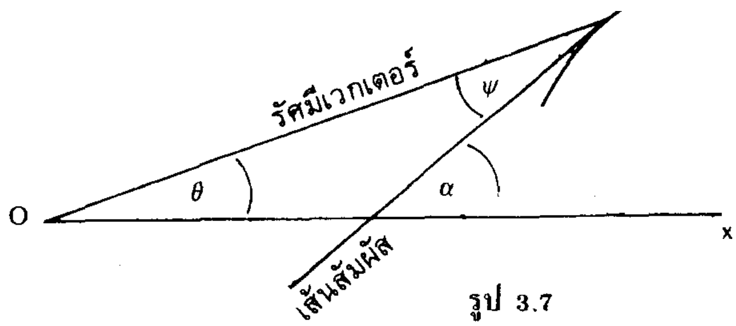
2. $\tan \psi = \dfrac{r\,d\theta}{dr}$

3. $$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}$$

$$= dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

$$= d\theta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

ตัวอย่าง 3.4 จงหาสมการของชุดของเส้นโค้งในระบบเชิงขั้ว ซึ่งมุมระหว่างรัศมีเวกเตอร์ (r) กับเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ของมุมที่เส้นสัมผัสทำกับแกน OX



รูป 3.7

วิธีทำ จากโจทย์ $\quad \psi = \frac{1}{3}\alpha$

แต่ $\quad \alpha = \theta + \psi$

ดังนั้น $\quad \psi = \frac{1}{3}(\theta + \psi)$

$$\psi - \frac{1}{3}\psi = \frac{1}{3}\theta$$

$$\frac{2}{3}\psi = \frac{1}{3}\theta$$

$$\psi = \frac{1}{2}\theta$$

$$\tan \psi = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{dr}{r} = \cot\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\frac{dr}{r} = 2\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\,d\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\ell n\, r = 2\ \ell n \sin\frac{\theta}{2} + \ell n\, C_1$$

$$\ell n\, r = \ell n \sin^2\frac{\theta}{2} + \ell n\, C_1$$

$$r = C_1 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

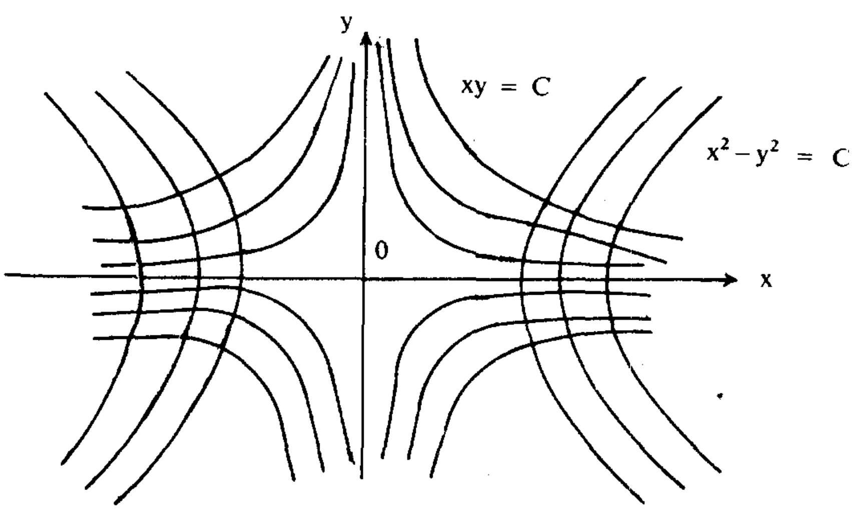
หรือ $$r = C(1 - \cos\theta) \qquad (\because \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})$$

นอกจากการหาสมการเส้นโค้ง F(x, y, C) โดยอาศัยสมการดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งได้จากเงื่อนไขที่กำหนดแล้วสำหรับการประยุกต์ทางเรขาคณิตยังจะได้กล่าวต่อไปถึงเรื่องการตัดกันของชุดของเส้นโค้งซึ่งมีทั้งกรณีตัดตั้งฉากและตัดไม่ตั้งฉาก ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.1 กำหนดชุดเส้นโค้ง $F(x, y, C) = 0$ เรียกชุดของเส้นโค้ง $G(x, y, C') = 0$ ว่าทราเจกตอรี (trajectory) ของ $F(x, y, C) = 0$ ก็ต่อเมื่อ เส้นโค้งในชุด $G(x, y, C') = 0$ ตัดเส้นโค้งทุกเส้นในชุด $F(x, y, C) = 0$ ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

ถ้าตัดตั้งฉาก (ที่จุดตัดเส้นสัมผัสเส้นโค้งตั้งได้ฉากกัน) กันแล้ว เรียกว่า ออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี (orthogonal trajectory)

ตัวอย่างของออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี ได้แก่ ชุดของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดกับชุดของเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด หรือชุดของไฮเพอร์โบลาฉาก ; $xy = C$ กับชุดของไฮเพอร์โบลา ; $x^2 - y^2 = C$ เป็นต้น ซึ่งแสดงให้เห็นการตัดกันของชุดของเส้นโค้งดังตัวอย่าง ดูรูป 3.8 ประกอบ



รูป 3.8

ปัญหาในเรื่องนี้คือ เมื่อกำหนดชุดของเส้นโค้งชุดหนึ่งมาให้ เราสามารถหาชุดเส้นโค้งที่เป็นออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี กับชุดเส้นโค้งที่กำหนดให้ได้โดยอาศัยการประยุกต์ทางอนุพันธ์ช่วย ดังวิธีการต่อไปนี้

จากชุดเส้นโค้ง $F(x, y, C) = 0$

โดยวิธีกำจัดตัวคงที่ C จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

แต่ความชันของชุดเส้นโค้งที่เป็นออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี มีค่า $= -\frac{1}{m}$ เมื่อ m เป็นความชันของชุดที่กำหนดให้

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)}$$

จะได้ $$M(x, y)dy - N(x, y)dx = 0$$

หรือ $$N(x, y)dx - M(x, y)dy = 0$$

ซึ่งสามารถแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลหาคำตอบของชุดของเส้นโค้งตามต้องการได้

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.5 จงหาออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี ของชุดของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด คือ

$$x^2 + y^2 = C, \qquad C > 0$$

จะได้ว่า $$2xdx + 2ydy = 0$$

$$xdx + ydy = 0$$

ดังนั้น สมการดิฟเฟอเรนเชียลของชุดเส้นโค้งที่เป็นออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี คือ

$$ydx - xdy \quad 0$$

จะได้ $$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\ell n\ x - \ell n\ y = \ell n\ C_1$$

$$\mathbf{Pn} \frac{x}{Y} = \ell n\ C_1$$

$$\frac{X}{Y} = c,$$

หรือ $$Y = cx$$

จะได้ว่าออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดคือเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.6 จงหาออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี ของชุดของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางบนแกน x และผ่านจุดกำเนิด

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางบนแกน x และผ่านจุดกำเนิด คือ

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

จะได้ว่า

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$\frac{x^2+y^2}{x} = 2a$$

ดิฟเฟอเรนทิเอตเทียบกับ x ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\frac{x\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) - (x^2+y^2)}{x^2} = 0$$

$$2x^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - x^2 - y^2 = 0$$

จะได้ว่า

$$(x^2-y^2)dx + 2xydy = 0$$

ดังนั้น สมการดิฟเฟอเรนเชียลของชุดของเส้นโค้งที่เป็นออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี คือ

$$2xydx - (x^2-y^2)dy = 0$$

$$ydx^2 - x^2dy + y^2dy = 0$$

$$\frac{ydx^2 - x^2dy}{y^2} + dy = 0$$

$$d\left(\frac{x^2}{y}\right) + dy = 0$$

จะได้ว่า

$$\frac{x^2}{y} + y = c$$

$$x^2 + y^2 = cy$$

นั่นคือ

$$x^2 + \left(y^2 - Cy + \frac{C^2}{4}\right) = \frac{C^2}{4}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$$

เป็นชุดของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางบนแกน y และผ่านจุดกำเนิด

ตัวอย่าง 3.7 จงหาออร์ธอกอนัลทราเจกตอรีของเส้นโค้ง $y^2 = 2x^2(1-Cx)$

วิธีทำ จากเส้นโค้ง

$$y^2 = 2x^2(1-Cx)$$

$$y^2 - 2x^2 = -2Cx^3$$

$$\frac{y^2-2x^2}{x^3} = -2C$$

ดิฟเฟอเรนทิเอตเทียบกับ x ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\frac{x^3\left(2y\frac{dy}{dx} - 4x\right) - (y^2-2x^2)(3x^2)}{x^6} = 0$$

$$2x^3y\frac{dy}{dx} - 4x^4 - 3x^2y^2 + 6x^4 = 0$$

$$(2x^2-3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

ดังนั้น สมการดิฟเฟอเรนเชียลของชุดของเส้นโค้งที่เป็นออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี คือ

$$2xydx - (2x^2-3y^2)dy = 0$$

ให้ $Y = vx$

จะได้ $dy = vdx + xdv$

$$2vdx - (2-3v^2)(vdx+xdv) = 0$$

$$3v^3dx - (2-3v^2)xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2}{3v^3}dv + \frac{1}{v}dv = 0$$

$$\text{Pn } x + \frac{1}{3v^2} + \ell n\, v = -\ell n\, C$$

$$\frac{1}{3v^2} + \ell n\, Cxv = 0$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$

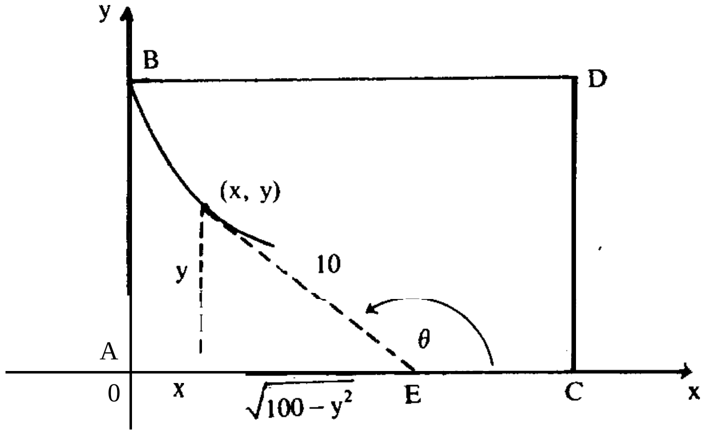
$$\frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \ell n\, Cx\frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{x^2}{3Y^2} + \ell n\, Cy = 0$$

$$x^2 + 3y^2\ell n\, cy = 0$$

นอกจากโจทย์เกี่ยวกับทราเจกตอรี ที่กล่าวมาแล้ว การใช้ความรู้ทางเรขาคณิตตลอดจนตรีโกณมิติจะช่วยในการแก้ปัญหาโจทย์ที่สร้างความสัมพันธ์ในรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียลได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.8 เด็กชายคนหนึ่งยืนอยู่ที่มุม A ของสระน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถือเชือกที่ผูกกับเรือลำหนึ่งที่จุด B โดยที่เชือกยาว 10 ฟุต ถ้าเด็กคนนี้เดินเลียบริมสระไปยังจุด C โดยดึงเรือให้เชือกตึงอยู่เสมอ จงหาตำแหน่งของเด็กชายและเรือเมื่อเรืออยู่ห่างจาก AC 6 ฟุต



รูป 3.9

วิธีทำ ให้ตำแหน่งของเด็กชายคือจุด E

ให้ θ เป็นมุมเอียงของเชือก

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{100-y^2}}$$

จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{100-y^2}}$$

$$dx = -\frac{\sqrt{100-y^2}\,dy}{y}$$

$$x = -\int \frac{\sqrt{100-y^2}\,dy}{y}$$

ให้

$$y = 10\sin z$$

$$dy = 10\cos z\,dz$$

แทนค่าจะได้ $$x = -\int \frac{10\cos z}{10\,\mathrm{Sin}\, z} 10\cos z\, dz$$

$$= -10\int \frac{\cos^2 z}{\sin z}\, dz$$

$$= -10\int \frac{1-\sin^2 z}{\sin z}\, dz$$

$$= -10\left[\int \mathrm{cosec}\, z\, dz - \int \sin z\, dz\right]$$

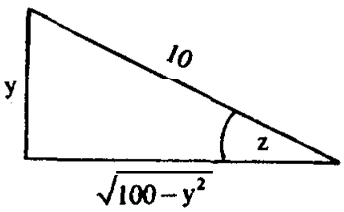
$$= -10\left[-\ell n(\mathrm{cosec}\, z + \cot z) + \cos z\right]$$

$$= -10\cos z + 10\ell n(\mathrm{cosec}\, z + \cot z)$$

จาก $$y = 10\sin z$$

จะได้ $$\sin z = \frac{y}{10}$$

ดังนั้น $$\cos z = \frac{\sqrt{100-y^2}}{10}$$



$$\mathrm{cosec}\; z = \frac{10}{y}$$

$$\cot z = \frac{\sqrt{100-y^2}}{y}$$

แทนค่าจะได้ $$x = -\sqrt{100-y^2} + 10\,\ell n\,\frac{10+\sqrt{100-y^2}}{y} + C$$

เมื่อเรืออยู่ที่จุด B แสดงว่า $x = 0,\ y = 10$

แทนค่าจะได้ $$c = 0$$

เมื่อเรืออยู่ห่างจาก A C 6 ฟุต แสดงว่า $y = 6$

ดังนั้น $$x = -\sqrt{100-36} + 10\ell n\,\frac{10+\sqrt{100-36}}{6}$$

$$= -8 + 10\,\ell n\, 3$$

$$x+8 = 10\ell n 3$$

$$= 10(1.098)$$

$$= 10.98$$

$$x = 2.98$$

แสดงว่า เด็กชายคนนั้นอยู่ห่างจากจุด A เท่ากับ 10.98 ฟุต และตำแหน่งของเรือห่างจาก AB 2.98 ฟุต

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาสมการเส้นโค้งซึ่งเส้นปกติที่จุด (x, y) ใด ๆ ผ่านจุดกำเนิด
2. จงหาสมการเส้นโค้งซึ่งความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับครึ่งหนึ่งของความชันของเส้นตรงจากจุดนั้นไปยังจุดกำเนิด
3. จงหาสมการเส้นโค้งที่เส้นใต้เส้นสัมผัสในพิกัดเชิงขั้วเท่ากับเส้นใต้เส้นปกติในพิกัดเชิงขั้ว
4. จงหาสมการเส้นโค้งถ้าความชันที่จุด (x, y) ใด ๆ บนเส้นโค้งมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}\sqrt{2x+3y}$
5. จงหาสมการของเส้นโค้งซึ่งผ่านจุด $(3, -2)$ และความชันที่จุด (x, y) ใด ๆ บนเส้นโค้งมีค่าเท่ากับ $\frac{x^2+y^2}{y^3-2xy}$
6. จงหาออร์ธอกอนัลทราเจกตอรี ของชุดของเส้นโค้งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (1) $x^2 - y^2 = Cx$

   (2) $ax^2 + by^2 = C$

   (3) $x^2 - y^2 = C$

   (4) $x^2 + 2y^2 = C$

   (5) $y^2 = \frac{x^3}{C-x}$

   (6) $xy = C$

   (7) $y = x - 1 + Ce^{-x}$

   (8) $r = a\cos\theta$

   (9) $r = a(1 + \sin\theta)$

   (10) $r = a(\sec\theta + \tan\theta)$

3.2 การประยุกต์ทางฟิสิกส์

สำหรับการประยุกต์ทางฟิสิกส์ได้อาศัยกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ในการสร้างสมการดิฟเฟอเรนเชียลซึ่งมีปัญหาที่พบบ่อย ๆ คือปัญหาทางกลศาสตร์ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุ นอกจากปัญหาทางกลศาสตร์แล้วเรายังมีปัญหาทางฟิสิกส์อื่น ๆ เช่น ความร้อน อุณหภูมิ ของไหล เป็นต้น แต่สำหรับการประยุกต์ในหัวข้อ 3.2 จะเป็นตัวอย่างการประยุกต์ทางกลศาสตร์เสียส่วนใหญ่

กฎสำคัญในทางกลศาสตร์คือ กฎ 3 ข้อของนิวตัน ซึ่งกล่าวดังนี้

(1) วัตถุต่าง ๆ จะคงสภาพหยุดนิ่ง หรือ เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ในแนวเส้นตรง เว้นแต่จะมีแรงมากระทำต่อวัตถุนั้น

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุเป็นปฏิภาคโดยตรงกับแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้นและจะมีทิศทางไปทางเดียวกันกับทิศทางของแรงนั้น

(3) แรงกิริยาและแรงปฏิกิริยาจะมีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน

จากกฎข้อ 2 ของนิวตันจะได้ว่า

$$F \propto ma$$

$$F = kma$$

แต่จากการวิเคราะห์ทางกลศาสตร์พบว่าไม่ว่าจะเป็นระบบ c.g.s. หรือระบบ f.p.s. ก็ตาม ค่า $k = 1$ ดังนั้น

$$F = ma$$

ในทางปฏิบัติเราวัดน้ำหนักของวัตถุได้ สมมติวัตถุมีน้ำหนัก W และมีมวล m จะได้

$$W = mg$$

เมื่อ g แทนแรงดึงดูดของโลก

จะได้ $$m = \frac{W}{g}$$

ดังนั้น $$F = \left(\frac{W}{g}\right) a$$

นอกจากกฎของนิวตันแล้วเรายังมีกฎทางฟิสิกส์อื่น ๆ ที่ใช้ประยุกต์ได้อีก เช่น การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ แรงยืดของสปริง แรงตึงในเส้นเชือก เป็นต้น

ตัวอย่าง 3.9 วัตถุมวล m กิโลกรัม ตกจากสภาพหยุดนิ่ง ถ้าความต้านทานของอากาศเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความเร็ว^2 (เมตรต่อวินาที) แล้ว จงหา

(1) ความเร็วเมื่อวัตถุตกลงมาได้ 2 วินาที

(2) เวลาเมื่อวัตถุมีความเร็ว 30 เมตรต่อวินาที

เมื่อกำหนดความเร็วสุดท้ายเป็น 50 เมตรต่อวินาที

วิธีทำ ให้ v แทนความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ

แรงที่ทำให้วัตถุตกลงมา = น้ำหนักของวัตถุ – ความต้านทานของอากาศ

แต่ความต้านทานของอากาศเป็นปฏิภาคโดยตรงกับ v^2

ความต้านทาน $= kv^2$

จะได้ว่า

$$F = W - kv^2$$

$$ma = mg - kv^2$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

กำหนด $g = 9.8$ เมตรต่อ (วินาที)^2

เพื่อสะดวกในการคำนวณเลือก $k = \frac{9.8}{16}mC^2$

จะได้

$$m\frac{dv}{dt} = m(9.8) - \frac{9.8}{16}mC^2v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{9.8}{16}C^2v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{9.8}{16}(16 - C^2v^2)$$

$$\frac{dv}{16 - C^2v^2} = \frac{9.8\,dt}{16}$$

$$\frac{dv}{C^2v^2 - 16} = -\frac{9.8}{16}\,dt$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{dv}{Cv-4} - \frac{dv}{Cv+4}\right] = -\frac{9.8\,dt}{16}$$

$$\frac{1}{C}\,\ell n\left(\frac{Cv-4}{Cv+4}\right) = -4.9t + C_1$$

$$\ell n\left(\frac{Cv-4}{Cv+4}\right) = -4.9Ct + \ell nK$$

$$\frac{cv-4}{Cv+4} = Ke^{-4.9Ct}$$

เมื่อ $t = 0, v = 0$ จะได้ $K = -1$

จะได้ $$\frac{Cv-4}{Cv+4} = -e^{-4.9Ct}$$

เมื่อ $t \to \infty,\ v = 50$ จะได้ $e^{-4.9Ct} = 0$

จะได้ $$50C-4 = 0$$

$$C = \frac{2}{25}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$\frac{v-50}{v+50} = -e^{-0.39t}$$

(1) เมื่อ $t = 2$ จะได้

$$\frac{V-50}{v+50} = -e^{-0.78} = -0.46$$

จะได้ $$v-50 = -0.46(v+50)$$

$$v = 18.5$$ เมตรต่อวินาที

(2) เมื่อ $v = 30$ จะได้ว่า

$$\frac{30-50}{30+50} = -e^{-0.39t}$$

$$\frac{20}{80} = -e^{-0.39t}$$

$$-0.25 = e^{-0.39t}$$

$$(e^{-1.34} = 0.25)$$

จะได้ว่า $$0.39t = -1.34$$

$$t = \frac{1.34}{0.39} = 3.5$$ วินาที

ตัวอย่าง 3.10 พลร่มโดดร่มลงมาด้วยความเร็ว 55 เมตรต่อวินาที ขณะที่ร่มกางออก ถ้าอากาศมีความต้านทานเท่ากับ $\frac{Wv^2}{25}$ นิวตัน เมื่อ W แทนน้ำหนักรวมของร่มและตัวพลร่มเอง จงหาอัตราเร็วของพลร่มในรูปของฟังก์ชันเวลา t ภายหลังจากที่ร่มกางออกแล้ว

วิธีทำ แรงลัพธ์ = น้ำหนักของวัตถุ – แรงต้านทานของอากาศ

$$F = W - \frac{Wv^2}{25}$$

$$ma = W - \frac{Wv^2}{25}$$

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt} = W - \frac{Wv^2}{25}$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{25}\right)g$$

$$\frac{dv}{v^2 - 25} = -\frac{9.8}{25}dt$$

$$\frac{1}{10}\left[\frac{dv}{v-5} - \frac{dv}{v+5}\right] = -\frac{9.8}{25}dt$$

$$\frac{1}{10}\ln\left(\frac{v-5}{v+5}\right) = -\frac{9.8}{25}t + C$$

เมื่อ $t = 0$. $v = 55$ ดังนั้น

$$\frac{1}{10}\ln\left(\frac{55-5}{55+5}\right) = 0 + C$$

$$\frac{1}{10}\ln\frac{5}{6} = C$$

จะได้

$$\frac{1}{10}\ln\left(\frac{v-5}{v+5}\right) = -\frac{9.8}{25}t + \frac{1}{10}\ln\frac{5}{6}$$

$$\ln\left(\frac{v-5}{v+5}\right) - \ln\frac{5}{6} = -\frac{98}{25}t$$

$$\ln\frac{6}{5}\left(\frac{v-5}{v+5}\right) = -\frac{98}{25}t = -4t$$ (โดยประมาณ)

$$\frac{v-5}{v+5} = \frac{5}{6}e^{-4t}$$

$$v-5 = \frac{5}{6}e^{-4t}(v+5)$$

$$v - \frac{5}{6}e^{-4t}v = 5\left(1 + \frac{5}{6}e^{-4t}\right)$$

$$v\left(1 - \frac{5}{6}e^{-4t}\right) = \frac{5}{6}(6 + 5e^{-4t})$$

$$\frac{v}{6}(6 - 5e^{-4t}) = \frac{5}{6}(6 + 5e^{-4t})$$

$$= \frac{5(6 + 5e^{-4t})}{6 - 5e^{-4t}}$$

ซึ่งจะเห็นว่า ความเร็วสุดท้ายคือ เมื่อ $t \to \infty$ พลร่มจะมีอัตราเร็วคงที่คือ 5 เมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.11 วัตถุชิ้นหนึ่งหนัก 35 กิโลกรัม ถูกลากไปบนพื้นน้ำแข็ง แรงเสียดทานของน้ำแข็งและแรงต้านทานของอากาศมีค่าเป็น 70 เท่าของความเร็ว จงหา

(1) แรงคงที่ (หน่วยเป็นนิวตัน) ซึ่งทำให้วัตถุชิ้นนี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสุดท้ายเป็น 16 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

(2) ความเร็วและระยะทางเมื่อเคลื่อนที่ไปได้ 48 วินาที

วิธีทำ จากโจทย์

แรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ = มวล × ความเร่ง

แรงลาก – แรงต้านทานของอากาศ = มวล × ความเร่ง

ให้ F แทนแรงลาก ดังนั้น จะได้

$$F - 70v = 35\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + 2v = \frac{F}{35}$$

ใช้วิธีการของสมการเชิงเส้นอันดับที่ 1 จะได้

$$ve^{2t} = \int \frac{F}{35}e^{2t}dt + C$$

$$ve^{2t} = \frac{F}{70}e^{2t} + C$$

$$v = \frac{F}{70} + Ce^{-2t}$$

เมื่อ $t = 0,\ v = 0$ จะได้

$$0 = \frac{F}{70} + C$$

จะได้ $$C = -\frac{F}{70}$$

แทนค่าจะได้ $$v = \frac{F}{70}(1 - e^{-2t})$$

เมื่อ $t \to \infty$, $$v = \frac{F}{70}$$

$$\begin{aligned} F &= 70v \\ &= 70 \times \frac{16000}{3600} \\ &= \frac{2800}{9} \approx 311 \text{ นิวตัน} \end{aligned}$$

จาก $$v = \frac{F}{70}(1-e^{-2t})$$

$$= \frac{40}{9}(1-e^{-2t})$$

เมื่อ $t = 48$ จะได้

$$v = \frac{40}{9}(1-e^{-96})$$

$$\approx \frac{40}{9} \text{ เมตรต่อวินาที}$$

เพราะว่า $$S = \int_0^{48} v\,dt$$

$$= \int_0^{48} \frac{40}{9}(1-e^{-2t})dt$$

$$= \frac{40}{9}t + \frac{20}{9}e^{-2t}\Big|_0^{48}$$

$$= \frac{40}{9}\left(48 - 0 + \frac{1}{2}e^{-96} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 211 \text{ เมตร}$$

ตัวอย่าง 3.12 สปริงซึ่งไม่คิดน้ำหนักแขวนวัตถุมวล m กิโลกรัม ไว้ในแนวดิ่ง ถ้ามวลสารนั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_0 เมตรต่อวินาที ในขณะที่สปริงยังไม่ยืด จงหาความเร็วของมวลสาร v ในพจน์ของตัวแปร x เมื่อ x คือส่วนยืดของสปริง

วิธีทำ กฎของ Hooke กล่าวว่า

"แรงของสปริงจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับการยืดของสปริง"

นั่นคือ แรงของสปริง = kx เมื่อ k เป็นค่าคงที่

เพราะว่า แรงที่กระทำต่อมวลสาร = น้ำหนักของวัตถุ - แรงของสปริง

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kx$$

$$m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = mg - kx$$

แต่ $\frac{dx}{dt} = v$ ดังนั้น $$mv\frac{dv}{dx} = mg - kx$$

$$mv\,dv = mg\,dx - kx\,dx$$

$$m\frac{v^2}{2} = mgx - \frac{kx^2}{2} + C_1$$

$$v^2 = 2gx - \frac{kx^2}{m} + C$$

เมื่อ $x = 0,\ v = v_0$ ดังนั้น

$$v_0^2 = 0 - 0 + C$$

ได้ $C = v_0^2$ แทนค่าจะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่าง v กับ x คือ

$$v^2 = 2gx - \frac{kx^2}{m} + v_0^2$$

ตัวอย่าง 3.13 กฎการเย็นตัวของนิวตันกล่าวว่า อัตราการเย็นตัวของสารในอากาศเป็นปฏิภาคโดยตรงกับผลต่างของอุณหภูมิของสารกับอุณหภูมิของอากาศในขณะนั้น วัตถุชิ้นหนึ่งได้รับความร้อนมีอุณหภูมิ 370° K ภายในเวลา 15 นาที อุณหภูมิลดลงเหลือ 340° K ถ้าอุณหภูมิของอากาศในขณะนั้นเท่ากับ 300° K แล้ว จงหาว่าวัตถุชิ้นนี้จะเย็นลงเหลือ 310° K จะต้องใช้เวลากี่นาที

วิธีทำ ให้ T เป็นอุณหภูมิของวัตถุในขณะเวลา t ใด ๆ

ดังนั้น

$$\frac{dT}{dt} \propto T - 300$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T-300)$$

$$\frac{1}{T-300}\,dT = k\,dt$$

$$\ell n(T-300) = kt + C$$

เมื่อ $t = 0,\ T = 370$ จะได้ว่า

$$\ell n\, 70 = C$$

เมื่อ $t = 15,\ T = 340$ จะได้ว่า

$$\ell n\, 40 = 15k + \ell n\, 70$$

$$15k = \ell n \frac{4}{7}$$

$$k = \frac{1}{15}\ell n\frac{4}{7}$$

จะได้

$$\ell n(T-300) = \left(\frac{1}{15}\ell n\frac{4}{7}\right)t + \ell n\, 70$$

เมื่อ $T = 310° K$ จะได้ว่า

$$\ell n\, 10 = \left(\frac{1}{15}\ell n \frac{4}{7}\right)t + \ell n\, 70$$

$$\ell n \frac{1}{7} = \frac{1}{15}\left(\ell n \frac{4}{7}\right)t$$

$$\frac{-15\,\ell n\, 7}{\ell n \frac{4}{7}} = t$$

$$t = \frac{-15\,\ell n\, 7}{-0.56} \approx 52 \text{ นาที}$$

แบบฝึกหัด 3.2

1. วัตถุมวล 200 กรัม ถูกโยนด้วยความเร็วเริ่มต้น 24.50 เมตรต่อวินาที
   (1) จงหาระยะทางจากจุดเริ่มต้นเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ได้ 2 วินาที และ 4 วินาที
   (2) วัตถุขึ้นไปได้สูงสุดเท่ากับเท่าใด และใช้เวลาเท่าใดในการถึงจุดสูงสุด
2. พลร่มโดดร่มลงมาในแนวดิ่ง ถ้าน้ำหนักของพลร่มกับน้ำหนักร่มร่วมกัน 200 ปอนด์ ขณะที่ร่มกางออกเขาตกลงมาด้วยความเร็ว 40 ฟุตต่อวินาที ถ้าความต้านทานของอากาศแปรผันโดยตรงกับความเร็วขณะนั้น และความต้านทานของอากาศเป็น 20 ปอนด์ เมื่อความเร็วเป็น 20 ฟุตต่อวินาที จงหา
   (1) ความเร็วเมื่อ $t \to \infty$
   (2) สมการของตำแหน่งและความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ
3. มวล m กรัม ตกลงมาจากสภาพหยุดนิ่งในแนวดิ่ง จงสร้างสมการการเคลื่อนที่ของมวลนี้
4. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิ่ง ซึ่งห่างจากจุด O เป็นระยะทาง 10 เซนติเมตร เคลื่อนที่เข้าหาจุด O โดยเคลื่อนที่ในแนวราบและเคลื่อนที่ภายใต้แรงดึงดูดที่จุด O แรงดึงดูดนี้เป็นปฏิภาคโดยตรงกับระยะทางที่วัตถุห่างจากจุด O กำหนดให้วัตถุมีอัตราเร่งเท่ากับ [illegible] เซนติเมตรต่อ (วินาที)^2 เมื่อห่างจากจุด O 1 เซนติเมตร จงหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้
5. โดยใช้กฎการเย็นตัวของนิวตันจากตัวอย่าง 3.13 ถ้าวัตถุเย็นลงจาก 370° K เป็น 330° K ใน 10 นาที และอุณหภูมิของอากาศในขณะนั้นเท่ากับ 290° K แล้ว จงหาอุณหภูมิของวัตถุเมื่อเวลาเปลี่ยนไป 40 นาที
6. ชายคนหนึ่งพายเรือโดยที่น้ำหนักเรือรวมกับตัวเขาเองเป็น 320 ปอนด์ ถ้าแรงจากการพายเรือในทิศทางการเคลื่อนที่เป็น 16 ปอนด์ และแรงเสียดทานของพื้นน้ำมีค่าเป็น 2 เท่าของความเร็ว จงหาความเร็วหลังจากเรือแล่นไปได้ 15 วินาที

3.3 การประยุกต์ทางเคมี

ในการประยุกต์ทางเคมีของสมการดิฟเฟอเรนเชียลมีหลายรูปแบบด้วยกัน ซึ่งส่วนใหญ่อยู่ในรูปอัตราการเปลี่ยนแปลง เช่น สารละลาย การทำปฏิกิริยาของสารสองชนิด การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี เป็นต้น

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.14 ถังน้ำใบหนึ่งบรรจุน้ำเกลืออยู่ 100 แกลลอน มีเกลือละลายอยู่ 60 ปอนด์ ปล่อยน้ำเข้าถังนาทีละ 2 แกลลอน พร้อมกันนั้นก็คอยคนส่วนผสมให้เข้ากันดีแล้วปล่อยน้ำออกในอัตราเท่ากัน จงหา

(1) ปริมาณเกลือในถังเมื่อเวลา t ใด ๆ

(2) ภายหลัง 1 ชั่วโมง จะมีเกลือเหลือเท่าใด

(3) จะมีเกลือเหลืออยู่ในถังเท่าใดเมื่อใช้เวลานานพอสมควร $(t \to \infty)$

วิธีทำ ให้ปริมาณของเกลือในถังเมื่อเวลาผ่านไป t มี Q ปอนด์

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเกลือ คือ $\frac{dQ}{dt}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเกลือ = อัตราเกลือเข้าถัง − อัตราเกลือออกจากถัง

$$\text{อัตราเกลือเข้าถัง} = 0 \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

$$\text{อัตราเกลือออกจากถัง} = \frac{Q\text{ ปอนด์}}{100\text{ แกลลอน}} \cdot \frac{2\text{ แกลลอน}}{1\text{ นาที}}$$

$$= \frac{Q}{50} \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

ดังนั้น

$$\frac{dQ}{dt} = 0 - \frac{0}{50}$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{50}dt$$

$$\ell n\, Q = -\frac{1}{50}t + C$$

เมื่อ $t = 0$, $Q = 60$ ดังนั้น

$$Pn\ 60 = c$$

จะได้

$$\ell n\, Q = -\frac{1}{50}t + \ell n\, 60$$

$$\ell n \frac{Q}{60} = -\frac{1}{50}t$$

$$\frac{Q}{60} = e^{-\frac{1}{50}t}$$

$$Q = 60e^{-\frac{1}{50}t}$$

เมื่อ $t = 60$ นาที จะได้

$$Q = 60e^{-\frac{60}{50}}$$

$$= 60e^{-1.2} \approx 18 \text{ ปอนด์}$$

($e^{-1.2}$ มีค่าประมาณ 0.301)

เมื่อ $t \to \infty$, $e^{-\frac{1}{50}t} \to 0$

นั่นคือ ปริมาณเกลือในถังจะหมดไปเมื่อเวลานานพอสมควร

ตัวอย่าง 3.15 ห้อง ๆ หนึ่งกว้าง 17.5 เมตร ยาว 50 เมตร และสูง 4 เมตร จากการตรวจสอบพบว่ามี CO_2 ผสมอยู่ 0.2 เปอร์เซ็นต์ ถ้าปล่อยอากาศบริสุทธิ์ที่มี CO_2 ผสมอยู่ 0.05 เปอร์เซ็นต์ เข้าไปในห้องโดยผ่านเครื่องปรับอากาศในอัตรา 4.2 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที จงหาร้อยละของ CO_2 ในห้องนี้ภายหลังเวลาผ่านไป 20 นาที

วิธีทำ ให้ x แทนปริมาณของ CO_2 ในห้องขณะเวลา t ใด ๆ

ความเข้มข้นของ co, ในห้อง $= \dfrac{x}{17.5 \times 50 \times 4}$

$$= \frac{x}{3500}$$

ในช่วงเวลา dt จำนวน CO_2 ที่ผ่านเข้าไปในห้อง $= \dfrac{4.2 \times 0.05dt}{100}$

จำนวน CO_2 ที่ออกไป $= 4.2\left(\dfrac{x}{3500}\right)dt$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ CO_2 ในห้อง = CO_2 ที่เข้าในห้อง − CO_2 ที่ออกจากห้อง

$$dx = \frac{4.2x0.05\ dt}{100} - 4.2\left(\frac{x}{3500}\right)dt$$

$$3500dx = 7.35dt - 4.2xdt$$

$$\frac{3500}{4.2x-7.35}dx = -dt$$

$$\frac{3500}{4.2}\ \ell n(4.2x-7.35) = -t+C$$

เมื่อ $t = 0,\ x = \dfrac{0.2}{100} \times 3500 = 7$

ดังนั้น
$$C = \frac{3500}{4.2}\ell n(29.4-7.35)$$

$$= \frac{3500}{4.2}\ell n\ 22.05$$

จะได้
$$\frac{3500}{4.2}\ell n\frac{(4.2x-7.35)}{22.05} = -t$$

$$\ell n\left(\frac{4.2x-7.35}{22.05}\right) = -\frac{4.2}{3500}t$$

$$= -1.2\times10^{-3}t$$

$$4.2x-7.35 = 22.05\times e^{-1.2\times10^{-3}t}$$

$$4.2x = 7.35 + 22.05e^{-1.2\times10^{-3}t}$$

$$x = \frac{7.35}{4.2} + \frac{22.05}{4.2}e^{-1.2\times10^{-3}t}$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{21}{4}e^{-1.2\times10^{-3}t}$$

$$= \frac{7}{4}(1+3e^{-1.2\times10^{-3}t})$$

เมื่อ t = 20 นาที = 1200 วินาที

ดังนั้น $$x = \frac{7}{4}\left(1+3e^{-1.2\times10^{-3}\times1200}\right)$$

$$= \frac{7}{4}(1+3e^{-1.44})$$

$$= 3.06$$

คิดเป็นเปอร์เซ็นต์ $= \frac{3.06}{3500}\times100 \approx 0.09\%$

ตัวอย่าง 3.16 นักเรียนคนหนึ่งทำการทดลองการเกิดเกลือโดยใช้กรดผสมกับด่าง คือ ใช้ HCl ทำปฏิกิริยากับ NaOH ซึ่งจะได้ NaCl และน้ำ จากการทดลองเขาพบว่าอัตราการเกิดของ NaCl เป็นปฏิภาคโดยตรงกับผลคูณของปริมาณของ HCl และ NaOH ในขณะนั้น ถ้าอัตราส่วนในการทำปฏิกิริยาของสารคือ HCl : NaOH = 3 : 2 ถ้าตอนเริ่มต้นการทดลอง นักเรียนคนนี้ใช้ HCl 30 กรัม ใช้ NaOH 40 กรัม และพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 20 วินาที ได้ NaCl 25 กรัม จงหา

(1) ปริมาณของ NaCl เมื่อเวลา t ใด ๆ

(2) ปริมาณของ NaCl เมื่อเสร็จสิ้นปฏิกิริยา

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวน NaCl ที่เกิดขึ้นในเวลา t นาทีใด ๆ

อัตราการเกิด NaCl คือ $\frac{dx}{dt}$

การที่เกิด NaCl x กรัม มาจาก HCl $\frac{3x}{5}$ กรัม และ NaOH $\frac{2x}{5}$ กรัม

ดังนั้น ในเวลาที่ผ่านไป t นาที มี HCl เหลืออยู่ $30-\frac{3x}{5}$ กรัม และมี NaOH เหลืออยู่ $40-\frac{2x}{5}$ กรัม

$$\frac{dx}{dt} \propto \left(30-\frac{3x}{5}\right)\left(40-\frac{2x}{5}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = k\left(30-\frac{3x}{5}\right)\left(40-\frac{2x}{5}\right)$$

$$= \frac{6}{25}k(50-x)(100-x)$$

$$\frac{dx}{(50-x)(100-x)} = 2\ \frac{6}{5}kdt$$

$$\frac{1}{50}\ell n\left(\frac{100-x}{50-x}\right) = \frac{6}{25}kt + C$$

เมื่อ $t = 0$, $.x = 0$

จะได้ $$\frac{1}{50}\ell n\, 2 = C$$

จะได้ $$\frac{1}{50}\ell n \frac{1}{2}\left(\frac{100-x}{50-x}\right) = \frac{6}{25}kt$$

$$\ell n \frac{1}{2}\left(\frac{100-x}{50-x}\right) = 12kt$$

$$\frac{100-x}{50-x}. = 2e^{12kt}$$

เมื่อ $t = 20$, $x = 25$

จะได้ $$\frac{75}{25} = 2e^{240k}$$

$$e^{240k} = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น $$\frac{100-x}{50-x} = 2(e^{240k})^{\frac{t}{20}}$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$100-x = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}(50-x)$$

$$x - x\left[2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}\right] = 100 - 100\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$x\left(1-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}\right) = 100\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}\right)$$

$$x = \frac{100\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}\right]}{1-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}}$$

เมื่อ $t\to\infty$

$$x = \frac{100\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{20}}-1\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{20}}-2}$$

$$= \frac{100(0-1)}{0-2}$$

$$= 50 \text{ กรัม}$$

ตัวอย่าง 3.17 ถ้าอัตราการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีเป็นปฏิภาคโดยตรงกับปริมาณของสารในขณะนั้น ในการตรวจสอบการสลายตัวของแร่เรเดียม พบว่าในเวลา 12 ปี เรเดียมหายไป 0.5% จงหา

(1) จำนวนร้อยละที่เรเดียมหายไปในเวลา 1000 ปี

(2) จงหาเวลาเมื่อปริมาณเรเดียมลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม

วิธีทำ ให้ Q_0 เป็นปริมาณเรเดียมในขณะเริ่มต้น

ให้ Q เป็นปริมาณเรเดียมในขณะเวลา t ปีใด ๆ

อัตราการสลายตัวของเรเดียม $= \frac{dQ}{dt}$

$$\frac{dQ}{dt} \propto Q$$

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ \qquad k>0$$

(ใช้เครื่องหมายลบหน้า k เพราะว่า $Q>0$ และ $\frac{dQ}{dt}<0$)

$$\frac{dQ}{Q} = -k\,dt$$

$$\ell n\, Q = -kt + C$$

เมื่อ $t = 0,\ Q = Q_0$ ดังนั้น

$$\ell n\, Q_0 = c$$

จะได้ว่า $$\ell n\, Q - \ell n\, Q_0 = -kt$$

$$\ell n \frac{Q}{Q_0} = -kt$$

$$\frac{Q}{Q_0} = e^{-kt}$$

$$Q = Q_0 e^{-kt}$$

เมื่อ $t = 12,$ $\qquad Q = \left(1 - \frac{5}{1000}\right)Q_0$

ดังนั้น $\left(1 - \frac{5}{1000}\right)Q_0 = Q_0 e^{-12k}$

$$\left(1 - \frac{5}{1000}\right) = e^{-12k}$$

ดังนั้น $\qquad Q = Q_0\left(1 - \frac{5}{1000}\right)^{\frac{t}{12}}$

$$= Q_0(.995)^{\frac{t}{12}}$$

เมื่อ $t = 10005$ จะได้ $\qquad Q = Q_0(.995)^{\frac{1000}{12}}$

$$Q = 0.658Q_0$$

ดังนั้น เรเดียมที่หายไปใน 1000 ปี คิดเป็น 34.2%

ถ้า $Q = \frac{1}{2}Q_0$ จะหา t ได้จาก

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0(0.995)^{\frac{t}{12}}$$

ได้ $t = 1660$ ปี (โดยประมาณ)

แบบฝึกหัด 3.3

1. สาร A ทำปฏิกิริยากับสาร B เกิดสาร C กำหนดให้สาร A a กรัม สาร B b กรัม ทำปฏิกิริยาเกิดสาร C เท่ากับ $(a+b)$ กรัม ถ้าในตอนเริ่มแรกมีสาร A อยู่ a_0 กรัม สาร B อยู่ b_0 กรัม และไม่มีสาร C เลย ถ้าอัตราการเกิดของสาร C เป็นปฏิภาคโดยตรงกับผลคูณของปริมาณสาร A กับสาร B ที่เหลือในขณะนั้น จงหาปริมาณของสาร C ที่เกิดขึ้นในรูปฟังก์ชันของ t
2. ห้อง ๆ หนึ่งมีขนาด 90,000 ลูกบาศก์ฟุต ทดสอบดูพบว่ามี CO_2 ผสมอยู่ 0.2% ถ้าปล่อยให้อากาศบริสุทธิ์ซึ่งมี CO_2 ผสมอยู่ 0.05% ผ่านเข้าไปในห้องโดยใช้เครื่องระบายอากาศในอัตรา 9,000 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที อยากทราบว่าหลังจากปล่อยอากาศบริสุทธิ์เข้าไป 20 นาที จะมี CO_2 ผสมอยู่ร้อยละเท่าใด
3. สารเคมีชนิดหนึ่งละลายน้ำด้วยอัตราที่เป็นปฏิภาคโดยตรงกับผลคูณของจำนวนที่ยังไม่ละลายกับผลต่างของความเข้มข้นในสารละลายที่อิ่มตัว กับความเข้มข้นในสารละลายขณะนั้น ถ้าสารละลายอิ่มตัว 100 กรัม มีสารเคมีละลายอยู่ 50 กรัม และถ้านำสารเคมี 30 กรัม มาใส่ในน้ำ 100 กรัม พบว่าสารละลายไปได้ 10 กรัม ในเวลา 2 ชั่วโมง จงหาจำนวนสารเคมีที่ละลายไปใน 5 ชั่วโมง
4. ถังน้ำใบหนึ่งบรรจุน้ำเกลือต้ม 10 แกลลอน ซึ่งมีเกลือละลายอยู่ 5 ปอนด์ ถ้าเติมน้ำเกลือซึ่งมีเกลือแกลลอนละ 3 ปอนด์ เข้าไปในถังนี้ด้วยอัตราเร็วนาทีละ 2 แกลลอน และปล่อยน้ำเกลือในถังที่คนได้ที่แล้วออกจากถังในอัตราเดียวกัน จงหาปริมาณเกลือในขณะเวลา t ใด ๆ
5. ถ้าระยะครึ่งชีวิต (half-life) ของเรเดียม คือ 1600 ปี จงหาร้อยละของเรเดียมที่ยังคงเหลืออยู่หลังจากเวลาผ่านไป 100 ปี และ 1000 ปี ตามลำดับ
6. สารเคมี 2 ชนิด ทำปฏิกิริยากันได้สารใหม่ จากการทดลองได้ผลว่าสารใหม่ที่เกิดขึ้นเป็นปฏิภาคกับผลคูณของสารทั้ง 2 ชนิด ในขณะนั้น ในปฏิกิริยานี้ต้องใช้สารชนิดที่ (1) 2 กรัม ทำปฏิกิริยากับสารชนิดที่ (2) 1 กรัม เสมอ ในการเริ่มต้นการทดลองมีสารชนิดที่ (1) 10 กรัม และมีสารชนิดที่ (2) 20 กรัม และเมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ได้สารใหม่ 6 กรัม จงหาปริมาณของสารใหม่ในขณะเวลา t ใด ๆ

3.4 การประยุกต์ทางไฟฟ้า

การประยุกต์ทางไฟฟ้าในรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการใช้กับวงจรไฟฟ้าแบบง่าย ๆ และกฎเกณฑ์ที่ใช้คือกฎของโอห์มและกฎของเคอร์ชอฟฟ์ โดยที่สัญลักษณ์และหน่วยที่ใช้มีดังนี้

(1) แรงเคลื่อนไฟฟ้าหรือความต่างศักย์ (E) หน่วยเป็นโวลต์

(2) ความต้านทาน (R) หน่วยเป็นโอห์ม (ohm)

(3) ตัวนำ (L) หน่วยเป็นเฮนรี (henry)

(4) กระแส (I) หน่วยเป็น แอมแปร์

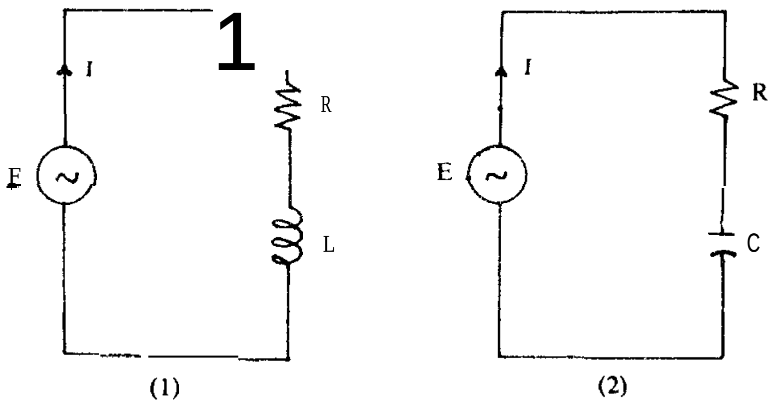
(5) ความจุ (C) หน่วยเป็น ฟารัด

(6) ประจุ (Q) หน่วยเป็น คูลอมบ์

แบบวงจรไฟฟ้าขั้นพื้นฐานแบบง่าย ๆ มี 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 : ประกอบด้วย แรงเคลื่อนไฟฟ้า (E) ความต้านทาน (R) และตัวนำ (L) ต่ออนุกรมกันดังรูป 3.10 (1)

จะได้ $$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$



รูป 3.10

แบบที่ 2 : ประกอบด้วยแรงเคลื่อนไฟฟ้า (E) ความต้านทาน (R) และคอนเดนเซอร์ (C) ต่ออนุกรมกันดังรูป 3.10 (2)

จะได้ $$RI + \frac{Q}{C} = E$$

แต่ $I = \frac{dQ}{dt}$ ดังนั้นจะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.18 สมการวงจรพื้นฐานไฟฟ้ากำหนดในรูป

$$L\frac{dI}{dt}+RI = E(t)$$

(1) หา I เมื่อ $E(t) = E_0$ และ กระแสเริ่มต้นคือ I_0

(2) กำหนด $L = 3$ เฮนรี $R = 15$ โอห์ม และ $E(t) = 110\sin 120\pi t$ จงหา I ถ้าเมื่อ $t = 0,\ I = 0$

วิธีทำ (1) จาก

$$L\frac{dI}{dt}+RI = E(t)$$

$$L\frac{dI}{dt}+RI = E_0$$

$$Ie^{\frac{Rt}{L}} = \frac{E_0}{L}\int e^{\frac{Rt}{L}}dt$$

$$= \frac{E_0}{R}e^{\frac{Rt}{L}}+C$$

$$I = \frac{E_0}{R}+Ce^{-\frac{Rt}{L}}$$

เมื่อ $t = 0,\ I = I_0$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$I_0 = \frac{E_0}{R}+C$$

$$C = I_0-\frac{E_0}{R}$$

จะได้

$$I = \frac{E_0}{R}+\left(I_0-\frac{E_0}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$= \frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right) + I_0e^{-\frac{Rt}{L}}$$

เมื่อ $t\to\infty$ จะได้ว่า

$$I = \frac{E_0}{R}$$

(2) จาก

$$L\frac{dI}{dt}+RI = E$$

$$3\frac{dI}{dt}+15I = 110\sin 120\pi t$$

$$\frac{dI}{dt}+5I = \frac{110}{3}\sin 120\pi t$$

$$Ie^{5t} = \frac{110}{3}\int \sin 120\pi t\, e^{5t}\,dt$$

$$= \frac{110}{3} e^{5t} \left(\frac{\sin 120\pi t - 120\pi \cos 120\pi t}{25 + 14400\pi^2} \right) + C$$

$$I = \frac{22}{3} \left(\frac{\sin 120\pi t - 24\pi \cos 120\pi t}{1 + 576\pi^2} \right) + Ce^{-5t}$$

เมื่อ $t = 0, I = 0$ **ดังนั้น**

$$C = \frac{22}{3} \left(\frac{24\pi}{1 + 576\pi^2} \right)$$

จะได้ว่า

$$I = \frac{22}{3} \left(\frac{\sin 120\pi t - 24\pi \cos 120\pi t + 24\pi e^{-5t}}{1 + 576\pi^2} \right)$$

ตัวอย่าง 3.19 แรงเคลื่อนไฟฟ้า ความต้านทาน และคอนเดนเซอร์ ต่อกันเป็นวงจรแบบอนุกรม ถ้ากำหนดแรงเคลื่อน $E = 200e^{-5t}$ โวลต์ ความต้านทาน $R = 20$ โอห์ม และคอนเดนเซอร์มีความจุ 0.01 ฟารัด กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $t = 0$, $Q = 0$ จงหา Q, I เมื่อเวลา t ใด ๆ

วิธีทำ จากสมการ

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

$$20\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0.01} = 200e^{-5t}$$

$$\frac{dQ}{dt} + 5Q = 10e^{-5t}$$

$$Qe^{5t} = 10 \int e^{5t}e^{-5t}dt$$

$$= 10t + C$$

$$Q = 10te^{-5t} + Ce^{-5t}$$

เมื่อ $t = 0$, $Q = 0$ จะได้ $C = 0$

ดังนั้น สมการคือ

$$Q = 10te^{-5t}$$

แต่

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$= \frac{d(10te^{-5t})}{dt}$$

$$= 10(-5te^{-5t} + e^{-5t})$$

$$= 10e^{-5t}(1 \quad 5t)$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. วงจรไฟฟ้าแบบง่าย ๆ ประกอบด้วยความต้านทาน R คอนเดนเซอร์มีความจุ C และแรงเคลื่อนไฟฟ้า E ต่อกันเป็นแบบอนุกรมประจุ Q บนคอนเดนเซอร์กำหนดโดย

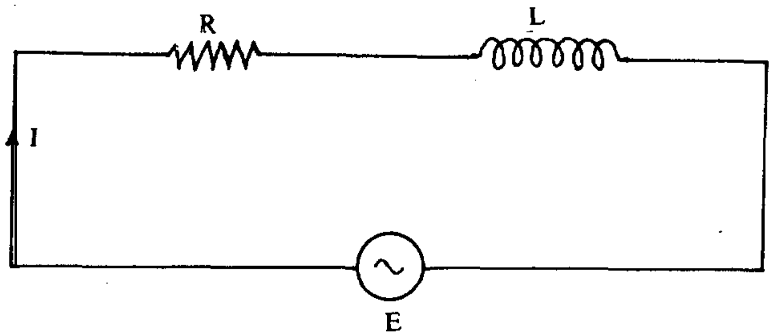
$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C} = E$$

ถ้า $R = 10$ โอห์ม $C = 10^{-3}$ ฟารัด $E(t) = 100 \sin 120\pi t$ แล้ว จงหา

(I) Q เมื่อกำหนดให้ $Q = 0$ เมื่อ $t = 0$

(23 ใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า $I = \frac{dQ}{dt}$ หาค่า I เมื่อกำหนดให้ว่า $t = 0$, $I = 5$ แอมแปร์

2. กำหนดวงจรไฟฟ้าดังรูป 3.11



รูป 3.11

กำหนดให้ $R = 10$ โอห์ม $L = 2$ เฮนรี และ $E(t) = 10 \sin \omega t$ และ $I = 0$ เมื่อ $t = 0$
จงหาสมการความสัมพันธ์ของ I กับ t

3.5 การประยุกต์ทางด้านอื่น

การประยุกต์ของสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับ 1 นอกจากที่กล่าวมาแล้วยังนำไปประยุกต์ทางวิชาการด้านอื่น ๆ อีกหลาย ๆ สาขา ตัวอย่างเช่นเกี่ยวกับการขยายตัวของแบคทีเรีย การเพิ่มของพลเมือง ความร้อน ของเหลว ของไหล การไหลของความร้อนในวัตถุ การเคลื่อนที่ของจรวด เป็นต้น

ตัวอย่าง 3.20 พลเมืองของประเทศ ๆ หนึ่ง เพิ่มเป็น 2 เท่าในเวลา 50 ปี ถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรเป็นปฏิภาคโดยตรงกับจำนวนประชากร จงหาว่าใช้เวลากี่ปีจำนวนประชากรจึงจะเพิ่มเป็น 3 เท่า

วิธีทำ ให้ x_0 เป็นจำนวนประชากรในตอนเริ่มแรก

ให้ x เป็นจำนวนประชากรในขณะเวลาผ่านไป t ปี

อัตราการเพิ่มของประชากร $= \frac{dx}{dt}$

จะได้ $\frac{dx}{dt} \quad x$

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

จะได้ $\ell n\, x = kt + \ell n\, C$

$$x = Ce^{kt}$$

เมื่อ $t = 0,\ x = x_0$ จะได้

$$x_0 = Ce^{k(0)}$$

จะได้ $c = x_0$

ดังนั้น $x = x_0 e^{kt}$

เมื่อ $t = 50,\ x = 2x_0$

จะได้ว่า $2x_0 = x_0 e^{k(50)}$

$$e^{50k} = 2$$

เมื่อ $x = 3x_0$ จะได้ว่า

$$3x_0 = x_0 e^{kt}$$

$$3 = e^{kt}$$

$$(3)^{50} = e^{50kt} = (e^{50k})^t = 2^t$$

จะได้ $= 50\frac{\log 3}{\log 2} \approx 79\ \ 5$

ตัวอย่าง 3.21 พิจารณาการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียพบว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นปฏิภาคโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรียในขณะนั้น ถ้าในการเพาะเชื้อแบคทีเรียพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง มีจำนวนแบคทีเรีย 10^4 ตัว และเมื่อเวลาผ่านไป 5 ชั่วโมง มีจำนวนแบคทีเรีย 4.10^4 ตัว จงหาจำนวนแบคทีเรียในตอนเริ่มต้น

วิธีทำ ให้ x_0 เป็นจำนวนแบคทีเรียในตอนเริ่มต้น

ให้ x เป็นจำนวนแบคทีเรียในขณะเวลา t ใด ๆ

$$\frac{dx}{dt} \propto x$$

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

จะได้
$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\ell n\, x = kt + \ell n\, C$$

$$x = Ce^{kt}$$

เมื่อ $t = 0,\ x = x_0$ จะได้ $C = x_0$

ดังนั้น
$$x = x_0e^{kt}$$

เมื่อ $t = 3,\ x = 10^4$ จะได้

$$10^4 = x_0e^{3k}$$

เมื่อ $t = 5,\ x = 4.10^4$ จะได้

$$4.10^4 = x_0e^{5k}$$

(2) ÷ (1) จะได้
$$e^{2k} = 4$$

$$e^k = 2$$

แทนค่าใน (1) จะได้
$$10^4 = x_0(2)^3$$

$$x_0 = \frac{10000}{8}$$

$$= 1250$$ ตัว

แบบฝึกหัด 3.5

1. ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นปฏิภาคโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรียในขณะนั้น และพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง มีแบคทีเรียเป็น 5 เท่าของตอนเริ่มต้น อยากทราบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 4 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียเป็นกี่เท่าของตอนเริ่มต้น
2. จากโจทย์ข้อ 1 ถ้ากำหนดว่าในตอนเริ่มต้นเพาะพันธุ์แบคทีเรีย มีแบคทีเรียอยู่ 100 ตัว และเมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง มีแบคทีเรีย 2,000 ตัว อยากทราบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียกี่ตัว
3. ประชากรของเมือง ๆ หนึ่งเมื่อ 50 ปีที่แล้วมี 10 ล้านคน และเมื่อ 30 ปีที่แล้วมีประชากร 30 ล้านคน ถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรเป็นปฏิภาคโดยตรงกับจำนวนประชากรในขณะนั้น จงหาว่าปัจจุบันมีประชากรเท่าใด
4. ถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรเป็นปฏิภาคโดยตรงกับจำนวนประชากรในขณะนั้น ในเวลา 30 ปี ประชากรเพิ่มเป็น 2 เท่า อยากทราบว่าใช้เวลากี่ปีประชากรจึงจะเพิ่มเป็น 3 เท่า