บทที่ 2
การแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับ 1 และ ดีกรี 1

จุดมุ่งหมายของวิชานี้ คือ การแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล-ซึ่งในบทนี้จะได้กล่าวเฉพาะสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับที่ 1 และ ดีกรี 1 เท่านั้น ซึ่งรูปแบบของสมการอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

หรือ $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ซึ่งมีวิธีการแก้สมการแบบต่าง ๆ ดังจะได้แยกกล่าวรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 แบบแยกตัวแปร

จากสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ก็ต่อเมื่อสามารถจัดสมการได้ในรูป

$$f_1(x)\, g_2(y)dx + f_2(x)\, g_1(y)dy = 0$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0$$

ซึ่งเมื่อจัดรูปเรียบร้อยแล้วจะหาคำตอบได้ทันทีโดยการอินทิเกรตตลอด จะได้

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = C$$

โดยที่ C เป็นตัวคงที่ตามใจชอบ

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2 . 1 จงแก้สมการ $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dx = 0$

วิธีทำ อยู่ในแบบแยกตัวแปร จัดรูปใหม่จะได้

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)dx + \left(\frac{y^2}{y+1}\right)dy = 0$$

$$\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx + \left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)dy = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\frac{x^2}{2} + x + \ell n(x-1) + \frac{y^2}{2} - y + \ell n(y+1) = C,$$

$$x^2 + 2x + 2\ell n(x-1) + y^2 - 2y + 2\ell n(y+1) = C(C = 2C_1)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2\ell n(x-1)(y+1) = C$$

ตัวอย่าง 2 . 2 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + 3x}{x^2y + y}$

วิธีทำ จัดรูปใหม่จะได้

$$(xy^2 + 3x)dx - (x^2y + y)dy = 0$$

$$x(y^2 + 3)dx - y(x^2 + 1)dy = 0$$

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx - \left(\frac{y}{y^2+3}\right)dy = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{d(y^2+3)}{y^2+3} = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\frac{1}{2}\ell n(x^2+1) - \frac{1}{2}\ell n(y^2+3) = C_2$$

$$\ell n(x^2+1) - \ell n(y^2+3) = C_1$$

$$\ell n\frac{(x^2+1)}{y^2+3} = \ell n\, C$$

$$\frac{x^2+1}{y^2+3} = c$$

$$x^2+1 = C(y^2+3)$$

ตัวอย่าง 2.3 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin\theta + e^{2r}\sin\theta}{3e^r + e^r\cos e}$

วิธีทำ จัดรูปใหม่ จะได้

$$(3e^r + e^r\cos\theta)dr - (\sin\theta + e^{2r}\sin\theta)d\theta = 0$$

$$e^r(3 + \cos\theta)dr - \sin\theta(1 + e^{2r})d\theta = 0$$

$$\frac{e^r}{1+e^{2r}}dr - \frac{\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta = 0$$

$$\frac{1}{1+e^{2r}}de' + \frac{1}{3+\cos\theta}d(3+\cos\theta) = 0$$

$$\int\frac{1}{1+e^{2r}}de^r + \int\frac{1}{3+\cos\theta}d(3+\cos\theta) = c$$

จะได้ว่า $\arctan e^r + \ell n(3+\cos\theta) = c$

ตัวอย่าง 2.4 จงหาคำตอบเฉพาะของสมการ $(1+x^3)dy - x^2ydx = 0$ เมื่อกำหนดให้ $y(l) = 2$ (นั่นคือ $x = 1,\ y = 2$)

วิธีทำ จากสมการ $(1+x^3)dy - x^2ydx = 0$

จัดรูปใหม่ในแบบแยกตัวแปร จะได้

$$\frac{1}{y}dy - \frac{x^2}{1+x^3}dx = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\begin{aligned}
\ell n\ y - \frac{1}{3}\ell n\ (1+x^3) &= c, \\
3Pn\ y - \ell n(1+x^2) &= c \\
\ell n\ \frac{y^3}{1+x^3} &= c
\end{aligned}$$

ให้ $x = I,\ y = 2$ จะได้ $\ell n\ \frac{8}{2} = c$

จะได้

$$\begin{aligned}
\ell n\ \frac{y^3}{1+x^3} &= \ell n\ 4 \\
\frac{y^3}{1+x^3} &= 4 \\
y^3 &= 4(1+x^3)
\end{aligned}$$

เป็นคำตอบเฉพาะตามต้องการ

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้

   1.1 $x^3dx + (y+1)^2dy$

   1.2 $4xdy - ydx = x^2dy$

   1.3 $4ydx + xdy$

   1.4 $(1+2y)dx + (4-x^2)dy = 0$

   1.5 $y^2dx - x^2dy = 0$

   1.6 $(1+y)dx - (1+x)dy = 0$

   1.7 $\cot\theta\, dr + rd\theta = 0$

   1.8 $xydx + (1+x^2)dy = 0$

   1.9 $xydy + (x-1)(y+1)dx = 0$

   1.10 $dx + (1-x^2)\cot\, dy = 0$

2. จงหาคำตอบเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้

   2.1 $xydx + (1+x^2)dy = 0;\ x = 0, y = 1$

   2.2 $xdy + 2ydx = 0$ เมื่อ $x = 2, y = 1$

   2.3 $(1+y)dx - (1+x)dy = 0$ เมื่อ $x = 0 y = 1$

   2.4 $y' = \dfrac{x+xy^2}{y}$ เมื่อ $x = 1, y = 0$

   2.5 $2y\cos x\, dx + 3\sin x\, dy = 0$ เมื่อ $x = \dfrac{\pi}{2}, y = 2$

2.2 สมการเอกพันธ์ (Homogeneous equation)

ก่อนที่จะศึกษาถึงการหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่อยู่ในรูปสมการเอกพันธ์ จำเป็นต้องทราบถึงนิยามของฟังก์ชันเอกพันธ์เสียก่อน ซึ่งนิยามมีดังนี้

นิยาม 2.1 ฟังก์ชัน $f(x, y)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีที่ n ก็ต่อเมื่อ

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

ในการตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่นั้นทำโดยการแทนค่า x, y ในฟังก์ชันเดิมด้วย λx และ λy ตามลำดับ ถ้าแทนค่าแล้วสามารถนำตัวร่วม λ^n ออกมาได้และอยู่ในรูป λ^n คูณฟังก์ชันเดิมแล้วจะได้ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

ตัวอย่าง 2.5 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่ เพราะเหตุใด

1) $f(x, y) = x^4 - x^3y$

2) $h(x, y) = e^{\frac{y}{x}} + \tan \frac{y}{x}$

3) $g(x, y) = x^2 + \sin xy$

วิธีทำ ตรวจสอบโดยใช้นิยาม คือ แทนค่า x ด้วย λx แทนค่า y ด้วย λy แล้วเอาตัวร่วมออก

1) $f(x, y) = x^4 - x^3y$

เพราะว่า
$$
\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^4 - (\lambda x)^3(\lambda y)\\
&= \lambda^4x^4 - \lambda^4x^3y\\
&= \lambda^4(x^4 - x^3y)\\
&= \lambda^4 f(x, y)
\end{aligned}
$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรีที่ 4

2)
$$
\begin{aligned}
h(x, y) &= e^{\frac{y}{x}} + \tan \frac{y}{x}\\
h(\lambda x, \lambda y) &= e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \tan \frac{\lambda y}{\lambda x}\\
&= e^{\frac{y}{x}} + \tan \frac{y}{x}\\
&= \lambda^0(e^{\frac{y}{x}} + \tan \frac{y}{x})\\
&= \lambda^0 h(x, y)
\end{aligned}
$$

แสดงว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรีที่ 0

3) $g(x, y) = x^2 + \sin xy$

เพราะว่า
$$
\begin{aligned}
g(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + \sin(\lambda x)(\lambda y)\\
&= \lambda^2x^2 + \sin(\lambda^2xy)\\
&\neq \lambda^2(x^2 + \sin xy)
\end{aligned}
$$

(ไม่สามารถหา n ซึ่ง $g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n g(x, y)$ ได้)

ดังนั้น $g(x, y)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

นิยาม 2.2 สมการดิฟเฟอเรนเชียล $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ก็ต่อเมื่อ $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.6 กำหนดให้ $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$ จงแสดงว่าเป็นสมการเอกพันธ์

วิธีทำ จัดรูปสมการในรูป $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ แล้ว แสดงว่า $M(x, y)$, $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีเดียวกัน

จาก $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

จะได้ $\quad 2xydy = (3y^2 - x^2)dx$

$$(3y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$$

จะได้ $\quad M(x, y) = 3y^2 - x^2$

$$N(x, y) = -2xy$$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= 3(\lambda y)^2 - (\lambda x)^2 \\ &= 3\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2 \\ &= \lambda^2(3y^2 - x^2) \\ &= \lambda^2 M(x, y) \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2

และ
$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= -2(\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2(-2xy) \\ &= \lambda^2 N(x, y) \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธ์

ตัวอย่าง 2.7 จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้เป็นสมการเอกพันธ์หรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $x\ell n\frac{y}{x}dx + \frac{y^2}{x}\arcsin\frac{y}{x}dy = 0$

(2) $(x^2 + y^2)dx + (y^3 - xy^2)dy = 0$

(3) $(x + y^2)dx + (x - y)dy = 0$

วิธีทำ (1) $x\ell n\frac{y}{x}dx + \frac{y^2}{x}\arcsin\frac{y}{x}dy = 0$

ให้ $\quad M(x, y) = x\ \ell n\frac{y}{x}$

$$N(x, y) = \frac{y^2}{x}\arcsin\frac{y}{x}$$

เพราะว่า $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \ell n \frac{\lambda y}{\lambda x}$

$$= \lambda x \ell n \frac{y}{x}$$

$$= \lambda M(x, y)$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรีที่ 1

และ $N(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda y)^2}{(\lambda x)} \arcsin \frac{\lambda y}{\lambda x}$

$$= \lambda \frac{y^2}{x} \arcsin \frac{y}{x}$$

$$= \lambda N(x, y)$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรีที่ 1

ดังนั้น (1) เป็นสมการเอกพันธ์

(2) $(x^2+y^2)dx + (y^3-xy^2)dy = 0$

a x $M(x, y) = x^2+y^2$

$N(x, y) = y^3-xy^2$

เพราะว่า $M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2$

$$= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2$$

$$= \lambda^2(x^2+y^2)$$

$$= \lambda^2 M(x, y)$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรีที่ 2

และ $N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^3 - (\lambda x)(\lambda y)^2$

$$= \lambda^3 y^3 - \lambda^3 xy^2$$

$$= \lambda^3(y^3-xy^2)$$

$$= \lambda^3 N(x, y)$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรีที่ 3

จะเห็นว่า $M(x, y)$, $N(x, y)$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ แต่ดีกรีไม่เท่ากัน

ดังนั้น (2) ไม่เป็นสมการเอกพันธ์

(3) $(x+y^2)dx + (x-y)dy = 0$

ให้ $M(x, y) = x+y^2$

$N(x, y) = x-y$

จะเห็นว่า $M(x, y)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ แต่ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 1 ดังนั้น (3) ไม่เป็นสมการเอกพันธ์

เมื่อทราบวิธีการตรวจสอบสมการว่าเป็นสมการเอกพันธ์หรือไม่แล้วนั้น ขั้นตอนต่อไปสำหรับการหาคำตอบของสมการเอกพันธ์มีวิธีการทำดังต่อไปนี้

ให้ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ ดีกรีที่ n

ให้ $y = vx$

เพราะฉะนั้น $dy = vdx + xdv$

แทนค่าในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$\begin{aligned}
M(x, vx)dx + N(x, vx)(vdx + xdv) &= 0 \\
x^n M(1, v)dx + x^n N(1, v)(vdx + xdv) &= 0 \\
M(1, v)dx + N(1, v)(vdx + xdv) &= 0 \\
[M(1, v) + vN(1, v)]dx + xN(1, v)dv &= 0 \\
\frac{1}{x}dx + \left(\frac{N(1, v)}{M(1, v) + vN(1, v)}\right)dv &= 0
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ เมื่ออินทิเกรตตลอดจะได้คำตอบในรูป x กับ v และเมื่อแทนค่า $v = \frac{y}{x}$ จะได้คำตอบของสมการตามต้องการ

หมายเหตุ ปัญหาโจทย์บางข้ออาจสมมติ $x = vy$ แล้วการแก้ปัญหาโจทย์ง่ายขึ้นกว่าสมมติ $y = vx$

ตัวอย่าง 2.8 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้จะเห็นว่า $M(x, y) = x^3 + y^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 3 และ $N(x, y) = -3xy^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 3 ด้วย ดังนั้นสมการที่กำหนดให้ข้างต้นเป็นสมการเอกพันธ์

จาก $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

ให้ $y = vx$

$dy = vdx + xdv$

แทนค่าในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$\begin{aligned}
(x^3 + x^3v^3)dx - 3x(vx)^2(vdx + xdv) &= 0 \\
x^3(1 + v^3)dx - 3x^3v^2(vdx + xdv) &= 0
\end{aligned}$$

$$1 + v^3dx \quad 3v^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(1 + v^3 - 3v^3)dx - 3xv^2dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{3v^2}{1 - 2v^3}dv = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\ell n\ x + \frac{1}{2}\ell n\ (1 - 2v^3) = c_1$$

$$2\ell n\ x + \ell n(1 - 2v^3) = 2C_1 = \ell n\ C$$

$$\ell n\ x^2(1 - 2v^3) = \ell n\ C$$

$$x^2(1 - 2v^3) = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ จะได้ $\quad x^2(1 - 2\frac{y^3}{x^3}) = c$

$$x^3 - 2y^3 = cx$$

ตัวอย่าง 2.Q จงหาคำตอบของสมการเอกพันธ์ $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0$

วิธีทำ จาก $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0$

$$xdy - (y + \sqrt{x^2 - y^2})dx = 0$$

เป็นสมการเอกพันธ์ ดีกรี 1

ให้ $y = vx$

$$dy = vdx + xdv$$

แทนค่าในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$x(vdx + xdv) - (vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2})dx = 0$$

$$x(vdx + xdv) - x(v + \sqrt{1 - v^2})dx = 0$$

$$vdx + xdv - (v + \sqrt{1 - v^2})dx = 0$$

$$(v - v - \sqrt{1 - v^2})dx + xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}dv = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้ $\quad \ell n\ x - \arcsin v = c$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ จะได้ $\quad \ell n\ x \quad \arcsin\frac{y}{x} = c$

ตัวอย่าง 2.10 จงหาคำตอบของสมการเอกพันธ์ $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy = 0$

วิธีทำ จากสมการ $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy = 0$ พบว่าเป็นสมการเอกพันธ์ ดีกรี 0

ข้อสังเกต ในการสมมติ ถ้าให้ $y = vx$ จะได้ $e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{1}{v}}$ แต่ถ้าให้ $x = vy$ จะได้ $e^{\frac{x}{y}} = e^{v}$ ซึ่ง-สะดวกในการคำนวณมากกว่า

ให้
$$x = vy$$
$$dx = vdy + ydv$$

แทนค่าในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$(1+2e^{v})(vdy+ydv) + 2e^{v}(1-v)dy = 0$$
$$[(1+2e^{v})v + 2e^{v}(1-v)]dy + (1+2e^{v})ydv = 0$$
$$(v+2e^{v})dy + (1+2e^{v})ydv = 0$$
$$\frac{1}{y}dy + \frac{(1+2e^{v})}{v+2e^{v}}dv = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\ell n\ y + \ell n\ (v+2e^{v}) = C,$$
$$\ell n\ y(v+2e^{v}) = \ell n\ C$$
$$y(v+2e^{v}) = c$$

แทนค่า $v = \frac{x}{y}$ จะได้

$$y\left(\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}}\right) = C$$
$$x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$$

ข้อสังเกต สมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ซึ่ง $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น-(linear function) ซึ่งเทอมคงที่มีค่าเป็นศูนย์แล้ว สมการจะเป็นสมการเอกพันธ์ ซึ่งอยู่ในรูป

$$(ax+by)dx + (cx+dy)dy = 0$$

ตัวอย่างเช่น $(2x+3y)dx - (x-y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ซึ่งหาคำตอบของสมการโดยวิธีการข้างต้น ดังนี้

ให้
$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

แทนค่าในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$
\begin{aligned}
(2+3v)dx - (1-v)(vdx + xdv) &= 0 \\
(2+3v-v+v^2)dx - x(1-v)dv &= 0 \\
\frac{1}{x}dx - \frac{(1-v)}{2+2v+v^2}dv &= 0 \\
\frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{2v+2}{v^2+2v+2}\right)dv - \left(\frac{2}{(v+1)^2+1}\right)dv &\doteq 0
\end{aligned}
$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$
\begin{aligned}
\ell n\ x + \frac{1}{2}\ell n(v^2+2v+2) - 2\ \arctan(v+1) &= c, \\
2\ell n\ x + \ell n(v^2+2v+2) - 4\arctan(v+1) &= c \\
\ell n\ x^2(v^2+2v+2) - 4\ \arctan(v+1) &= c
\end{aligned}
$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\ell n\ x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} + 2\right) - 4\arctan\left(\frac{y}{x}+1\right) &= C \\
\ell n(y^2+2xy+2x^2) - 4\arctan\left(\frac{x+y}{x}\right) &= C
\end{aligned}
$$

ในหัวข้อต่อไปจะได้กล่าวถึงสมการเชิงเส้นแต่ไม่เป็นสมการเอกพันธ์ คือ กล่าวถึงฟังก์ชันเชิงเส้นที่ค่าคงที่ไม่เท่ากับ 0 ทั้งคู่

แบบฝึกหัด 2.2

จงหาคำตอบของสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$

2. $dy - \left(\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx = 0$

3. $y\sqrt{x^2 + y^2}dx \quad x(x + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$

4. $(x + 2y)dx + (2x + 3y)dy = 0$

5. $(x^3 + y^3)dx + 3xy^3dy = 0$

6. $\left(x \sin\frac{y}{x} - y \cos\frac{y}{x}\right)dx + x \cos\frac{y}{x}\, dy = 0$

7. จงหาคำตอบเฉพาะของสมการ $\left(y + x\cos^2\frac{y}{x}\right)dx - x\,dy = 0$; เมื่อ $x = 1, y = \frac{\pi}{4}$

2.3 สมการแบบเชิงเส้นแต่ไม่เป็นเอกพันธ์ (linear but not homogeneous)

สมการแบบเชิงเส้นแต่ไม่เป็นเอกพันธ์ คือ สมการที่อยู่ในรูป

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

เราแบ่งการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบนี้ออกได้ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 : $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (เส้นตรงขนานกัน)

กรณีที่ 2 : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (เส้นตรงไม่ขนานกัน)

กรณีที่ 1 เส้นตรงขนานกัน $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

จากสมการ $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

ให้ $a_1x + b_1y = t$

เพราะฉะนั้น $a_1dx + b_1dy = dt$

$$dy = \frac{dt - a_1dx}{b_1}$$

เมื่อแทนค่าแล้วจะจัดรูปได้ในรูป

$$P(x, t)dx + Q(x, t)dt = 0$$

ซึ่งจะใช้วิธีการแยกตัวแปรหาคำตอบของสมการได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.11 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$

วิธีทำ เป็นแบบเส้นตรงขนานกัน

จาก $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$

ให้

$$x+y = t$$
$$dx+dy = dt$$
$$dy = dt-dx$$

แทนค่าในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$tdx + (3t-4)(dt-dx) = 0$$
$$(t-3t+4)dx + (3t-4)dt = 0$$
$$dx + \frac{(3t-4)}{4-2t}dt = 0$$
$$2dx + \frac{(3t-4)}{2-t}dt = 0$$
$$2dx + \left(-3+\frac{2}{2-t}\right)dt = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$2x-3t-2Pn\ (2-t) = c$$

แทนค่า $t = x+y$ จะได้

$$2x-3(x+y) - 2\ell n(2-x-y) = c$$
$$x+3y+2\ell n(2-x-y)+C = 0$$

กรณีที่ 2 เส้นตรงไม่ขนานกัน $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$

แก้สมการ $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ .... (1)

$a_2x+b_2y+c_2 = 0$ .... (2)

เพื่อหาจุดตัด สมมติได้ $x = h,\ y = k$

ให้ $x = x'+h,\ y = y'+k$ แทนค่าลงในสมการที่กำหนดให้ จะทำให้เทอมคงที่หายไป และสมการลดรูปเหลือเพียง

$$(a_1x'+b_1y')dx' + (a_2x'+b_2y')dy' = 0$$

ซึ่งใช้วิธีการของสมการเอกพันธ์หาคำตอบได้

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.12 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$(2x-5y+3)dx - (2x+4y-6)dy = 0$$

วิธีทำ เป็นแบบ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ต้องหาจุดตัดของเส้นตรงทั้ง 2 เส้น

จาก
$$2x-5y+3 = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$
$$2x+4y-6 = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

(2) − (1)
$$9y-9 = 0$$
$$y = 1$$

แทนค่า $y = 1$ ใน (1) จะได้

$$x = 1$$

ให้ $x = x'+1$

$$y = y'+1$$

จะได้ $dx = dx'$

$$dy = dy'$$

แทนค่าในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$(2x'+2-5y'-5+3)dx' \quad (2x'+2+4y'+4-6)dy' = 0$$
$$(2x'-5y')dx' - (2x'+4y')dy' = 0$$

เป็นสมการเอกพันธ์ ดีกรี 1

ให้ $y' = vx'$

$$dy' = vdx' + x'dv$$

แทนค่าจะได้

$$(2x'-5vx')dx' - (2x'+4vx')(vdx'+x'dv) = 0$$
$$(2-5v)dx' \quad (2+4v)(vdx'+x'dv) = 0$$
$$(2-5v-2v-4v^2)dx' \quad x'(2+4v)dv = 0$$
$$(2-7v-4v^2)dx' \quad x'(2+4v)dv = 0$$
$$\frac{dx'}{x'} \quad \frac{(2+4v)}{2-7v-4v^2}dv = 0$$
$$\frac{dx'}{x'} \quad \frac{4v+2}{4v^2+7v-2}dv = 0$$
$$\frac{dx'}{x'} + \frac{4}{-}\frac{dv}{\quad} + \frac{2}{-}\frac{dv}{4v+2} = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\ell n\, x' + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\ell n(4v-1) + \frac{2}{3}\ell n(v+2) = c\ ,$$

$$3\ell n\, x' + \ell n(4v-1) + 2\ell n(v+2) = \ell n\, C$$

$$\ell n\, x'^3(4v-1)(v+2)^2 = \ell n\, C$$

$$x'^3(4v-1)(v+2)^2 = c$$

แทนค่า $v = \frac{y'}{x'}$ จะได้

$$x'^3\left(\frac{4y'}{x'}-1\right)\left(\frac{y'}{x'}+2\right)^2 = c$$

$$(4y'-x')(y'+2x')^2 = c$$

แทนค่า $x' = x-1,\ y' = y-1$ จะได้ .

$$(4y-x-3)(y+2x-3) = C$$

2.4 สมการที่อยู่ในรูป $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$

สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่อยู่ในรูป $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ ตัวอย่างเช่น $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$ มีวิธีการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

(1) สมมติให้

$$xy = v$$

$$y = \frac{v}{x}$$

$$dy = \frac{xdv - vdx}{x^2}$$

(2) แทนค่าลงในสมการที่กำหนดให้ สมการที่กำหนดให้จะลดรูปลงเหลือเพียง $P(x, v)dx + Q(x, v)dv = 0$ ซึ่งหาคำตอบได้โดยวิธีการแยกตัวแปร

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.13 **จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล**

$$y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$$

วิธีทำ ให้

$$xy = v$$

$$y = \frac{v}{x}$$

$$dy = \frac{xdv - vdx}{x^2}$$

แทนค่าลงในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$\frac{v}{x}(v+1)dx + x(1+v+v^2)\frac{xdv - vdx}{x^2} = 0$$

$$v(v+1)dx + (1+v+v^2)(xdv - vdx) = 0$$

$$(v^2+v-v-v^2-v^3)dx + x(1+v+v^2)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{(1+v+v^2)}{v^3}dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \left(\frac{1}{v^3}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{v}\right)dv = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\ell n\, x + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{v} - \ell n\, v = c,$$

$$\ell n \frac{x}{v} + \frac{2v+1}{2v^2} = c,$$

แทนค่า $v = xy$ **จะได้**

$$\ell n \frac{1}{y} + \frac{2xy+1}{2x^2y^2} = C_1$$

$$\frac{2xy+1}{2x^2y^2} - \ell n\, y = C,$$

$$2xy + 1 - 2x^2y^2 \,\ell n\, y = Cx^2y^2$$

ตัวอย่าง 2.14 **จงแก้สมการ หาคำตอบเฉพาะของ**

$$(y-xy^2)dx - (x+x^2y)dy = 0 \text{ เมื่อ } x = 1,\ y = 1$$

วิธีทำ จัดรูปใหม่จะได้

$$y(1-xy)dx - x(1+xy)dy = 0$$

เป็นสมการในรูป $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$

ให้

$$xy = v$$

$$y = \frac{v}{x}$$

$$dy = \frac{xdv - vdx}{x^2}$$

แทนค่าลงในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$\frac{v}{x}(1-v)dx - x(1+v)\frac{xdv - vdx}{x^2} = 0$$

$$2vdx - x(1+v)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \left(\frac{1+v}{2v}\right)dv = 0$$

$$\frac{2dx}{x} - \left(\frac{1}{v}+1\right)dv = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$2\ln x - \ln v - v = c$$

$$\ln\frac{x^2}{v} - v = c$$

แทนค่า $v = xy$ จะได้

$$\ln\frac{x^2}{xy} - xy = c$$

$$\ln\frac{x}{y} - xy = C$$

เมื่อ $x = 1,\ y = 1$ จะได้

$$\ln\frac{1}{1} - (1)(1) = C$$

$$0 - 1 = C$$

ได้ $C = -1$

คำตอบเฉพาะของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$\ln\frac{x}{y} - xy = -1$$

$$\ln\frac{x}{y} = xy - 1$$

แบบฝึกหัด 2.3

จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้

1. $(2x+3y+4)dx \quad (4x+6y+1)dy = 0$
2. $(y+1)dx - (x+1)dy = 0$
3. $(x+y+1)dx + (2x+2y+1)dy = 0$
4. $(7x-3y-7)dx + (3x-7y-3)dy = 0$
5. $(x-y-1)dx + (4y+x-1)dy = 0$
6. $(1-xy+x^2y^2)dx + (x^3y-x^2)dy = 0$
7. $y(1+2xy)dx + x(1-xy)dy = 0$

2.5 **สมการแบบแน่นอน** (exact equations)

นิยาม 2.3 **สมการดิฟเฟอเรนเชียล** $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน (exact.equations) ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ ซึ่ง

$$d\mu(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ดังนั้น คำตอบของสมการแบบแน่นอน $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ คือ

$$\mu(x, y) = C$$

ตัวอย่าง 2.15 สมการ $2xy^3dx+3x^2y^2dy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอนหรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ เพราะว่า $d(x^2y^3) = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$

ดังนั้น $2xy^3dx+3x^2y^2dy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน

และมีคำตอบคือ $x^2y^3 = C$

การทดสอบความแน่นอนของสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

จากนิยาม ถ้า $Mdx+Ndy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอนแล้ว จะมีฟังก์ชัน μ ซึ่ง $d\mu = Mdx+Ndy = 0$

จากแคลคูลัสเบื้องต้น

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}dy$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = N$$

และจะได้ว่า $$\frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

แต่ $$\frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ซึ่งเงื่อนไข $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) และเพียงพอ (sufficient condition) ในการทดสอบความแน่นอนของสมการที่กำหนดให้

การหาคำตอบของสมการแบบแน่นอน

ให้ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน

จะได้ $$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}$$

แต่จากนิยาม จะมี $\mu(x, y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = N$$

จะได้ $$\mu(x, y) = \int^x M(x, y)dx + \phi(y)$$

ค่าคงที่ $\phi(y)$ เป็นค่าคงที่เมื่อเทียบกับ x

และหา $\phi(y)$ ได้จาก

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int^x M(x, y)dx + \phi(y)\right] = N(x, y)$$

หรือ $$\mu(x, y) = \int^y N(x, y)dy + \phi(x)$$

$\phi(x)$ เป็นค่าคงที่เมื่อเทียบกับ x

และหา $\phi(x)$ ได้จาก

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int^{y} N(x, y)dy + \phi(x)\right] = M(x, y)$$

แต่อย่างไรก็ตาม เพื่อให้เข้าใจการหาคำตอบของสมการแบบแน่นอนให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.16 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(2x^3+3y)dx + (3x+y-1)dy = 0$

วิธีทำ ทดสอบความแน่นอนแล้วจึงใช้วิธีการหาคำตอบของสมการแบบแน่นอน เมื่อสมการที่กำหนดให้เป็นแบบแน่นอน แต่ถ้าไม่เป็นแบบแน่นอนต้องหาวิธีการแก้ปัญหาแบบอื่นต่อไป

จาก $(2x^3+3y)dx + (3x+y-1)dy = 0$

ในที่นี้

$$M(x, y) = 2x^3+3y$$

$$N(x, y) = 3x+y-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นแบบแน่นอน

เพราะว่า

$$\mu(x, y) = \int^{x} M(x, y)dx + \phi(y)$$

$$= \int^{x} (2x^3+3y)dx + \phi(y)$$

$$= \frac{x^4}{2} + 3xy + \phi(y)$$

แต่

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 3x + \phi'(y) = N(x, y)$$

ดังนั้น

$$3x + \phi'(y) = 3x + y - 1$$

$$\phi'(y) = y - 1$$

$$\phi(y) = \frac{y^2}{2} - y$$

ดังนั้น

$$\mu(x, y) = \frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y$$

คำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนดให้ คือ

$$\frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y$$

ตัวอย่าง 2.17 **จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล**

$$(y^2e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$$

94
วิธีทำ **ทดสอบความแน่นอนของสมการเสียก่อน**

จาก $(y^2e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$

ในที่นี้

$$M(x, y) = y^2e^{xy^2} + 4x3$$

$$N(x, y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$$

ดังนั้น สมการในโจทย์เป็นสมการแบบแน่นอน

เพราะว่า

$$\mu(x, y) = \int^x M(x, y)dx + \phi(y)$$

$$= \int^x y^2e^{xy^2}dx + \int^x 4x^3dx + \phi(y)$$

$$= e^{xy^2} + x^4 + \phi(y)$$

แต่

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + \phi'(y) = N(x, y)$$

ดังนั้น

$$2xye^{xy^2} + \phi'(y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$$

$$\phi'(y) = -3y^2$$

$$\phi(y) = -y^3$$

ดังนั้น

$$\mu(x, y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3$$

จะได้คำตอบของสมการในโจทย์ คือ

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = C$$

ข้อควรระวัง **ในบางครั้งการแก้ปัญหาโจทย์ถ้าลืมนำเครื่องหมายมาคิดด้วยอาจผิดได้ เพราะ** $Mdx + Ndy = 0$ **ในสมการเริ่มต้นเราใช้เครื่องหมายบวก ดังนั้น ในโจทย์ถ้ามีเครื่องหมายลบต้องนำมาด้วย ตัวอย่างเช่น**

$$(xy^2 - 1)dx - (x^2y + 1)dy = 0$$

ถ้าให้

$$M = xy^2 - 1$$

$$N = x^2y + 1$$

จะได้

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

แสดงว่า เป็นสมการแบบแน่นอน การกล่าวแบบนี้เป็นการกล่าว**ที่ผิด เพราะ** สมการที่กำหนดให้ไม่เป็นแบบแน่นอนเพราะอันที่จริง $N(x, y) = -(x^2y+1)$ ไม่ใช่ x^2y+1 ดังนั้น $\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$ จึงไม่เท่ากันกับ $\frac{\partial M}{\partial y}$

อย่างไรก็ตาม สำหรับสมการแบบแน่นอน การหาคำตอบมิได้มีเพียงแบบเดียวข้างต้น แต่เราสามารถหาคำตอบของสมการแบบแน่นอนได้อีกแบบหนึ่ง คือ การรวมกลุ่ม การจัดกลุ่ม แยกกลุ่ม แล้วจึงอินทิเกรตตลอดแล้วจะได้คำตอบเช่นเดียวกัน แต่วิธีการนี้เราจะใช้กับปัญหาโจทย์ที่ไม่ยุ่งยากและจัดกลุ่มได้ง่าย ทั้งนี้การแก้ปัญหาโจทย์แบบนี้ผู้อ่านต้องมีความชำนาญและมีประสบการณ์พอสมควรจึงจะแก้ปัญหาโจทย์แบบนี้ได้รวดเร็ว ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 2.18 จงหาคำตอบของสมการโดยวิธีจัดกลุ่ม $2xydx + (x^2+\cos y)dy = 0$

วิธีทำ ต้องทดสอบว่าเป็นสมการแบบแน่นอนเสียก่อนจึงจะจัดกลุ่มได้

ให้
$$M(x, y) = 2xy$$
$$N(x, y) = x^2+\cos y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

ดังนั้น สมการในโจทย์เป็นสมการแบบแน่นอน

จากโจทย์ $$2xy\,dx + (x^2+\cos y)dy = 0$$

จะได้ $$(2xy\,dx + x^2dy) + \cos y\,dy = 0$$
$$d(x^2y) + \cos y\,dy = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้
$$x^2y + \sin y = C$$

ตัวอย่าง 2.19 จงใช้วิธีการจัดกลุ่มหาคำตอบของสมการแบบแน่นอน ในตัวอย่าง 2.17

วิธีทำ จากตัวอย่าง 2.17
$$(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx + (2xye^{xy^2}-3y^2)dy = 0$$

จัดกลุ่มได้
$$(y^2e^{xy^2}dx + 2xye^{xy^2}dy) + 4x^3dx - 3y^2dy = 0$$
$$d(e^{xy^2}) + 4x^3dx - 3y^2dy = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้ $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = C$

สำหรับสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ซึ่งไม่ใช่สมการแบบแน่นอนเราสามารถทำให้เป็นสมการแบบแน่นอนได้โดยการใช้ตัวประกอบอินทิเกรต (integrating factors) คูณตลอด แล้วจะได้สมการใหม่เป็นสมการแบบแน่นอน

นิยาม 2.4 กำหนดให้ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ไม่เป็นสมการแบบแน่นอน เรียกฟังก์ชัน $\lambda(x, y) \neq 0$ ว่าตัวประกอบอินทิเกรตของสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\lambda(x, y)\,[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = 0$$

เป็นสมการแบบแน่นอน

วิธีการหาตัวประกอบอินทิเกรตแบ่งวิธีการพิจารณาได้ดังนี้

จาก $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (ไม่เป็นสมการแบบแน่นอน)

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

เราแบ่งการพิจารณาได้จากผลต่างระหว่าง $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ดังนี้

(1) $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว

(2) $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว

นอกจาก 2 กรณีนี้แล้ว อาจหาคำตอบได้โดยวิธีการอื่น ๆ อีกต่อไป

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้าสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ มีคุณสมบัติว่า $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ แล้ว ตัวประกอบอินทิเกรต $\lambda(x, y)$ คือ

$$\lambda(x, y) = e^{\int f(x)dx}$$

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้าสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ มีคุณสมบัติที่ว่า $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$ แล้ว ตัวประกอบอินทิเกรต $\lambda(x, y)$ คือ

$$\lambda(x, y) = e^{\int g(y)\,dy}$$

ตัวอย่าง 2.20 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x, y) = x^2 + y^2 + x$

$N(x, y) = xy$

จะได้ว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = y$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ จึงไม่เป็นสมการแบบแน่นอน

พิจารณา $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{xy}(2y - y)$

$= \frac{1}{x}$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x อย่างเดียว
ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต $\lambda(x, y)$ คือ

$$\lambda(x, y) = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$
$$= e^{\ln x}$$
$$= x$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$x(x^2 + y^2 + x)dx + x^2ydy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน

โดยการจัดกลุ่ม จะได้

$$x^3dx + (xy^2dx + x^2ydy) + x^2dx = 0$$
$$x^3dx + \frac{1}{2}d(x^2y^2) + x^2dx = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = C_1$$
$$3x^4 + 6x^2y^2 + 4x^3 = c$$

ตัวอย่าง 2.21 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $ydx + (3 + 3x - y)dy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x, y) = y$

$N(x, y) = 3 + 3x - y$

จะได้ว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 3$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ดังนั้น สมการในโจทย์ไม่เป็นสมการแบบแน่นอน

พิจารณา $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}(3-1)$

$$= \frac{2}{y}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต $\lambda(x, y)$ คือ

$$\begin{aligned}\lambda(x, y) &= e^{\int \frac{2}{y}dy} \\ &= e^{2\ln y} \\ &= e^{\ln y^2} \\ &= y^2\end{aligned}$$

จะได้ว่า สมการ

$$y'dx + (3y^2 + 3xy^2 - y^3)dy = 0$$

เป็นสมการแบบแน่นอน

โดยการจัดกลุ่ม จะได้

$$\begin{aligned}(y^3dx + 3xy^2dy) + 3y^2dy - y'dy &= 0 \\ d(xy^3) + 3y^2dy - y^3dy &= 0\end{aligned}$$

โดยการอินทิเกรตตลอด จะได้

$$\begin{aligned}xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} &= C_1 \\ 4xy^3 + 4y^3 - y^4 &= C\end{aligned}$$

หมายเหตุ หลังจากการหาตัวประกอบอินทิเกรตแล้ว เมื่อนำมาคูณจะได้สมการใหม่เป็นสมการแบบแน่นอน ซึ่งการหาคำตอบอาจใช้วิธีการจัดกลุ่ม หรือวิธีการอินทิเกรตหาคำตอบดังที่ได้กล่าวมาแล้วก็ได้เช่นเดียวกัน

แบบฝึกหัด 2.4

จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $(x^2-y)dx-xdy = 0$
2. $(x^2+y^2)dx+2xydy = 0$
3. $(x+y\cos x)dx + \sin y\,dy = 0$
4. $(1+e^{2y})dx + 2xe^{2y}dy = 0$
5. $(2x+3y+4)dx + (3x+4y+5)dy = 0$
6. $(4x^3y^3+\frac{1}{x})dx + (3x^4y^2-\frac{1}{y})dy = 0$
7. $(x\sqrt{x^2+y^2}-y)dx + (y\sqrt{x^2+y^2}-x)dy = 0$
8. $(2xye^{x^2y}+y^2e^{xy^2}+1)dx + (x^2e^{x^2y}+2xye^{xy^2}-2y)dy = 0$

สำหรับสมการต่อไปนี้ จงหาตัวประกอบอินทิเกรตแล้วแก้สมการ

9. $xdy-ydx = x^2e^xdx$
10. $(1+y^2)dx = (x+x^2)dy$
11. $(2y-x^3)dx+xdy = 0$
12. $y^2dy+ydx-xdy = 0$
13. $(3y^3-xy)dx - (x^2+6xy^2)dy = 0$
14. $(2y+3xy^2)dx + (x+2x^2y)dy = 0$
15. $y(y^2-2x^2)dx + x(2y^2-x^2)dy = 0$

2.6 ตัวประกอบอินทิเกรตที่ได้จากการตรวจพินิจ

(integrating factor by inspection)

ในบางครั้งการหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ใช้การหาตัวประกอบอินทิเกรตไม่จำเป็นต้องใช้วิธีการที่กล่าวมาแล้วข้างต้น แต่สามารถแก้ปัญหาได้ง่าย ๆ โดยการตรวจตราพิจารณาหมู่เทอมต่าง ๆ ที่สามารถทำเป็นอนุพันธ์แบบแน่นอนได้อย่างง่าย ๆ

ต่อไปนี้เป็นแบบของหมู่เทอมต่าง ๆ พร้อมทั้งตัวประกอบอินทิเกรตที่จะทำให้หมู่เทอมเหล่านี้เป็นอนุพันธ์แบบแน่นอน

หมู่เทอม	ตัวประกอบอินทิเกรต	อนุพันธ์แบบแน่นอน
$xdy - ydx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$xdy - ydx$	$\frac{1}{y^2}$	$-\frac{ydx - xdy}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right)$
$xdy - ydx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$
$xdy + ydx$	$\frac{1}{(xy)^n}$	$d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$; $n \neq 1$ $d[\ell n(xy)]$; $n = 1$
$xdx + ydy$	$\frac{1}{(x^2+y^2)^n}$	$d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right]$; $n \neq 1$ $d\left[\frac{1}{2}\ell n(x^2+y^2)\right]$; $n = 1$

การแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้หมู่เทอมดังกล่าวข้างต้นบ่อย ๆ จะเกิดความชำนาญ และทำให้แก้ปัญหาโจทย์ได้รวดเร็วยิ่งขึ้น

พิจารณาโจทย์การใช้หมู่เทอมดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.22 จงหาคำตอบของสมการ $(x^3y - y^2)dx - (x^4 + xy)dy = 0$

วิธีทำ โดยการจัดกลุ่มเทอม จะได้

$$(x^3ydx - x^4dy) - (y^2dx + xydy) = 0$$

$$x^3(ydx - xdy) - y(ydx + xdy) = 0$$

$$x^3\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) - \left(\frac{ydx + xdy}{y}\right) = 0$$

$$x^3 d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{d(xy)}{y} = 0$$

หารตลอดด้วย x^2y จะได้

$$\frac{x}{y} d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{d(xy)}{x^2y^2} = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{1}{xy} = C_1$$

$$x^3 + 2y = Cxy^2$$

ตัวอย่าง 2.23 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $y(x^4-y^2)dx + x(x^4+y^2)dy = 0$

วิธีทำ จัดกลุ่มเทอมใหม่ จะได้

$$x^4ydx \quad y^3dx + x^5dy + xy^2dy = 0$$

$$(x^4ydx + x^5dy) + (xy^2dy - y^3dx) = 0$$

$$x^4(ydx + xdy) + y^2(xdy - ydx) = 0$$

$$x^2(ydx + xdy) + y^2 \frac{(xdy - ydx)}{x^2} = 0$$

$$x^2d(xy) + y^2d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$d(xy) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$xy + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = C_1$$

$$3x^4y + y^3 = cx'$$

ตัวอย่าง 2.24 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$y(x^2+y^2-1)dx + x(x^2+y^2+1)dy = 0$$

วิธีทำ จัดกลุ่มเทอมเสียใหม่ จะได้

$$(x^2+y^2)(ydx+xdy) + (xdy-ydx) = 0$$

$$ydx+xdy + \frac{(xdy-ydx)}{x^2+y^2} = 0$$

$$d(xy) + d\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$xy + \arctan\frac{y}{x} = c$$

ตัวอย่าง 2.25 จงหาคำตอบเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$(3x^4y + y^3)dx - 2x^5dy = 0$ เมื่อ $x = 1,\ y = 1$

วิธีทำ โดยการจัดกลุ่มใหม่ จะได้

$$(3x^4ydx - 2x^5dy) + y^3dx = 0$$

$$x^2(3x^2ydx - 2x^3dy) + y'dx = 0$$

$$x^2(3x^2y^2dx - 2x^3ydy) + y^4\alpha x = 0$$

$$\frac{(3x^2y^2dx - 2x^3ydy)}{y^4} + \frac{1}{x^2}dx = 0$$

$$\frac{y^2dx^3 - x^3dy^2}{y^4} + \frac{1}{x^2}dx = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\frac{x^3}{y^2} - \frac{1}{x} = c$$

แทนค่า $x = 1$, $y = 1$ **จะได้**

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = C$$

ได้ $C = 0$

จะได้คำตอบเฉพาะของสมการ คือ

$$\frac{x^3}{y^2} - \frac{1}{x} = 0$$

หรือ $x^4 - y^2 = 0$

แบบฝึกหัด 2.5

จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้โดยการตรวจพินิจ

1. $xy(y^2+1)dx + (x^2y^2-2)dy = 0$ เมื่อ $x = 1,\ y = 1$
2. $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$
3. $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$
4. $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)dy = 0$
5. $(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y\,dy = 0$
6. $x\,dy - y\,dx - (1 - x^2)dx = 0$
7. $(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dx + y\,dy = 0$
8. $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$

2.7 ทฤษฎีบทของออยเลอร์ (Euler's theorem)

ทฤษฎีบทของออยเลอร์ใช้ในการหาตัวประกอบอินทิเกรตของสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ซึ่งเป็นสมการเอกพันธ์

ทฤษฎีบทของออยเลอร์กล่าวว่า "ถ้า F เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรีที่ n แล้ว

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = nF"$$

ซึ่งทฤษฎีบทของออยเลอร์จะใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้สมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ดีกรีที่ n ถ้า $Mx+Ny \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{Mx+Ny}$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรตสำหรับสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

พิสูจน์ จาก $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ดีกรี n ดังนั้น $M(x, y)$, $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี n

ต้องการแสดงว่า $\frac{M}{Mx+Ny}dx + \frac{N}{Mx+Ny}dy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน

นั่นคือ แสดงว่า $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)$

เพราะว่า
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right) = \frac{(Mx+Ny)\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial}{\partial y}(Mx+Ny)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{(Mx+Ny)\frac{\partial M}{\partial y} - M\left(x\frac{\partial M}{\partial y} + N + y\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{Ny\frac{\partial M}{\partial y} - MN - My\frac{\partial N}{\partial y}}{(Mx+Ny)^2} \qquad \ldots\ldots.(1)$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right) = \frac{(Mx+Ny)\frac{\partial N}{\partial x} - N\frac{\partial}{\partial x}(Mx+Ny)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{(Mx+Ny)\frac{\partial N}{\partial x} - N\left(M + x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{Mx\frac{\partial N}{\partial x} - MN - Nx\frac{\partial M}{\partial x}}{(Mx+Ny)^2} \qquad \ldots\ldots.(2)$$

$$(1)-(2) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)$$

$$= \frac{Ny\frac{\partial M}{\partial y} M N - M y \frac{\partial N}{\partial y}}{(Mx+Ny)^2} - \frac{Mx \frac{\partial N}{\partial x} - MN - Nx \frac{\partial M}{\partial x}}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{\left(Nx\frac{\partial M}{\partial x} + Ny\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \left(Mx\frac{\partial N}{\partial x} + My\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{N\left(x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial y}\right) - M\left(x\frac{\partial N}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{N(nM) \quad M(nN)}{(Mx+Ny)^2}$$ (ใช้ทฤษฎีบทของออยเลอร์)

$$= \frac{nMN - nMN}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= 0$$

นั่นแสดงว่า $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)$

แสดงว่า $\frac{1}{Mx+Ny}$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรตตามต้องการ

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.25 จงหาคำตอบของสมการ $(x^4+y^4)dx - xy'dy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้

$$M(x,y) = x^4+y^4$$

$$N(x,y) = -xy'$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 4

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต

$$\frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{x(x^4+y^4) \quad xy^4}$$

$$= \frac{1}{x^5}$$

จะได้ว่า $\frac{(x^4+y^4)\,dx}{x^5} - \frac{y^3\,dy}{x^4} = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน

$$\frac{1}{x}dx + \frac{y^4}{x^5}dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{4x^3y^4dx - 4x^4y^3dy}{4x^8} = 0$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{x^4(4y^3dy) - y^4(4x^3dx)}{4x^8} = 0$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}d\left(\frac{y^4}{x^4}\right) = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้ $\quad \ell n\, x - \frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4} = c,$

$$4x^4\, \ell n\, x - y^4 = Cx^4$$

ตัวอย่าง 2.26 จงหาคำตอบของสมการ $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้

$$M(x, y) = y^2$$

$$N(x, y) = x^2 - xy - y^2$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 2 ทั้งคู่

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธ์

ตัวประกอบอินทิเกรต คือ $\frac{1}{Mx + Ny}$

$$\frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{xy^2 + (x^2y - xy^2 - y^3)}$$

$$= \frac{1}{x^2y - y^3}$$

$$= \frac{1}{y(x^2 - y^2)}$$

ดังนั้น จะได้ว่าสมการ $\frac{y^2}{y(x^2 - y^2)}dx + \frac{(x^2 - xy - y^2)}{y(x^2 - y^2)}dy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน

ให้

$$\mu(x, y) = \int^x \frac{y}{x^2 - y^2}dx + \phi(y)$$

$$= \frac{1}{2}\int^x \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right)dx + \phi(y)$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + \phi(y)$$

แต่

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 - y^2} + \phi'(y)$$

$$= \frac{x^2 \quad xy - y^2}{y(x^2 - y^2)}$$

$$= \frac{1}{Y} - \frac{X}{X^2 - Y^2}$$

ดังนั้น $\phi'(y) = \frac{1}{y}$

ได้ $\phi(y) = \text{Pny}$

ดังนั้น คำตอบของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$\frac{1}{2}\ell n\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + \ell n\ y = C_1$$

หรือ $y^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = c$

หมายเหตุ ในกรณีที่ $Mx + Ny = 0$ จะได้ $\frac{M}{N} = -\frac{y}{x}$ ดังนั้น สมการดิฟเฟอเรนเชียลจะลดรูปเหลือเพียง $ydx - xdy = 0$ ซึ่งตัวประกอบอินทิเกรต คือ $\frac{1}{xy}$ นั่นเอง

แบบฝึกหัด 2.6

จงหาคำตอบของสมการเอกพันธ์ต่อไปนี้โดยใช้ตัวประกอบอินทิเกรต

1. $xy\,dx - (x^2 + 2y^2)dy = 0$
2. $y^2dx + x(x + y)dy = 0$
3. $(x^4 + y^4)dx - xy'dy = 0$
4. $y(x^2 + y^2)dx - x(x^2 + 2y^2)dy = 0$
5. $(x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0$

2.8 สมการเชิงเส้นอันดับที่ 1 (linear equation of order 1)

นิยาม 2.5 สมการดิฟเฟอเรนเชียล $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เรียกว่าเป็นแบบสมการเชิงเส้น (linear equation) ก็ต่อเมื่อ สมการนั้นจัดได้ในรูป

(1) $A(x)\dfrac{dy}{dx} + B(x)y = C(x)$

หรือ (2) $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

อันที่จริงสมการที่ (2) ได้จากการหารสมการ (1) ด้วย $A(x)$ ตลอดนั่นเอง

สมการเชิงเส้นเป็นแบบสมการที่พบกันบ่อย ๆ ในการแก้ปัญหาทางดิฟเฟอเรนเชียลโดยเฉพาะการประยุกต์ที่จะได้กล่าวต่อไป

การแก้ปัญหาของสมการเชิงเส้นก็อาศัยเทคนิคการหาตัวประกอบอินทิเกรตช่วย แต่เป็นแบบที่ง่ายกว่าดังวิธีการต่อไปนี้

จาก $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

จะได้ $$\big(P(x)y - Q(x)\big)dx + dy = 0$$

ในที่นี้
$$M = Py - Q$$
$$N = 1$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = P$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

พิจารณา $$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{1}(P-0) = P$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต คือ $e^{\int P(x)\,dx}$

เพราะว่า
$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + ye^{\int P(x)\,dx}P(x)$$
$$= e^{\int P(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right)$$

ดังนั้น เมื่อคูณด้วยตัวประกอบอินทิเกรตในสมการเริ่มต้น จะได้

$$e^{\int P(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

$$d\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx$$

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right)dx + C$$

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right)dx + C\right]$$

เป็นคำตอบสมการเชิงเส้นตามต้องการ

คำตอบที่ได้ข้างต้นเป็นคำตอบทั่วไป สำหรับในกรณีที่ $Q(x) = 0$ เราเรียกสมการ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ ว่าสมการประกอบ (complementary equation) ของสมการเดิม

คำตอบทั่วไปของ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ คือ

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$ เรียกว่าคำตอบประกอบ

ส่วนคำตอบ $$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx\right]$$

เป็นคำตอบเฉพาะ เพราะว่าไม่มีค่าคงที่ตามใจชอบอยู่ด้วย ดังนั้น สำหรับคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลทั่ว ๆ ไปจะได้ว่า

คำตอบทั่วไป = คำตอบประกอบ + คำตอบเฉพาะ

ซึ่งจะได้กล่าวรายละเอียดต่อไปในบทที่ 4

ตัวอย่าง 2.27 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

วิธีทำ ในที่นี้ $P(x) = 2x$

$$\int P(x)dx = \int 2xdx = x^2$$

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต คือ e^{x^2}

คำตอบของสมการคือ $y = e^{-x^2}\int 4xe^{x^2}dx$

$$= e^{-x^2}\left[2e^{x^2} + C\right]$$

$$= 2 + Ce^{-x^2}$$

ตัวอย่าง 2 . 2 8 จงแก้สมการ $(x-2)\frac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3$

วิธีทำ จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$$

ในที่นี้ $P(x) = -\frac{1}{x-2}$

ดังนั้น $\int P(x)dx = \int -\frac{1}{x-2}dx$

$$= -\ell n(x-2)$$

ตัวประกอบอินทิเกรต คือ $e^{-\ell n(x-2)} = e^{\ell n(x-2)^{-1}} = \frac{1}{x-2}$

ดังนั้นจะได้ว่า $y\left(\frac{1}{x-2}\right) = \int 2(x-2)^2 \frac{1}{x-2}dx$

$$= 2\int (x-2)dx$$

$$= (x-2)^2 + C$$

เพราะฉะนั้น $y = (x-2)^3 + C(x-2)$

ตัวอย่าง 2.29 จงหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $x^3\frac{dy}{dx} + (2-3x^2)y = x^3$

วิธีทำ จัดรูปใหม่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2-3x^2}{x^3}\right)y = 1$$

ในที่นี้ $P(x) = \frac{2-3x^2}{x^3} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$

$$\int P(x)dx = \int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{x^2} - 3\ell n\, x$$

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต คือ $e^{\int P(x)\,dx}$

$$= e^{-\frac{1}{x^2} - 3\ell n\, x}$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot e^{\ell n\, x^{-3}}$$

$$= \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $y\left(\frac{1}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}\right) = \int \frac{dx}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}} d\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + C$$

$$= \frac{1}{2e^{\frac{1}{x^2}}} + c$$

ดังนั้น $$y = \frac{x^3}{2} + Cx^3 e^{\frac{1}{x^2}}$$

ตัวอย่าง 2.30 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{dy}{dx} - 2y \cot 2x = 1 - 2x \cot 2x - 2 \operatorname{cosec} 2x$

วิธีทำ จากสมการ $$\frac{dy}{dx} - (2\cot 2x)y = 1 - 2x \cot 2x - 2 \operatorname{cosec} 2x$$

ในที่นี้
$$P(x) = -2\cot 2x$$
$$\int P(x)dx = \int -2\cot 2x dx$$
$$= -\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} d2x$$
$$= -\int \frac{1}{\sin 2x} d \sin 2x$$
$$= -\ell n \sin 2x$$

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต คือ
$$e^{\int P(x) dx} = e^{-\ell n \sin 2x}$$
$$= e^{\ell n \left(\frac{1}{\sin 2x}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sin 2x}$$
$$= \operatorname{cosec} 2x$$

ดังนั้น จะได้ว่า
$$y(\operatorname{cosec} 2x) = \int \operatorname{cosec} 2x - 2x \cot 2x \operatorname{cosec} 2x - 2\operatorname{cosec}^2 2x \, dx$$
$$= x \operatorname{cosec} 2x + \cot 2x + C$$

ดังนั้น จะได้ว่า $$y = x + \cos 2x + C \sin 2x$$

มีสมการอีกแบบหนึ่งซึ่งใช้หลักการแบบที่กล่าวแล้วข้างต้นแก้ปัญหาได้เช่นเดียวกับสมการนี้มีชื่อว่าสมการเบอร์นูลลี (Bernoulli's equation)

นิยาม 2.6 สมการดิฟเฟอเรนเชียล $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เรียกว่า สมการเบอร์นูลลี- (Bernoulli's equation) ก็ต่อเมื่อสามารถจัดอยู่ในรูป

(1) $$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^nQ(x)$$

หรือ (2) $$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-n+1}P(x) = Q(x)$$

จากสมการ $$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^nQ(x)$$

กรณีที่ 1 : ถ้า $n = 0$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

เป็นสมการเชิงเส้น

กรณีที่ 2 : ถ้า $n = 1$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = yQ(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(Q(x) - P(x)\right)y$$

$$\frac{1}{y}dy + \left(P(x) - Q(x)\right)dx = 0$$

ใช้วิธีการแยกตัวแปรหาคำตอบได้

กรณีที่ 3 : ถ้า $n \neq 1$

จาก $$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-n+1}P(x) = Q(x)$$

ให้ $$v = Y^{-n+1}$$

$$\frac{dv}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

ดังนั้น $$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{n-1}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$$

จะได้สมการใหม่ในรูปตัวแปร x และ v คือ

$$\frac{dv}{dx} + v\left\{(1-n)P(x)\right\} = (1-n)Q(x)$$

ซึ่งเป็นแบบของสมการเชิงเส้นนั่นเอง

ตัวอย่าง 2.31 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$

วิธีทำ จัดรูปใหม่จะได้

$$y^{-5}\frac{dy}{dx} - y^{-4} = x$$

ให้

$$v = y^{-4}$$

$$\frac{dv}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

$$y^{-5}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}\frac{dv}{dx}$$

แทนค่าจะได้

$$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} - v = x$$

$$\frac{dv}{dx} + 4v = -4x$$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{\int 4dx} = e^{4x}$

ดังนั้น

$$ye^{4x} = \int -4xe^{4x}dx$$

$$= -4\int xe^{4x}dx$$

$$= -4\left(x\frac{e^{4x}}{4} - \frac{1}{16}e^{4x}\right) + C$$

$$= -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ

$$y = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$$

ตัวอย่าง 2.32 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$

วิธีทำ จัดรูปใหม่ จะได้

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = \cos x - \sin x$$

ให้

$$v = y^{-1}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{dx}$$

แทนค่าจะได้ $-\frac{dv}{dx}+v = \cos x-\sin x$

$$\frac{dv}{dx}-v = \sin x-\cos x$$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -1dx}$$

$$= e^{-x}$$

ดังนั้น $ye^{-x} = \int(\sin x-\cos x)e^{-x}\,dx$

โดยใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน (by part) จะได้

$$ye^{-x} = -e^{-x}\sin x+C$$

$$y = -\sin x+Ce^{x}$$

แบบฝึกหัด 2.7

จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นและสมการเบอร์นูลลีต่อไปนี้

1. $\frac{dy}{dx}+y = 2+2x$

2. $\frac{dy}{dx}+3y = 2$

3. $\frac{dy}{dx}-y = xy^2$

4. $\frac{dy}{dx}-6y = 10\sin 2x$

5. $xdy - 2ydx = (x-2)e^x\,dx$

6. $\frac{dy}{dx}+y = y^2e^x$

7. $ydx + (xy+x-3y)dy = 0$

8. $xdy + ydx = x^3y^6dx$

9. $y(1+y^2)dx = 2(1-2xy^2)dy$

10. $yy' - xy^2 + x = 0$

11. $xdy - ydx = \sqrt{x^2-y^2}\,dy$

12. $2\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + x^3\cos y = 0$

13. $xy' = y(1-x\tan x) + x^2\cos x$

14. $(2xy^5-y)dx + 2xdy = 0$

15. $(1+\sin y)dx = [2y\cos y - x(\sec y - \tan y)]dy$

2.9 สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่อันดับสูงกว่า 1 แต่หาคำตอบโดยใช้วิธีการง่าย ๆ หรือวิธีการของแบบที่อันดับเท่ากับ 1 ได้

ตัวอย่างที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่มีอันดับสูงกว่า 1 แต่สามารถใช้วิธีการง่าย ๆ ในการแก้ปัญหา หรืออาจใช้การสมมติค่าเพื่อจัดรูปให้อยู่ในแบบอันดับ 1 ได้ ดังนี้

ตัวอย่าง 2.33 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{d^3y}{dx^3} = 1-x$

วิธีทำ ใช้การอินทิเกรตตลอด

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 1-x$$

ดังนั้น

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int (1-x)dx$$

$$= x-\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \left(x-\frac{x^2}{2}+C_1\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

$$Y = \frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

ข้อสังเกต จะเห็นว่าจำนวนค่าคงที่ตามใจชอบจะมีค่าเท่ากับอันดับของสมการ

ตัวอย่าง 2.34 จงหาคำตอบเฉพาะของสมการ $\frac{d^4y}{dx^4} = x$ เมื่อ $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = y''' = 0$

วิธีทำ จาก

$$\frac{d^4y}{dx^4} = x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x^2}{2}+C_1$$

เมื่อ $x = 0$, $y''' = 0$ ดังนั้น $0 = 0+C_1$ ได้ $C_1 = 0$

ดังนั้น $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^3}{6} + C_2$$

เมื่อ $x = 0,\ y'' = 0$ ดังนั้น $0 = 0 + C_2$ ได้ $C_2 = 0$

ดังนั้น $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^3}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{24} + C_3$$

เมื่อ $x = 0,\ y' = 1$ ดังนั้น $1 = 0 + C_3$ ได้ $C_3 = 1$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{24} + 1$$

$$y = \frac{x^5}{120} + x + C_4$$

เมื่อ $x = 0,\ y = 0$ ดังนั้น $0 = 0 + 0 + C_4$ ได้ $C_4 = 0$

ดังนั้นคำตอบ คือ $$y = \frac{x^5}{120} + x$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ตัวแปรปรากฏในสมการเพียงตัวแปรเดียวเท่านั้น ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 2.35 จงหาคำตอบของสมการ $xy'' + y' - x = 0$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้ไม่มีตัวแปร y ในสมการ

ให้ $$v = y'$$

$$\frac{dv}{dx} = y''$$

แทนค่าจะได้ $$x\frac{dv}{dx} + v - x = 0$$

$$xdv + vdx - xdx = 0$$

$$d(xv) - xdx = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้ $$xv - \frac{x^2}{2} = C_1$$

แทนค่า $v = \frac{dy}{dx}$ จะได้

$$x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{2} = C_1$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{2} = \frac{C_1}{x}$$

อินทิเกรตตลอด จะได้ $$y-\frac{x^2}{4} = C_1\ell n\ x+C_2$$

$$y = \frac{x^2}{4}+C_1\ell n\ x+C_2$$

ตัวอย่าง 2.36 จงหาคำตอบของสมการ $y''-y' = 0$

วิธีทำ จาก $$y''-y' = 0$$

สมมติ $$v = y'$$

$$v' = y''$$

ดังนั้น แทนค่า จะได้

$$v'-v = 0$$

$$\frac{dv}{dx}-v = 0$$

$$dv-vdx = 0$$

$$\frac{1}{v}dv-dx = 0$$

อินทิเกรตตลอด จะได้

$$\ell n\ v-x = C_1$$

$$\ell n\ v = x+C_1$$

$$v = e^{x+C_1}$$

$$= C_2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = C_2e^x$$

$$y = \int C_2e^xdx$$

$$y = C_2e^x+C_3$$

แบบฝึกหัด 2.8

จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $y''' = 2x$
2. $y'' = \sin x$
3. $y'' + 2y = 0$
4. $y'' - 4y = 0$
5. $y''' = 3\sin x$; เมื่อ $x = 0,\ y = 1,\ y' = 0,\ y'' = -2$
6. $x^2y'' - x^2 - 1 = 0$ เมื่อ $x = 1,\ y = 1,\ y' = 0$