บทที่ 1
สมการดิฟเฟอเรนเชียล
(Differential Equation)

1.1 สมการดิฟเฟอเรนเชียล

สมการที่เคยรู้จักกันโดยมากเป็นสมการของตัวแปรอิสระ และตัวแปรตามซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ อย่างไรก็ตามมีสมการอีกแบบหนึ่งซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ซึ่งอาจเป็นอันดับหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งก็ได้ เราเรียกสมการแบบนี้ว่าสมการดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งนิยามได้ดังนี้

นิยาม 1.1 สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระซึ่งอาจจะมีตัวเดียวหรือมากกว่า 1 ตัว ก็ได้ เรียกว่าสมการดิฟเฟอเรนเชียล

ตัวอย่าง 1.1 ตัวอย่างของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

1) $\frac{dy}{dx} = x - 3$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3dy}{dx} - 2y = 0$

3) $xy' + y = 4$

4) $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$

5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$

นิยาม 1.2 สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวแปรเดียวเท่านั้น เรียกว่า สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา (ordinary differential equations)

สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป เรียกว่า สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียล (partial differential equations)

ตัวอย่าง 1.2 ตัวอย่างสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา

1) $\frac{dy}{dx} - 2x = 3$

2) $y'' - 3y' + 4 = 0$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} - 3\cos x = 0$

ตัวอย่างสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียล

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 - y$

2) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 3$

นิยาม 1.3 อันดับ (order) ของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ของตัวแปรที่ปรากฏในสมการนั้น

ตัวอย่าง 1.3 ตัวอย่างอันดับของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

1) $\frac{dy}{dx} - 3x = 4$: อันดับที่ 1

2) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4dy}{dx} + 3y = \sin x$: อันดับที่ 2

3) $y''' - (y'')^2 + 2y = 0$: อันดับที่ 3

นิยาม 1.4 ดีกรี (degree) ของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือเลขชี้กำลังของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุด โดยที่ทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการต้องมีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1.4 ตัวอย่างดีกรีของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

1) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 - xy = 0$

อนุพันธ์อันดับสูงสุดคือ 3 มีกำลังคือ 2 ดังนั้น ดีกรี = 2

2) $y' + x = (y - xy')^{-3}$

ยังบอกดีกรีไม่ได้เพราะกำลังไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จัดรูปใหม่จะได้

$$y' + x = \frac{1}{(y - xy')^3}$$

$$(y' + x)(y - xy')^3 = 1$$

เมื่อคูณกันแล้วเลขชี้กำลังของ y' คือ 4

ดังนั้น สมการดิฟเฟอเรนเชียลมีดีกรี = 4

3) $$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right)^4 = \rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$$

มีดีกรี = 4

สมการดิฟเฟอเรนเชียลมีต้นกำเนิดมาจากปัญหาทางคณิตศาสตร์ และฟิสิกส์ ซึ่งพอที่จะแยกกล่าวรายละเอียดของแต่ละปัญหาที่นำเข้าสู่สมการดิฟเฟอเรนเชียลดังต่อไปนี้

1. ปัญหาทางเรขาคณิต โดยมากจะเป็นปัญหาเกี่ยวกับความชันเส้นโค้ง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เป็นต้น ตัวอย่างเช่น กำหนดเส้นโค้งที่ผ่านจุด P(x, y) มีความชันเป็น 2 เท่าของผลบวกของคู่อันดับทั้งสอง เพราะว่าความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ คืออนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ

ดังนั้น จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+y)$$

2. ปัญหาทางฟิสิกส์ โดยมากเป็นปัญหาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ ความเร็ว และความเร่ง โดยที่เราทราบมาแล้วว่า เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ได้ทาง x ในเวลา t ใด ๆ จะได้ความเร็วเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $\frac{dx}{dt}$ และความเร่งเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $\frac{d^2x}{dt^2}$ ซึ่งนำมาสู่ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียล ดังตัวอย่างต่อไปนี้

วัตถุมวล m เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง แรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ประกอบด้วย F_1, F_2 โดยที่ F_1 แปรผันตามระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ และ F_2 แปรผันตามความเร็วเมื่อเวลา t ใด ๆ จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล ดังนี้

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ ma &= k_1x + k_2v \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= k_1x + k_2\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

3. ปัญหาของค่าปฐม (primitive) สมการทั่ว ๆ ไปที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ (arbitrary constants) ตัวอย่างเช่น $y = x^4 + Cx$ หรือ $y = Ax^2 + Bx + C$ จะนำเข้าสู่สมการดิฟเฟอเรนเชียลได้

โดยทั่วไปสมการปฐมที่มีตัวคงที่ตามใจชอบ n ตัว จะนำเข้าสู่สมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับที่ n ตัวอย่างเช่น

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

เพื่อจะให้ได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลต้องทำให้ตัวคงที่ตามใจชอบหมดไปโดยการใช้อนุพันธ์ช่วยจะได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

นั่นคือ สมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับสมการปฐม $y = Ax^2 + Bx + C$ คือ $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$

1.2 การกำจัดตัวคงที่

จากที่กล่าวมาแล้วว่าสมการปฐมมีตัวคงที่ตามใจชอบ เราสามารถทำให้ตัวคงที่ตามใจชอบหมดไปได้โดยเกิดสมการใหม่ขึ้นมาเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งวิธีการนี้เรียกว่าการกำจัดตัวคงที่

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.5 จงหาสมการดิฟเฟอเรนเชียล โดยใช้วิธีการกำจัดตัวคงที่ เมื่อกำหนดให้ $y = A\cos 2x + B\sin 2x$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned} y &= A\cos 2x + B\sin 2x \\ \frac{dy}{dx} &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \\ &= -4(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ &= -4y \end{aligned}$$

จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$ จงหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

วิธีทำ จาก

$$y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$$

$$\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + Be^{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} + Be^{x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 8Ae^{2x} + Be^{x}$$

จะได้ว่า

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{2d^2y}{dx^2} = -Be^{x} \qquad \text{.......(1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2dy}{dx} = -Be^{x} \qquad \text{.......(2)}$$

(1) = (2) จะได้

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{2d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2dy}{dx}$$

จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลตามต้องการ คือ

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3d^2y}{dx^2} + \frac{2dy}{dx} = 0$$

ตัวอย่าง 1.7 กำหนดให้ $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{x}$ จงหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้โดยการกำจัดตัวคงที่

วิธีทำ จาก

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{x}$$

จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} + C_3e^{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9C_1e^{3x} + 4C_2e^{2x} + C_3e^{x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 27C_1e^{3x} + 8C_2e^{2x} + C_3e^{x}$$

จะได้ว่า

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3d^2y}{dx^2} = -4C_2e^{2x} - 2C_3e^{x} \qquad \text{.......(1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} = -2C_2e^{2x} - 2C_3e^{x} \qquad \text{.......(2)}$$

$$\frac{dy}{dx} - 3y = -C_2e^{2x} - 2C_3e^{x} \qquad \text{.......(3)}$$

(1) + 2(3) − 3(2) จะได้

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3d^2y}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx} - 3y\right) - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{6d^2y}{dx^2} + \frac{11dy}{dx} - 6y = 0$$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงบอกอันดับ (order) และดีกรี (degree) ของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้

   1.1 $y' - 4y = \sin 2x$

   1.2 $\frac{2d^2y}{dx^2} - \frac{4dy}{dx} - y = 0$

   1.3 $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$

   1.4 $dy + (xy - \cos x)dx = 0$

   1.5 $(y'')^{\frac{2}{3}} = 2 + y'$

   1.6 $\sqrt{y' + y} = \cos x$

   1.7 $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[3]{y + \frac{dy}{dx}}$

2. จงเขียนสมการดิฟเฟอเรนเชียลแทนเส้นโค้งที่กำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 ที่จุด P(x, y) ใด ๆ ความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับกำลังสองของคู่อันดับตัวที่ 1

   2.2 เส้นโค้งซึ่งผลรวมของระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ที่จุด P(x, y) ใด ๆ มีค่าเท่ากับ 2 เสมอ

3. จงใช้วิธีการกำจัดตัวคงที่หาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   3.1 $y = Ax$

   3.2 $y = Ax + B$

   3.3 $y = e^{x+C}$

   3.4 $y = A \sin x$

   3.5 $y = \sin(x + A)$

   3.6 $y = Ae^x + B$

   3.7 $x = A \sin(y + B)$

   3.8 $\ln y = Ax^2 + B$

   3.9 $y^2 = 4A(x + A)$

   3.10 $y = Cx^2 + C^2$

1.3 คำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

จากหัวข้อ 1.2 จะเห็นว่าสมการปฐมที่มีตัวคงที่ตามใจชอบอยู่ด้วยเมื่อใช้วิธีการกำจัดตัวคงที่แล้วจะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่า สมการปฐมเป็นคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลนั่นเอง

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว การแก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับที่ n ก็คือการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรซึ่งรวมตัวคงที่ตามใจชอบ n ตัว ตัวอย่างเช่น

สมการดิฟเฟอเรนเชียล	**คำตอบ**
$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$	$y = Ax^2 + Bx + C$
$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{6d^2y}{dx^2} + \frac{11dy}{dx} - 6y = 0$	$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^x$

สำหรับคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล มี 2 แบบ คือ

(1) คำตอบทั่วไป (general solution)

(2) คำตอบเฉพาะ (particular solution)

คำตอบที่กล่าวข้างต้นของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือคำตอบทั่วไปแต่ถ้ามีเงื่อนไขหรือกำหนดตัวคงที่ตามใจชอบเท่ากับค่าคงที่ที่แน่นอน จะได้คำตอบใหม่เรียกว่า คำตอบเฉพาะ ตัวอย่างเช่น

คำตอบทั่วไป	**คำตอบเฉพาะ**	
$y = Ax^2 + Bx + C$	$y = 0$	$(A = 0, B = 0, C = 0)$
	$y = 2x + 5$	$(A = 0, B = 2, C = 5)$
	$y = 3x^2 + 2x + 1$	$(A = 3, B = 2, C = 1)$

ตัวอย่าง 1.8 จงแสดงว่า $y = A \sin x + Bx$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $(1 - x \cot x) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} + y = 0$

วิธีทำ จาก

$$y = A \sin x + Bx$$

$$\frac{dy}{dx} = A \cos x + B$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A \sin x$$

ดังนั้น $(1 - x \cot x)(-A \sin x) - x(A \cos x + B) + A \sin x + Bx$

$$= -A \sin x + Ax \cos x - Ax \cos x - Bx + A \sin x + Bx$$

$$= 0$$

จะเห็นว่า $y = A \sin x + Bx$ สอดคล้องกับสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$(1 - x \cot x) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} + y = 0$$

ดังนั้น จึงเป็นคำตอบตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.9 จงแสดงว่า $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} + 2y = 2x - 3$ และจงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด (0, 0) และ (1, 0)

วิธีทำ จาก

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1e^x + 4C_2e^{2x}$$

แทนค่าลงในสมการดิฟเฟอเรนเชียล จะได้

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} + 2y \\
&= C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 3(C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 1) + 2(C_1e^x + C_2e^{2x} + x) \\
&= C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 3C_1e^x - 6C_2e^{2x} - 3 + 2C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 2x \\
&= 2x - 3
\end{aligned}$$

แสดงว่า $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x$ เป็นคำตอบตามต้องการ

จากสมการ $\quad y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x$

ผ่านจุด (0, 0) ; $\quad 0 = C_1e^0 + C_2e^0 + 0$

จะได้ $\quad C_1 + C_2 = 0 \qquad \text{.......(1)}$

ผ่านจุด (1, 0) ; $\quad 0 = C_1e + C_2e^2 + 1$

จะได้ $\quad C_1e + C_2e^2 = -1 \qquad \text{.......(2)}$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\quad C_1 = -C_2 = \frac{1}{e^2 - e}$

แทนค่าในสมการจะได้ $\quad y = \left(\frac{1}{e^2 - e}\right)e^x + \left(\frac{-1}{e^2 - e}\right)e^{2x} + x$

$$y = \left(\frac{1}{e^2 - e}\right)(e^x - e^{2x}) + x$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงแสดงว่า $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + 2x^2e^x$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 8e^x$$

2. จงแสดงว่า $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

3. จงแสดงว่าคำตอบที่กำหนดให้เป็นคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนดให้ และบอกด้วยว่าเป็นคำตอบทั่วไปหรือคำตอบเฉพาะ

	คำตอบ	สมการดิฟเฟอเรนเชียล
3.1)	$y = C_1x + C_2e^x$	$(x-1)y'' - xy' + y = 0$
3.2)	$y = e^x(1+x)$	$y'' - 2y' + y = 0$
3.3)	$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$	$y'' - y = 0$

4. จงแสดงว่า $y = 2x + Ce^x$ เป็นคำตอบของสมการ $\frac{dy}{dx} - y = 2(1-x)$ และหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด (0, 3) (หรือหาคำตอบเฉพาะเมื่อ $x = 0$ และ $y = 3$)