บทที่ 7
แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัว

อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative)

นิยาม 7.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว x และ y อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x คือ ฟังก์ชัน เขียนแทนด้วย $\frac{\partial f}{\partial x}$ ซึ่งค่าของฟังก์ชันที่จุด (x, y) ใด ๆ ในโดเมน-ของ f กำหนดโดย

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad \text{..........(1)}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

นิยาม 7.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว x และ y อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y คือ ฟังก์ชันเขียนแทนด้วย $\frac{\partial f}{\partial y}$ ซึ่งค่าของฟังก์ชันที่จุด (x, y) ใด ๆ ในโดเมน-ของ f กำหนดโดย

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad \text{..........(2)}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

กระบวนการในการหาอนุพันธ์ย่อย เรียกว่า partial differentiation-

นอกจากสัญกรณ์ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ใช้เขียนแทนด้วยข้อความอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f ที่จุด (x, y) แล้วยังสัญกรณ์อื่น ๆ ซึ่งเป็นที่นิยมใช้เขียนแทนข้อความข้างต้นอีกด้วย คือ

D_1f , $D_1f(x, y)$, f_1 , f_x , f'_x , $D_xf(x, y)$, $D_xf \mid (x, y)$, $f_x(x, y)$

ถ้าให้ $Z = f(x, y)$ สัญกรณ์ที่มีความหมายเหมือน $\frac{\partial f}{\partial x}$ คือ

$$\frac{az}{\partial x}(x, y) \text{ และ } \frac{\partial Z}{\partial x}\Big|(x, y)$$

สัญกรณ์ "$\partial Z/\partial x$" นี้คือ สัญกรณ์ของไลพนิทซ์ (Leibniz notation) ซึ่งมีประโยชน์มากสำหรับคณิตศาสตร์ประยุกต์

เช่นเดียวกัน $\frac{\partial f}{\partial y}$ ก็ยังมีสัญกรณ์อื่นซึ่งเป็นที่นิยมใช้เขียนกันคือ

D_2f , $D_2f(x, y)$, f_2 , f_x , f'_y , $D_y(f, y)$ $D_yf \mid (x, y)$, $f_y(x, y)$

ถ้าให้ $Z = f(x, y)$ สัญกรณ์ที่มีความหมายเหมือน $\frac{\partial f}{\partial y}$ คือ

$$\frac{\partial Z}{\partial y}(x, y) \text{ และ } \frac{\partial Z}{\partial y}\Big|(x, y)$$

ข้อควรจำ นักศึกษาต้องเข้าใจว่า อนุพันธ์ย่อย ไม่ใช่อัตราส่วนของ ∂Z และ ∂x เพราะสัญกรณ์ทั้งสองนี้ไม่ได้แยกความหมายกัน ซึ่งต่างไปจาก สัญกรณ์ dy/dx ที่เราสามารถทำความเข้าใจในลักษณะที่ว่ามันเป็นอัตราส่วนของผลต่างอนุพัทธ์ (differential) สองจำนวน เมื่อ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว คือ x

ตัวอย่าง 1 $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y\Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x - 2y)$$

$$= 6x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} (-2x + 2y + \Delta y)$$

$$= -2x + 2y$$

ถ้า (x_0, y_0) เป็นจุดเฉพาะในโดเมนของ f ดังนั้น

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \text{ ถ้าลิมิตหาค่าได้} \quad (3)$$

และ $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \text{ ถ้าลิมิตหาค่าได้} \quad (4)$$

เขียน (3) และ (4) เสียใหม่เป็น

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \text{ ถ้าลิมิตหาค่าได้} \qquad (5)$$

และ $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} \text{ ถ้าลิมิตหาค่าได้} \qquad (6)$$

ในการคำนวณอนุพันธ์ย่อยเฉพาะที่ เราอาจคำนวณโดยใช้ (3) หรือ (4) หรือเพียงแต่แทนค่า (x_0, y_0) ลงในคำตอบที่ได้จากสูตร (1) หรือ (2) ก็ได้ เช่น จากตัวอย่าง 1 ข้างบนนี้ ถ้าเราต้องการทราบอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial x}$ กับ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ณ. จุด (3, −2) โดยเฉพาะก็ทำได้โดย

จาก $$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, -2) = 6(3) - 2(-2) = 22$$

และจาก $$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3, -2) = -2(3) + 2(-2) = -8$$

ถ้าไม่ใช้วิธีการหาลิมิต เราสามารถที่จะหาอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว x ได้ และให้ y คงที่ที่ y_0 หมายความว่า เราคำนวณหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f ได้ โดยใช้เทคนิคสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเดียว

และถ้าต้องการจะหาอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว y และให้ x คงที่ที่ x_0

ตัวอย่าง 2 กำหนด $f(x, y) = 3x^2 - 4x^2y + 3xy^2 + 7x - 8y$

จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$

วิธีทำ หา $\frac{\partial f}{\partial x}$ โดยให้ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว x และให้ y เป็นค่าคงที่

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + 7$$ **ตอบ**

HI $\frac{\partial f}{\partial y}$ โดยให้ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว y และให้ x เป็นค่าคงที่

$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2 + 6xy - 8$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 8 กำหนดฟังก์ชันโพลิโนเมียล $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^3$

จงหา $f_x(1, 2)$ และ $f_y(1, 2)$

วิธีทำ โดยให้ y เป็นค่าคงที่

$f_x = 2x + 3y$

และ $f_x(1, 2) = 2(1) + 3(2) = 8$

โดยให้ x เป็นค่าคงที่

$\therefore \quad f_y = 3x + 6y^2$

และ $f_y(1, 2) = 3(1) + 6(2)^2 = 27$

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัวแสดงในเชิงเรขาคณิตได้คล้าย ๆกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเดียว

กราฟของฟังก์ชัน f ของสองตัวแปร คือ ผิวมีสมการ $Z = f(x, y)$
ถ้าให้ y เป็นค่าคงที่ที่ y_0 $(y = y_0)$ ดังนั้น $Z = f(x, y_0)$

คือ สมการของรอย (trace) ของผิวในระนาบ $y = y_0$ เส้นโค้งแสดงได้ด้วยสมการสองสมการ

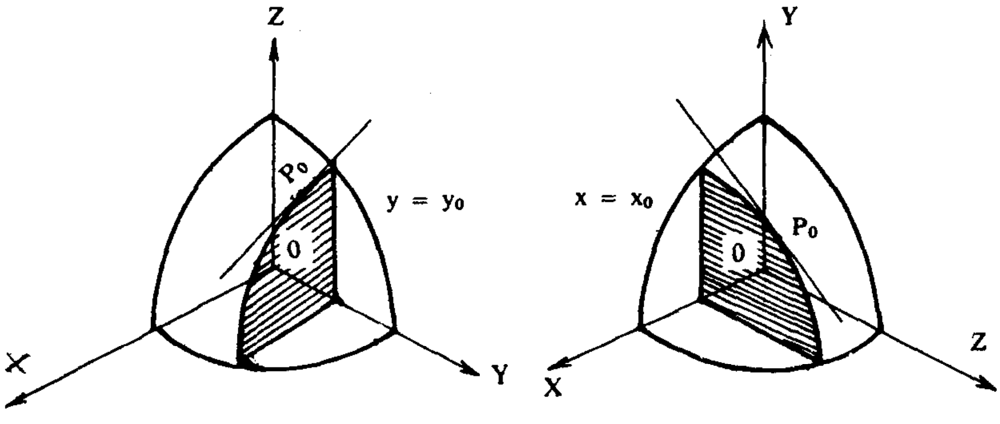
$$y = y_0 \text{ และ } Z = f(x, y) \tag{7}$$

เพราะเส้นโค้งเกิดจากการตัดกันของผิวทั้งสอง
อนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial x}$ ก็คือ ความชันของเส้นสัมผัสที่สัมผัสโค้ง ซึ่งสมการกำหนดไว้ใน (7) ที่จุด $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ในระนาบ $y = y_0$

ในการอภิปรายทำนองคล้าย ๆ กัน $\frac{\partial f}{\partial y}$ ก็คือ ความชันของเส้นสัมผัสที่สัมผัสโค้ง มีสมการเป็น

$x = x_0$ และ $Z = f(x, y)$

ที่จุด $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ในระนาบ $x = x_0$ ดังรูป 7.1



(ก) รูป 7.1 (ข)

ตัวอย่าง 4 จงหาความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่เกิดจากการตัดกันของผิว $Z = \frac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$ กับระนาบ $y = 2$ ที่จุด $(2, 2, \sqrt{3})$

วิธีทำ ความชันที่ต้องการ คือ ค่าของ $\partial Z/\partial x$ ที่จุด $(2, 2, \sqrt{3})$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

ดังนั้น ที่จุด $(2, 2, \sqrt{3})$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{-2}{2\sqrt{12}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ฟังก์ชันของตัวแปร n ตัวและอนุพันธ์ในอันดับที่สูงขึ้น

นิยาม 7.1.3 ให้ $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นจุดใน E^n และให้ f เป็นฟังก์ชันของ n ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ดังนั้น อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_k คือ ฟังก์ชัน ใช้สัญลักษณ์- D_kf ซึ่งค่าของฟังก์ชันที่จุดใน ๆ P ในโดเมนของ f กำหนดโดย

$$D_kf(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) - f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\Delta x_k}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

โดยเฉพาะเมื่อ f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร x y และ z อนุพันธ์ย่อยของ f กำหนดโดย

$$D_1f(x, y, z) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \quad \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{Ax}$$

$$D_2f(x, y, z) = \underset{\Delta y \to 0}{\text{Pim}} \quad \frac{f(x, y + \Delta y. z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$D_3f(x, y, z) = \underset{\Delta z \to 0}{\text{Pim}} \quad \frac{f(x, y, z + Az) - f(x, y. z)}{Az}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่าง 5 กำหนด $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 \div z^3$

จงแสดงว่า $xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) = 3f(x, y, z)$

วิธีทำ ให้ y และ z คงที่ เราได้ว่า

$$f_1(x, y, z) = 2xy$$

ให้ x และ z คงที่

$$f_2(x, y, z) = x^2 + z^2$$

ให้ x และ y คงที่ เราได้

$$f_3(x, y, z) = 2yz + 3z^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) &= x(2xy) + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 2z^2) \\ &= 2x^2y + x^2y + yz^2 + 2yz^2 + 3z^3 \\ &= 3(x^2y + yz^2 + z^3) \\ &= 3f(x, y, z) \end{aligned}$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว ดังนั้นโดยทั่ว ๆ ไป $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$

เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัวด้วย และถ้าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันนี้หาค่าได้ เรียกอนุพันธ์ย่อยนี้ว่า อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันสองตัวแปรอยู่ 4 แบบ ถ้า f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร x และ y สัญลักษณ์

$$D_2(D_1f) \quad D_{12}f \quad f_{12} \quad f_{xy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

ทั้งหมดนี้ หมายถึง อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f ซึ่งได้มาจากหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ f เทียบกับ x และหาอนุพันธ์ย่อยอีกครั้งหนึ่งเทียบกับ y อนุพันธ์ย่อยประเภทนี้นิยามโดย

$$f_{12}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_1(x, y + \Delta y) - f_1(x, y)}{\Delta y} \quad \text{ถ้าลิมิตมีอยู่}$$

สัญลักษณ์ $D_1(D_1f)$ $D_{11}f$ f_{11} f_{xx} $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

ทั้งหมดนี้ เขียนแทนอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ของ f ซึ่งได้มาจากการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ f เทียบกับ x และหาอนุพันธ์ย่อยอีกครั้งเทียบกับ x มีนิยามว่า

$$f_{11}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + Ax, y) - f_1(x, y)}{Ax} \quad \text{ถ้าลิมิตมีอยู่}$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสองอื่น ๆ ที่เหลือ นิยามโดย

$$f_{21}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x + \Delta x, y) - f_2(x, y)}{\Delta x}$$

และ

$$f_{22}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_2(x, Y + \Delta y) - f_2(x, y)}{\Delta y} \quad \text{ถ้าลิมิตมีอยู่}$$

นิยามของอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง ๆ ขึ้นไปก็คล้าย ๆ กัน เรามีสัญกรณ์ต่าง ๆ มากมาย สำหรับอนุพันธ์ย่อย เช่น

$$D_{112}f \quad f_{112} \quad f_{xxy} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x\, \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}$$

ทั้งหมดแสดงถึงอนุพันธ์ย่อยอันดับสามของ f ซึ่งได้มาจากการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x สองครั้ง แล้วจึงหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y อีกครั้งหนึ่ง

ข้อสังเกต สังเกตดรรชนีล่างของสัญกรณ์ ลำดับของการหาอนุพันธ์ย่อยจะเรียงลำดับจากซ้ายไปขวา

ถ้าเป็นสัญกรณ์ $\frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x\, \partial x}$ ลำดับจะเรียงจากขวาไปซ้าย

ตัวอย่าง 6 กำหนด $f(x, y) = e^x \sin y + \ell n\, xy$

จงหา ก) $D_{11}f(x, y)$

ข) $D_{12}f(x, y)$

ค) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}$

วิธีทำ ก) $D_1 f(x, y) = e^x \sin y + \frac{1}{xy} y = e^x \sin y + \frac{1}{x}$

$$D_{11}f(x, y) = e^x \sin y - \frac{1}{x^2}$$

ข) $D_{12}f(x, y) = e^x \cos y$

ค) $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y \quad \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} = -e^x \sin y$$

ตัวอย่าง 7 กำหนด $f(x, y, z) = \sin (xy + 22)$

จงหา $D_{132}\, f(x, y, z)$

วิธีทำ $D_1 f(x, y, z) = y \cos (xy + 2z)$

$$D_{13}f(x, y, z) = -2y \sin (xy + 2z)$$

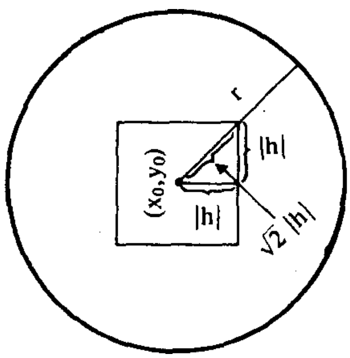
$$D_{132}f(x, y, z) = -2 \operatorname{Sin} (xy + 2z) - 2xY \cos (xy + 2z)$$

ทฤษฎี 7.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว x และ y นิยามบน วงกลมเปิด $B((x_0, y_0);r)$ และ f_x , f_y , f_{xy} และ f_{yx} นิยามบน B ถ้า f_{xy} และ f_{yx} ต่อเนื่องบน B ดังนั้น

$$f_{xy}(x_0 . y_0) = f_{yx}(x_0 , y_0)$$

พิสูจน์ พิจารณาจัตุรัสที่มีจุดศูนย์กลางที่ (x_0 , y_0) ความยาวด้านของจัตุรัส คือ 2h จะได้ว่า $0 < \sqrt{2}\,|h| < r$

จุดทั้งหมดข้างในจัตุรัสและบนด้านทั้งสี่ของจตุรัสอยู่ในวงกลมเปิด B (ตามรูป)



รูป 7.2

$\therefore$ จุด (x_0+h, y_0+h) , (x_0+h, y_0) และ (x_0,y_0+h)- อยู่ใน B

ให้ $A = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0)$

$$- f(x_0, y_0+h) + f(x_0,y_0) \qquad (1)$$

พิจารณาฟังก์ชัน G นิยามโดย

$$G(x) = f(x, y_0+h) - f(x,y_0) \qquad (2)$$

ดังนั้น

$$G(x+h) = f(x+h), y_0+h) 1 f(x+h, y_0)$$

ดังนั้น เขียน (1) ใหม่ว่า

$$A = G(x_0 + h) - G(x_0) \qquad ....I... (3)$$

จาก (2) เราได้

$$G'(x) = f_x(x, y_0 + h) - f_x(x, y_0) \qquad ....(4)$$

ขณะนี้เพราะว่า $f_x(x, y_0 + h)$ และ $f_x(x, y_0)$ นิยามบน B
$G'(x)$ หาค่าได้ ถ้า x อยู่ในช่วงปิดที่มีจุดปลายที่ x_0 และ $x_0 + h$

ดังนั้น G ต่อเนื่องถ้า x อยู่ในช่วงปิดนี้ โดยทฤษฎีค่าตัวกลาง จะมีจำนวน c_1-
ระหว่าง x_0 และ $x_0 + h$ ซึ่ง

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = hG'(c_1) \qquad \dots\dots\dots\dots(5)$$

แทน (5) ใน (3) จะได้

$$A = h\,G'(c_1) \qquad \dots\dots\dots\dots(6)$$

จาก (6) และ (4) เราได้

$$\Delta = h\,[f_x(c_1, y_0 + h) - f_x(c_1, y_0)] \qquad \dots\dots\dots\dots(7)$$

ถ้า g เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$$g(y) = f_x(c_1\ .\ y) \qquad \dots\dots\dots\dots(8)$$

เราเขียน (7) เสียใหม่ว่า

$$\Delta = h\,[g(y_0 + h) - g(y_0)] \qquad \dots\dots\dots\dots(9)$$

จาก (8) เรามี

$$g'(y) = f_{xy}(c_1\ .\ y) \qquad \dots\dots\dots\dots(10)$$

เพราะว่า $f_{xy}(c_1, y)$ นิยามบน B, $g'(y)$ หาค่าได้ ถ้า y อยู่ในช่วงปิด มีจุดปลาย
ทั้งสองที่ y_0 และ $y_0 + h$
ดังนั้น g ต่อเนื่อง ถ้า y อยู่ในช่วงปิด ฉะนั้น โดยทฤษฎีค่าตัวกลาง มีจำนวน-
d_1 ระหว่าง y_0 และ $y_0 + h$ ซึ่ง

$$g(y_0 + h) - g(y_0) = h(g'd_1) \qquad \dots\dots\dots\dots(11)$$

แทน (11) ใน (9) เราได้ $A = h^2 g'(d_1)$; จาก (10) จะได้

$$A = h^2 f_{xy}(c_1\ ,\ d_1) \qquad \dots\dots\dots\dots(12)$$

สำหรับบางจุด $(c_1\ ,\ d_1)$ ในวงกลมเปิด B
เรานิยามฟังก์ชัน ϕ โดย

$$\phi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0\ ,\ y) \qquad \dots\dots\dots\dots(13)$$

และดังนั้น $\phi(y + h) = f(x_0 + h,\ y + h) - f(x_0,\ y + h)$

นั่นคือ (1) เขียนใหม่เป็น

$$\Delta = \phi(y_0 + h) - \phi(y_0) \qquad \text{..........(14)}$$

จาก (13) เราได้

$$\phi(y) = f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y) \qquad \text{..........(15)}$$

ϕ หาค่าได้ ถ้า y อยู่ในช่วงปิดมี $y_0 + h$ เป็นจุดปลาย เพราะโดยสมมุติฐาน แต่ละเทอมทางขวามือของ (15) หาค่าได้บน B ดังนั้น ϕ ต่อเนื่องบนช่วงปิดนี้ และโดยทฤษฎีค่าตัวกลาง จะมีจำนวน d_2 ระหว่าง y_0 และ $y_0 + h$ ซึ่ง

$$\phi(y_0 + h) - \phi(y_0) = h\phi'(d_2) \qquad \text{..........(16)}$$

จาก (14) (15) และ (16) จะได้

$$A = h\,[f_y(x_0 + h, d_2) - f_y(x_0\ .\ d_2)] \qquad \text{........(17)}$$

นิยามฟังก์ชัน χ โดย

$$\chi(x) = f_y(x, d_2) \qquad \text{..........(18)}$$

และเขียน (17) ว่า

$$A = h\,[\chi(x_0 + h) - \chi(x_0)] \qquad \text{.........(19)}$$

จาก (18) เราได้

$$\chi'(x) = f_{yx}(x, d_2) \qquad \text{..........(20)}$$

โดยทฤษฎีค่าตัวกลาง เราสรุปว่า จะมีจำนวน c_2 ระหว่าง x_0 และ $x_0 + h$ ที่ทำให้

$$\chi'(x_0 + h) - \chi(x_0) = h\,\chi'(c_2) \qquad \text{..........(21)}$$

จาก (19), (20), (21) เราได้

$$A = h^2 f_{yx}(c_2\ d_2) \qquad \text{.........(22)}$$

จาก (12) และ (22) เราได้

$$h^2 f_{xy}(c_1, d_1) = h^2 f_{yx}(c_2, d_2) \qquad \text{..........(23)}$$

และเพราะว่า $h \neq 0$ เราสามารถหารตลอดด้วย h^2

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \qquad \text{..........(24)}$$

เมื่อ (c_1, d_1) และ (c_2, d_2) อยู่ใน B

เพราะว่า c_1 และ c_2 แต่ละจำนวนอยู่ระหว่าง x_0 และ $x_0 + h$ เราสามารถเขียน $c_1 = x_0 + \varepsilon_1 h$, $0 < \varepsilon_1 < 1$

และ $c_2 = x_0 + \varepsilon_2 h$, $0 < \varepsilon_2 < 1$

ทำนองเดียวกัน เพราะว่า d_1 และ d_2 ทั้งสองนี้อยู่ระหว่าง y_0 และ $y_0 + h$ เราสามารถเขียน $d_1 = y_0 + \varepsilon_3 h$ ซึ่ง $0 < \varepsilon_3 < 1$

และ $d_2 = y_0 + \varepsilon_4 h$, $0 < \varepsilon_4 < 1$

แทนค่า c_1, c_2, d_1, d_2 ใน (24) จะได้

$$f_{xy}(x_0 + \varepsilon_1 h, y_0 + \varepsilon_3 h) = f_{yx}(x_0 + \varepsilon_2 h, y_0 + \varepsilon_4 h) \qquad \text{..........(25)}$$

เพราะว่า f_{xy} และ f_{yx} ต่อเนื่องบน B โดยการใส่ลิมิตทั้งสองข้างของ (25) เมื่อ h เข้าใกล้ 0 เราจะได้

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

ผลจากทฤษฎีนี้ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ตัวแปรสองตัวมีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องบนวงกลมเปิดบางเซต ดังนั้น ลำดับของการหาอนุพันธ์ย่อยสามารถสลับกันได้โดยไม่ทำให้ผลลัพธ์เปลี่ยนแปลง นั่นคือ

$$D_{112}f = D_{121}f = D_{211}f$$

$$D_{1122}f = D_{1212}f = D_{1221}f = D_{2112}f = D_{2121}f = D_{2211}f$$

ตัวอย่าง 8 ถ้า $f(x, y) = \sin(x^2y)$ แล้ว

$$f_x(x, y) = 2xy \cos(x^2y)$$

และ $f_{xy}(x, y) = 2x^3y \sin(x^2y) + 2x \cos(x'y)$

$$f_y(x, y) = x^2 \cos(x^2y)$$

และ $f_{yx}(x, y) = -2x^3y \sin(x^2y) + 2x\cos(x^2y)$

ดังนั้น $f_{xy} = f_{yx}$

หมายเหตุ มีบางฟังก์ชัน ซึ่ง f_{xy} ไม่เท่ากับ f_{yx} เพราะว่า คุณสมบัติของฟังก์ชันเหล่านั้น ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎี เช่น

ตัวอย่าง 9

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{ถ้า } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

พบว่า f_{xy} ไม่เท่ากับ f_{yx} เพราะว่า

$$f_x(x, y) = \begin{cases} y(x^4 + 4x^2y^2)/(x^2 + y^2)^2, & \text{ถ้า } (x, y \neq (0.0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ดังนั้น $f_x(0, y) = -y$ ทุกค่าของ y $\therefore f_{xy}(0, y) = -1$ $f_{xy}(0, 0) = -1$

อีกด้านหนึ่งเรามี

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ดังนั้น $f_y(x, 0) = x$ ทุกค่าของ x

$\therefore f_{yx}(x, 0) = 1, f_{yx}(0, 0) = 1$

และเราพบว่า $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

แบบฝึกหัด 7.1

1) จงหา ก) $D_{11}f(x, y)$

ข) $D_{22}(x, y)$

ค) จงแสดงว่า $D_{12}f(x, y) = D_{21}f(x, y)$

1.1 $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$

1.2 $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2$

1.3 $f(x, y) = e^{2x} \sin y$

1.4 $f(x, y) = e^{-x/y} + \ell n \frac{y}{x}$

1.5 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \tan^{-1} \frac{y}{x}$

1.6 $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{3y}{x^2}$

1.7 $f(x, y) = x \cos y - ye^x$

2) $f(x, y, z) = ye^x + ze^y + e^z$ จงหา ก) $f_{xx}(x, y, z)$ ข) $f_{yz}(x, y, z)$

3) ให้ $f(x, y) = \sin xy$ จงแสดงว่า $x^2 f_{xx} = y^2 f_{yy}$

4) จงพิสูจน์ว่า $f_{xy} = f_{yx}$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้

4.1) x^2y

4.2) $x^3y^2 + \frac{x^2}{y}$

4.3) $\ell n (xy^2)$

5) จงแสดงว่า $f_{xxy} = f_{xyx}$ ถ้า $f(x, y) = x^3y^2 + (x^2/y^3)$

7.2 การมีอนุพันธ์ได้และผลต่างอนุพัทธ์รวม

(differentiability and the total differential)

ในแคลคูลัสเบื้องต้น ถ้า f เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว x และ $y = f(x)$ โดย f มีอนุพันธ์ ดังนั้นส่วนที่เปลี่ยน Δy ของตัวแปรตาม กำหนดโดย

$$Ay = f'(x)\ Ax + \eta\ Ax$$

η เป็นฟังก์ชันของ Δx และ $\eta \to 0$ ขณะที่ $\Delta x \to 0$ ทำให้ได้ว่า ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ x_0 ส่วนที่เปลี่ยนของ f ที่ x_0 เขียนแทนด้วย $\Delta f(x_0)$ กำหนดโดย

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\ Ax + \eta\ Ax \qquad \text{.........(I)}$$

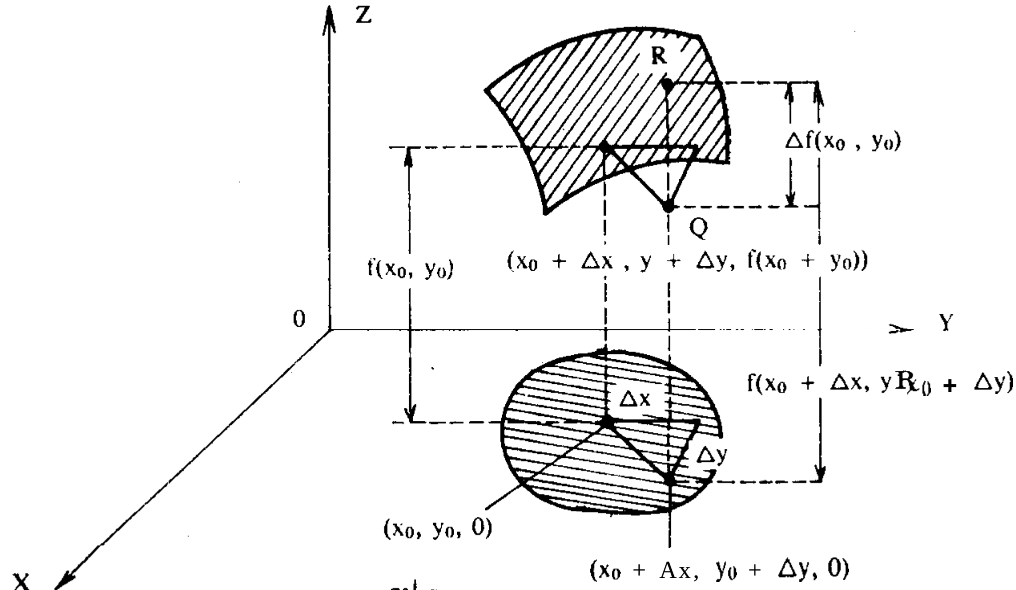
เมื่อ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \eta = 0$

การศึกษาฟังก์ชันที่มีหลายตัวแปร เราใช้สมการลักษณะคล้ายกันกับสมการ (1) เพื่อนิยาม **การมีอนุพันธ์ได้** (differentiability) ของฟังก์ชัน และจากนิยามเราจะพิจารณาถึงบทนิยามที่รัดกุมของการมีอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุดเฉพาะที่

การอภิปราย การพิสูจน์ทฤษฎีบท และตัวอย่างประกอบการอภิปราย จะกระทำกับฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว โดยจะเริ่มจากการนิยามส่วนที่เปลี่ยนของฟังก์ชันก่อน

นิยาม 7.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y ดังนั้น ส่วนที่เปลี่ยนของ f ที่จุด (x_0, y_0) เขียนแทนด้วย $\Delta f(x_0, y_0)$ กำหนดโดย

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + Ax,\ y + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad \text{.........(2)}$$



รูป 7.2

ตัวอย่าง กำหนด $f(x, y) = 3x \quad xy^2$

จงหาส่วนที่เปลี่ยนของ f ณ จุดใด ๆ (x_0, y_0)

วิธีทำ

$$\Delta f(x_0 , y_0) = f(x_0 + Ax, y + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= 3(x_0 + Ax) \quad (x_0 + Ax)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0^2)$$

$$= 3x_0 + 3\Delta x \quad x_0 y_0^2 - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y$$

$$x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0 y_0^2$$

$$= 3\Delta x - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2$$

นิยาม 7.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว x และ y และส่วนที่เปลี่ยนของ f ที่ (x_0,y_0)- เขียนแทนด้วย

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad \ldots\ldots\ldots.(3)$$

เมื่อ ε_1 และ ε_2 เป็นฟังก์ชันของ Δx และ Δy ซึ่ง $\varepsilon_1 \to 0$ และ $\varepsilon_2 \to 0$ ขณะที่ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ดังนั้น กล่าวได้ว่า f มีอนุพันธ์ที่ (x_0, y_0)

ทฤษฎี 7.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว และ f มีอนุพันธ์ที่จุดจุดหนึ่ง ฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดนั้นด้วย

พิสูจน์ ถ้า f **มีอนุพันธ์ที่จุด** (x_0, y_0) **จากนิยาม** 7.3.2

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = D_1f(x_0,y_0)\Delta x + D_2f(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

เมื่อ $\varepsilon_1 \to 0$ และ $\varepsilon_2 \to 0$ ขณะที่ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0,y_0) + D_1f(x_0,y_0)\Delta x + D_2f(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

ใส่ลิมิตทั้งสองข้างของสมการ ขณะที่ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \qquad \text{..........(4)}$$

ถ้าให้ $x_0 + \Delta x = x$, $y_0 + \Delta y = y$

"$(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$" ก็สมมูลย์กับการกล่าวว่า

"$(x, y) \to (x_0, y_0)$"

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

ซึ่งแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ (x_0, y_0)

ทฤษฎี 7.2.1 กล่าวถึงฟังก์ชันสองตัวแปรว่า ถ้าฟังก์ชันมีอนุพันธ์จะได้ว่า ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องด้วย อย่างไรก็ตาม การที่อนุพันธ์ย่อย D_1f และ D_2f ที่จุดจุดหนึ่งหาค่าได้ ไม่ได้หมายความว่า ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่จุดนั้นเสมอไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนด $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

จงแสดงว่า $D_1f(0, 0)$ และ $D_2f(0, 0)$ หาค่าได้ แต่ f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $(0, 0)$

วิธีทำ

$$D_1f(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$D_2f(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

5 $D_1 f(0, 0)$ และ $D_2 f(0, 0)$ มีอยู่

ต่อไปพิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่ $(0, 0)$ โดยคำนวณหาว่าลิมิตของ f เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ มีอยู่หรือไม่ พบว่า ถ้าให้ S_1 คือ เซตของจุดทั้งหลายบนแกน x ดังนั้น

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ p\varepsilon S_1}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2 + 0} = 0$$

ถ้าให้ S_2 คือ เซตของจุดทั้งหลายบนเส้น $y = x$ ดังนั้น

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ p\varepsilon S_2}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \text{Eim}_{x\text{-o}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

เพราะว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ p\varepsilon S_1}} f(x, y) \neq \text{Pim}_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ p\varepsilon S_2}} f(x, y)$$

สรุปว่า $\text{Pim}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มี ดังนั้น f ไม่ต่อเนืองที (0, 0)

ดังนั้น จากทฤษฎี 7.3.1 f ไม่มีอนุพันธ์ที่ (0, 0)

ถึงแม้ว่า การมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว ณ จุด ๆ หนึ่ง ทำให้ทราบว่าฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้และต่อเนื่องที่จุดนั้นด้วย แต่จากตัวอย่างที่แสดงจบไปนี้ชี้ให้เห็นว่า ไม่จริงเสมอไป สำหรับฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัวก่อนที่จะอภิปรายถึงเงื่อนไขที่จำเป็นของการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด ๆ หนึ่ง ขอให้ศึกษาทฤษฎีต่อไปนี้เสียก่อน ทฤษฎีนี้ก็คือทฤษฎีค่าตัวกลางของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรประยุกต์เข้ากับฟังก์ชันสองตัวแปร

ทฤษฎี 7.2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร นิยามสำหรับค่า x ทั้งหมดในช่วงปิด $[a, b]$ และค่า y ทั้งหมดในช่วงปิด $[c, d]$

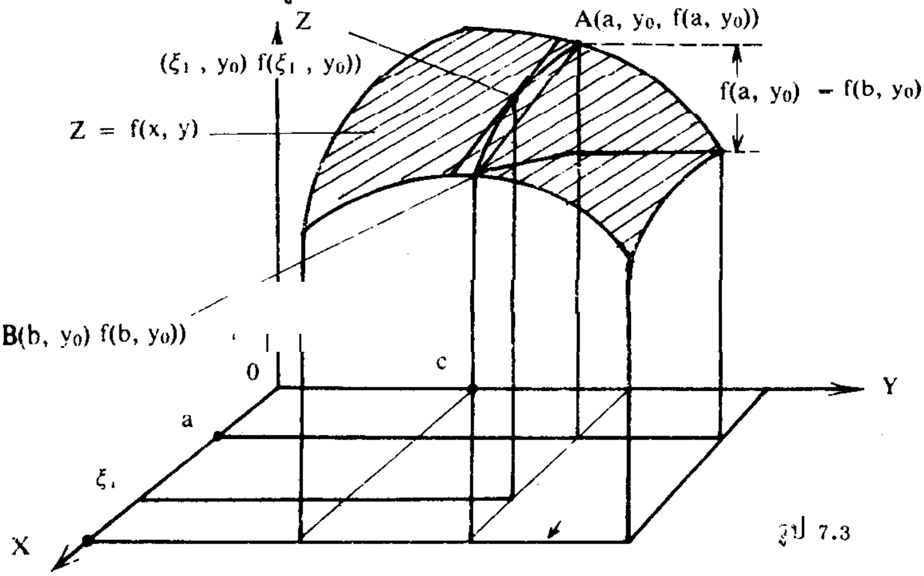
ก) ถ้า $D_1 f(x, y_0)$ หาค่าได้สำหรับบาง y_0 ใน $[c, d]$ และสำหรับค่า x ทั้งหมดใน $[a, b]$ ดังนั้นจะมีจำหนวนหนึ่ง ξ_1 ในช่วงเปิด (a, b) ซึ่ง

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a)\, D_1 f(\xi_1, y_0) \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

ข) ถ้า $D_2 f(x_0, y)$ หาค่าได้สำหรับบาง x_0 ใน $[a, b]$ และสำหรับค่าทั้งหมด y ใน $[c, d]$ ดังนั้น มีจำนวนหนึ่ง ξ_2 ในช่วงเปิด (c, d) ซึ่ง

$$f(x_0, d) - f(x_0, c) = (d - c)\, D_2 f(x_0, \xi_2) \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

ก่อนการพิสูจน์ขอให้ทำความเข้าใจเชิงเรขาคณิต กับ 1



รูป 7.3

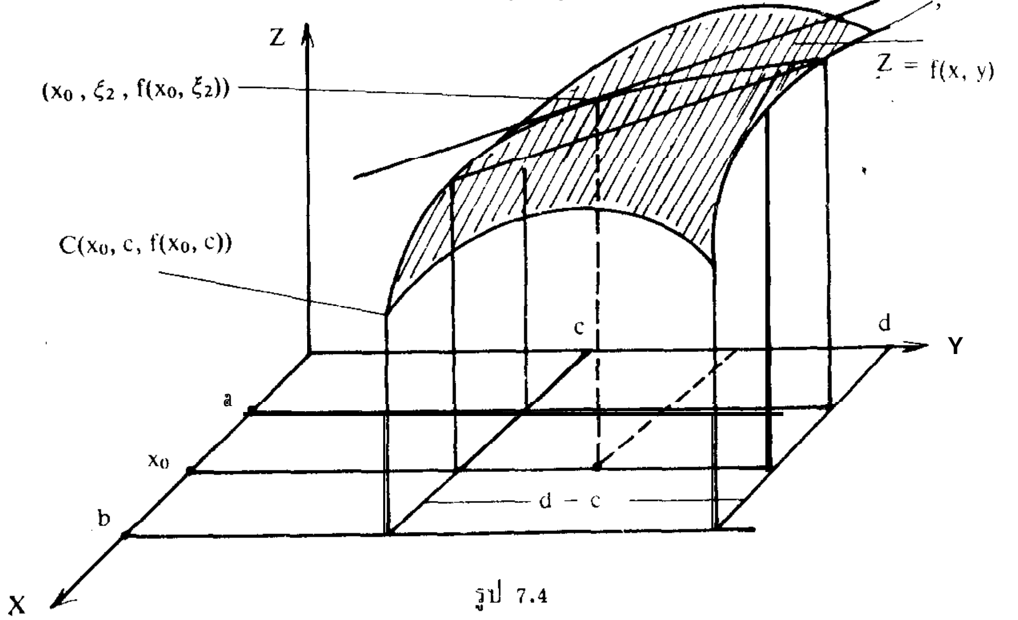
จากรูป 7.3 แสดงบางส่วนของผิว $z = f(x, y)$ เหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระนาบ xy ซึ่งกั้นขอบเขตด้วยเส้น $x = a$, $x = b$, $y = c$ และ $y = d$ ระนาบ $y = y_0$ ตัดกับผิวในเส้นโค้ง เขียนแทนด้วยสมการสองสมการ $y = y_0$ และ $z = f(x, y)$ ความชันของเส้นที่ผ่านจุด $A(a, y_0)\, f(a, y_0))$ และ $B(b, y_0)\, f(b, y_0))$ คือ

$$\frac{f(b, y_0) - f(a, y_0)}{b - a}$$

ทฤษฎี 7.3.2 ข้อ ก) กล่าวว่า จะมีบางจุด $(\xi_1, y_0, f(\xi_1, y_0))$ บนเส้นโค้งระหว่างจุด A และ B ซึ่งเส้นสัมผัสขนานกับเส้นที่เชื่อม A กับ B นั่นคือ จะมีบางจำนวน ξ_1 ใน (a, b) ซึ่ง $D_1 f(\xi_1, y_0) = \dfrac{|f(b, y_0) - f(a, y_0)|}{b - a}$ แสดงไว้ดังรูป ซึ่ง $D_1 f(\xi_1, y_0) < 0$

สำหรับ ข้อ ข) ของทฤษฎี 7.3.2 แสดงด้วยรูป 7.4 ระนาบ $x = x_0$ ตัดกับผิว $z = f(x, y)$ ในเส้นโค้ง เขียนแทนด้วยสมการสองสมการ $x = x_0$ และ $Z = f(x, y)$ ความชันของเส้นที่ผ่านจุด $C(x_0, c, f(x_0, c))$ และ $D(x_0, d, f(x_0, d))$ คือ $\dfrac{|f(x_0, d) - f(x_0, c)|}{d - c}$ และข้อ ข) ของทฤษฎีกล่าวว่าจะมีบางจุด $(x_0, \xi_2, f(x_0, \xi_2))$ บนโค้งระหว่างจุด C และ D ซึ่งเส้นสัมผัสขนานกับเส้นที่เชื่อมจุด C กับจุด D นั่นคือ จะมีบางจำนวน ξ_2 ใน (c, d) ซึ่ง

$$D_2f(x_0, \xi_2) = \frac{|f(x_0, d) - f(x_0, c)|}{d - c}$$



รูป 7.4

พิสูจน์ 7.2.2 (i) : ให้ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว x กำหนดโดย

$$g(x) = f(x, y_0)$$

ดังนั้น $g'(x) = D_1f(x, y_0)$

เพราะว่า $D_1f(x, y_0)$ มีค่าสำหรับค่าทั้งหมด x ใน $[a, b]$ จะได้ว่า $g'(x)$ มีค่าสำหรับค่าทั้งหมด x ใน $[a, b]$ และ g ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดยทฤษฎีค่าตัวกลางสำหรับอนุพันธ์ จะมีจำนวนหนึ่ง ξ_1 ใน (a, b) ซึ่ง

$$g'(\xi_1) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

หรือ

$$D_1f(\xi_1\ ,\ y_0) = \frac{f(b,\ y_0) - f(a,\ y_0)}{b\ -\ a}$$

จากนี้จะได้

$$f(b,\ y_0) - f(a,\ y_0) = (b - a)\ D_1f(\xi_1\ ,\ y_0)$$

การพิสูจน์ ข) ให้เป็นแบบฝึกหัดของผู้อ่าน

สมการ (1) เขียนได้ในรูปของ

$$f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0\ ,\ y_0) = h\ D_1f(\xi_1\ ,\ y_0) \qquad \text{..........(3)}$$

ซึ่ง ξ_1 อยู่ระหว่าง x_0 และ $x_0 + h$ และ h เป็นทั้งบวกหรือลบ

สมการ (2) เขียนเสียใหม่เป็น

$$f(x_0\ ,\ y_0 + k) - f(x_0,\ y_0) = k\ D_2f(x_0,\ \xi_2) \qquad \text{..........(4)}$$

ซึ่ง ξ_2 อยู่ระหว่าง y_0 และ $y_0 + k$ และ k เป็นทั้งบวกหรือลบ

ทฤษฎีต่อไปนี้ กล่าวถึงฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อย ณ จุดหนึ่ง เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จุดนั้นได้

ทฤษฎี 7.2.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y ถ้า D_1f และ D_2f มีอยู่บนเนเบอร์ฮูด B ของ $(x_0\ ,\ y_0)$ รัศมี r ดังนั้น ถ้า D_1f และ D_2f ต่อเนื่องที่ $(x_0,\ y_0)$ แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ที่ $(x_0,\ y_0)$

พิสูจน์ เลือกจุด $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ ซึ่งอยู่ในเนเบอร์ฮูดของ $(x_0,\ y_0)$ รัศมี r ดังนั้น

$$\Delta f(x_0,\ y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)$$

โดยวิธีหักออกและเพิ่มเข้าด้วย $f(x_0 + \Delta x,\ y_0)$ กับทางขวามือของสมการ จะได้

$$\Delta f(x_0,\ y_0) = [f(x_0 + Ax,\ y_0 + Ay) - f(x_0 + \Delta x,\ y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,\ y_0)] \qquad \text{..........(5)}$$

· เพราะว่า D_1f และ D_2f มีอยู่บนเนเบอร์ฮูด B ของ (x_0, y_0) รัศมี r และ-
$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ อยู่ใน เซต B จาก (4) จะได้ว่า

$$f(x_0 + Ax, y_0 + Ay) -- f(x_0 + Ax, y_0) = (Ay) D_2f(x_0 + Ax, \xi_2) \quad ..(6)$$

ซึ่ง ξ_2 อยู่ระหว่าง y_0 และ $y_0 + \Delta y$

จาก (3) จะได้

$$f(x_0 + Ax, yo) - f(x_0, yo) = (x\Delta x) D_1f(\xi_1, yo) \quad ..(7)$$

ซึ่ง ξ_1 อยู่ระหว่าง x_0 กับ x_0 + A x

จาก (6) (7) และ (5) เราได้

$$\Delta f(x_0, y_0) = (\Delta y) D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) + (Ax) D_1f(\xi_1, y_0) \quad (8)$$

เพราะว่า $(x_0 + Ax,, y_0 + Ay)$ อยู่ในเซต D, ξ_2 อยู่ระหว่าง y_0 และ $y_0 + Ay$
และ D_2f ต่อเนื่องที่ (x_0, y_0)

$$\ell im_{(\Delta x, \Delta y)\to(0, 0)} D_2f(x_0 + Ax, \xi_2) = D_2f(x_0, y_0) \quad ....(9)$$

และเพราะ ε_1 อยู่ระหว่าง x_0 กับ $x_0 + \Delta x$ และ D_1f ต่อเนื่องที่ (x_0, y_0)

$$Pim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0, 0)} D_1f(\xi_1, y_0) = D_1f(x_0, y_0) \quad (10)$$

ถ้าให้ $\varepsilon_1 = D_1f(\xi_1, y_0) - D_1f(x_0, y_0)$ (11)

จาก (10) จะได้

$$fim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0, 0)} \varepsilon_1 = 0 \quad ....(12)$$

และถ้าเราให้ $\varepsilon_2 = D_2f(x_0 + Ax, \xi_2) \quad D_2f(x_0, y_0)$ (I ! ,

จากสมการ (9) จะได้

$$\ell im_{(\Delta x, \Delta y)\to(0, 0)} \varepsilon_2 = 0 \quad .(14)$$

แทน (11) และ (13) ลงใน (8) จะได้

$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta y|D_2f(x_0, y_0) + \varepsilon_2| + \Delta x|D_1f(x_0, y_0) + \varepsilon_1|$

$\Delta f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0)$ Ax 2 $D_2f(x_0, y_0)$ Ay $+ \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ ....(15)

จาก(12), (14) และ **(15)** จะเห็นว่าสอดคล้องกับนิยาม 7.3.2
ดังนั้น f อนุพันธ์ที่ (x_0, y_0)

ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติตามทฤษฎีนี้ กล่าวว่า **มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่อง** (Continuously differentiable) ที่จุด (x_0, y_0)

นิยาม 7.2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว x และ y และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ (x, y) ดังนั้น ผลต่างอนุพันธ์รวม (total differential) ของ f **คือ** ฟังก์ชัน df มีค่าของฟังก์ชัน กำหนดโดย

$$df(x, y, \Delta x, \Delta y) = D_1f(x, y)\,\Delta x + D_2f(x, y)\,\Delta y \qquad \text{..........(1)}$$

โปรดสังเกตว่า df เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสี่ตัว x, y, Δx และ Δy
ถ้า Z = f(x, y) บางครั้งเราเขียน dz แทนที่จะเขียน df(x, y, Δx, Δy) ดังนั้น

$$dz = D_1f(x, y) \text{ Ax t } D_2f(x, y) \text{ Ay} \qquad \text{.....(2)}$$

ถ้า f(x, y) = x ดังนั้น z = x, D_1f(x, y, = I และ $D_2f(x, y) = 0$
สมการ (2) จะได้ dz = Δx เพราะ z = x สำหรับฟังก์ชันนี้ dx = Δx

ถ้า f(x, y) = y ดังนั้น z = y, $D_1f(x, y) = 0$ และ $D_2f(x, y) = 1$
สมการ (2) จะได้ dz = Δy เพราะ z = y เราจึงได้ว่า
สำหรับฟังก์ชันนี้ dy = Δy
ฉะนั้น เรานิยามผลต่างอนุพันธ์ของตัวแปรอิสระว่า

dx = Ax และ dy = Ay สมการ (2) จึงเขียนได้ว่า

$$dz = D_1f(x, y)\,dx + D_2f(x, y)\,dy \qquad (\quad 3 \quad)$$

และที่จุด (x_0, y_0)

$$dz = D_1f(x_0, y_0)\,dx + D_2f(x_0, y_0)\,dy \qquad \text{........(4)}$$

จากนิยาม 1.2.2 ในสมการ

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

ให้ $\Delta z = \Delta f(x_0, y_0)$, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

$$\Delta z = D_1 f(x_0, y_0)\, dx + D_2 f(x_0, y_0)\, dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

เปรียบเทียบ (4) กับ (5) พบว่า เมื่อ dx (หรือ Δx) dy (หรือ Δy) เข้าใกล้ศูนย์ และดังนั้น ε_1 และ ε_2 เข้าใกล้ศูนย์ด้วย

เราสามารถสรุปว่า dz เป็นค่าประมาณของ Δz

$$dz \approx \Delta z$$

เราจะเขียนสมการ (3) ใหม่ ด้วยสัญกรณ์ $\partial z/\partial x$ และ $\partial z/\partial y$ แทน $D_1 f(x, y)$ และ $D_2 f(x, y)$ ตามลำดับ

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ตัวอย่าง กระป๋องโลหะทรงกระบอกมีความสูงของวงใน 6 นิ้ว รัศมีวงกลมใน 2 นิ้ว ทรงกระบอกหนา 0.1 นิ้ว ถ้าราคาของโลหะที่ใช้ เป็น 10 เซ็นต์ต่อลูกบาศก์นิ้ว จงให้ผลต่างอนุพันธ์รวมหาค่าใช้จ่ายโดยประมาณของโลหะที่ใช้ในโรงงานทำประป๋อง

วิธีทำ สูตรปริมาตรของทรงกระบอก เมื่อ

ปริมาตร	คือ	v ลูกบาศก์นิ้ว
รัศมี	คือ	r นิ้ว
ความสูง	คือ	h นิ้ว

คือ

$$v = \pi r^2 h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ปริมาตรที่แท้จริงของโลหะที่ใช้ทำกระป๋อง คือ ค่าแตกต่างระหว่างปริมาตรของกระทรงกระบอก ซึ่ง $r = 2.1, h = 6.2$ กับทรงกระบอก $r = 2, h = 6$ ตามลำดับ

Δv คือ ปริมาตรที่แท้จริงของโลหะ แต่เราต้องการเพียงค่าโดยประมาณเท่านั้น เราจะหา dV โดย (6) จะได้

$$dV = \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial h} dh \qquad \text{..........(2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2\pi rh \quad \text{และ} \quad \frac{\partial v}{\partial h} = \pi r^2$$

แทนในสมการ (2)

$$dV = 2\pi r\, hdr + \pi r^2 d\, h$$

เพราะ $r = 2, h = 6, dr = 0.1$ และ $dh = 0.2$ เรามี

$$dV = 2\pi(2)(6)(0.1) + \pi(2)^2(0.2)$$

$$= 3.2\,\pi$$

$\therefore$ $\Delta v \approx 3.2\pi$ นั่นคือ ปริมาตรของโลหะที่ใช้ทำกระป๋องประมาณ 3 ลูกบาศก์นิ้ว และค่าโลหะที่ใช้ทำกระป๋อง $= 10(3.2\pi) = 32\pi \approx 100.53$

คือ ราคาของโลหะที่ใช้ในโรงงานทำกระป๋อง

โดยประมาณ คือ 1 ดอลล่าร์ต่อหน่วย

เราจะสรุปหัวข้อ 7.3 นี้ด้วยการขยายความคิดไปสู่การมีอนุพันธ์ได้และผลต่างอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน n ตัวแปร

นิยาม 7.2.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ $\bar{p}$ เป็นจุด $(\bar{x}_1, \bar{x}, \ldots, \bar{x}_n)$ ดังนั้น ส่วนที่เปลี่ยนของ f ที่ $\bar{p}$ กำหนดโดย

$$\Delta f(\bar{p}) = f(\bar{x}_1 + \Delta x, \bar{x}_2 + \Delta x_2, \ldots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{p})$$

นิยาม 7.2.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$) และส่วนที่เปลี่นของ f ที่จุด $\bar{p}$ กำหนดโดย

$$\Delta f(\bar{p}) = D_1 f(\bar{p})\,\Delta x_1 + D_2 f(\bar{p})\,\Delta x_2 + \ldots + D_n f(\bar{p})\,\Delta x_n$$

$$+ \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + \ldots + \varepsilon_n \Delta x_n$$

เมื่อ $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0, \ldots, \varepsilon_n \to 0$ ขณะที่

$(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots . \mathrm{Ax.}) \to (0, 0, .., 0)$

ดังนั้น กล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ได้ ที่** $\bar{p}$

เช่นเดียวกับทฤษฎี 7.2.3 เราพิสูจน์ได้ว่า เงื่อนไขที่จำเป็นของฟังก์ชัน f ที่มี n ตัวแปร จะมีอนุพันธ์ได้ที่ $\bar{p}$ ก็คือ $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ มีอยู่บนเนเบอร์ฮูด B ของ $\bar{p}$ รัศมี r และ $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ ทั้งหมดนี้ ต่อเนื่องที่ $\bar{p}$ เช่นเดียวกับฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว นั่นคือ ฟังก์ชันที่ n ตัวแปรที่มีอนุพันธ์ได้ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย อย่างไรก็ตาม การมีอยู่ของอนุพันธ์ย่อย ณ จุดจุดหนึ่งไม่เพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันมีอนุพันธ์ได้ที่จุดนั้น

นิยาม 7.2.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน มี n ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ f มีอนุพันธ์ได้ที่ p ดังนั้น **ผลต่างอนุพันธ์รวม** (total differential) ของ f คือ ฟังก์ชัน df มีค่าของฟังก์ชันกำหนดโดย

$$df(p, \mathrm{Ax,}, \Delta x_2, \ldots . \mathrm{Ax.}) = D_1f(p)\,\mathrm{Ax,} + D_2f(p)\,\mathrm{Axz} + \ldots + D_nf(p)\,\mathrm{Ax,}$$

I n' $w = f(x_1, x_2, \ldots . x,)$ **นิยาม** $dx_1 = \mathrm{Ax,}$, $dx_2 = \Delta x_2, \ldots . dx. = \mathrm{Ax,}$ **และ**
ใช้สัญกรณ์ $\partial w/\partial x_i$ **แทนที่** D,f(p)
เราเขียนสมการนี้ใหม่เป็น

$$dw = \frac{\partial w}{\partial w_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n$$

ตัวอย่าง กล่องใบหนึ่ง มีขนาด 10″ × 12″ × 15″ การวัดความเคลื่อนไป 0.02 นิ้ว จงประมาณค่าของความคลาดเคลื่อนสูงสุด ถ้าปริมาตรของกล่องคำนวณจากการวัด และจงหาเปอร์เซนต์ของความผิดพลาดโดยประมาณ

วิธีทำ ให้กล่องมีปริมาตร = v ลูกบาศก์นิ้ว
มีขนาด x นิ้ว y นิ้ว และ z นิ้ว

$$.v = xyz$$

ความคลาดเคลื่อนจริง ๆ คำนวณจาก Δv อย่างไรก็ดีเราใช้ dv ประมาณค่าของ Δv ใช้สมการ

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n$$

หรือ

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dv = yzdx + xzdy + xydz$$

จากโจทย์ $|\Delta x| \leqslant 0.02$, $|\Delta y| \leqslant 0.02$ และ $|\Delta z| \leqslant 0.02$

การหาความคลาดเคลื่อนของปริมาตรให้มากที่สุดที่เป็นไปได้ เราใช้ความคลาดเคลื่อนที่สูงสุดในการวัดด้านทั้งสาม

ให้ $dx = 0.02$, $dy = 0.02$, $dz = 0.02$

$x = 10$, $y = 12$, $z = 15$

$$\therefore \quad dv = (12)(15)(0.02) + (10)(15)(0.02) + (10)(12)(0.02)$$

$$= 9$$

นั่นคือ $\Delta V \approx 9$ ดังนั้น ความผิดพลาดในการคำนวณปริมาตรจากการวัดที่ให้มา จะมีความสูงสุดประมาณ 8 ลูกบาศก์นิ้ว

ความคลาดเคลื่อน คือ $\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{dv}{v} = \frac{9}{1800} = \frac{1}{200} = 0.005$

$\therefore$ เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนโดยประมาณ คือ 0.5%

แบบฝึกหัด 7.2

1) ถ้า $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$, $Ax = 0.03$ และ $Ay = -0.02$

จงหาค่าของ

1.1 ส่วนที่เปลี่ยนของ f ที่ (1, 4)

1.2 ผลต่างอนุพันธ์ของ f ที่ (1, 4)

2) ถ้า $f(x, y) = xye^{xy}$, $Ax = -0.1$ และ $Ay = 0.2$

จงหาค่าของ

2.1 ส่วนที่เปลี่ยนของ f ที่ (2, −4)

2.2 ผลต่างอนุพันธ์ของ f ที่ (2, −4)

3) จงพิสูจน์ว่า f มีอนุพันธ์ได้ที่จุดทั้งหมดในโดเมน โดย

ก) หา $\Delta f(x_0, y_0)$

ข) HI ε_1 และ ε_2 สอดคล้องตามนิยาม 7.2.2

f1) จงแสดงว่า ε_1 และ ε_2 ที่หาได้ใน (ข) เข้าใกล้ศูนย์ขณะที่ $(Ax, \Delta y) \to (0, 0)$

กำหนด $f(x, y) = x^2y - 2xy$

4) กำหนด $f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{ถ้า } x = 1 \text{ หรือ } y = 1 \\ 2 & \text{ถ้า } x \neq 1 \text{ และ } y \neq 1 \end{cases}$

จงแสดงว่า $D_1f(1, 1)$ และ $D_2f(1, 1)$ มีอยู่ แต่ f ไม่มีอนุพันธ์ที่ (1, 1)

7.3 กฎลูกโซ่ (The chain rule)

ในแคลคูลัสเบื้องต้น นักศึกษาเคยเรียนเรื่องกฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันที่มีแปรเดียวมาแล้ว คงจะจำกันได้ว่า ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ u กำหนดโดย $y = f(u)$ และ $\frac{dy}{du}$ หาค่าได้ และ u เป็นฟังก์ชันของ x กำหนดโดย $u = g(x)$ และ $\frac{du}{dx}$ หาค่าได้ ดังนั้น y เป็นฟังก์ชันของ x และ $\frac{dy}{dx}$ มีอยู่ กำหนดโดย

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \qquad \text{..........(1)}$$

ต่อไปนี้ เราจะศึกษากฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัวบ้าง ซึ่งแต่ละตัวแปรก็เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรด้วย

ทฤษฎี 7.3.1 (กฎลูกโซ่) ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ของ x และ y กำหนดให้ $u = f(x, y)$ และ $x = F(r, s)$, $y = G(r, s)$ และ $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ และ $\frac{\partial s}{\partial s}$ มีอยู่ ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันของ r และ s และ

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \qquad \text{..........(2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) \qquad \text{..........(3)}$$

พิสูจน์ จงพิสูจน์เฉพาะ (2)

ถ้าให้ s คงที่ และ r เปลี่ยนไป Δr ดังนั้น x เปลี่ยนไป Δx และ y เปลี่ยนไป Δy-

$$Ax = F(r + \Delta r, s) - F(r, s) \qquad \text{..........(4)}$$

และ

$$Ay = G(r + Ar, s) - G(r, s) \qquad \text{..........(5)}$$

เพราะ f หาอนุพันธ์ได้

$$\Delta f(x, y) = D_1 f(x, y)\, Ax + D_2 f(x, y)\, Ay + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \text{ . . . . (6)}$$

เมื่อ ε_1 และ ε_2 เข้าใกล้ศูนย์ ขณะที่ (Ax, Ay) เข้าใกล้ (0, 0)

นอกจากนั้น เราต้องการ $\varepsilon_1 = 0$ และ $\varepsilon_2 = 0$ เมื่อ $\Delta x = \Delta y = 0$

เพื่อว่า ε_1 และ ε_2 ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ Δx และ Δy จะได้ต่อเนื่องที่ $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$

ถ้าใน (6) เราแทน $\Delta f(x, y)$ ด้วย Au

unu $D_1f(x, y)$ ด้วย $\frac{\partial y}{\partial x}$

unu $D_2f(x, y)$ ด้วย $\frac{\partial u}{\partial y}$

แล้วหารทั้งสองข้างด้วย Δr ($\Delta r \neq 0$ เราได้ว่า

$$\frac{A u}{Ar} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{A u}{A r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{A y}{\Delta r} + \varepsilon_1 \frac{Ax}{\Delta r} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{Ar}$$

ใส่ลิมิตทั้งสองข้าง ให้ Δr เข้าใกล้ศูนย์

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{Au}{A\ r} = \frac{\partial u}{ax}\ \mathrm{Pim}_{\Delta r\to 0}\frac{Ax}{Ar} + a\ „\ \frac{}{\partial y}\ \mathrm{Pim}_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta y}{Ar}$$

$$+\left(\lim_{\Delta r\to 0}\varepsilon_1\right)\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r\to 0}\varepsilon_2\right)\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta y}{A\ r} \quad (7)$$

ด้วยเหตุที่ u เป็นฟังก์ชันของ x และ y และทั้ง x กับ y เป็นฟังก์ชันของ r และ s u จึงเป็นฟังก์ชันของ r และ s ด้วย เพราะว่า s ถูกตรึงให้คงที่ และ r เปลี่ยนแปลงด้วยขนาด A r ฉะนั้น

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{Au}{A\ r} = \mathrm{Pim}_{\Delta r\to 0}\frac{u(r + Ar,\ s) - u(r, s)}{Ar} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{..........(8)}$$

$$\lim_{Ar-0}\frac{Ax}{Ar} = \mathrm{Pim}_{\Delta r\to 0}\frac{F(r + \Delta r, s) - F(r, s)}{\Delta r} = \frac{ax}{\partial r} \quad \text{..........(9)}$$

และ

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta y}{A\ r} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{G(r + \Delta r, s) - G(r, s)}{Ar} = \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{..........(10)}$$

เพราะ $\frac{\partial x}{\partial r}$ และ $\frac{\partial y}{\partial r}$ มีอยู่ F และ G ต่อเนื่อง เมื่อเทียบกับตัวแปร r

ข้อสังเกต การมีอยู่ของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหนึ่งไม่เพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง เมื่อเทียบกับตัวแปรทุก ๆ ตัว ดังที่เคยพบเห็นมาในหัวข้อ 7.2 แล้ว แต่ถ้ามองฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร อนุพันธ์ย่อยนำไปสู่ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เมื่อเทียบกับตัวแปรแต่ละตัวแยกจากกัน ดังนั้น จาก (4)

$$\lim_{\Delta r \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta r \to 0} [F(r + \Delta r, s) - F(r, s)]$$

$$= F(r, s) - F(r, s)$$

$$= 0$$

และจาก (5)

$$\lim_{\Delta r \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta r \to 0} [G(r + \Delta r, s) - G(r, s)]$$

$$= G(r, s) - G(r, s)$$

$$= 0$$

ฉะนั้น ขณะที่ Δr เข้าใกล้ศูนย์ ทั้ง Δx และ Δy เข้าใกล้ศูนย์ และเพราะว่าทั้ง ε_1 และ ε_2 เข้าใกล้ศูนย์ ขณะ $(\Delta x, \Delta y)$ เข้าใกล้ $(0, 0)$ ทำให้สรุปว่า

$$\lim_{\Delta r \to 0} \varepsilon_1 = 0 \text{ และ } \lim_{\Delta r \to 0} \varepsilon_2 = 0 \qquad \text{..........(11)}$$

ขณะนี้เป็นไปได้ที่สำหรับค่าเฉพาะของ Δr, $\Delta x = \Delta y = 0$ เพราะเราต้องการว่า $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ลิมิตใน (11) ก็ยังคงเป็น 0

แทน (8), (9), (10) และ (11) ลงใน (7) จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

ตัวอย่าง ให้ $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

$x = re^{s}$ และ $y = re^{-s}$ จงหา $\frac{\partial u}{\partial r}$ และ $\frac{\partial r}{\partial s}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = e^{s}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = re^{s} \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = e^{-s} \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = -re^{-s}$$

จาก (2) เราได้

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{x}{x^2+y^2}(e^{s}) + \frac{y}{x^2+y^2}(e^{-s}) = \frac{xe^{s} + ye^{-s}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{x}{x^2+y^2}(re^{s}) + \frac{y}{x^2+y^2}(-re^{-s}) = \frac{r(xe^{s} - ye^{-s})}{x^2+y^2}$$

ข้อควรจำ สัญกรณ์ $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ และอื่น ๆ ไม่ได้หมายความว่าเป็นเศษส่วน-

สัญกรณ์ ∂u, ∂x ฯลฯ ไม่มีความหมายในตัวเอง ในเรื่องฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรนั้น กฎลูกโซ่กำหนดโดย $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ จำง่าย โดยคิดว่าเป็นอนุพันธ์อย่างธรรมดา ๆ ซึ่งเป็นผลหารของผลต่างอนุพันธ์ (differential) สองจำนวน แต่ความคิดเช่นนี้ นำมาใช้กับอนุพันธ์ย่อยไม่ได้

จากข้อความในทฤษฎี 7.3.1 r และ s เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม เรียกตัวแปร x และ y ว่าเป็นตัวแปรระหว่างกลาง (intermediate variables)- ต่อไปนี้ เราจะขยายความคิดเรื่องกฎลูกโซ่ไปยังฟังก์ชันที่มีตัวแปรระหว่างกลาง n ตัว และตัวแปรอิสระ m ตัว

ทฤษฎี 7.3.2 กฎลูกโซ่ทั่ว ๆ ไป (The general chain rule) ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของตัวแปร n ตัว $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และแต่ละตัวแปรเหล่านี้เป็นฟังก์ชันของ m ตัวแปร $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ถ้าแต่ละอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m,)$ มีอยู่ ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันของ $y_1, y_2, \ldots, y_m$, และ

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_m} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_m}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_m}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\right)$$

การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ไม่อยู่ในขอบเขตของหนังสือ แต่ถ้ามีแนวทางพิสูจน์คล้ายกับทฤษฎี 7.4.1 กล่าวคือ เป็นการขยายความของทฤษฎี 7.4.1 ให้กว้างขวางขึ้น

ข้อสังเกต ในกฎลูกโซ่ทั่ว ๆ ไปนั้น ทางขวามือของสมการจะมีมากมายหลายพจน์เท่า ๆ กับตัวแปรระหว่างกลางที่เรามีอยู่

ตัวอย่าง ให้ $u = xy + xz + yz$

$x = r,\ y = r\cos t,\ z = r\sin t$ จงหา $\frac{\partial u}{\partial r}$ และ $\frac{\partial u}{\partial t}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$

$$= (y + z)(1) + (x + z)(\cos t) + (x + y)(\sin t)$$

$$= y + z + x\cos t + z\cos t + x\sin t + y\sin t$$

$$= r\cos t + r\sin t + r\cos t + (r\sin t)(\cos t) + r\sin t + (r\cos t)(\sin t)$$

$= 2r\,(\cos t + \sin t) + r(2 \sin t \cos t)$

$= 2r\,(\cos t + \sin t)\ 2\ r \sin 2t$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

$= (y + z)(0) + (x + z)(-r \sin t) + (s + y)(r \cos t)$

$= (r + r \sin t)(-r \sin t) + (r + r \cos t)(r \cos t)$

$= -r^2 \sin t - r^2 \sin^2 t + r^2 \cos t + r^2 \cos^2 t$

$= r^2(\cos t - \sin t) + r^2(\cos^2 t - \sin^2 t)$

$= r^2(\cos t - \sin t) + r^2 \cos 2t$

ข้อสังเกต ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของสองตัวแปร x และ y และทั้ง x และ y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของตัวแปร t ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว t และแทนที่จะหาอนุพันธ์ย่อยของ u เทียบกับ t เราจะได้อนุพันธ์ตามปกติของ u เทียบกับ t กำหนดโดย

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \qquad \text{.........(12)}$$

เรียก $\frac{du}{dt}$ ของ (12) ว่า **อนุพันธ์รวม** (total derivative) ของ u เทียบกับ t

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ n ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ แต่ละ x_i เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ t ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันของ t และอนุพันธ์รวมของ u เทียบกับ t กำหนดโดย

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + \left(\frac{dx_2}{dt}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{dx_n}{dt}\right)$$

ตัวอย่าง กำหนด $u = x^2 + 2xy + y^2$ $x = t \cos t,\ y = t \sin t$

จงหา $\frac{du}{dt}$ โดย

ก) ใช้กฎลูกโซ่

ข) เขียน u ในพจน์ของ t ก่อนการหาอนุพันธ์

วิธีทำ ก) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x + 2y$

$\dfrac{dx}{dt} = \cos t - t \sin t$ $\qquad \dfrac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t$

จาก (12)

$$\frac{du}{dt} = (2x + 2y)(\cos t - t \sin t) + (2x + 2y)(\sin t + t \cos t)$$

$$= 2(x + y)(\cos t - t \sin t + \sin t + t \cos t)$$

$$= 2(t \cos t + t \sin t)(\cos t - t \sin t + \sin t + t \cos t)$$

$$= 2t(\cos^2 t - t \sin t \cos t + \sin t \cos t + t \cos^2 t + \sin t \cos t$$

$$- t \sin^2 t + \sin^2 t + t \sin t \cos t)$$

$$= 2t\,[1 + 2 \sin t \cos t + t(\cos^2 t - \sin^2 t)]$$

$$= 2t\,[1 + \sin 2t + t \cos 2t]$$

(b) $u = (t \cos t)^2 + 2(t \cos t)(t \sin t) + (t \sin t)^2$

$$= t^2 \cos^2 t + t^2 (2 \sin t \cos t) + t^2 \sin^2 t$$

$$= t^2 + t^2 \sin 2t$$

$$\frac{du}{dt} = 2t + 2t \sin 2t + 2t^2 \cos 2t$$

$$= 2t\,[1 + \sin 2t + t \cos 2t]$$

แบบฝึกหัด 7.3

ข้อ 1 - 3 จงหาอนุพันธ์ย่อย โดยวิธีที่กำหนดให้ คือ

ก) ใช้กฎลูกโซ่ ข) แทนค่า x และ y ก่อนหาอนุพันธ์

1. $u = x^2 + y^2, x = 3r - s, y = r + 2s$; $\frac{\partial u}{\partial r}$; $\frac{\partial u}{\partial s}$

2. $u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y$; $x = 2r - 3s$; $y = r + s$ $\frac{\partial u}{\partial r}$; $\frac{\partial u}{\partial s}$

3. $u = e^{y/x}$; $x = 2r \cos t$; $y = 4r \sin t$; $\frac{\partial u}{\partial r}$; $\frac{\partial u}{\partial t}$

ข้อ 4 - 6 จงหาอนุพันธ์รวม $\frac{du}{dt}$ โดย

ก) ใช้กฎลูกโซ่ ข) เขียน u ในรูปฟังก์ชันของ t ก่อนการหาอนุพันธ์

4. $u = ye^x + xe^y$; $x = \cos t$; $y = \sin t$

5. $u = \ln xy + y^2$; $x = e^t$; $y = e^{-t}$

6. $u = \frac{t + e^x}{y - e^t}$; $x = 3 \sin t$; $y = \ln t$

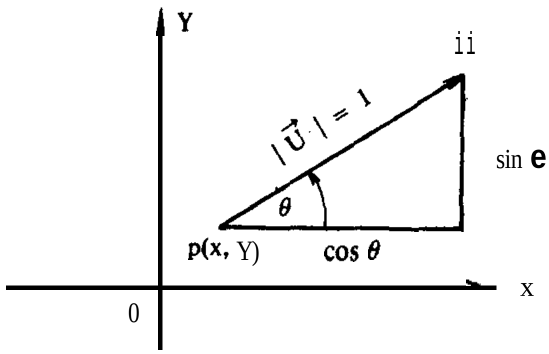
7.4 อนุพันธ์ตามทิศ และเกรเดียนท์

(Directional derivative and The gradient)

นิยาม 7.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วย- $\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ ดังนั้น อนุพันธ์ตามทิศ (directional derivative) ของ f ในทิศทางของ $\vec{U}$ เขียนแทนด้วย $D_{\vec{U}}f$ กำหนดโดย

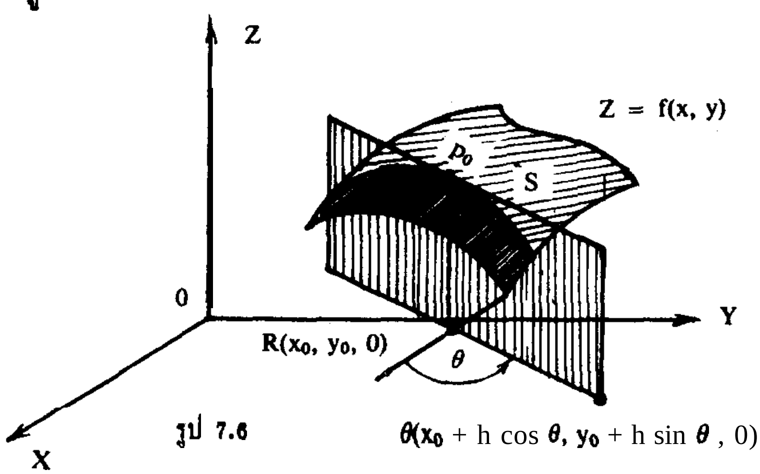
$$D_{\vec{U}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta,\ y + h\sin\theta) - f(x, y)}{h}$$

ถ้าลิมิตนี้มีอยู่



รูป 7.5

อนุพันธ์ตามทิศให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าของฟังก์ชัน f(x, y) เทียบกับระยะทางในระนาบ xy วัดในทิศทางของเวคเตอร์หนึ่งหน่วง $\vec{U}$ ดังแสดงใน รูป 7.5



รูป 7.6

สมการผิว S ในรูปคือ $Z = f(x, y)$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดจุดหนึ่งบนผิว จุด $R(x_0, y_0, 0)$ จุด $Q(x_0 + h\cos\theta, y h \sin\theta, 0)$ เป็นจุดในระนาบ xy ระนาบที่ผ่านจุด R และจุด Q ขนานกับแกน Z ทำให้เกิดมุม Q เรเดียน ในทิศทางบวกบนแกน X ระนาบตัดกับผิวเป็นรอยโค้ง C อนุพันธ์ตามทิศ $D_{\vec{U}}f$ คำนวณ-ที่ P_0 คือ ความชันของเส้นสัมผัส สัมผัสโค้ง C ที่จุด P_0 ในระนาบ ของ R, Q และ P_0 ถ้า $\vec{U} = \vec{P}$ ฉะนั้น $\cos\theta = 1$ และ $\sin\theta = 0$ และจาก นิยาม 7.5.1

$$D_{\vec{i}} f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{n}$$

ซึ่งก็คือ อนุพันธ์ย่อย ของ f เทียบกับ x

ถ้า $\vec{U} = \vec{j}$ ฉะนั้น $\cos\theta = 0$ และ $\sin\theta = 1$ และ จะได้ว่า

$$D_{\vec{j}} f(x, y) = \lim_{n\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

ซึ่งก็คือ อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y

ดังนั้น จะเห็นว่า f_x และ f_y เป็นกรณีพิเศษของอนุพันธ์ตามทิศในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง กำหนด $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ และ $\vec{U}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในทิศทาง $\frac{1}{6}\pi$ จงหา $D_{\vec{U}}f$ โดยใช้นิยาม 7.4.1

วิธีทำ $\vec{U} = \cos\frac{1}{6}\pi\,\vec{i} + \sin\frac{1}{6}\pi\,\vec{j} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

จากนิยาม 7.4.1 จะได้

$$D_{\vec{U}} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h, y + \frac{1}{2}h) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h)^2 - (y + \frac{1}{2}h)' + 4(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h) - (3x^2 - y^2 + 4x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - y^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 4x + 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 - 4x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3\sqrt{3}\,hx + \frac{9}{4}h^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 2\sqrt{3}\,h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (3\sqrt{3}\,x + \frac{9}{4}h - y - \frac{1}{4}h + 2\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}\,x - y + 2\sqrt{3}$$

ต่อไปเราจะพยายามหาสูตรในการคำนวณอนุพันธ์ตามทิศเพื่อความสะดวกและสั้น และรวดเร็วขึ้นกว่าการคำนวณจากนิยาม

ให้ g เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว t ให้ x, y และ θ คงที่

$$g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\sin\theta) \qquad \text{..........(1)}$$

ให้ $\vec{U} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + (0 + h)\cos\theta, y + (0 + h)\sin\theta - f(x + 0\cos\theta, y + 0\sin\theta)}{h}$$

หรือ

$$g'(0) = \text{Pim}_{h\to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\,\text{sine}) - f(x, y)}{h}$$

เพราะทางขวามือ คือ $D_{\vec{U}}f(x, y)$

$$g'(0) = D_{\vec{U}}f(x, y) \qquad \text{..........(2)}$$

ต่อไปหา $g'(t)$ โดยใช้กฎลูกโซ่กับทางขวาของ (1)

$$g'(t) = f_1(x+t\cos\theta, y+t\,\text{sine}) \frac{\partial(x + t\cos\theta)}{\infty t}$$

$$+ f_2(x + t\cos\theta, y + t\,\text{sine}) \frac{\partial(y + t\,\text{sine})}{\partial t}$$

$$= f_1(x + t\cos\theta, y + t\,\text{sine})\cos\theta + f_2(x + t\cos\theta, y + t\,\text{sine})\sin\theta$$

ดังนั้น $g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y f(x, y)\,\text{sine}$ ....(3)

จาก (2) และ (3) สรุปเป็นทฤษฎีว่า

ทฤษฎี 7.4.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x และ y และ $\vec{U} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ ดังนั้น

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$$

ตัวอย่าง กำหนด $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ และ u เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\frac{1}{6}\pi$ จงหา $D_{\vec{U}}f$ โดยใช้ทฤษฎี 7.4.1

วิธีทำ $\because$ $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$

$f_x(x, y) = 6x + 4$ และ $f_y(x, y) = -2$

$\because$ $\vec{U} = \cos\frac{1}{6}\pi\,\vec{i} + \sin\frac{1}{6}\pi\,\vec{j}$

จากทฤษฎี 7.4.1 จะได้

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = (6x + 4)\frac{1}{2}\sqrt{3} + (-2y)\frac{1}{2} = 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - y$$

เราเขียนอนุพันธ์ตามทิศได้อีกวิธีหนึ่ง คือ เขียนเป็นผลคูณเชิงสเกล่าร์ (dot-product) ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ เพราะ

$$f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta = (\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) \cdot [f_x(x, y)\,\vec{i} + f_y(x, y)\,\vec{j}]$$

จากทฤษฎี 7.4.1

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = (\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) \cdot [f_x(x, y)\,\vec{i} + f_y(x, y)\,\vec{j}]$$

เรียกเวกเตอร์ $f_x(x, y)\,\vec{i} + f_y(x, y)\,\vec{j}$ ว่า "เกรเดียนท์" (gradient) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย ∇f หรือ grad f

นิยาม 7.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว x และ y โดย f_x และ f_y มีอยู่ ดังนั้น **เกรเดียนท์** (gradient) ของ f เขียนแทนด้วย ∇f (อ่านว่า "เดล f") กำหนดโดย

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\vec{i} + f_y(x, y)\,\vec{j}$$

จากสมการ (4) และนิยาม 7.4.2

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = \vec{U} \cdot \nabla f(x, y) \qquad \text{..........(5)}$$

อนุพันธ์ตามทิศของฟังก์ชันหามาจากการคูณกันที่เรียกว่าผลคูณเชิงสเกล่าร์ของเกรเดียนท์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในทิศทางที่กำหนดให้

ตัวอย่าง ถ้า $f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$

จงหาค่าของ ∇f ที่จุด (4, 3) และจงหาอัตราของการเปลี่ยนแปลงของ f(x, y)-ในทิศทางของ $\frac{1}{4}\pi$ ที่จุด (4, 3)

วิธีทำ เพราะ $f_x(x, y) = \frac{1}{8x}$ และ $f_y(x, y) = \frac{2}{9}y$

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{8}x\,\vec{i} + \frac{2}{9}y\,\vec{j}$$

นั่นคือ

$$\nabla f(4, 3) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$$

อัตราการเปลี่ยนของ f(x, y) ในทิศทาง $\frac{1}{4}\pi$ ที่จุด (4, 3) คือ $D_{\vec{U}}f(4, 3)$ เมื่อ U คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$D_{\vec{U}}f(4, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}\right) = \frac{7}{12}\sqrt{2}$$

นิยาม 7.4.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสามตัว x, y และ z
ถ้า $\vec{U}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos r\,\vec{k}$
ดังนั้นอนุพันธ์ตามทิศของ f ในทิศทางของ $\vec{U}$ เขียนแทนด้วย $D_{\vec{U}}f$ กำหนดโดย

$$D_{\vec{U}}f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\alpha, y\ 2\ h\cos\beta, z + h\cos\gamma) - f(x, y, z)}{h}$$

ถ้าลิมิตมีค่า

ทฤษฎี 7.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสามตัว x, y และ z และ f หาอนุพันธ์ได้ ถ้า

$$\vec{U} = \cos \alpha \, \vec{i} + \cos \beta \, \vec{j} + \cos r \, \vec{k}$$

ดังนั้น

$$D_{\vec{U}}f(x, Y, z) = f_x(x, y, z) \cos \alpha + f_y(x, y. z) \cos \beta + f_z(x, y. z) \cos r$$

ตัวอย่าง ให้ $f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y, z)$ ที่ $(1, -2, -1)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

วิธีทำ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

กำหนดโดย $\vec{U} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$

และ $f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$

ดังนั้น $D_{\vec{U}}f(x, y. z) = \frac{2}{3}(6x + y) - \frac{2}{3}(x - 4y - z) - \frac{1}{3}(-y + 2z)$

นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y, z)$ ที่ $(1, -2, -1)$ ในทิศทางของ U-กำหนดโดย

$$D_{\vec{U}}f(1, -2, -1) = \frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(10) - \frac{1}{3}(0) = -4$$

นิยาม 7.4.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสามตัว x, y และ z และอนุพันธ์ย่อยอันดับแรก f_x, f_y และ f_z มีอยู่ ดังนั้นเกรเดียนท์ของ f เขียนแทนด้วย ∇f กำหนดโดย

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}$$

เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว ถ้า $U = \cos 2\,\vec{i} + \cos \beta\,\vec{i} + \cos r\,\vec{k}$ ดังนั้น

$$D_{\vec{U}}f(x, y, z) = \vec{U} \, . \, \nabla f(x, y, z)$$

แบบฝึกหัด 7.4

ข้อ 1. จงหาอนุพันธ์ตามทิศของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่กำหนดให้ โดยใช้ทฤษฎี 7.5.1 หรือ 7.5.2

1.1 $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $\vec{U} = \cos \frac{1}{4}\pi \vec{i} + \sin \frac{1}{4}\pi \vec{j}$

1.2 $g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$; $\vec{U} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

1.3 $h(x, y, z) = 3x" + y^2 - 4z^2$

$U = \cos \frac{1}{3}\pi \vec{i}\, 2 \cos \frac{1}{4}\pi \vec{j} + \cos \frac{2}{3}\pi k$

1.4 $f(x, y, z) = 6x^2 - 2xy + yz$; $\vec{U} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$

ข้อ 2 จงหาค่าของอนุพันธ์ตามทิศ ที่จุด P_0 ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในทิศทางของ $\vec{U}$

2.1 $y(x, y) = xe^{2y}$; $\vec{U} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{j}$; $P_0 = (2, 0)$

2.2 $h(x, y, z) = \cos(xy) + \sin(yz)$; $\vec{U} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

$P_0 = (2, 0, -3)$

2.3 $f(x, y, z) = \ell n(x^2 + y^2 + z^2)$; $\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}\, 2 \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$

$P_0 = \left(\frac{1}{2}\pi, 0, 0\right)$

ข้อ 3 กำหนดฟังก์ชัน f จุด P และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{U}$

จงหา ก) เกรเดียนท์ของ f ที่จุด P

ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าของฟังก์ชันในทิศทางของ U ที่ P

3.1 $f(x, y) = x^2 - 4y$, $P = (-2, 2)$, $\vec{U} = \cos \frac{1}{3}\pi \vec{i} + \sin \frac{1}{3}\pi \vec{j}$

3.2 $f(x, y) = e^{2xy}$; $P = (2, 1)$ $\vec{U}$ $\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$

3.3 $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4xz$; $P = (-2, 1, 3)$; $\vec{U}$ $\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}$

7.5 ระนาบสัมผัสและเส้นนอร์แมล

(Tangent Planes and Normals to Surface)

ให้ S เป็นผิว มีสมการ $F(x, y, z) = 0$ (1)

ถ้า $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดจุดหนึ่งบน S

ดังนั้น $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

ถ้า C เป็นเส้นโค้งบน S ผ่านจุด P_0 มีสมการพาราเมตริกเป็น

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \qquad \text{..........(2)}$$

ให้ค่าของพารามิเตอร์ t ที่ p_0 เป็น t_0

สมการเวกเตอร์ของ C คือ

$$\vec{R}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} \qquad \text{..........(3)}$$

เพราะเส้นโค้ง C อยู่บนผิว S โดยการแทน (2) ใน (1)

$$F\big(f(t), g(t), h(t)\big) = 0 \qquad \text{..........(4)}$$

ให้ $G(t) = F\big(f(t), g(t), h(t)\big)$

ถ้า F_x, F_y และ F_z ต่อเนื่อง และไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

และถ้า $f'(t_0)$, $g(t_0)$ และ $h'(t_0)$ มีอยู่ ดังนั้นอนุพันธ์รวมของ F เทียบกับ t ที่ p_0 กำหนดโดย

$$G'(t_0) = F_x(x_0, y_0, z_0)\, f'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\, g'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)\, h'(t_0)$$

ซึ่งเขียนได้อีกรูปหนึ่งคือ

$$G'(t_0) = \vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t\vec{R}(t_0)$$

เพราะ $G'(t) = 0$ สำหรับค่าทั้งหมด t

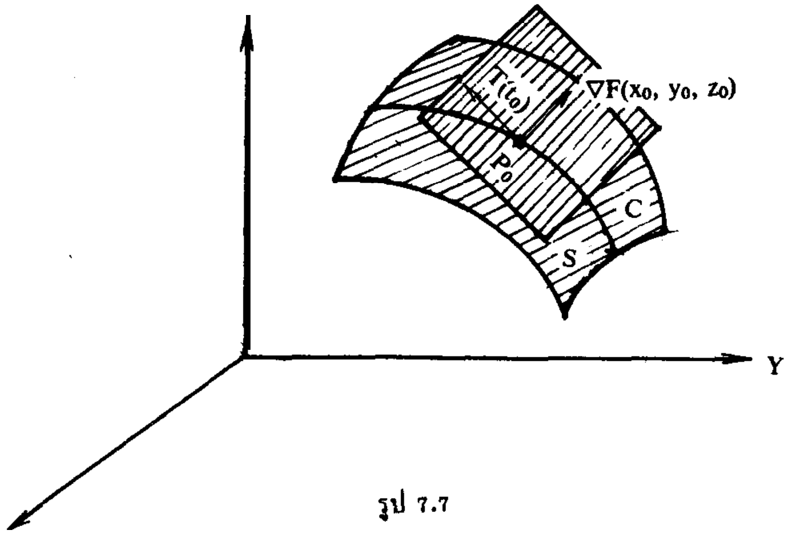
จะได้ $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t\vec{R}(t_0) = 0$ ....(5)

สรุปว่า เวกเตอร์ เกรเดียนท์ ของ F ที่ P_0 ตั้งฉากกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสของทุก ๆ เส้นโค้ง C บน S ที่ย่านจุด P_0 จึงเกิดเป็นนิยามว่า

นิยาม 7.5.1 เวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสของทุก ๆ เส้นโค้ง C ผ่านจุด P_0 บนผิว S เรียกว่า เวกเตอร์นอแมล (normal vector) กับ S ที่ P_0

ทฤษฎี 7.5.1 ถ้าสมการผิว S คือ $F(x, y, z) = 0$ และ $F_x, F_y,$ และ F_z ต่อเนื่อง และไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด ที่จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ บน S ดังนั้น เวกเตอร์นอร์แมล กับ S ที่ P_0 คือ $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$

นิยาม 7.5.2 ถ้าสมการผิว S คือ $F(x, y, z) = 0$ ดังนั้น ระนาบสัมผัส (tangent plane) ของ S ที่จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ คือ ระนาบที่ผ่านจุด P_0 มีเวกเตอร์นอร์แมล $\vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0)$



รูป 7.7

สมการระนาบสัมผัส คือ

$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

.,........(I)

สมการเวกเตอร์ของของระนาบสัมผัส กำหนดโดย (1) คือ

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}] = 0$$

ตัวอย่าง จงหาสมการระนาบสัมผัสที่สัมผัสอิลลิปติก พาราโบลอยด์ $4x^2 + y^2 - 16z = 0$ ที่จุด (2, 4, 2)

วิธีทำ ให้ $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 16z$

ดังนั้น $\vec{\nabla}F(x, y, z) = 8x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} - 16\,\vec{k}$

และ

$\vec{\nabla}F(2, 4, 2) = 16\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}$

จาก $\vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}] = 0$

$16(x - 2) + 8(y - 4) - 16(z - 2) = 0$

หรือ

$2x + y - 2z - 4 = 0$

นิยาม 7.5.3 เส้นนอร์แมล กับผิว S ที่จุด P_0 บน S คือเส้นตรงที่ผ่าน P_0 มีเซตของจำนวนระบุทิศทาง (direction numbers) เป็นส่วนประกอบ (components) ของเวกเตอร์นอร์แมล ใด ๆ ของ S ที่ P_0

ถ้าสมการผิว S คือ $F(x, y, z) = 0$

สมการแบบซิมเมตริก ของเส้นนอร์แมล กับ S ที่ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ คือ

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

ส่วนในสมการนี้ เป็นส่วนประกอบ (components) ของ $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ ซึ่งคือเวกเตอร์นอร์แมล ของ S ที่จุด P_0 ดังนั้น จากนิยามจะได้ว่า เส้นนอร์แมลที่จุดบนผิว S ตั้งฉากกับระนาบสัมผัสที่จุดนั้น

ตัวอย่าง จงหาสมการซิมเมตริก ของเส้นนอร์แมลของผิว $4x^2 + y^2 - 16z = 0$ ที่จุด (2, 4, 2)

วิธีทำ เพราะ $\nabla F(2, 4, 2) = 16\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}$

จะได้ว่า $\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2}$

นิยาม 7.5.4 เส้นสัมผัส (tangent line) เส้นโค้ง C ที่จุด P_0 คือ เส้นที่ลากผ่าน P_0 มีเซตของจำนวนระบุทิศทาง เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส ที่สัมผัส C ที่ P_0

พิจารณาเส้นโค้ง C ซึ่งเกิดจากการตัดกันของผิวสองผิว มีสมการ

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

และ

$$G(x, y, z) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

เราจะแสดงวิธีหาสมการเส้นสัมผัสที่สัมผัส C ที่จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$

เพราะว่าเส้นสัมผัสนี้อยู่ในแต่ละระนาบสัมผัสที่สัมผัสผิวที่กำหนดให้ที่ P_0 มันเป็นเส้นที่เกิดจากการตัดกันของระนาบสัมผัสสองระนาบ เวกเตอร์นอร์แมล ที่ P_0 ของผิวในสมการ (1) มีสมการ กำหนดโดย

$$\vec{N}_1 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) = F_x(x_0, y_0, z_0)\,\vec{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\,\vec{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\,\vec{k}$$

และเวกเตอร์นอร์แมลที่ P_0 ของผิวในสมการ (2) กำหนดโดย

$$\vec{N}_2 = \nabla G(x_0, y_0, z_0) = G_x(x_0, y_0, z_0)\,\vec{i} + G_y(x_0, y_0, z_0)\,\vec{j} + G_z(x_0, y_0, z_0)\,\vec{k}$$

ทั้ง N_1 และ N_2 ตั้งฉากกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส กับ C ที่ P_0

ดังนั้น ถ้า $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ ไม่ขนานกัน จะได้ว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส มีทิศทางไปทางเดียวกัน หรือตรงข้ามกันกับทิศทางของ $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ ดังนั้น ส่วนประกอบของ $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ คือ เซตของจำนวนระบุทิศทางของเส้นสัมผัส จากเซตของจำนวนระบุทิศทางและโคออร์ดิเนตของ P_0 เราจะได้สมการซิมเมตริกของเส้นสัมผัสที่ต้องการ

ตัวอย่าง จงหาสมการของเส้นสัมผัส สัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของผิว $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 49$ และ $x^2 + y^2 - 2z^2 = 10$ ที่จุด $(3, -3, 2)$

วิธีทำ ให้ $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 49$

และ

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 10$$

ดังนั้น $\vec{\nabla}F(x, y, z) = 6x\,\vec{i} + 4y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$

และ $\vec{\nabla}G(x, y, z) = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} - 4z\,\vec{k}$

$$\vec{N}_1 = \nabla F(3, -3, 2) = 18\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$= 2(9\vec{i} \quad 6\vec{j} + 2\vec{k})$$

และ

$$\vec{N}_2 = \nabla G(3, -3, 2) = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k}$$
$$= 2(3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k})$$
$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 4(9\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}) \times (3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k})$$
$$= 4(30\vec{i} + 42\vec{j} - 9\vec{k})$$
$$= 12(10\vec{i} + 14\vec{j} - 3\vec{k})$$

นั่นคือ เซตของจำนวนระบุทิศทางของเส้นสัมผัสที่ต้องการคือ [10, 14, −3]
สมการซิมเมตริกของเส้นสัมผัส คือ

$$\frac{x-3}{10} = \frac{y+3}{14} = \frac{z-2}{-3}$$

ถ้าผิวสองผิวมีระนาบสัมผัสเดียวกัน ณ จุด ๆ หนึ่ง เรียกผิวทั้งสองว่าสัมผัสกันที่จุดนั้น

แบบฝึกหัด 7.5

จงหาสมการระนาบสัมผัส และสมการเส้นนอร์มัลของผิวที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 17$; $(2, -2, 3)$
2. $x^2 + y^2 - 3z = 2$; $(-2, -4, 6)$
3. $y = e^x \cos z$; $(1, e, 0)$
4. $x^2 = 12y$; $(6, 3, 3)$

ถ้าผิวที่กำหนดให้ตัดกันเป็นเส้นโค้ง จงหาสมการเส้นสัมผัส สัมผัสโค้งของรอยตัดที่จุดที่กำหนดให้ ถ้าผิวทั้งสองสัมผัสกันที่จุดจุดหนึ่ง จงพิสูจน์

1. $x^2 + y^2 - z = 8$, $x - y^2 + z^2 = -2$; $(2, -2, 0)$
2. $x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $(0, 1, 1)$
3. $y = x^2$, $y = 16 - z^2$; $(4, 16, 0)$
4. $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $yz = 4$; $(0, 2, 2)$

7.6 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

การประยุกต์ที่สำคัญอย่างหนึ่งของอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว คือ การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด ของฟังก์ชันในแคลคูลัสเบื้องต้น เราได้ใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองสร้างข้อทดสอบต่าง ๆ ซึ่งสามารถจะช่วยเราหาค่าสูงสุดเฉพาะที่ และค่าต่ำสุดเฉพาะที่ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวได้ ต่อไปนี้เราจะอภิปรายวิธีการใช้อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งและสองทดสอบค่าสูงสุดเฉพาะที่และค่าต่ำสุดเฉพาะที่ของฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัวดูบ้าง

นิยาม 7.8.1 ฟังก์ชัน f ที่มีตัวแปรสองตัว มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum value) บน $B_r(x_0\ y_0)$ ในระนาบ xy ถ้ามีบางจุด (x_0, y_0) ใน B ซึ่ง $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ สำหรับจุดทั้งหมด (x, y) ใน B กรณีนี้ $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน B

นิยาม 7.6.2 ฟังก์ชัน f ที่มีตัวแปรสองตัว มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน $B_r(x_0, y_0)$ ในระนาบ xy ถ้า มีบางจุด (x_0, y_0) ใน B ซึ่ง $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$ สำหรับจุดทั้งหมด (x, y) ใน B กรณีนี้ $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน B

ทฤษฎี 7.6.1 (The extreme - Value Theorem for Function of Two Variables)

ให้ B เป็นเซตของจุดทั้งหลายในวงกลมปิดในระนาบ xy และให้ f เป็นฟังก์ชันสอง ตัวแปรซึ่งต่อเนื่องบน B ดังนั้น จะมีอย่างน้อยจุดหนึ่งใน B ซึ่ง f มีค่าสูงสุด สัมบูรณ์ และอย่างน้อยจุดหนึ่งใน B ซึ่ง f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

การพิสูจน์ เว้นไว้ เพราะไม่อยู่ในขอบเขตของตำราเล่มนี้

นิยาม 7.6.3 ฟังก์ชัน f ที่มีตัวแปรสองตัว มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum value) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้ามีเนเบอร์ฮูด $B_r(x_0, y_0)$ ซึ่ง $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ สำหรับค่าทั้งหมด (x, y) ใน $B_r(x_0\ y_0)$

นิยาม 7.6.4 ฟังก์ชัน f ที่มีตัวแปรสองตัว มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum value) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้ามีย่านจุด (x_0, y_0) เรียก $B_r\big((x_0, y_0)\big)$ ซึ่ง $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$ สำหรับค่าทั้งหมด (x, y) ใน $B_r\big((x_0, y_0)\big)$

ทฤษฎี 7.6.2 ถ้า $f(x, y)$ มีค่าที่จุดทั้งหมดใน $B_r((x_0, y_0))$ และถ้า f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ (relative extremum) ที่ (x_0, y_0) ดังนั้น
ถ้า $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีอยู่

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

พิสูจน์ ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0) และถ้า $f_x(x_0, y_0)$ มีอยู่ ดังนั้น $f_x(x_0, y_0) = 0$
จากนิยามของอนุพันธ์ย่อย

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

เพราะว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0) ดังนั้น

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leqslant 0$$

ถ้า Δx มีขนาดเล็กมากจนกระทั่ง $(x_0 + \Delta x, y_0)$ อยู่ใน B ถ้า Δx เข้าสู่ศูนย์ทางขวามือ $\Delta x > 0$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leqslant 0$$

ฉะนั้น ถ้า $f_x(x_0, y_0)$ มีอยู่ $f_x(x_0, y_0) \leqslant 0$

ถ้าให้ Δx เข้าใกล้ศูนย์ทางซ้ายมือ $\Delta x < 0$

และ $$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geqslant 0$$

ดังนั้น ถ้า $f_x(x_0, y_0)$ มีอยู่ $f_x(x_0, y_0) \geqslant 0$

จึงสรุปว่า เพราะ $f_x(x_0, y_0)$ มีอยู่ อสมการทั้งสอง

$$f_x(x_0, y_0) \leqslant 0 \text{ และ } f_x(x_0, y_0) \geqslant 0 \text{ เป็นจริง}$$

ทำให้ได้ผลตามมาว่า $f_x(x_0, y_0) = 0$

การพิสูจน์ว่า $f_y(x_0, y_0) = 0$ ถ้า $f_y(x_0, y_0)$ มีอยู่ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0) มีวิธีการคล้ายกัน จึงเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัดของผู้อ่าน

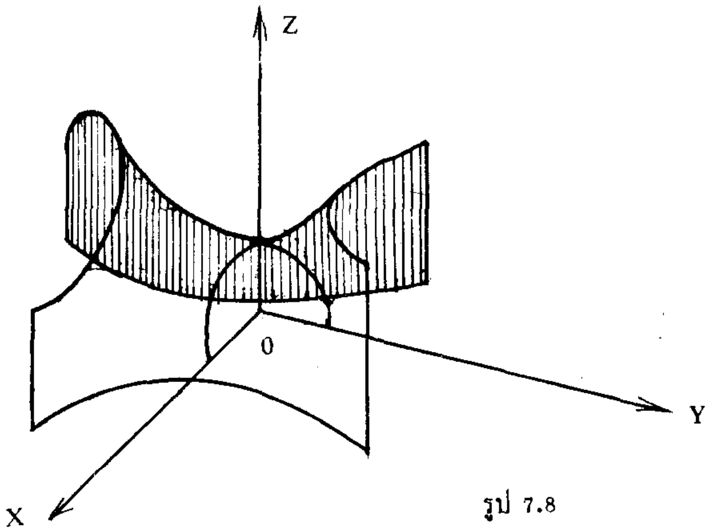
นิยาม 7.6.5 จุด (x_0, y_0) ซึ่งทั้ง $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$ เรียกว่า เป็นจุดวิกฤติ (critical point)

ข้อสังเกต ถ้าเราทราบว่าอนุพันธ์ย่อยทั้งหมดของ f ที่ (x_0, y_0) มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด แล้ว f อาจจะไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0) ก็ได้ นั่นคือ ข้อความแปลงกลับของทฤษฎี 7.6.2 ไม่เป็นจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$
จะได้ว่า $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ เห็นชัดว่า f ไม่มีทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (0, 0) เพราะว่า

$f(0, 0) = 1$ และ $f(x_1, 0) < 1$ และ $f(0, y_1) > 1$

สำหรับค่า x_1 และ y_1 ที่อยู่ใกล้ชิดกับ 0 และมีค่าไม่เท่ากับ 0



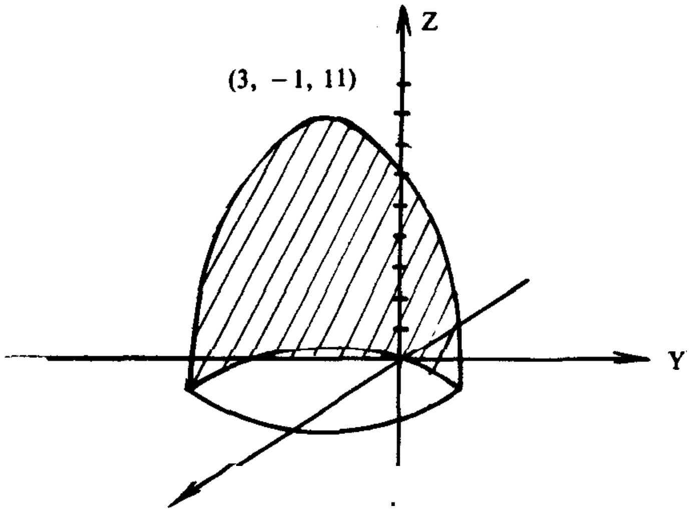
รูป 7.8

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน f โดย $f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$
จงพิจารณาว่า f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์หรือไม่

วิธีทำ $f_x(x, y) = 6 - 2x$ และ $f_y(x, y) = -4 - 4y$
ให้ $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ เท่ากับศูนย์ ได้ว่า $x = 3, y = \quad 1$

กราฟของ $z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$ ดังรูป 7.8 เป็นพาราโบลอยด์ มีจุดยอดที่ $(3, -1, 11)$ และโค้งคว่ำ เราสรุปว่า $f(x, y) < f(3, -1)$ สำหรับค่า

ทั้งหมด $(x, y) \neq (3, -1)$ จากนิยาม 7.6.3 f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และจากนิยาม 7.6.5 11 คือค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน R^2



รูป 7.9

เงื่อนไขที่เป็นพื้นฐาน สำหรับการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัวนั้น ก็คือ การทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่สอง

ทฤษฎี 7.6.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัวซึ่งอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอันดับสองต่อเนื่องบนบางเซต $B_r((a, b))$ ถ้า $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ดังนั้น

1) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (a, b) ถ้า

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f{xy}^2(a, b) \rightarrow 0 \text{ และ } f_{xx}(a, b) > 0$$

2) f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (a, b) ถ้า

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f{xy}^2(a, b) > 0 \text{ และ } f_{xx}(a, b) < 0$$

3) f(a, b) ไม่ใช่ค่าปลายสุดสัมพัทธ์ ถ้า

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy^2}(a, b) > 0$$

4) สรุปไม่ได้ ถ้า

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy^2}(a, b) = 0$$

ข้อพิสูจน์ เว้น (นักศึกษาที่สนใจจะพบได้ในหนังสือ Advanced calculus ทั่ว ๆ ไป)

หมายเหตุ ให้ f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปร สมมุติว่า f มีอนุพันธ์ได้ที่ p_0 เรียก p_0 ว่าเป็น **จุดแซดเดิล** (saddle point) ถ้า p_0 เป็นจุดวิกฤติ และ f ไม่มีทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด p_0

ตัวอย่าง กำหนด $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$

จงพิจารณาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ ของ f ถ้ามี

วิธีทำ $f_x(x, y) = 8x^3 - 2x \quad f_y(x, y) = 2y - 2$

ให้ $f_x(x, y) = 0$ เราได้ $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ และ $x = \frac{1}{2}$

ให้ $f_y(x, y) = 0$ เราได้ $y = 1$ ดังนั้น f_x และ f_y ทั้งสองเป็นศูนย์ มีค่าที่จุด $(-\frac{1}{2}, 1), (0\ 1)$ และ $(\frac{1}{2}, 1)$

โดยวิธีการทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่สอง เราหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ของ f จะได้

$f_{xx}(x, y) = 24x^2 - 2 \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(x, y) = 0 \quad f_{xx}(-\frac{1}{2}, 1) = 4 > 0$

และ

$$f_{xx}(-\frac{1}{2}, 1)\, f_{yy}(-\frac{1}{2}, 1) - f_{xy}^2(-\frac{1}{2}, 1) = 4.2 - 0 = 8 > 0$$

โดยทฤษฎี 7.6.3 1) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(-\frac{1}{2}, 1)$

$$f_{xx}(0, 1)\, f_{yy}(0, 1) - f_{xy}^2(0, 1) = (-2)(2) - 0 = -4 < 0$$

โดยทฤษฎี 7.6.3 3) f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ (0, 1)

$$f_{xx}(\frac{1}{2}, 1) = 4 > 0$$

และ

$$f_{xx}(\frac{1}{2}, 1)\, f_{yy}(\frac{1}{2}, 1) - f_{xy}^2(\frac{1}{2}, 1) = 4.2 - 0 = 8 > 0$$

โดยทฤษฎี 7.6.3 (i) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(\frac{1}{2}, 1)$

ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เป็น $-\frac{9}{8}$ ที่แต่ละจุด $(-\frac{1}{2}, 1)$ และ $(\frac{1}{2}, 1)$

การอภิปรายค่าปลายสุดของฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว อาจขยายออกไปถึงฟังก์ชันที่มีตัวแปรสามตัว หรือ ฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลาย ๆ ตัว ซึ่งนิยามของค่าปลายสุด และจุดวิกฤติ ทำได้ง่ายมาก เช่น ถ้า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร-x, y และ z และ

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

ดังนั้น (x_0, y_0, z_0) เป็นจุดวิกฤติของ f แต่ละจุดได้จากการแก้สมการ สามสมการมีตัวไม่ทราบค่าสามตัว

สำหรับฟังก์ชัน n ตัวแปรนั้น จุดวิกฤติหาด้วยการให้อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของตัวแปรทั้งหมด n ตัวนั้นเท่ากับศูนย์ แล้วแก้สมการ n สมการเพื่อหาตัวไม่ทราบค่า n ตัว ซึ่งการอภิปรายเรื่องค่าปลายสุด และการทดสอบค่าปลายสุดของฟังก์ชัน n ตัวแปรมีอยู่ในหนังสือแคลคูลัสขั้นสูงทั่ว ๆ ไป

แบบฝึกหัด 7.6

จงหาค่าปลายสุดของ f ถ้ามี

1. $f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$
2. $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{Y} + xy$
3. $f(x, y) = \sin(x + y) + \sin x + \sin y$
4. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$
5. $f(x, y) = 4xy' - 2x^2y - x$
6. $f(x, y) = \dfrac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$

คำตอบ

1. ไม่มีค่าปลายสุด (1, − 2) เป็น saddle point
2. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(\frac{1}{}\pi, \frac{1}{3}\pi)$
   $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi)$
5. ไม่มีค่าปลายสุด $(0, \frac{1}{2})$ และ $(0, -\frac{1}{2})$ เป็น saddle point

แบบฝึกหัด 3.5

จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้า หรือลู่ออก

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot4}{3\cdot6}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\ldots(3n)}\right)^2 + \ldots$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^2 + \ldots$

3. $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot4}{3.6} + \frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9} + \ldots$

4. $\frac{2}{9} + \frac{2\cdot5}{9\cdot12} + \frac{2\cdot5\cdot8}{9\cdot12\cdot15} + \ldots$

5. $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot4}{3\cdot6} + \frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9} + \ldots + \frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}$

แบบฝึกหัด 1.4

1. $x > 3, x < \frac{1}{3}$

3. $-1 < x < 5$

5. $x=3$

7. $-1 \leqslant x \leqslant 4$

9. $x = 1, -2$

แบบฝึกหัด 1.5

1. 1.1) สำหรับ $n = 1$, ให้ $p = x.\ \{x \mid -1 < x < 1\}$

   สำหรับ $n = 2$, ให้ $p = (x, y), \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

   สำหรับ $n = 3$. ให้ $p = (x, y, z), \{(x, y. z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

2. 2.11 $\{(x, y) \mid 8x + 4y < 20\}$

4. 4.1 เพราะว่า $x^2 + y^2 \leqslant x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}$

6. $P = (-3.5, -5)$

   $Q = (2. -3, 4)$

8. $P = (-\frac{4}{3}z\ ,\ -\frac{5}{3}z\ ,\ z)$

10. แทนค่า $R = \lambda P + (1 - \lambda) Q$ ลงในสมการ
แล้วใช้คุณสมบัติของนอร์ม

แบบฝึกหัด 1.6

2. $\sqrt{7}\ ,\ -\sqrt{7}\ ,\ \sqrt{7}\ ,\ -\sqrt{7}$
4. ไม่มี, ไม่มี, ไม่มี, ไม่มี
6. ไม่มี, ไม่มี, $\sqrt{7}\ ,\ -\sqrt{7}$
8. ไม่มี, ไม่มี, ไม่มี, -11
10. ไม่มี, ไม่มี, 2, -1
12. $2\frac{1}{2}$, ไม่มี, $1\frac{1}{2}$, 2

แบบฝึกหัด 1.7

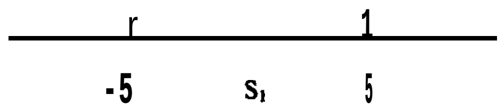
แต่ละข้อต้องแสดงว่า

1. $P(1)$ เป็นจริง
2. สมมุติให้ $P(k)$ เป็นจริงแล้วแสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง
ถ้าจริงทั้งสองข้อ ก็สรุปว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

แบบฝึกหัด 1.8

1. โดเมนต์ คือ เซตของจำนวนจริง
3. โดเมนต์ คือ เซตของจำนวนจริง ยกเว้น $x = 1$
5. โดเมนต์ คือ เซตของจำนวนจริง ยกเว้นจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง -4 กับ 2
7. โดเมนต์ คือ เซตของจำนวนจริง ยกเว้นจำนวนจริงที่น้อยกว่า -4 และจำนวน -2 กับ 2
9. โดเมนต์ คือ จุดต่าง ๆ ที่อยู่ในวงกลม $x^2 + y^2 = 1$
11. โดเมนต์ คือ เซตของจุดต่าง ๆ บนระนาบ XY ยกเว้นจุดที่อยู่บนเส้น $x = y$ และ $x = -y$

แบบฝึกหัด 1.9



1. 1.1

1.2 เซตปิด

1.3 -5, 5

1.4 เซต s

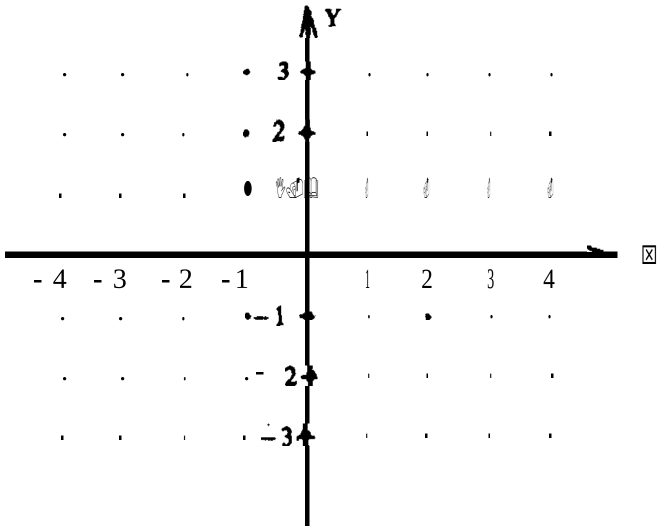
1.5 เป็น bounded ∵ |x| c 10 สำหรับทุก ๆ $X \in S_1$

1.6 เป็น Connected

1.7 เป็น Convex

1.8 0, 6, 5

3. 3.1



3.2 เซตปิด

3.3 เซต S_3

3.4 เซต S_3

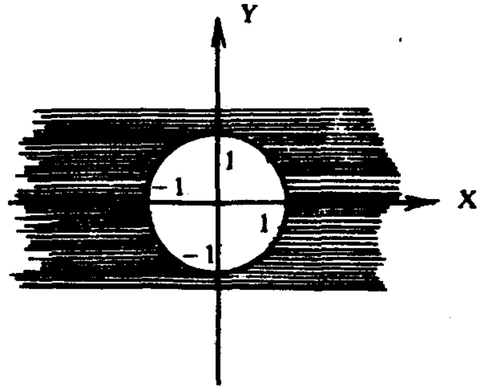
3.5 ไม่ bounded

3.6 disconnected

3.1 ไม่ Convex

3.8 ไม่มี, $(1, \frac{1}{2})$, $(1, 1)$

5. 5.1



5.2 เซตปิด

5.3 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

5.4 เซต S_5

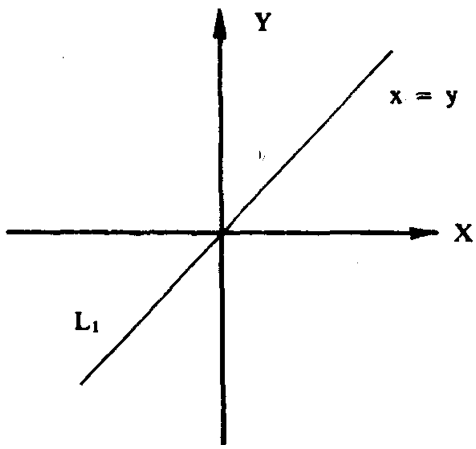
5.5 ไม่ bounded

5.6 Connected

5.1 ไม่ Convex

5.8 (0, 2), (0, 0), (0, 1)

7. 7.1 เส้นตรง L_1



7.2 เซตปิด

7.3 เซต S_7

7.4 เซต S_7

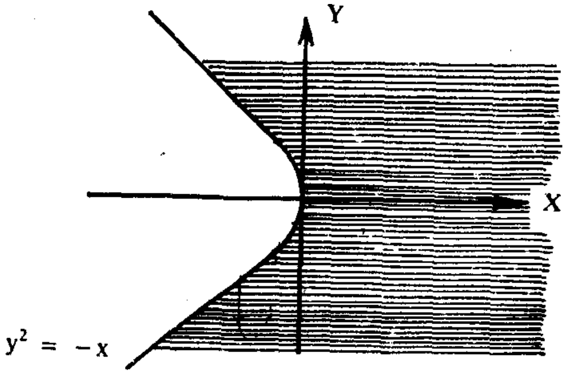
7.5 ไม่ bounded

7.6 Connected

7.7 Convex

7.8 ไม่มี, (1, 0), (1, 1)

9. 9.1



9.2 เซตปิด

9.3 $\{(x, y) \mid y^2 + x = 0\}$

9.4 เซต S_9

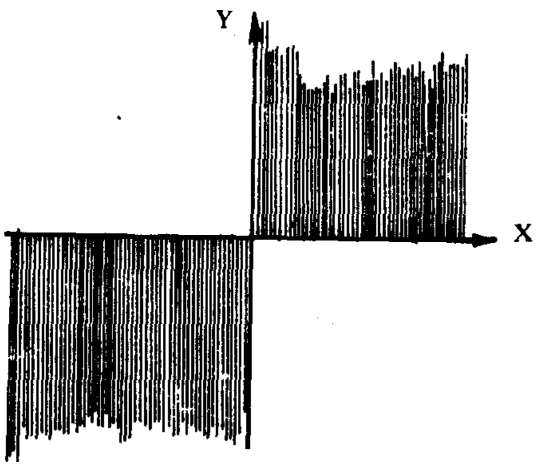
9.5 ไม่ bounded

9.6 เป็น Connected

9.7 ไม่ Convex

9.8 (0, 1), (−1, 0), (0, 0)

11. 11.1



11.2 เซตเปิด

11.3 $\{(x, y) \mid x = 0$ และ $y = 0\}$

11.4 $\{(x, y) \mid xy = 0\}$

11.5 ไม่ bounded

11.6 dis-connected

11.7 ไม่ Convex

11.8 $(1, 1), (1, -1), (0, 0)$

แบบฝึกหัด 2.2

1. 1.1) $\frac{1}{4}, \frac{3}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \frac{9}{12}$

   1.2) $2, 0, \frac{2}{27}, 0, \frac{2}{125}$

   1.3) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2\cdot 4}, \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \frac{-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}$

   1.5) $1, 1 + \frac{1}{1}, 2 + \frac{1}{2}, \frac{5}{2} + \frac{2}{5}, \frac{29}{10} + \frac{10}{29}$

   1.6) $1, 2, 2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}},$

   $2 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$

   1.7) $1, 3, 2, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}$

   1.8) $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$,

2. 1

3. $\frac{16}{81}$

4. 0

5. 2

6. $-\frac{3}{2}$

7. $\frac{1}{2}$

8. -15

13 ลิมิตหาค่าไม่ได้

14. ลิมิตหาค่าไม่ได้

16. ลิมิตหาค่าไม่ได้

แบบฝึกหัด 2.8

1. มีขอบเขต
2. มีขอบเขต
3. มีขอบเขต
4. มีขอบเขต
5. ไม่มีขอบเขต
6. มีขอบเขต
7. มีขอบเขต
8. ไม่มีขอบเขต

แบบฝึกหัด 2.4

1. เป็นโมโนโทนิค , มีขอบเขต , ลู่เข้า
2. เป็นโมโนโทนิค , มีขอบเขต , ลู่เข้า
3. เป็นโมโนโทนิค , มีขอบเขต , ลู่เข้า
4. เป็นโมโนโทนิค , มีชอบเขต , ลู่เข้า
5. เป็นโมโนโทนิค . มีขอบเขต , ลู่เข้า
6. ไม่เป็นโมโนโทนิค , มีขอบเขต , ลู่ออก
7. เป็นโมโนโทนิค , ไม่มีขอบเขต , ลู่ออก

แบบฝึกหัด 2.5

1. คู่ออก
2. คู่ออก
3. คู่เข้า
4. คู่เข้า

แบบฝึกหัด 2.6

1. 2, ไม่มี
2. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$
3. $\frac{2}{3}$, .6
4. ไม่มี, ไม่มี
5. l,o
6. -1 , ไม่มี
7. 1 , $\frac{1}{2}$
6. ไม่มี, $\frac{1}{2}$

แบบฝึกหัด 2.7

1. $-\infty$, ∞
2. -1. 0, 1
3. -1.0, 1
4. 0
5. 0, ∞
6. -1, 1
7. $-\infty$, 0, ∞

แบบฝึกหัด 2.8

1. $1, -1$
2. $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $0, -\infty$
4. $-\infty, -\infty$
5. $1, -1$
6. $0, 0$
7. $\infty, -\infty$
8. $1, -1$
9. $\infty, 0$
10. ∞, ∞

แบบฝึกหัด 2.9

1. ลู่เข้า
2. ลู่เข้า
3. ลู่ออก
4. ลู่ออก
5. ลู่เข้า
6. ลู่เข้า
7. ลู่เข้า
8. ลู่เข้า

แบบฝึกหัด 3.1

1. ลู่เข้า, $\frac{1}{2}$
2. ลู่เข้า, 2
3. ลู่ออก
4. ลู่ออก

5. ลู่เข้า, $\frac{1}{12}$

6. ลู่เข้า, $-\frac{1}{3}$

7. ลู่เข้า, $\frac{5}{6}$

8. ลู่เข้า, 2

แบบฝึกหัด 3.2

1. ลู่ออก
2. ลู่เข้า
3. ลู่ออก
4. ลู่ออก
5. ลู่ออก
6. ลู่เข้า
7. ลู่เข้า
8. ลู่ออก
9. ลู่เข้า
10. ลู่ออก
11. ลู่ออก
12. ลู่ออก
13. ลู่เข้า
14. ลู่ออก
15. ลู่เข้า
16. ลู่ออก
17. ลู่เข้า
18. ลู่เข้า
19. ลู่เข้า
20. ลู่เข้า

21. ลู่ออก
22. ลู่เข้า
23. ลู่ออก
24. $1
25. ลู่ออก
26. ลู่ออก

แบบฝึกหัด 3.3

1. ลู่เข้า
2. ลู่เข้า
3. ลู่ออก
4. ลู่ออก
5. ลู่เข้า
7. ลู่เข้า
8. ลู่เข้า

แบบฝึกหัด 3.4

1. ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์
2. ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข
3. ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์
4. ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์
5. ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข
6. ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์
7. ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์
8. ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

แบบฝึกหัด 3.5

1. ลู่เข้า
2. ลู่ออก
3. ลู่ออก
4. ลู่เข้า
5. ลู่ออก