

## บทที่ 6

### ทฤษฎีบทค่าตัวกลางและกฎของโลปีตาล (Mean Value Theorem and l'Hôpital's rule)

6.1 คำนำ คุณสมบัติของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเดียวเกี่ยวข้องกับการหาอนุพันธ์ จากแคลคูลัสเบื้องต้น นักศึกษาคงจำได้ว่า

$f$  กล่าวได้ว่าหาอนุพันธ์ได้ที่  $x_0$  ถ้า  $f$  ถูกกำหนดขึ้นให้มีค่าบนย่านจุด  $x_0$  และถ้า  $f'(x_0)$  หาค่าได้ และกำหนดขึ้นโดย

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ เป็นความไม่ต่อเนื่องที่ขจัดได้}$$

การประยุกต์แคลคูลัสในการหาอนุพันธ์ที่พบบ่อย ๆ ก็คือ ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด กล่าวไว้ว่า  $f$  มีค่าสูงสุดเฉพาะที่ (local maximum) ที่  $x_0$  ถ้ามี ย่านจุด  $x_0$  เรียกว่าประกอบด้วย  $x_0$  ซึ่ง  $f(x) \leq f(x_0)$  สำหรับทุก  $x \in U$  สำหรับค่าต่ำสุด เฉพาะที่ (local minimum) นิยาม คล้าย ๆ กันว่า  $f$  มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่  $x_0$  ถ้ามีย่านจุด  $x_0$  เรียกว่า  $U$  ประกอบด้วย  $x_0$  ซึ่ง  $f(x) \geq f(x_0)$  สำหรับทุก  $x \in U$  คำว่า  $f$  มีค่าสุดขีด (extreme value) ที่  $x_0$  หมายความว่า  $f$  อาจมีค่าสูงสุดเฉพาะที่ หรือไม่มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่  $x_0$

**ทฤษฎี 6.1.1** ให้  $f$  ถูกกำหนดบนย่านจุด  $x_0$  และมีค่าสุดขีดเฉพาะที่ (local extreme value) ที่  $x_0$  ถ้า  $f$  หาอนุพันธ์ได้ที่  $x_0$  และ  $f'(x_0) = 0$

**พิสูจน์** สมมติว่า  $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$  สำหรับทุก  $h$  ซึ่ง  $|h| < \delta$   
และ

$$C = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \text{ มีค่า}$$

ค่าลิมิตนี้คำนวณได้โดยการให้  $h$  เข้าใกล้ 0 จากทางขวา และเข้าใกล้ 0 จากทางซ้าย จึงพบว่า

$$C_1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

และ

$$C_2 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

เนื่องจาก  $f$  มีอนุพันธ์ที่  $x_0$  ดังนั้น  $C = C_1 = C_2 = 0$   
นั่นคือ  $f'(x_0) = 0$

ช.ค.พ.

**ข้อควรจำ**  $f'(x_0)$  ไม่จำเป็นต้องเป็น 0 ถ้า  $x_0$  เป็นจุดปลาย ซึ่งไม่ใช่จุดข้างใน (interior point) ของ  $B$  ดังนั้น การใช้ทฤษฎีนี้ในปัญหาค่าต่ำสุดและสูงสุดของฟังก์ชัน พิจารณาแยกจากกันกับความ เป็นไปได้ของค่าสุดขีดที่จุดปลาย (endpoint) ของกราฟ

**ทฤษฎี 8.2.1** ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem) ให้  $f$  ต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$  และให้  $f'(x)$  หาค่าได้สำหรับทุก  $x \in (a, b)$  ถ้า  $f(a) = f(b)$  แล้วย่อมมีจุด  $x_0$  อย่างน้อยหนึ่งจุด ซึ่ง  $f'(x_0) = 0$

**พิสูจน์**

1) ถ้า  $f$  มีค่าคงที่ก็สามารถเลือก  $x_0$  ใด ๆ ซึ่ง

$$x_0 \in (a, b) \text{ แล้ว } f'(x_0) = 0 \text{ เสมอ}$$

2) ถ้า  $f$  มีค่าไม่คงที่แล้ว  $f$  ย่อมมีค่าสูงสุดเฉพาะที่ หรือต่ำสุดเฉพาะที่ที่จุดข้างใน  $x_0 \in (a, b)$  และเนื่องจาก  $f$  หออนุพันธ์ได้ใน  $(a, b)$  ดังนั้น  $f'(x_0) = 0$

ช.ค.พ.

**บทแทรก 8.2.1** ถ้า  $f$  หออนุพันธ์ได้บนช่วง  $(a, b)$  แล้วค่าที่ศูนย์ถูกแบ่งแยกโดยค่า 0 ของ  $f'$  หมายความว่า ถ้า  $f(c) = 0$  และ  $f(d) = 0$  และ  $d$  อยู่ใน  $(a, b)$  หออนุพันธ์ได้บนช่วง  $(a, b)$  แล้ว ย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งค่า  $x_0 \in (c, d)$  ซึ่ง  $f'(x_0) = 0$

**บทแทรก 8.2.2** ให้  $f$  และ  $g$  ต่อเนื่องบน  $[a, b]$  และหออนุพันธ์ได้บนช่วง  $(a, b)$  สมมุติว่า  $f(a) = g(a)$  และ  $f(b) = g(b)$  แล้วย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด  $x_0 \in (a, b)$  ซึ่ง  $f'(x_0) = g'(x_0)$

**ทฤษฎีบท 6.2.2** ทฤษฎีค่าตัวกลาง (Mean Value Theorem) ให้  $f$  ต่อเนื่องบน  $[a, b]$  และให้  $f'(x)$  มีค่าที่ทุก  $x \in (a, b)$  แล้วย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด  $x_0 \in (a, b)$  ซึ่ง

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_0)$$

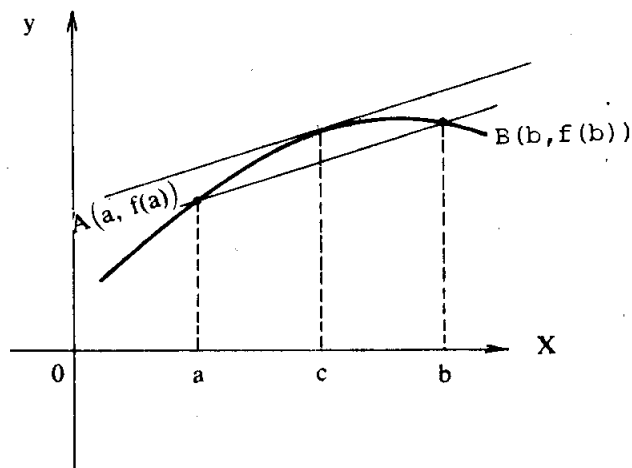
ก่อนพิสูจน์ทฤษฎีค่าตัวกลาง ขอให้มาทำความเข้าใจในเชิงเรขาคณิต

ถ้าเราเขียนกราฟของฟังก์ชัน  $f$  พบว่า  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  คือความชันของเซกเมนต์

ที่เชื่อมจุด  $A(a, f(a))$  และจุด  $B(b, f(b))$

ทฤษฎีค่าตัวกลางกล่าวว่า จะมีบางจุดบนเส้นโค้งระหว่าง  $A$  กับ  $B$  ซึ่งเส้นสัมผัสโค้งที่จุดนั้น ขนานกับเส้นที่เชื่อม  $A$  กับ  $B$  นั่นคือ มีบางจำนวน  $c$  ใน  $(a, b)$  ซึ่ง

$$\frac{f'(c) = f(b) - f(a)}{b - a}$$



รูป 6.1

**พิสูจน์**

สมการเส้นตรงที่เชื่อม  $A$  และ  $B$  คือ

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

หรือ  $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$

ถ้าให้  $F(x)$  เป็นระยะทางในแนวตั้ง ระหว่างจุด  $(x, f(x))$  บนกราฟของฟังก์ชัน  $f$  และจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อม  $A$  กับ  $B$

$$\text{ดังนั้น } F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a)$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชัน  $F$  สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์

ฟังก์ชัน  $F$  ต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$  เพราะว่า  $F$  เป็นผลบวกของ  $f$  และฟังก์ชันพหุนามเชิงเส้น ซึ่งทั้งสองต่อเนื่งบน  $[a, b]$  ดังนั้น  $F$  สอดคล้องตาม (i) และ  $F$  สอดคล้องตาม (ii) เนื่องจาก  $f$  มีอนุพันธ์บน  $(a, b)$  จาก (1)  $F(a) = 0$  และ  $F(b) = 0$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทของโรลล์ จะมีจำนวน  $c$  ในช่วงเปิด  $(a, b)$  ซึ่ง  $F'(c) = 0$  แต่

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

นั่นคือ จะมีจำนวน  $c$  ใน  $(a, b)$  ซึ่ง

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

หรือ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**ตัวอย่าง 1**

กำหนด  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$

จงแสดงว่า เมื่อ  $a = 1$  และ  $b = 3$  ฟังก์ชันสอดคล้อง สมมุติฐานของทฤษฎีค่าตัวกลาง และจงหาจำนวน  $c$  ในช่วงเปิด  $(1, 3)$  ซึ่ง  $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$

**วิธีทำ**

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

$$f(1) = -7 \text{ และ } f(3) = -27$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2} = -10$$

$$\text{ให้ } f'(c) = -10$$

$$\therefore 3c^2 - 10c - 3 = -10$$

หรือ

$$3c^2 - 10c + 7 = 0$$

หรือ

$$(3c - 7)(c - 1) = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } c = \frac{7}{3} \text{ และ } c = 1.$$

เพราะว่า  $c = 1$  ไม่อยู่ในช่วงเปิด  $(1, 3)$  ฉะนั้น  $c$  มีค่าเป็น  $\frac{7}{3}$  ||

**ตัวอย่าง 2**

กำหนด  $f(x) = x^3$  จงหาค่าที่เหมาะสมของ  $c$  เมื่อ  $a = -1$  และ  $b = 2$

**วิธีทำ**

$$f'(x) = 3x^2$$

$$b^3 - a^3 = (b - a) 3c^2$$

เมื่อ  $a = -1$ ,  $b = 2$  จะได้ว่า

$$8 - (-1)^3 = (2 - (-1)) 3c^2$$

$$\text{หรือ } c^2 = 1$$

แก้สมการได้  $c = \pm 1$  เราต้องการค่า  $c$  ซึ่ง  $a < c < b$

หรืออีกนัยหนึ่ง  $-1 < c < 2$

ดังนั้น  $c = 1$  คือค่าที่เหมาะสม

**ทฤษฎีบท 6.2.8** ทฤษฎีบทค่าตัวกลางทั่วไป (general Mean Value Theorem) ให้  $f$  และ  $g$  ต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  และให้  $f'(x)$  และ  $g'(x)$  ทั้งสองมีค่าบน  $(a, b)$  แล้ว ย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด  $x_0 \in (a, b)$  ซึ่ง

$$[f(b) - f(a)] g'(x_0) = [g(b) - g(a)] f'(x_0)$$

**พิสูจน์**

ถ้า  $f'(x) = 0$  บนช่วง  $(a, b)$  ดังนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันคงที่

ถ้า  $f'(x)$  ไม่เปลี่ยนแปลงเครื่องหมายเลยบนช่วง  $(a, b)$  ดังนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวหรือเพิ่มอย่างเดียว (monotonic function)

ถ้า  $g$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

หรือฟังก์ชันกำลังหนึ่ง คือ  $g(x) = x$  หรือ  $g(x) = mx + c$  ทฤษฎีนี้ก็คือ ทฤษฎี

ค่าตัวกลาง 6.2.2

ในการพิสูจน์ เราจะสร้างฟังก์ชันพิเศษ  $F$  โดยให้

$$F(x) = f(x) - K g(x)$$

เพื่อที่เราจะได้นำ ทฤษฎีบทของโรลล์มาใช้

$K$  เป็นค่าคงที่ที่จะเลือกในภายหลัง จากฟังก์ชัน  $F$  ที่สร้างขึ้น เราทราบว่า  $F$  ต่อเนื่องบน  $[a, b]$  และหาอนุพันธ์ได้บน  $(a, b)$  โดยการใส่ทฤษฎีบทของโรลล์ ให้  $F(a) = F(b)$  จึงได้ว่า

$$f(a) - K g(a) = f(b) - K g(b)$$

$$\text{หรือ } f(b) - f(a) = K (g(b) - g(a))$$

พิจารณาสมการนี้มีกรณีที่สามารถเป็นไปได้ 2 กรณีคือ

1) ถ้า  $g(b) - g(a) = 0$  จึงได้  $f(b) - f(a) = 0$

สมการเป็นความจริง คือ ทั้งสองข้างต่างเป็น 0 เท่ากัน

2) ถ้า  $g(b) - g(a) \neq 0$  ก็สามารถแก้สมการเพื่อหาค่า  $K$  และ  $F$  ได้ โดยทฤษฎีบทของ โรลล์ ย่อมมีจุด  $x_0$  ที่  $F'(x_0) = 0$

$$\text{เนื่องจาก } F'(x) = f'(x) - K g'(x)$$

$$\text{จึงได้ } F'(x_0) = K g'(x_0)$$

$$\text{เมื่อแทนค่า } K \text{ ใน } f(a) - K g(a) = f(b) - K g(b)$$

ก็จะได้สมการ

$$[f(b) - f(a)] g'(x_0) = [g(b) - g(a)] f'(x_0)$$

$$\text{ถ้า } g(x) = mx + c \text{ ยานจุด } (a, f(a)) \text{ และ } (b, f(b))$$

$$\text{ดังนั้น } g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(x_0)$$

$$\text{และ } g(b) = f(b), g(a) = f(a)$$

จึงได้

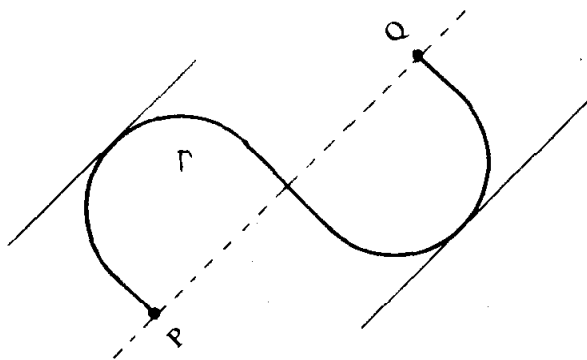
$$[f(b) - f(a)] \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = [f(b) - f(a)] f'(x_0)$$

จึงได้  $f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_0)$

ความหมายเชิงเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่าตัว ๆ ไป (ทฤษฎี 6.2.3) คล้ายกับทฤษฎีบทค่าตัวกลาง ถ้าสมมติว่า  $g'(x) \neq 0$  บนช่วง  $[a, b]$  แล้ว จากทฤษฎีบทของโรลล์ และทราบว่  $g(b) \neq g(a)$  ก็สามารเขียนสมการในทฤษฎี 6.2.3 เสียใหม่เป็น

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ให้  $\Gamma$  เป็นเส้นในระนาบ ซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equation) เป็น  $x = g(t)$ ,  $y = f(t)$  ซึ่ง  $t$  เป็นค่าใด ๆ ในช่วง  $[a, b]$  ทำให้ได้จุด  $(x, y)$  เป็นจุดใด ๆ บนเส้น  $\Gamma$  จากจุด  $P(g(a), f(a))$  ไปยังจุด  $Q(g(b), f(b))$  ทางซ้ายมือของสมการ ก็คือค่าความชันของเส้นตรงที่ต่อจุด  $P$  กับ  $Q$  ทางขวามือของสมการ สามารถเขียนได้ในรูป  $(dy/dt) / (dx/dt)$  เป็นความชันของเส้น ดังนั้น ความหมายของทฤษฎีบท 6.2.3 ก็คือ ต้องมีจุดบนเส้น  $\Gamma$  ซึ่งความชันเดียวกันกับเส้นตรง  $PQ$



### ทฤษฎีค่าตัวกลาง (Mean value theorem)

การใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลาง ใช้กันอยู่ 2 ทางคือ ในทางปฏิบัติและทางทฤษฎี

ในทางปฏิบัติ เช่น การใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลาง เพื่อการประมาณค่าของบางฟังก์ชัน

**ทฤษฎีบท 6.2.4** เมื่อ  $u > 0$  และ  $v \geq 0$ ,  $\sqrt{u^2 + v}$  อาจเขียนแทนด้วย  $u + v\sqrt{2u}$  ด้วยค่าผิดพลาดไม่เกิน  $\frac{v^2}{4u^3}$

เช่น  $\sqrt{87} = \sqrt{81 + 6} \approx 9 + \frac{6}{18} = 9\frac{1}{3}$  ซึ่งค่าผิดพลาดไม่เกิน  $\frac{36}{(4)(9)^3} \approx .012$

**พิสูจน์**

ให้  $f(x) = \sqrt{u^2 + x}$  ดังนั้น  $f(0) = u$  ในขณะที่  $f(v)$  เป็นค่าที่ต้องการประมาณ โดยใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางย่อมมี  $x_0$  ซึ่ง  $0 < x_0 < v$  ที่

$$\begin{aligned} f(v) &= f(0) + (v - 0) f'(x_0) \\ &= u + \frac{v}{2\sqrt{u^2 + x_0}} \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $x_0 > 0$ ,  $\sqrt{u^2 + x_0} > u$  และได้กล่าวแล้วว่า

$$f(v) < u + \frac{v}{2u}$$

ดังนั้นค่าโดยประมาณ  $u + \frac{v}{2u}$  มีค่ามากกว่าค่าจริง  $\sqrt{u^2 + v}$  เสมอ

ค่าผิดพลาดที่คาดในการประมาณค่าสังเกตว่า  $x_0 < v$  ดังนั้น

$$\sqrt{u^2 + x_0} < \sqrt{u^2 + v} < u + \frac{v}{2u}$$

$$\begin{aligned} \text{ฉะนั้น } f(v) &= u + \frac{v}{2\sqrt{u^2 + x_0}} \\ &> u + \frac{uv}{2\left|u + \frac{v}{2u}\right|} = u + \frac{uv}{2u^2 + v} \end{aligned}$$

และ

$$u + \frac{uv}{2u^2 + v} < \sqrt{u^2 + v} < u + \frac{v}{2u}$$



ค่าผิดพลาดอย่างมากที่สุด คือ

$$\left[ u + \frac{v}{2u} \right] - \left[ u + \frac{uv}{2u^2 + v} \right] = \frac{v^2}{(2u)(2u^2 + v)} < \frac{v^2}{4u^3}$$

### 6.3 ผลลัพธ์ที่มีประโยชน์ซึ่งได้จากทฤษฎีค่าตัวกลางทั่วๆ ไป

ก็คือ กฎของโลปีตาล โดยใช้ผลลัพธ์นี้เพื่อคำนวณหาค่าลิมิตของฟังก์ชันผลหาร

ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน เราพบว่า บางครั้ง เราจะพบฟังก์ชันในรูป  $\frac{\sin x}{x}$  ,

$\frac{(1 - \cos x)}{x^2}$  ฯลฯ และเราก็หวังจะหาค่าลิมิตของฟังก์ชันเหล่านี้ หรือพุดง่าย ๆ ก็คือ เราพยายาม

หาค่าลิมิตของฟังก์ชันในรูป  $\frac{f(x)}{g(x)}$  โดยที่  $f(a) = 0$  และ  $g(a) = 0$  ฟังก์ชันนี้อยู่ในรูปแบบที่ยัง

ไม่กำหนด (indeterminate form) เมื่อ  $x = a$  ซึ่งกฎของ l' Hôpital จะช่วยให้เราแก้ปัญหาเหล่านี้ได้

#### ทฤษฎีบท 6.3.1 กฎของโลปีตาล (l' Hôpital's rule)

ให้  $f$  และ  $g$  หอนอนุพันธ์ได้บนช่วง  $a \leq x < b$  ซึ่ง  $g'(x) \neq 0$  บนช่วงดังกล่าว ถ้า

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

หรือถ้า

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty \text{ และ } \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$$

$$\text{และถ้า } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ แล้ว}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ ด้วย}$$

จุดปลายข้างบน  $b$  อาจมีค่าแน่นอน หรือเป็น  $\infty$  และ  $L$  อาจมีค่าแน่นอนหรือ  $\infty$  ก่อนจะทำการพิสูจน์ ขอยกตัวอย่างการพิจารณาค่าลิมิตเสียก่อน

ในการคำนวณหาค่า

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} \text{ เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{4x^3} = 0$$

ถ้าพิจารณาค่าต่อไปนี้แทนคือ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(x^2)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

โดยทฤษฎีบทนี้ จึงได้ว่า  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2}$

ในการคำนวณหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$  เนื่องจาก  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

โดยทฤษฎีบทนี้ จึงได้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก ฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential function)

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log x^x} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ขอให้นักศึกษา พิจารณา  $\lim_{x \rightarrow \infty^-} e^{-\sin(x)}$  เราทราบแล้วว่า หาค่าไม่ได้

ถ้าเขียนลิมิตนี้เป็น  $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{(2x + \sin 2x)}{(2x + \sin 2x) e^{\sin x}}$

แล้วใช้กฎของโลปีตาล เพื่อหาผลลัพธ์ และได้

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cos x}{(2x + 4 \cos x + \sin 2x) e^{\sin x}} = 0$$

ข้อขัดแย้งนี้อธิบายได้ คือ ข้อผิดพลาดอยู่ที่การสรุปว่า บทกลับของทฤษฎีบทนี้เป็นจริง คือ เราสรุปเอาเองว่า

ถ้า  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  หาค่าไม่ได้ แต่  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$  หาค่าได้

### ทฤษฎีบท

i) เนื่องจากค่าลิมิตของเศษและส่วนต่างเป็น 0 จึงไม่ทราบว่ามีค่าเท่าไร สมมุติว่า  $b$  มีค่าแน่นอนค่าหนึ่ง

และให้  $f(b) = g(b) = 0$  จึงได้ว่า  $f$  และ  $g$  ต่างต่อเนื่องบน  $[a, b]$  โดยใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางทั่วไป ให้  $x$  เป็นจุดข้างในใด ๆ ของ  $[a, b]$  จึงมั่นใจว่ามีจุด  $t$  ที่  $x < t < b$  ซึ่ง

$$\frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

เนื่องจาก  $f(b) = g(b) = 0$  จึงได้

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f'(t)}{g'(t)} - L$$

และเนื่องจาก  $\lim_{t \rightarrow b} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$  ดังนั้น  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} - L = 0$

เมื่อให้  $\epsilon$  เข้าใกล้  $b$  เนื่องจาก  $t$  อยู่ระหว่าง  $x$  และ  $b$  โดยการควบคุม  $x$  จะได้ว่า

กำหนด  $\epsilon > 0$  สามารถเลือก  $\delta > 0$  ซึ่งถ้า  $b - \delta < x < b$

ทำให้ได้  $|b - t| < \delta$  และ  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \epsilon$

จึงได้  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ii) เนื่องจากค่าลิมิตของเศษและส่วนต่างเป็น  $\infty$  ซึ่งไม่สามารถทราบค่าที่แน่นอนของเศษนั้นได้ ให้  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $g(x) \rightarrow \infty$  และ  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow L$  เมื่อ  $x \rightarrow b$

และเนื่องจาก  $g'(x)$  ไม่ใช่ศูนย์ ซึ่งทราบว่าต้องเป็นบวก ดังนั้น  $g$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียว เพราะฉะนั้น  $g(x) > 0$  สำหรับทุก  $x \in [a, b]$  ถ้าให้  $\epsilon > 0$  เลือก  $x_0$  ดังนั้น ถ้า  $x_0 < t < b$

$$-\varepsilon < \frac{f'(t)}{g'(t)} - L < \varepsilon$$

เนื่องจาก  $g'(t) > 0$  จึงได้

$$(L - \varepsilon) g'(t) < f'(t) < (L + \varepsilon) g'(t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ส่วนหนึ่งทางขวาของ (1) ได้ว่า

$$f'(t) - (L + \varepsilon) g'(t) < 0$$

แสดงว่า  $f(x) - (L + \varepsilon) g(x)$  เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวนบนช่วง  $[x_0, b]$  เพราะว่าค่าอนุพันธ์เป็นลบบนช่วงนั้น ย่อมมีขอบเขตข้างบนในช่วงปิด  $[x_0, b]$

$$\text{ให้ } f(x) - (L + \varepsilon) g(x) < B$$

หารตลอดด้วย  $g(x) > 0$  จึงได้

$$\frac{f(x)}{g(x)} > L + \varepsilon + \frac{B}{g(x)}$$

เนื่องจาก  $g(x) \rightarrow \infty$  เมื่อ  $x \rightarrow b^-$

จึงพบว่าสำหรับ  $x_1$  ที่อยู่ใกล้ ๆ  $b$   $\frac{f(x)}{g(x)} < L + 2\varepsilon$  สำหรับทุก  $x$  ซึ่ง  $x_1 < x < b$

ถ้านำทางซ้ายมือของ (1) และคำนวณด้วยวิธีการเดียวกัน ก็จะได้ว่า

$$\frac{f(x)}{g(x)} > L - 2\varepsilon \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } x_1 < x < b$$

$$- 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - L < + 2\varepsilon$$

$$\text{หรือ } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < 2\varepsilon$$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

ตัวอย่าง 1

$$\text{จงหาค่าของ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{โดย 6.3.1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} \\
&= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 2**

จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x + 1}{x - 1}$

$$\frac{x \log x + 1}{x - 1} = \frac{\log \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x + 1}{x - 1}$  มีค่าเท่ากับ 2

## แบบฝึกหัด 6.1

### จงหาค่าของลิมิต

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\tan x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin x}{\cos x + \cos^2 x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{1 - \cos 4x}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 1 + x}{x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 5^x}{x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x - x}{x^3}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\sqrt{1 + x^3}}$

### 6.4 สูตรของเทย์เลอร์ กับเศษเหลือรูปอินทิกรัล

(Taylor's formula with integral remainder)

พิจารณาฟังก์ชันพหุนาม  $P(x)$  ดีกรี  $n$

$$P(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n, n \geq 0 \text{ เมื่อ } b_0 \neq 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ถ้าเลือกค่าเฉพาะของ  $x$  เช่นให้  $x = a$  เราสามารถเขียน  $P(x)$  ในรูปของผลรวมของกำลังของ  $(x - a)$  ซึ่งกำลังสูงสุดเป็น  $n$  :

$$P(x) = c_0(x - a)^0 + c_1(x - a)^1 + \dots + c_n \quad \dots\dots\dots(2)$$

ถ้า  $n = 0$  สมการ (1) กับ (2) คืออันเดียวกัน

ถ้า  $n = 1$  เราจะได้ฟังก์ชันเชิงเส้น  $P(x) = b_0x + b_1$

เราต้องการแสดงในรูปของ  $c_0(x - a) + c_1$

เลือก  $c_0 = b_0$  เราจะได้ว่า

$$P(x) - b_0(x - a) = b_1 + ab_0$$

เพื่อว่า  $P(x) = b_0(x - a) + c_1$  ซึ่ง  $c_1 = b_1 + ab_0$

โดยทั่ว ๆ ไป เราพิสูจน์โดยอุปนัยวิธีทางคณิตศาสตร์

สมมุติว่าสมการ (1) และ (2) จริงเมื่อ ดีกรี  $\leq n - 1$  เมื่อ  $n \geq 1$  ดังนั้น จาก (1) เรา

เลือก  $c_0 = b_0$  เพื่อว่า  $P(x) - b_0(x - a)$  เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดีกรีสูงสุดเป็น  $n - 1$

$$\text{ดังนั้น } P(x) - b_0(x - a) = c_1(x - a) + \dots + c_n$$

เหมือนกับสมการ (2)

$$\text{จาก } P(x) = c_0(x - a) + c_1(x - a) + \dots + c_n$$

ถ้าเราหาอนุพันธ์  $k$  ครั้ง  $0 \leq k \leq n$  (ถ้า  $k = 0$   $P^{(k)}(x)$  หมายถึง  $P(x)$ ) จาก  $d^n$  ให้  $x = a$

โดยกระบวนการเหล่านี้ จะมีเพียงพจน์เดียวของ  $P(x)$  ที่ผลลัพธ์

$$c_{n-k} (x - a)^k \text{ ไม่เป็นศูนย์}$$

$$P^{(k)}(a) = \left\{ \frac{d^k}{dx^k} [c_{n-k} (x - a)^k] \right\}_{x=a} = k! c_{n-k}$$

ซึ่ง  $0! = 1$

$$c_0 = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}, c_1 = \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}, \dots, c_n = p(a)$$

สมการ (2) อาจเขียนในรูปของ

$$P(x) = p(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \dots (3)$$

ถ้าเราแทนฟังก์ชันพหุนาม  $P(x)$  ด้วย  $f(x)$  ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพหุนาม เราอยากทราบว่า

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ เกี่ยวข้องกับ } f(x)$$

อย่างไร

เราสมมุติว่า เราหาอนุพันธ์ของ  $f$  ได้  $n$  ครั้ง ที่  $x = a$  และสมมุติต่อไปอีกว่า ฟังก์ชัน  $f$  และ อนุพันธ์อันดับที่  $n+1$  ของ  $f$  ต่อเนื่องในช่วงปิดที่มี  $x = a$  อยู่ภายในช่วงด้วย

จากทฤษฎีบทแคลคูลัสเบื้องต้น เราทราบว่า

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$$

เขียนใหม่เป็น

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \dots (4)$$

โดย การอินทิเกรตทีละส่วน โดยให้

$$u = f'(t), \quad dv = dt$$

$$du = f''(t) dt, \quad v = -(x-t)$$

$$\text{ดังนั้น } \int_a^x f'(t) dt = -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t) dt$$

$$\text{และ } f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t)(x-t) dt$$

โดยวิธีอินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง โดยให้

$$u = f''(t), \quad dv = (x-t) dt$$

$$du = f^{(3)}(t) dt, \quad v = \frac{-(x-t)^2}{2!}$$

อินทิกรัลของสมการ (5) จะเป็น



$$\int_a^x f''(t) (x-t) dt = -f''(t) \frac{(x-t)^2}{2!} \Big|_a^x + \int_a^x f'''(t) \frac{(x-t)^2}{2!} dt$$

และดังนั้น

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{1}{2!} \int_a^x f'''(t) (x-t)^2 dt$$

นักศึกษาอาจเห็นแล้วว่า โดยการอินทิเกรตทีละส่วนซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง จะได้สูตร

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

ซึ่งเป็นสิ่งที่เราต้องการทราบ นั่นคือ ฟังก์ชัน  $f(x)$  เขียนแสดงในรูปของฟังก์ชันพหุนาม ดีกรี  $n$  ใน  $(x-a)$  บวกกับพจน์ที่เหลือ (remainder term) สรุปเป็นทฤษฎีว่า

**ทฤษฎีบท 6.4.1** ให้  $f(x)$  และทุกอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ  $f$  ตั้งแต่ลำดับต้น ๆ จนถึงลำดับที่  $n+1$  หาค่าได้ และต่อเนื่องในช่วงปิดที่มี  $x=a$  อยู่ข้างในช่วงซึ่งอาจเป็นจุดปลายช่วงก็ได้ ให้  $x$  เป็นจุดใด ๆ ในช่วงนี้ ดังนั้น

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_{n+1}, \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad \dots\dots\dots(8)$$

เรียก สมการ (7) ว่า สูตรของเทย์เลอร์กับเศษเหลือ (Taylor's formula with-remainder)

ซึ่งเศษเขียนได้หลายแบบ ขนาดของเศษประมาณค่าโดยสูตร (8) ตัวอย่าง เช่น ถ้า

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M \text{ เมื่อ } a \leq t \leq x \text{ เราจะเห็นว่า}$$

$$|R_{n+1}| \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

## 6.5 เศษในรูปแบบอื่น ๆ

เราสามารถเขียน

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}$$

โดยเศษ  $R_{n+1}$  มีสูตรต่าง ๆ กันออกไป

**ทฤษฎีบท 6.5.1** ให้  $f$  และอนุพันธ์ลำดับต้น ๆ ถึง  $n$  ต่อเนื่องเมื่อ  $a \leq x \leq b$  ( $a < b$ ) และให้อนุพันธ์ลำดับต้น ๆ ถึง  $n+1$  นั้น  $f^{(n+1)}(x)$  หาค่าได้เมื่อ  $a < x < b$  ดังนั้นจะมี จำนวน  $x = c, a < c < b$  ซึ่ง

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad (1)$$

สูตรเดียวกันนี้เป็นจริงกรณีที่  $b < a$  และสมการทั้งหมดยังคงเป็นไปตามเดิม พัฒนาการของทฤษฎีค่าตัวกลางนี้เป็นทฤษฎีเดียวกันกับทฤษฎีค่าตัวกลางกรณีที่  $n = 0$

### พิสูจน์

กำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ดังนี้

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n, \quad (2)$$

และ

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (3)$$

สังเกตเห็นว่า  $F(b) = G(b) = 0$

การคำนวณหาอนุพันธ์ของ  $F(x)$  พบว่า มีหลายพจน์ที่เกิดจากการหาอนุพันธ์หักล้างกันหมดไป จากการหาอนุพันธ์ของขวามือของ (1) พบว่า

$$\frac{d}{dx} [-f'(x)(b-x)] = -f''(x)(b-x) + f'(x)$$

พจน์  $f'(x)$  จะหักล้างกับอนุพันธ์ของพจน์ที่มาข้างหน้า  $-f(x)$

พจน์  $-f''(x)(b-x)$  หักล้างกับพจน์หนึ่งที่มาจาก

อนุพันธ์ของ  $-\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2$  ผลลัพธ์ที่ได้ในที่สุด คือ

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n \quad (4)$$

$$\text{และ } G'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \quad (5)$$

จากทฤษฎีค่าตัวกลางทั่ว ๆ ไป 6.2.3 เนื่องจาก  $F(b)$  และ  $G(b)$  เป็น 0

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}, \text{ หรือ } F(a) = \frac{F'(c)}{G'(c)} G(a)$$

จาก (3) , (4) และ (5) เขียนใหม่ว่า

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \quad (6)$$

ใน (2) ให้  $x = a$  และใช้ (6) เราจะได้สูตร (1)

การพิสูจน์นี้ใช้ได้เสมอ ไม่ว่า  $a < b$  หรือ  $b < a$  เพราะผลของทฤษฎี 6.2.3 ไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อสลับที่  $a$  กับ  $b$

สูตรในทฤษฎี 6.5.1 เขียนได้หลายแบบ โดยการเปลี่ยนสัญลักษณ์ มีรูปแบบสำคัญ ๆ ที่พบบ่อย ๆ ในตำราต่าง ๆ ได้มาจากการเขียนแทนด้วย  $b = a + h$  เมื่อ  $h$  เป็นได้ทั้งบวกและลบ จำนวน  $c$  ระหว่าง  $a$  และ  $a + h$  เขียนเสียใหม่เป็น  $c = a + \theta h$  เมื่อ  $\theta$  เป็นบางจำนวน ซึ่ง  $0 < \theta < 1$  ดังนั้น

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (7)$$

แบบอื่นได้มาจากการเขียนแทนด้วย  $b = x$  ใน (1) จะได้ว่า

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_{n+1} \quad (8)$$

$$\text{ซึ่ง } R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad (9)$$

เมื่อ  $c$  อยู่ระหว่าง  $x$  กับ  $a$

เรียกสูตร (9) ว่า เศษเหลือในแบบของลากรองจ์ (Lagrange's form of the remainder)

นักศึกษาควรจะแยกสูตร (8) ให้ออกจาก อนุกรมเทเลอร์ (Taylor's series) ซึ่งเป็นอนุกรมอนันต์ มีสูตรเป็น

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (10)$$

**ตัวอย่าง**

จงเขียนสูตรของเทย์เลอร์ เมื่อ

กำหนด  $f(x) = \frac{1}{2+x}$ ,  $a = -1$  และ  $n = 2$  โดยใช้เศษเหลือในแบบของ

ลากรองจ์

**วิธีทำ**

$$f(-1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(2+x)^2}, \quad f'(-1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}, \quad f''(-1) = 2$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(2+x)^4}, \quad f^{(3)}(-1) = -6$$

ดังนั้นจาก

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{1}{2+x} = 1 - (x+1) + (x+1)^2 + R_3$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } R_3 &= \frac{-6}{(2+c)^4} \frac{(x+1)^3}{3!} \\ &= -\frac{(x+1)^3}{(2+c)^4} \end{aligned}$$

เมื่อ  $c$  อยู่ระหว่าง  $x$  กับ  $-1$  ถ้าเราต้องการประมาณค่า  $R_3$  พบว่า  $\frac{1}{2+c}$

อยู่ระหว่าง  $\frac{1}{2+x}$  กับ  $1$  และจะได้ว่า  $|R_3|$  อยู่ระหว่าง  $\frac{|x+1|^3}{(2+x)^4}$  และ  $|x+1|^3$

ตัวอย่างเช่น ถ้า  $x = -0.9$   $R_3$  เป็นจำนวนลบ และภายในค่าสัมบูรณ์ระหว่าง  $\frac{0.001}{(1.1)^4}$  และ  $0.001$

**ทฤษฎี 6.5.2** สูตรของเศษในทฤษฎี 6.5.1 จากสมการ

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (b-c)^n (b-a) \quad (11)$$

เมื่อ  $c$  เป็นจำนวนบางจำนวนระหว่าง  $a$  กับ  $b$  (โดยทั่วไปจำนวน  $c$  นี้ต่างไปจาก  $c$  ของ (1) ในทฤษฎี 6.5.1 โดย  $b = a + h$ ,  $c = a + \theta h$  ( $0 < \theta < 1$ )-

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{n!} h^{n+1} (1 - \theta) \quad (12)$$

ซึ่ง (12) นี้ก็คือ พจน์สุดท้ายของ (7) แต่โดยปกติแล้ว  $\theta$  ในสูตรทั้งสองเป็นคงตัว

**พิสูจน์**

กำหนด  $F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (b-x)^n$

และ  $G(x) = b - x$

โดยวิธีการพิสูจน์แบบทฤษฎี 6.5.1 จะได้

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n$$

และ  $G'(x) = -1$

สำหรับบางจำนวน  $c$  ระหว่าง  $a$  กับ  $b$

$$F(a) = \frac{F'(c)}{G'(c)} G(a)$$

หรือ  $F(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (b-c)^n (b-a)$

เป็นสมการเดียวกับ (ii) โดยการเปรียบเทียบกับ (2) และ (1)

แสดงว่า พจน์เศษเหลือคือ  $R_{n+1} = F(a)$

## แบบฝึกหัด 6.2

1. จงเขียน  $x^4$  ในกำลังของ  $(x - 3)$
2. จงเขียนสูตรของเทย์เลอร์ กับ เศษเหลือในแบบของลากรองจ์  
 ในกรณีที่  $f(x) = \frac{1}{n^2 + 3}$ ,  $a = 1$ ,  $n = 2$
3. จงเขียนสูตรของเทย์เลอร์กับเศษเหลือในแบบของลากรองจ์ เมื่อกำหนดให้
  - ก)  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 3$
  - ข)  $f(x) = \tan x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 3$
  - ค)  $f(x) = e^{-x^2}$ ,  $a = 0$ ,  $n = 3$
  - ง)  $f(x) = \log(1 + e^x)$ ,  $a = 0$ ,  $n = 2$
4. จาก  $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$   $x < c < a$   
 จงหา  $R_4$  เมื่อ  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$