บทที่ 5
ความต่อเนื่อง

5.1 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเดียว

พิจารณาฟังก์ชัน f ที่นิยามด้วยสมการ

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

สังเกตเห็นว่า f นิยามที่ค่าของ x ทั้งหมดยกเว้น 1
กราฟของฟังก์ชันประกอบไปด้วยจุดทั้งหมดบนเส้น $y = 2x + 3$ ยกเว้น (1,5) แสดงดังรูป 5.1 พบว่ามีช่องโหว่ในกราฟที่จุด (1,5) และเรากล่าวว่าฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่จำนวน 1 ถ้าเรานิยาม $f(1) = 2$ ฉะนั้นฟังก์ชันก็จะนิยามสำหรับค่าทั้งหมดของ x แต่ก็จะมีรอยโหว่ในกราฟ และฟังก์ชันก็ยังคงไม่ต่อเนื่องที่ 1 เช่นเดิม ถ้าเรานิยาม $f(1) = 5$ รอยโหว่ในกราฟก็จะไม่มี และเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ค่าทั้งหมดของ x ทำให้ได้นิยามว่า

นิยาม 5.1.1 *ฟังก์ชัน f เรียกว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จำนวน a ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน f สอดคล้องตามเงื่อนไขต่อไปนี้*

(i) $f(a)$ หาค่าได้

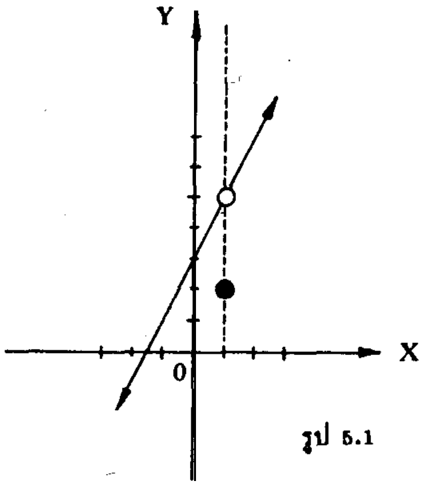
(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

ถ้าขาดคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่ง หรือมากกว่าหนึ่งข้อไป เรียกฟังก์ชันนี้ว่าเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ a

ตัวอย่าง 1 กำหนดฟังก์ชัน f โดย

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1} & \text{ถ้า } x \neq 1 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 1 \end{cases}$$



รูป 5.1

กราฟของฟังก์ชันแสดงไว้ในรูป พบว่ามีรอยโหว่ในกราฟที่จุดซึ่ง $x = 1$ และเมื่อตรวจสอบเงื่อนไขของความต่อเนื่องพบว่า

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ แต่ $f(1) = 2$

ดังนั้น ไม่สอดคล้องตามเงื่อนไขข้อ (3)

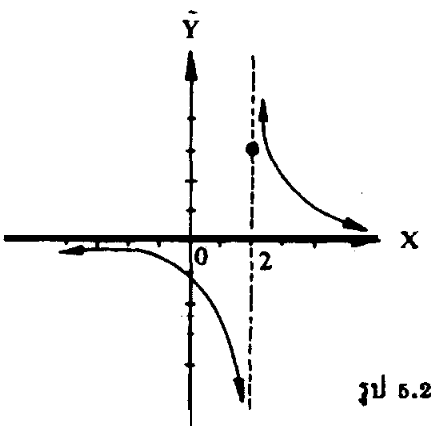
สรุปว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ 1

โปรดสังเกตว่าถ้าเรานิยาม f(1) ให้เท่ากับ 5 ดังนั้น

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ แล้ว f ก็จะกลายเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1

ตัวอย่าง 2

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$



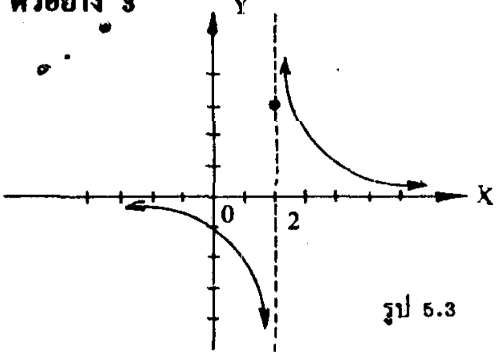
รูป 5.2

ดูจากกราฟจะเห็นมีรอยแยกที่ $x = 2$ เมื่อพิจารณาเงื่อนไขของนิยามความต่อเนื่องพบว่า

f(2) หาค่าไม่ได้ จึงขาดคุณสมบัติ ข้อ 1

จึงสรุปว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ 2

ตัวอย่าง 3



รูป 6.3

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 3 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

กราฟของ g แสดงดังรูป 6.9 เราพบว่า

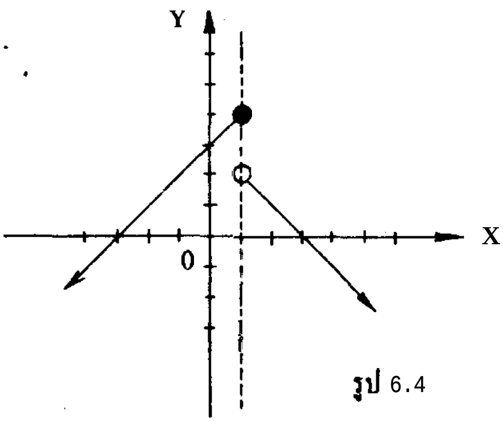
$g(2) = 3$ และ $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$

นั่นคือ มีคุณสมบัติตาม (i) แต่ขาดคุณสมบัติ (ii)

ดังนั้น g ไม่ต่อเนื่องที่ 2

ตัวอย่าง 4 นิยาม h(x) โดย

$$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{ถ้า } x \leqslant 1 \\ 3 - x & \text{ถ้า } 1 < x \end{cases}$$



รูป 6.4

$h(1) = 4$

$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3 + x) = 4$

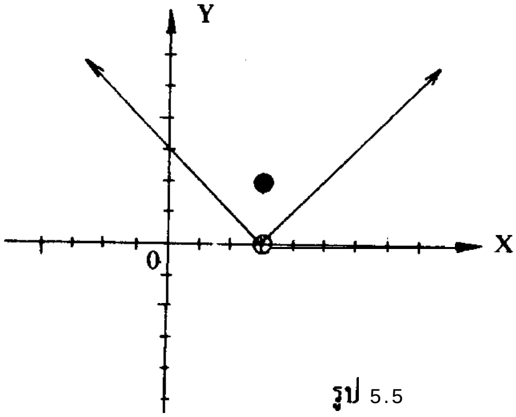
$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3 - x) = 2$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$ เราจึงสรุปว่า $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

หาค่าไม่ได้ นั่นคือ h(x) ขาดคุณสมบัติของความต่อเนื่องในข้อ (ii)

นั่นคือ h ไม่ต่อเนื่องที่ 1

ตัวอย่าง 5



รูป 5.5

$$F(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{ถ้า } x \neq 3 \\ a & \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$$

ณ จุด x = 3 สังเกตุพบว่า

F(3) = 2

Pim F(x) = 0 และ Pim F(x) = 0
x-+3- x-3.

ดังนั้น Pim F(x) มีอยู่ และเป็น 0
x-3

Pim F(x) = 0 แต่ F(3) = 2
$x \to 3$

สรุปได้ว่า F ไม่ต่อเนื่องที่ 3

แบบฝึกหัด 5.1

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน และจงพิจารณาค่าของตัวแปรอิสระที่ซึ่งฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ณ จุดนั้น และจงอธิบายว่า เป็นเพราะเหตุใด (โดยอาศัยแนวทางการพิจารณาจากนิยาม 5.1.1)

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x-4} & \text{ถ้า } x \neq 4 \\ 1 & \text{ถ้า } x = 4 \end{cases}$

2) $F(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

3) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{ถ้า } x \neq -3 \\ 1 & \text{ถ้า } x = -3 \end{cases}$

4) $h(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + x - 6}$

5) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ x & \text{ถ้า } 0 < x \end{cases}$

6) $f(x) = |2x + 5|$

7) $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{ถ้า } x \neq 3 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$

8) $f(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{ถ้า } t \leqslant 2 \\ t & \text{ถ้า } t > 2 \end{cases}$

9) $f(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s + 5} & \text{ถ้า } s \neq -5 \\ 0 & \text{ถ้า } s = -5 \end{cases}$

10) $g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{ถ้า } x \leqslant 1 \\ 8 - 3x & \text{ถ้า } 1 < x < 2 \\ x + 3 & \text{ถ้า } 2 \leqslant x \end{cases}$

5.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับความต่อเนื่องและความต่อเนื่องบนช่วง

โดยการประยุกต์ นิยาม 5.1.1 และทฤษฎีลิมิตทำให้ได้ทฤษฎีเกี่ยวกับฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเฉพาะที่

ทฤษฎี 5.2.1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ซึ่งมีความต่อเนื่องที่จุด a ดังนั้น

(i) $f + g$ ต่อเนื่องที่จุด a

(ii) $f - g$ ต่อเนื่องที่จุด a

(iii) $f.g$ ต่อเนื่องที่จุด a

(iv) $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่จุด a เมื่อ $g(a) \neq 0$

การพิสูจน์สำหรับ i

เพราะว่า f และ g ต่อเนื่องที่ a จากนิยาม 5.1.1 เรามี

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{.........(1)}$$

และ

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \qquad \text{.........(2)}$$

ดังนั้นจาก (1) และ (2) และทฤษฎีลิมิตเราได้ว่า

$$\lim_{x - a} |f(x) + g(x)| = f(a) + g(a) \qquad \text{.........(3)}$$

$\therefore$ $f + g$ ต่อเนื่องที่ a

การพิสูจน์ (ii), (iii), (iv) ละไว้เป็นแบบฝึกหัดของผู้อ่าน

ทฤษฎี 5.2.2 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด ในการพิสูจน์ขอให้นักศึกษาพิจารณาฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \quad b_0 \neq 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $b_0, b_1, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริง โดยการประยุกต์เข้ากับทฤษฎีลิมิต เราสามารถแสดงว่า ถ้า a เป็นจำนวนใด ๆ

$$\lim_{x \to a} f(k) = b_0a^n + b_1a^{n-1} + b_2^{n-2} + \ldots + b_{n-1}a + b_n$$

ซึ่งจะได้ผลตามมาว่า

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ตัวอย่าง ฟังก์ชันพหุนามต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวน

ก) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

ข) $g(x) = (x^2 - 5)^4$

ค) $f(x) \cdot g(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + 1)(x^2 - 5)^4$

ทฤษฎี 5.2.3 ฟังก์ชันตักยะ (rational function) มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนใดในโดเมน

พิสูจน์ ถ้า f เป็นฟังก์ชันตักยะ ฉะนั้นสามารถแสดงได้ในรูปของ $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

ซึ่ง g และ h เป็นฟังก์ชันพหุนาม และโดเมนของ f ประกอบด้วยจำนวนทั้งหมดยกเว้นที่จำนวนซึ่ง $h(x) = 0$

ถ้า a เป็นจำนวนใด ๆ ในโดเมนของ f ดังนั้น $h(a) \neq 0$ และโดยทฤษฎีลิมิต

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)}$$

เพราะว่า g และ h เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยทฤษฎีจะได้ว่าฟังก์ชันทั้งสองมีความต่อเนื่องที่ a และดังนั้น

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \text{ และ } \lim_{x \to a} h(x) = h(a)$$

และ

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่ทุกจำนวนในโดเมนของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 9}$

จงพิจารณาค่าทั้งหมดของ x ซึ่ง f มีความต่อเนื่อง

วิธีทำ โดเมนของ f คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด ยกเว้นจำนวนซึ่ง $x^2 - 9 = 0$ และเพราะว่า $x^2 - 9 = 0$ เมื่อ $x = \pm 3$ จึงได้ผลลัพธ์ว่า โดเมนของ f คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด ยกเว้น 3 และ -3

f เป็นฟังก์ชันตักยะ ดังนั้นโดยทฤษฎี f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุด บนเส้นจำนวน ยกเว้น $3, -3$

นิยาม 5.2.1 กล่าวว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่จำนวน a

ถ้า $f(a)$ หาค่าได้ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ และ

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{..........(1)}$$

จาก $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ถ้าสำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวน $\delta > 0$ ซึ่ง

$|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อไรก็ตามที่ $0 < |x - a| < \delta$

แต่เรามี $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ฉะนั้นสำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวน $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ เมื่อ } 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{..........(2)}$$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ a เรารู้ว่า $f(a)$ หาค่าได้ จึงไม่จำเป็นว่า $|x - a| > 0$ เพราะเมื่อ $x = a$ ข้อความ (2) ยังเป็นจริงเห็นได้ชัดแจ้ง ต่อไปนี้จะนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชันโดยใช้สัญลักษณ์ ε และ δ

นิยาม 5.2.2 กล่าวว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่จำนวน a

ถ้า f ถูกนิยามบนช่วงเปิดบางช่วงที่มี a เป็นจุดภายในช่วง และถ้าสำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ เมื่อ $|x - a| < \delta$

ทฤษฎี 5.2.4 ถ้า $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ และ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ b

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

หรือ

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

พิสูจน์ เพราะว่า f ต่อเนื่องที่ b และจากนิยาม 5.2.2 จะได้ว่า

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon_1 \text{ เมื่อ } |y - b| < \delta_1 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, สำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\delta_1 > 0$ จำมีจำนวนหนึ่ง $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|g(x) - b| < \delta_1 \text{ เมื่อ } 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

เมื่อ $0 < |x - a| < \delta_2$ เราแทน y ใน (1) ด้วย $g(x)$ และเราจะได้ว่า สำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon_1 > 0$ จะมีจำนวนหนึ่ง $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon_1 \text{ เมื่อ } |g(x) - b| < \delta_1 \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

จาก (3) และ (2) เราสรุปว่า

สำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon_1 > 0$ จะมีจำนวนหนึ่ง $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon_1 \text{ เมื่อ } 0 < |x - a| < \delta_2$$

ฉะนั้น $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$

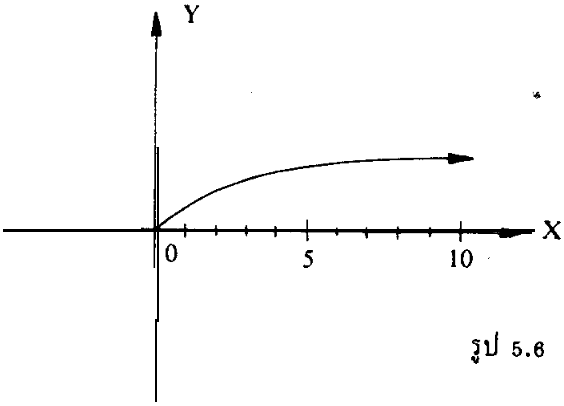
หรือ

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

ทฤษฎีบท 5.2.5 ให้ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว f **จะมีความต่อเนื่องที่** a ถ้า

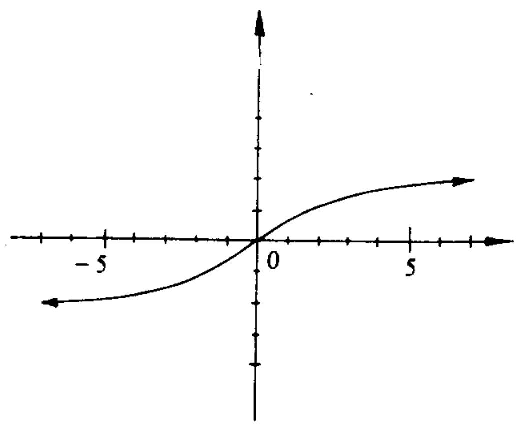
1) a เป็นจำนวนบวกใด ๆ หรือ
2) a เป็นจำนวนลบหรือศูนย์ และ n เป็นเลขคี่

ตัวอย่าง ถ้า $g(x) = \sqrt{x}$ โดยทฤษฎี 5.2.5 (1) จะได้ว่า g ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนบวก



รูป 5.6

ตัวอย่าง ถ้า $h(x) = \sqrt[3]{x}$ โดยทฤษฎี 5.2.5 (1) และ (2) จะได้ว่า h มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริง ดังรูป 5.7



รูป 5.7

การพิสูจน์ทฤษฎี ละไว้เป็นแบบฝึกหัดของผู้อ่าน

ทฤษฎี 5.2.6 ถ้าฟังก์ชัน g ต่อเนื่องที่ a และฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ g(a) ดังนั้น ฟังก์ชันประกอบ $f_o g$ ต่อเนื่องที่ a

พิสูจน์ จากการที่ g ต่อเนื่องที่ a

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \qquad \text{..........(1)}$$

f ต่อเนื่องที่ g(a) และจากทฤษฎี 5.2.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} (f\circ g)(x) &= \lim_{x\to a} f(g(x)) \\ &= f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) \\ &= f\left(g(a)\right) \quad \text{จาก (1)} \\ &= (f\circ g)(a)\end{aligned}$$

$\therefore$ $f\circ g$ ต่อเนื่องที่ a

ตัวอย่าง ถ้า $g(x) = 4 - x^2$ และ $f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น ถ้า h เป็นฟังก์ชันประกอบ $f\circ g$

$h(x) = (f\circ g)(x) = \sqrt{4 - x^2}$

เพราะ g เป็นฟังก์ชันพหุนาม g มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ แห่ง นอกไปจากนี้ f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนบวก ดังนั้นโดยทฤษฎี 5.2.6 h มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวน x ซึ่ง $g(x) > 0$ นั่นคือ เมื่อ

$4 - x^2 > 0$

หรือ

$x^2 < 4$

หรือ $-2 < x < 2$

ดังนั้น h มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนในช่วงเปิด $(-2,2)$

ในตัวอย่างนี้ เพราะว่า h มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนในช่วงเปิด $(-2,2)$ เรากล่าวว่า h มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-2,2)$ จึงเกิดเป็นนิยามของ "ความต่อเนื่องบนช่วงเปิด"

นิยาม 5.2.3 กล่าวว่า ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันนั้นต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนในช่วงเปิด

ตัวอย่าง ถ้า $f(x) = 1/x - 3$ แล้ว f มีความต่อเนื่องบนช่วงใด

วิธีทำ ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนยกเว้นที่ 3 โดยนิยาม f มีความต่อเนื่องบนทุก ๆ ช่วงเปิด ที่ไม่รวมจำนวน 3

ขอให้กลับไปพิจารณาฟังก์ชัน h ซึ่ง $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ เราทราบว่า h มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-2,2)$ อย่างไรก็ตาม เพราะว่า h ไม่ได้นิยามบนช่วงเปิดใด ๆ ที่รวมทั้งจุด -2 หรือ 2 เราไม่อาจพิจารณา $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

ดังนั้น เพื่อที่จะอภิปรายคำถามของความต่อเนื่องของ h บนช่วงปิด $[-2,2]$ เราลองขยายความคิดเกี่ยวกับความต่อเนื่องออกไปให้ครอบคลุมถึงความต่อเนื่องที่จุดปลายช่วงปิดหนึ่ง ๆ ด้วย โดยการนิยาม "ความต่อเนื่องด้านขวา" และนิยาม "ความต่อเนื่องด้านซ้าย"

นิยาม 5.2.4 ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องด้านขวาที่จำนวน a ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน f สอดคล้องกับเงื่อนไขสามข้อดังนี้

(i) $f(a)$ หาค่าได้

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ หาค่าได้

(iii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

นิยาม 5.2.5 ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องด้านซ้ายที่จำนวน a ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน f สอดคล้องกับเงื่อนไขสามข้อดังนี้

(i) $f(a)$ หาค่าได้

(ii) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ หาค่าได้

(iii) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

นิยาม 5.2.6 ฟังก์ชัน ซึ่งโดเมนคือช่วงปิด $[a,b]$ เรียกว่า มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) และมีความต่อเนื่องด้านขวาที่ a และต่อเนื่องด้านซ้ายที่ b

ตัวอย่าง จงแสดงว่า ฟังก์ชัน h ซึ่ง $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-2,2]$

ทีทํา ฟังก์ชัน h มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-2,2)$ และ

$$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{4-x^2} = 0 = h(-2)$$

และ $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0 = h(2)$

ดังนั้น h มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-2,2]$

นิยาม 5.2.7 (i) ฟังก์ชันซึ่งโดเมนประกอบด้วย $[a,b)$ ต่อเนื่องบน $[a,b)$ ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) และต่อเนื่องทางขวาที่ a

(ii) ฟังก์ชันซึ่งโดเมนประกอบด้วย $(a,b]$ ต่อเนื่องบน $(a,b]$ ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) และต่อเนื่องทางซ้ายที่ b

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}}$

จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่อง หรือไม่ต่อเนื่องบนแต่ละช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$(-3,2)$, $[-3,2]$, $[-3,2)$, $(-3,2]$

วิธีทำ เริ่มแรกเราพิจารณาโดเมนของ f ก่อน โดเมนของ f คือเซตของจำนวนทั้งหมด ซึ่ง $\dfrac{(2-x)}{(3+x)}$ ไม่เป็นลบ ดังนั้นค่าใด ๆ ของ x ซึ่งทำให้ตัวเศษและตัวส่วนนี้มีเครื่องหมายตรงข้าม ไม่อยู่ในโดเมนของ f ตัวเศษเปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อ $x = 2$ ตัวส่วนเปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อ $x = -3$ เราใช้ตารางต่อไปนี้เพื่อพิจารณาว่า เมื่อไรเศษส่วนจึงเป็นบวก เป็นลบ เป็นศูนย์ หรือไม่นิยาม ซึ่งจะมีประโยชน์ต่อการพิจารณาค่าของ x ซึ่งทำให้ $f(x)$ หาค่าได้

โดเมนของ f คือ $(-3,2)$ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $(-3,2)$ และต่อเนื่องทางซ้ายที่ 2 เพราะ

$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{\frac{2-x}{3-x}} = 0 = f(2)$$

อย่างไรก็ตาม f ไม่ต่อเนื่องทางขวาที่ -3 เพราะ

$$\lim_{x \to -3^+} \sqrt{\frac{2-x}{3+x}} = +\infty$$

จึงสรุปว่า f ต่อเนื่องบน $(-3,2]$ และไม่ต่อเนื่องบน $[-3,2]$ กับ $-3,2)$

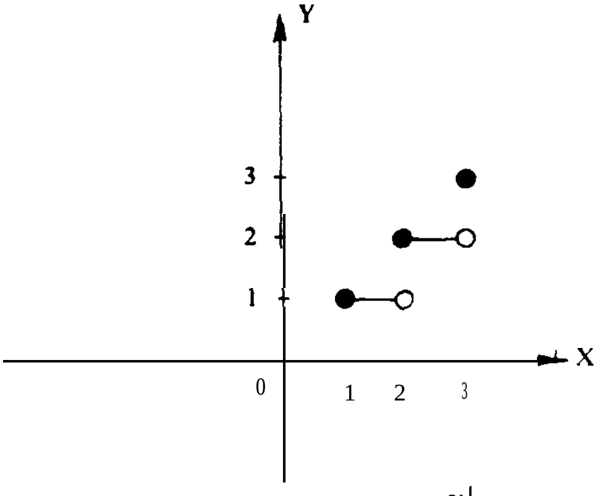
	$2-x$	$3+x$	$\frac{2-x}{3+x}$	f(x)
$x < -3$	+		−	หาค่าไม่ได้
$x = -3$	5	0	ไม่ถูกนิยาม	หาค่าไม่ได้
$-3 < x < 2$	+	+	+	+
$x = 2$	0	5	0	0
$2 < x$	−	+	−	หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2 กำหนด

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } 1 \leqslant x < 2 \\ 2 & \text{ถ้า } 2 \leqslant x < 3 \\ 3 & \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$$

จงอภิปรายความต่อเนื่องของ g

วิธีทำ



รูป 5.6

รูป 5.6 แสดงถึงกราฟของ g

สมมุติให้ u เป็นจำนวนใด ๆ ใน (1,2) ดังนั้น g(u) = 1 และ $\lim\limits_{x \to u} g(x) = 1$ ดังนั้นถ้า $1 < u < 2$

$\lim\limits_{x \to u} g(x) = g(u)$ และจะได้ว่า g ต่อเนื่องบน (1,2)

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1 = g(1)$$

นั่นคือ g ต่อเนื่องทางขวาที่ 1 แต่

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} 1 = 1$$

และ g(2) = 2

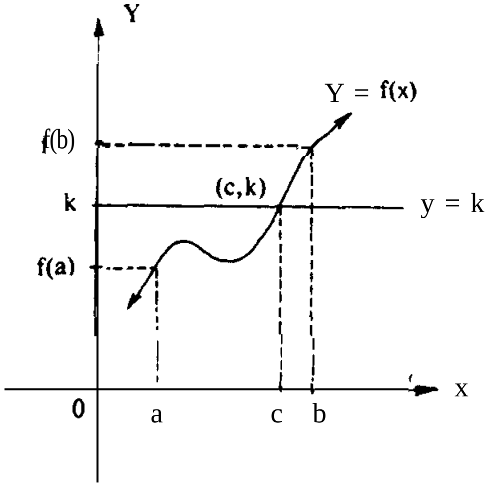
นั่นคือ g ไม่ต่อเนื่องทางซ้ายที่ 2 ฟังก์ชัน g จึงต่อเนื่องบนช่วง [1,2)

ในทำนองเดียวกัน g ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวน u ซึ่ง $2 < u < 3$ ที่ 2 g ต่อเนื่องทางขวา เพราะ $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = g(2)$ แต่ g ไม่ต่อเนื่องทางซ้ายที่ 3 เพราะ $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = 2$ และ g(3) = 3 จึงได้ว่า g ต่อเนื่องบนช่วง [2,3] ด้วย

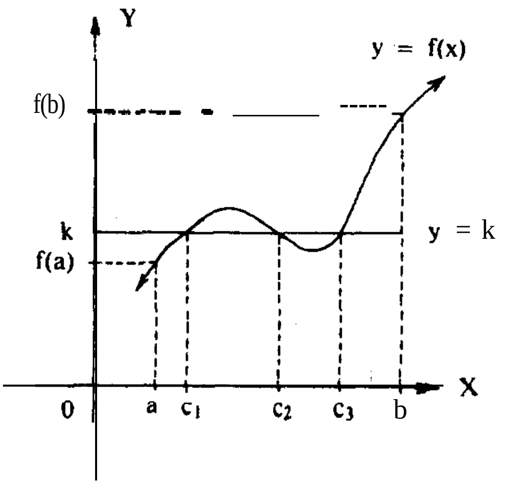
ทฤษฎี 5.2.6 Intermediate-Value Theorem ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด [a,b] และ ถ้า $f(a) \neq f(b)$ ดังนั้นสำหรับจำนวนใด ๆ k ระหว่าง f(a) และ f(b) จะมีจำนวน c ระหว่าง a และ b ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $f(c) = k$

เรามาอภิปรายทฤษฎีนี้เชิงเรขาคณิต จากรูป 5.7 (0,k) เป็นจุดใด ๆ บนแกน y ระหว่างจุด (0, f(a)) และ (0, f(b)) เราทราบว่า เส้น $y = k$ ต้องตัดกับเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $y = f(x)$ ณ จุด (c, k) ซึ่ง c อยู่ระหว่าง a และ b

โปรดสังเกตว่าสำหรับบางค่าของ k อาจมีจำนวน c ที่สมนัยกับ k ได้หลายค่า ทฤษฎีนี้กล่าวว่า จะมีจำนวน c อย่างน้อยหนึ่งค่า แต่ไม่จำต้องมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น ดังรูป 5.8 ที่แสดงค่า c ที่เป็นไปได้ (c_1, c_2 และ c_3) สำหรับจำนวน k ทฤษฎีนี้กล่าวว่า ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงปิด [a,b] ดังนั้น f มีค่าอยู่ระหว่าง f(a) กับ f(b) เมื่อ x เป็นค่าที่อยู่ระหว่าง a กับ b



รูป 5.7

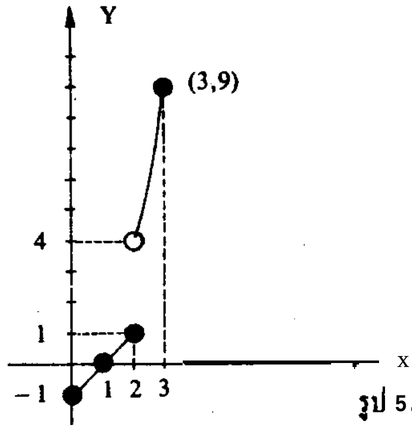


รูป 5.8

ตัวอย่าง พิจารณา ฟังก์ชัน f กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{ถ้า } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 & \text{ถ้า } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

ซึ่งกราฟของฟังก์ชันแสดงไว้ในรูป 5.9

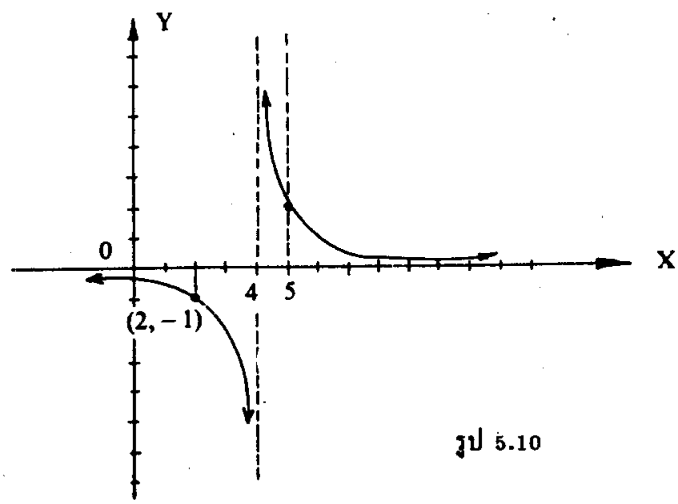


รูป 5.9

ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ 2 ซึ่งอยู่ในช่วงปิด [(0,3] , f(0) = - , และ f(3) = 9 ถ้า k เป็นจำนวนใด ๆ ระหว่าง 1 และ 4 พบว่าไม่มีค่า c ซึ่ง f(c) = k เพราะว่าไม่มีค่าของฟังก์ชันระหว่าง 1 และ 4

ตัวอย่าง 2 กำหนด $g(x) = \frac{2}{x-4}$

กราฟของ g แสดงในรูป 5.10



รูป 5.10

ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่ 4 ซึ่งอยู่ในช่วงปิด [2,5] , g(2) = -1 และ g(S) = 2 ถ้า k เป็นจำนวนใด ๆ ระหว่าง -1 และ 2 ไม่มีค่าของ c ระหว่าง 2 และ 5 ซึ่ง g(c) = k ถ้า k = I ดังนั้น g(6) = 1 แต่ 6 ไม่อยู่ในช่วง [2,5]

ตัวอย่าง 8 กำหนด $f(x) = 4 + 3x - x^2$ $2 \leqslant x \leqslant 5$

จงพิจารณา intermediate - value theorem ถ้า $k = 1$

วิธีทำ $f(2) = 6$, $f(5) = -6$

เพื่อจะหาค่า c ให้ $f(c) = k = 1$ นั่นคือ

$$4 + 3c - c^2 = 1$$

$$c^2 - 3c - 3 = 0$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

เราไม่ใช้ค่า $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{21})$ เพราะจำนวนนี้อยู่ข้างนอกช่วงปิด $[2,5]$ จำนวน $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{21})$ อยู่ในช่วง $[2,5]$ และ $f\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right) = 1$

นิยาม 5.2.8 กลุ่มของฟังก์ชัน $f : [a,b] \to R$ ซึ่งต่อเนื่องบน $[a,b]$ ใช้สัญลักษณ์ $C[a,b]$

5.3 คุณสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง (Properties of Continuous function)

ฟังก์ชัน ซึ่งมีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ ได้แก่ ฟังก์ชันที่อยู่ในกลุ่ม $C[a,b]$ มีคุณสมบัติที่สำคัญหลายประการ ในหัวข้อนี้เราใช้คุณสมบัติที่เรียกว่า คุณสมบัติแห่งความสมบูรณ์ (completeness property) ของจำนวนจริง เพื่อแสดงว่า ถ้า $f \in C[a,b]$ ดังนั้น f มีขอบเขตจำกัดบน $[a,b]$ และนอกเหนือจากนี้ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a,b]$

ทฤษฎี 5.3.1 ถ้า $f \in C[a,b]$ ดังนั้น f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ กล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า มีเลขจำนวนหนึ่ง $M > 0$ ซึ่ง $|f(x)| \leqslant M$ สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$

พิสูจน์

ให้ $A = \{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$

ถ้า A ไม่มีขอบเขต ดังนั้น มี $x_1 \in [a,b]$ ซึ่ง

$|f(x_1)| > 1$, มี $x_2 \in [a,b]$ ซึ่ง $|f(x_2)| > |f(x_1)|$

$|f(x_2)| > 2$, และ $x_2 \neq x_1$, ... มี $x_n \in [a,b]$ ซึ่ง

$|f(x_n)| > |f(x_{n-1})|$, $|f(x_n)| > n$ และ $x_r \neq x_k$, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, ...

ขณะนี้ เซต $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ เป็นเซตอนันต์ที่มีขอบเขตและโดยทฤษฎี โบลซาโน-ไวแยร์สตราร์ส มีลิมิตที่จุด x_0 เนื่องจาก $[a,b]$ เป็นเซตปิด x_0 ต้องเป็นสมาชิกของ $[a,b]$ นอกจากนี้ ลำดับ $\{x_n\}$ ประกอบด้วย ลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$-(รวมอยู่ใน $[a,b]$) ซึ่งลู่เข้าสู่ x_0

เนื่องจาก $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ x_0 เราได้ว่า $\{f(x_{n_k})\}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$ แต่โดยข้อสันนิษฐานของเราที่ว่า f ไม่มีขอบเขต เราได้ว่า $|f(x_{n_k})| > n_k \geq k$, $k = 1, 2, \ldots,$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ถ้า $\{f(x_{n_k})\}$ ลู่เข้า

ฉะนั้น f ต้องเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

ทฤษฎี 5.3.2 ถ้า $f \in C[a,b]$ ดังนั้น f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute moximum value) และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum value) ใน $[a,b]$ กล่าวอีกอย่างว่า ii x_1, x_2 ใน $[a,b]$ ซึ่ง $f(x_1) \geq f(x)$ และ $f(x_2) \leq f(x)$, $x \in [a,b]$)

พิสูจน์ (สำหรับค่าสูงสุดสัมบูรณ์)

โดยทฤษฎี 6.3.1 $f(x)$ มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ ทำให้ได้ว่า เซต

$$A = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

มีค่าขอบเขตบนและจะต้องมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด เรียกว่า M ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$f(x) \leq M \text{ สำหรับทุกค่าของ } x \in [a,b]$$

เราเพียงแต่แสดงว่า มีจำนวน $\bar{c} \in [a,b]$ ซึ่ง

$$f(\bar{c}) = M \geq f(x), \; x \in [a,b]$$

ถ้าไม่มีจำนวน $\bar{c}$ ดังนั้น $M - f(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$ และฟังก์ชัน h กำหนดโดย

$$h(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

$h(x)$ หาค่าได้ และต่อเนื่องใน $[a,b]$

โดยทฤษฎี 5.3.1 มีจำนวน k ซึ่ง

$|h(x)| \leq k,\ x \in [a,b]$

$$|h(x)| = \left|\frac{1}{M - f(x)}\right| = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant K$$

$$\Rightarrow \quad M - f(x) \geqslant \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leqslant M - \frac{1}{K},\ x \in [a,b]$$

ดังนี้ $M - \frac{1}{K}$ เป็นขอบเขตบนสำหรับเซต A ซึ่งเป็นไปไม่ได้เนื่องจาก $M - \frac{1}{K} < M$ และ M เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A

ฉะนั้นสมมุติฐานของเราที่ว่า ไม่มีจำนวน $\bar{c}$ ที่สอดคล้องกับทฤษฎี 5.3.2 จึงเป็นข้อสมมุติที่ไม่ถูกต้อง แต่โดยนิยามของ M ที่เป็นขอบเขตบนของ A เราได้ว่า

$$f(\bar{c}) = M \geqslant f(x),\ x \in [a,b]$$

นั่นคือ $f(\bar{c})$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์สำหรับ f ในช่วง $[a,b]$

5.4 นิเสธของความต่อเนื่อง (Negation of Continuity)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันนิยามที่ $x = a$ กล่าวอีกอย่างว่า f(a) หาค่าได้

f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวน $\varepsilon > 0$ ซึ่งสมนัยกับจำนวนบวกใด ๆ $\delta > 0$ มีจำนวน x ที่ทำให้

$$|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon \text{ และ } |x - a| < \delta$$

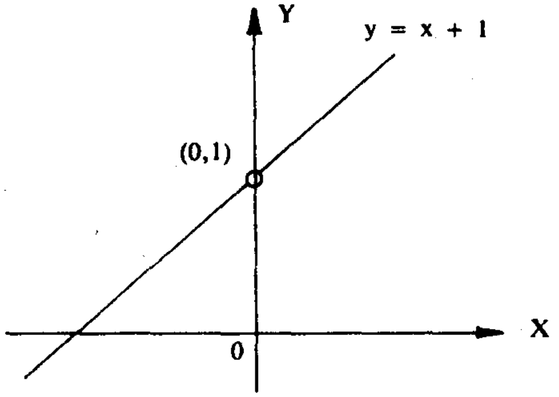
เราจะกล่าวว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุดบางจุด เมื่อ f มีคุณสมบัติดังกล่าว เรามีวิธีพิจารณาความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชันอีกวิธีหนึ่ง คือ โดยวิธีการของการพิจารณาค่าลิมิต และความไม่ต่อเนื่องยังแยกเป็นประเภทต่าง ๆ ดังจะอธิบายต่อไปนี้

ประเภทของความไม่ต่อเนื่อง

ก) ลิมิตของฟังก์ชันหาค่าได้แต่ฟังก์ชันไม่นิยามที่จุดบางจุด หรือค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้นต่างไปจากค่าลิมิตของฟังก์ชัน เช่น

ตัวอย่าง 1 กำหนด $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$ ถ้า $x \neq 0$ ไม่นิยามที่ $x = 0$ พบว่า ถ้า $x \neq 0$ f(x) ก็คือ

ฟังก์ชัน $x + 1$ นั่นเอง กราฟของฟังก์ชัน คือเส้นตรง $y = x + 1$ โดยไม่รวมจุด (0,1) อยู่ด้วย



รูป 5.11

ถ้าเราพิจารณา $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

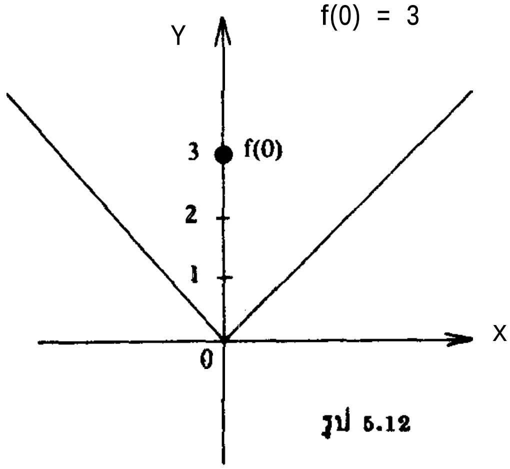
พบว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

นั่นคือ ลิมิตของฟังก์ชันหาค่าได้ แต่ f ไม่นิยามที่ $x = 0$

$\therefore$ f ไม่ต่อเนื่องที่ 0

ตัวอย่าง 2 กำหนด $f(x) = |x|$ ถ้า $x \neq 0$

$f(0) = 3$



รูป 5.12

พิจารณาค่าลิมิต จะเห็นว่า

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

ซึ่งต่างไปจากค่าของ f(0) ที่โจทย์กำหนดให้เท่ากับ 3

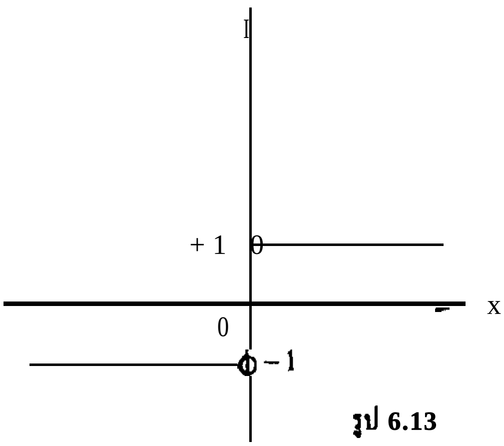
ทั้งสองตัวอย่างนี้เป็นลักษณะของความไม่ต่อเนื่อง เราเรียกความไม่ต่อเนื่องประเภทนี้ว่า **ความไม่ต่อเนื่องที่ขจัดได้** (removable discontinuity) เพราะว่าถ้านิยามฟังก์ชันเสียใหม่ให้ f มีค่าที่ $x = a$ และ $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ฟังก์ชันนี้ก็จะต่อเนื่องที่ $x = a$ ทันที

ข) ลิมิตด้านขวาและลิมิตด้านซ้าย หาค่าได้ทั้งสองค่า แต่ไม่เท่ากัน เรียกว่า Jump discontinuity

ตัวอย่าง 3 $f(x) = \operatorname{sgn} x = 1$ ถ้า $x > 0$

$f(x) = \operatorname{sgn} x = -1$ ถ้า $x < 0$

$f(x) = \operatorname{sgn} 0 = 0$



รูป 6.13

พบว่า

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

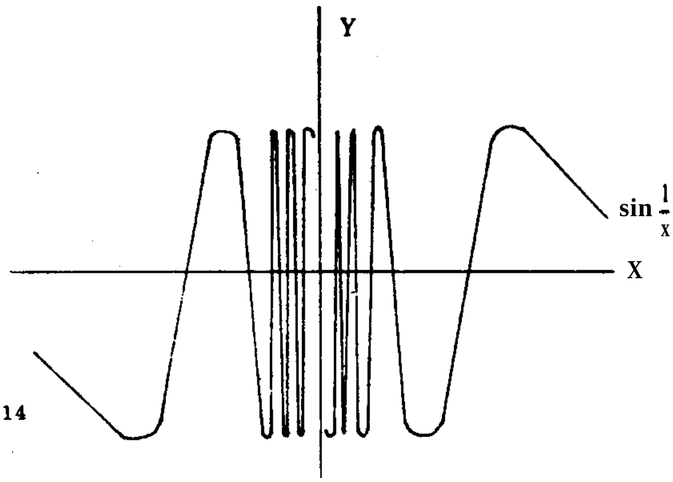
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ค) ลิมิตทางขวาและลิมิตทางซ้าย ข้างใดข้างหนึ่ง หรือทั้งสองข้าง หาค่าไม่ได้ เช่น

ตัวอย่าง 4 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

เพราะค่าของฟังก์ชัน ขณะที่ x เข้าใกล้ 0 จากทางขวาและทางซ้าย แกว่งกวัด (oscillate) ระหว่างค่าของ -1 และ $+1$ เราไม่สามารถกำหนดค่าของ $f(0)$ ว่าเป็นอย่างใด จึงจะทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$

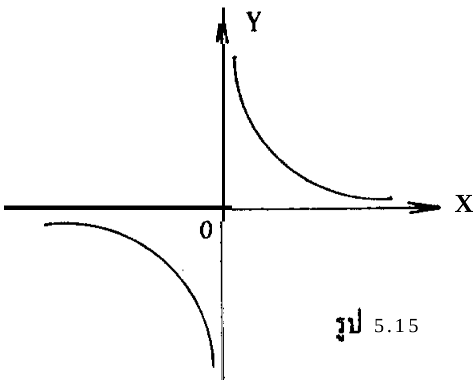


รูป 5.14

เรียกความไม่ต่อเนื่องประเภทนี้ว่า **essential discontinuity**

ง. ลิมิตด้านขวาและลิมิตด้านซ้ายเป็นอนันต์ เช่น

ตัวอย่าง 5 กำหนด $f(x) = \frac{1}{x}$ ถ้า $x \neq 0$ ไม่นิยาม ถ้า $x = 0$



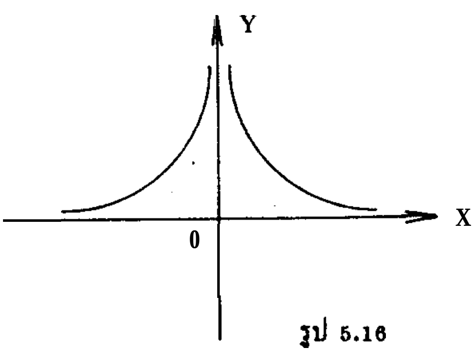
รูป 5.15

พิจารณาค่าลิมิต พบว่า

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 6 กำหนด $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ถ้า $x \neq 0$ ไม่นิยาม ถ้า $x = 0$



รูป 5.16

ซึ่ง $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$

แบบฝึกหัด 5.2

จงหาค่าของ x ซึ่งทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่อง

1. $f(x) = 9x^2 + 5x + 12$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x - s}$
3. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

6. $f(x) = \dfrac{4}{x + 9}$; $(3,10)$, $[-16,4]$, $[-\infty,0]$, $[-9,+\infty)$, $(-9,-6)$
7. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; $(-4,4)$, $[-4,4]$, $[-4, 4)$, $(-4,4]$ $(-\infty,-4)$, $(4+\infty)$
8. $f(X)$ $\dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$; $(-1,3)$, $[-1,3]$, $[-1,3)$, $(-1.31$

จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ต่อเนื่อง

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
10. $g(y) = \sqrt{y^2 - y - 12}$

จากฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหา $f \circ g$ และค่าของ x ที่ทำให้ $f \circ g$ มีความต่อเนื่อง

11. $f(x) = x^5 + 3$; $g(x) = \sqrt{x}$
12. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$
13. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$; $g(x) = \sqrt{x}$

5.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัว

นิยาม 6.6.1 f **เป็นฟังก์ชันค่าตัวเลข** (numerical - valued function) **กำหนดให้มีค่าบนเซต** D กล่าวว่า f **ต่อเนื่องที่จุด** $p_0 \in D$ **ถ้ากำหนดจำนวนใด 9** $\varepsilon > 0$ **ย่านจุด** p_0 **เรียกว่าเซต** U **ซึ่ง** $|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$ **สำหรับทุก 9 จุด** $p \in U \cap D$ **ฟังก์ชัน** f **กล่าวได้ว่าต่อเนื่อง บน** D **ถ้า** f **ต่อเนื่องที่แต่ละจุดของ** D

การตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องหรือไม่ จะยากหรือง่ายขึ้นกับการกำหนดฟังก์ชัน

ขอให้พิจารณา ฟังก์ชัน F กำหนดโดย $F(x,y) = x^2 + 3y$ เราสามารถแสดงว่า F ต่อเนื่องบนจัตุรัส S ที่มีด้านยาวด้านละหนึ่งหน่วย นั่นคือ S ประกอบไปด้วยจุด (x,y) ซึ่ง $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

ให้ $p_0 = (x_0 , y_0)$ เป็นจุดใด 9 ใน S ดังนั้น

$$\begin{aligned} F(p) - F(p_0) &= F(x,y) - F(x_0 , y_0) \\ &= x^2 + 3y - x_0^2 - 3y_0 \\ &= x^2 - x_0^2 + 3y - 3y_0 \\ &= (x - x_0)(x + x_0) + 3(y - y_0) \end{aligned}$$

ไม่ว่าจุด p และ p_0 จะอยู่ในตำแหน่งใด ใน S เป็นความจริงเสมอ ที่ $0 \leqq x \leqq 1$ และ $0 \leqq x_0 \leqq 1$ และจะได้ $x + x_0 \leqq 2$

$$|F(p) - F(p_0)| \leqq 2\,|x - x_0| + 3|y - y_0| \qquad \text{..........(1)}$$

ซึ่งเป็นการคาดคะเนการแปรค่าของฟังก์ชันใกล้ 9 p_0 ถ้าเราให้ p อยู่ในเนเบอร์ฮูดของ p_0 ดังนั้น $|x - x_0|$ และ $|y - y_0|$ ทั้งสองนี้ต้องมีขนาดเล็ก จึงจะทำให้ $|F(p) - F(p_0)$ มีขนาดเล็กตามไปด้วย

ถ้าเราต้องการจะหาเซต U ซึ่งเป็นย่านจุด p_0 ที่การแปรค่าของ F น้อยกว่า $\varepsilon = .03$

เลือก U เป็นย่านจุด p_0 เป็นจัตุรัส มีศูนย์กลางที่ p_0 โดยจัตุรัสนี้มีด้านยาวด้านละ .01 หน่วย

ดังนั้น ถ้า $p \in U$ และอยู่ใน D เราต้องได้ว่า

$|x - x_0| < .005$ และ $|y - y_0| < .005$ จาก (1) จะได้

$|F(p) - F(p_0)| < 2(.005) + 3(.005) = .025 < .03$

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าเราเลือก U เป็นจัตุรัสด้านละ $(.4)\varepsilon$ จะได้

$|x - x_0| < (.2)\varepsilon$ และ $|y - y_0| < (.2)\varepsilon$ นั่นคือ

$|F(p) - F(p_0)| < 2(.2)\varepsilon + 3(.2)\varepsilon = \varepsilon$

ตัวอย่างนี้ ก่อให้เกิดคุณสมบัติขั้นมูลฐานของฟังก์ชันต่อเนื่องอีกประการหนึ่ง

ให้ $\{p_n\}$ เป็นลำดับ ของจุดใน S ลู่เข้าไปสู่จุด p_0
ดังนั้น $\{F(p_n)\}$ จะลู่เข้าไปสู่ $F(p_0)$
ถ้า $p_n = (x_n , y_n)$ จาก (1) เรามี

$|F(p_n) - F(p_0)| < 2|x_n - x_0| + 3|y_n - y_0|$

และเนื่องจาก $\lim x_n = x_0$, $\lim y_n = y_0$

เราสรุปว่า ทางขวามือของอสมการ เข้าใกล้ 0 และ $\lim F(p_n) = F(p_0)$ วิธีอื่นที่จะอธิบายคุณสมบัติข้อนี้ ก็คือ การกล่าวว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องคงไว้ซึ่งคุณสมบัติของการลู่เข้า (preserves convergence)

ทฤษฎี 5.5.1 ให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ p_0 และให้ $\{p_n\}$ เป็นลำดับของจุดในโดเมน D ของ f ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = f(p_0)$

พิสูจน์ กำหนดให้จำนวนใด ๆ $\varepsilon > 0$ เลือกย่านจุด p_0 เรียกว่าเซต U ซึ่ง

$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$ เมื่อ $p \in U \cap D$

เนื่องจาก $p_n \in D$ และ $\{p_n\}$ ลู่เข้าไปสู่ p_0 เราต้องมี $p_n \in U$ สำหรับค่า n ทั้งหลายที่มีขนาดใหญ่

ดังนั้น จะมีจำนวน N ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$|f(p_n) - f(p_0)| < c$ สำหรับค่าทั้งหมด $n > N$

ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับที่เรากล่าวว่า ลำดับของจำนวน $\{f(p_n)\}$ ลู่เข้าไปสู่ $f(p_0)$

ทฤษฎี 5.5.2 ถ้า กำหนดฟังก์ชัน f ให้มีค่าบน D มีคุณสมบัติว่า เมื่อ $p_n \in D$ และ $\lim p_n = p_0 \in D$ ดังนั้นจะได้ผลตามมาว่า $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = f(p_0)$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ p

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยอ้อม

สมมุติว่า f คงไว้ซึ่งคุณสมบัติของการลู่เข้า แต่ f ไม่ต่อเนื่องที่ p_0 ย่อมหมายความว่า ต้องมีจำนวนบวกบางค่า $\varepsilon > 0$ ซึ่ง ไม่อาจหาย่านจุด p_0 เรียกว่าเซต U ที่ทำให้ $|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$ เมื่อ $p \in U \cap D$ ถ้าเราพยายามจะหาย่านจุด p_0 ให้ได้ ก็จะพบแต่ความล้มเหลว เพราะ จะมีจุด p หนึ่งจุด ของ D ใน U- ซึ่ง $|f(p) - f(p_0)| \geq \varepsilon$ ถ้าเราเลือก U เป็นบอลเปิด รัศมี $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ และให้ U_n คือ

$$U_n = \left\{ \text{จุด } p \text{ ทั้งหมดซึ่ง } |p - p_0| < \frac{1}{n} \right\}$$

ดังนั้นต้องมีจุดจุดหนึ่ง $p_n \in U_n \cap D$ ซึ่ง $|f(p_n) - f(p)| > \varepsilon$

เนื่องจาก $p_n \in U_n$, $|p_n - p_0| < \frac{1}{n}$ และ $\lim p_n = p_0$ เท่ากับเป็นการสร้างลำดับ $\{p_n\}$ ใน D ลู่เข้าสู่ p_0 แต่ว่า $\{f(p_n)\}$ ไม่ลู่เข้าสู่ $f(p_0)$ ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติแต่แรกว่า f มีคุณสมบัติของการลู่เข้า ทำให้เราต้องสรุปว่า f ต่อเนื่องที่ p_0

ทฤษฎีนี้มีประโยชน์ในการแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่อง มากกว่า ที่จะแสดงว่า ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องในการจะพิสูจน์ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดมาเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เราต้องพิจารณา $\{f(p_n)\}$ ว่า ลู่เข้าไปสู่ $f(p_0)$ หรือไม่ สำหรับลำดับ $\{p_n\}$ ที่ลู่เข้า ไปสู่ p_0 ซึ่ง $\{p_n\}$ มีมากมายนับอนันต์ ถ้ามีแม้แต่เพียงลำดับเดียว $\{p_n\}$ ใน D ซึ่งลู่เข้าสู่ p_0 แต่กลับพบว่า $\{f(p_n)\}$ ลู่ออก เราสรุปได้ว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ p_0

ตัวอย่าง

f เป็นฟังก์ชัน กำหนดโดย

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$0 \qquad x = y = 0$$

เราต้องการทราบว่า f ต่อเนื่องที่ (0,0) หรือไม่ในบรรดาลำดับที่ ลู่เข้าไปสู่จุดกำเนิดนั้น พบว่ามีมากมาย ขอให้มองลำดับที่เลือกมาในรูปของ $p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{c}{n}\right)$ ซึ่ง c มีค่าได้ต่าง ๆ กัน ลำดับนี้ลู่เข้าไปสู่ (0,0) ตามเส้นต่าง ๆ เนื่องจาก

$$f(p_n) = \frac{c/n^3}{\frac{1}{n^2} + \frac{c^4}{n^4}} = \frac{c}{1 + \frac{c^4}{n^2}} \frac{1}{n}$$

เราพบว่า $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = 0$ ดูเหมือนว่า f จะต่อเนื่องที่ (0,0)

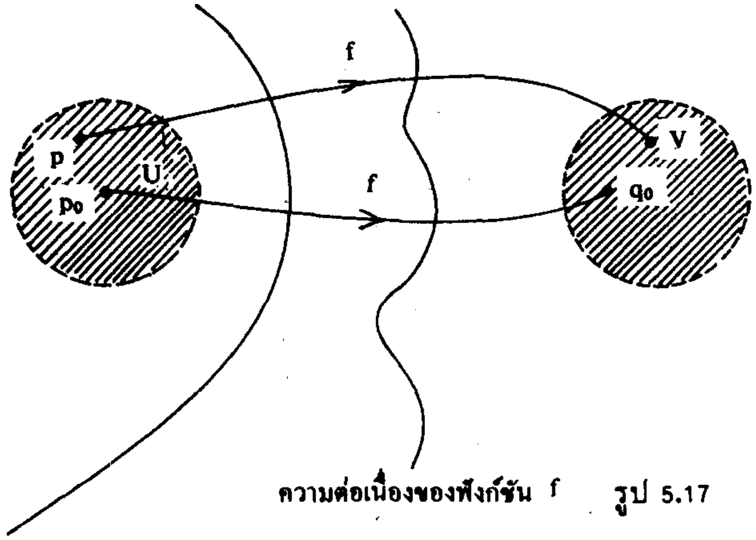
แต่ถ้าเราพิจารณา ลำดับอื่น ๆ ที่ลู่เข้าไปสู่ (0,0) เช่นกัน เช่น ลำดับ $q_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ พบว่า

$$f(q_n) = \frac{1/n^4}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ ขณะที่ $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = (0,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) \neq f(0,0)$

ดังนั้น โดยลำดับ $\{q_n\}$ เพียงลำดับเดียวนี้ ทำให้เราพิสูจน์ได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุดกำเนิด

นิยาม 5.5.2 ให้ f เป็นฟังก์ชัน กำหนดให้มีค่าในเซต D ในปริภูมิ n มิติ และค่าของฟังก์ชันอยู่ในปริภูมิ m มิติ กล่าวว่า f ต่อเนื่องที่จุด $p_0 \in D$ ถ้า กำหนดย่านจุด $f(p_0)$ เรียกว่า เซต V โดย $f(p_0) = q_0$ จะมีผ่านจุด p_0 เรียกว่า เซต U ซึ่ง $f(p) \in V$ เมื่อ $p \in U \cap D$ กล่าวว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน D ถ้า f ต่อเนื่องที่แต่ละจุดใน D



ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน f รูป 5.17

ทฤษฎี 5.5.3 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริง (real-valued function) ถ้า f และ g ต่อเนื่องบนโดเมน D แล้ว

ก) $f + g$ ต่อเนื่องบน D

ข) fg ต่อเนื่องบน D

ค) $\alpha f + \beta g$ ต่อเนื่องบน D (α และ β เป็นเลขจำนวน)

ง) $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่จุด p ใน D ถ้า $g(p) \neq 0$

ทฤษฎีนี้กล่าวถึงความต่อเนื่องของผลบวก ผลคูณ และผลหาร ของฟังก์ชันต่อเนื่อง กล่าวง่าย ๆ ว่า ผลบวก ผลคูณ ผลหาร ของฟังก์ชันต่อเนื่องสองฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

พิสูจน์ (ข) ต้องการพิสูจน์ว่า fg ต่อเนื่องบน D นั่นคือ เพียงแต่แสดงว่า fg มีคุณสมบัติของการลู่เข้า

กำหนดจุดใด ๆ $p_0 \in D$ และลำดับใด ๆ $\{p_n\}$ ใน D ซึ่งลู่เข้าไปสู่ p_0

เราทราบว่า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p_0) \text{ และ } \lim_{n\to\infty} g(p_n) = g(p_0)$$

เราประสงค์จะได้ว่า $\{f(p_n)\ g(p_n)\}$ ต้องเป็นลำดับที่ลู่เข้าและ

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n)\ g(p_n) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) \lim_{n\to\infty} g(p_n)$$

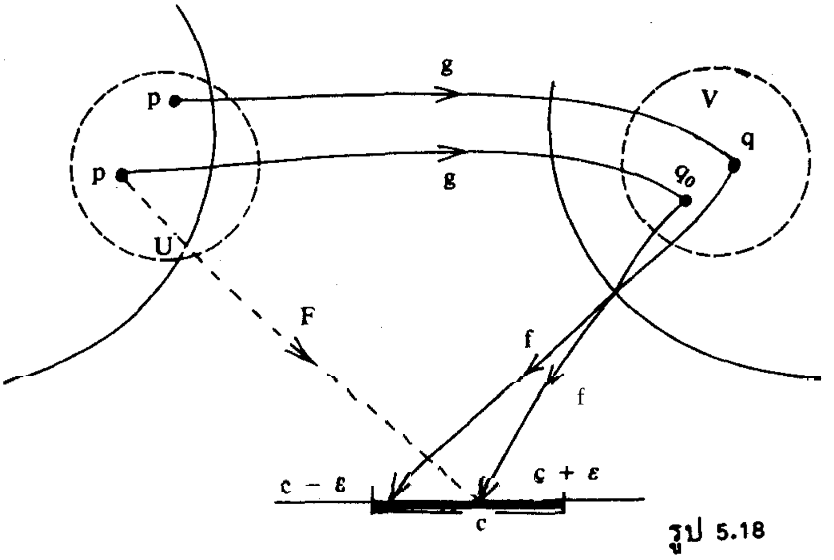
$$= f(p_0)\ g(p_0)$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน fg มีคุณสมบัติของการลู่เข้า ฉะนั้น ผลคูณของฟังก์ชันต่อเนื่องสองฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง การพิสูจน์กรณีอื่น ๆ ที่เหลือ ละไว้เป็นแบบฝึกหัดของผู้อ่าน

ทฤษฎี 5.5.4 ให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต D และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต S ถ้า $p_0 \in D$ และ $g(p_0) = q_0 \in S$ ดังนั้น ฟังก์ชันประกอบ F กำหนดโดย

$$F(p) = f(g(p))$$

ต่อเนื่องที่ p_0



รูป 5.18

พิสูจน์ จากรูป ให้ $f(q_0) = c = F(p_0)$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ q_0

ดังนั้น จะมีย่านจุด q_0 เรียกว่าเซต V ที่ทำให้ถ้า $q \in V$ และ q อยู่ในโดเมนของ f แล้ว เราจะได้ว่า $|f(q) - f(q_0)| < \varepsilon$

และเนื่องจาก $g(p_0) = q_0$ และ g ต่อเนื่องที่ p_0 เราจึงทราบว่า จะมีย่านจุด p_0 เรียกว่า เซต U ซึ่ง $g(p) \in V$ สำหรับจุดทั้งหลาย $p \in U \cap D$

ดังนั้น ถ้าเราให้ $q = g(p)$ จะได้ว่า

$$|f(g(p) - f(g(p_0))| < \varepsilon$$

เมื่อ $p \in U \cap D$ ซึ่งสามารถเขียนใหม่เป็น

$$|F(p) - F(p_0)| < \varepsilon$$

เราพิสูจน์ให้เห็นแล้วว่า F ต่อเนื่องที่ p_0

ตัวอย่างของฟังก์ชันต่อเนื่อง

1. ให้ $S = R^2$ แล้วฟังก์ชันค่าจริง ที่นิยามบน S ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

   ก) ฟังก์ชันคงที่ กำหนดโดยสมการ $f(x,y) = c$ เมื่อ (x,y) เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S และ c เป็นจำนวนจริงคงที่ใด ๆ

   ข) ฟังก์ชันภาพฉาย (projection function) ทั้งสองต่อไปนี้คือ

   $$I(x,y) = x \text{ และ } J(x,y) = y$$

2. ฟังก์ชันพหุนามของตัวแปร 2 ตัว ที่อยู่ในรูป

   $$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x^j \right) y^i$$

   เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน S เมื่อ $a_{ij} \in R$

3. ให้ S เป็นสับเซตของ R^2 ซึ่งฟังก์ชันพหุนาม $f(x,y)$ ไม่เป็นศูนย์บนเซต S นี้ จะได้ว่า $\frac{1}{f}$ ต่อเนื่องบน S ด้วย

   ดังนั้น ฟังก์ชันตักยะ $R(x,y) = \dfrac{g(x, y)}{f(x,y)}$

   จะต่อเนื่องทุกจุดใน R^2 ที่ซึ่ง $f(x,y) \neq 0$

4. จากการที่เคยทราบมาแล้วว่า ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันลอการิทึมจะต่อเนื่องทุกจุดที่มันนิยาม จึงพบว่า ฟังก์ชัน

   $$f(x,y,z) = \sin (x^3y + 3xz^2 - xyz)$$

ต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R^3 เพราะมันเป็นฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันต่อเนื่องสองฟังก์ชัน คือ

$$h(x,y,z) = x^3y + 3xz^2 - xyz \text{ และ } g(x) = \sin x$$

ถ้าเราขยายปริภูมิให้ใหญ่มากขึ้น โดยการให้ $S \leqslant R^n$
ฟังก์ชันต่อเนื่องที่กล่าวไว้ในตัวอย่างทั้ง 4 ข้อ ก็ยังคงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงอภิปรายความต่อเนื่องของฟังก์ชันเมื่อ

ก) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{เมื่อ } |(x,y)| \leqslant 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } |(x,y)| > 1 \end{cases}$

ข) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{เมื่อ } x \neq y \\ x - y & \text{เมื่อ } x = y \end{cases}$

2. กำหนด $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ กับ $f(0,0) = 0$ จงพิจารณาว่า

f ต่อเนื่องที่จุด (0,0) หรือไม่ โดยคุณสมบัติของการลู่เข้า

3. กำหนด $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ เมื่อ $x^2 + y^2 \neq 0$

และ $f(0,0) = 0$ จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ (0.0)

4. กำหนด $f(x,y) = (5x + y)/(x - y)$ จงใช้นิยามโดยตรงของความต่อเนื่องพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องที่จุด (4,1) โดยการพิสูจน์ว่า ถ้า $\varepsilon > 0$, $|f(x,y) - f(4,1)| < \varepsilon$ เมื่อ (x,y) อยู่ในย่านจุด (4.1) ให้เริ่มต้นการพิสูจน์ด้วย $|f(x,y) - f(4,1)| \leqq 2|x - 4| + 8|y - 1|$ ที่จุดทั้งหลายของจัตุรัส $3 < x < 5, 0 < y < 2$

5.6 คุณสมบัติการประมาณค่าและความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

(Approximation properties, and uniform continuity)

จากปฏิบัติการเกี่ยวกับการคำนวณตัวเลข พบว่าจำนวนตักยะมีความสำคัญมาก จำนวนตักยะหนาแน่น (dense) ในจำนวนจริง เพราะโคลเชอร์ของ R_0 คือ R และทุก ๆ จำนวนจริง อาจถูกประมาณค่าด้วยจำนวนตักยะในละแวกใกล้เคียง จำนวนเชิงซ้อนใด ๆ $a + b_i$ อาจถูกประมาณค่าด้วยจำนวน $a_0 + b_0 i$ เมื่อ a_0 , b_0 เป็นจำนวนตักยะ

การศึกษาเรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตคอมแพกต์ มักจะเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันพหุนามในหลาย ๆ กรณี เราสะดวกที่จะแทนฟังก์ชัน f ที่ยุ่งยากซับซ้อนด้วยฟังก์ชันพหุนาม F ที่มีค่าใกล้เคียงกับ f ที่สุด มีการประมาณค่าหลายแบบที่แตกต่างกันไปที่มีประโยชน์ทางคณิตศาสตร์มาก ในบรรดาการประมาณค่านี้จะกล่าวถึงเรื่องที่ง่ายที่สุดได้แก่ การประมาณค่าโดยสม่ำเสมอ (uniform approximation)

นิยาม 5.6.1 กล่าวว่า ฟังก์ชัน F เป็นการประมาณโดย ε อย่างสม่ำเสมอ (uniform ε - approximation) ของฟังก์ชัน f บนเซต E ถ้า

$$|f(p) - F(p)| < \varepsilon \quad p \in E$$

ถ้า f และ F เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว โดย E เป็นช่วงปิด [a,b] นักศึกษาสามารถทำความเข้าใจกับนิยามนี้เชิงเรขาคณิตโดยง่าย ถ้าให้ S เป็นแผ่นแบน ๆ ที่มีความกว้าง แนวดิ่ง 2ε ซึ่งได้จากการเคลื่อนเส้นแนวดิ่งมีความยาวเท่ากับ 2ε- ไปตามกราฟของ f โดยให้กราฟของ f เป็นเส้นกลางของแผ่นแบน ๆ นี้ ดังรูป

ดังนั้น F เป็นการประมาณค่าโดย ε ของ f ถ้ากราฟของ F ทั้งหมดบรรจุอยู่ในเซต S กล่าวอีกอย่างว่า F อยู่ในย่านของ f รัศมี ε เขียนแทนด้วย

$$\|f - F\|_E < \varepsilon$$

ซึ่ง $\| \quad \|_E$ เป็นสัญกรณ์ที่หมายถึง

$$\|g\|_E = \ell ub \left\{|g(p)| \text{ ซึ่ง } p \in E\right\}$$

อ่านว่า ขอบเขตบนค่าน้อยสุดหรือค่าสูงสุดของ $|g|$ บน E

ดังนั้น $\|F - f\|_E$ เป็นค่าแตกต่างระหว่าง f และ F ที่มากที่สุดบนเซต E อ่าน $\|g\|$ ว่า "นอร์มของ g"

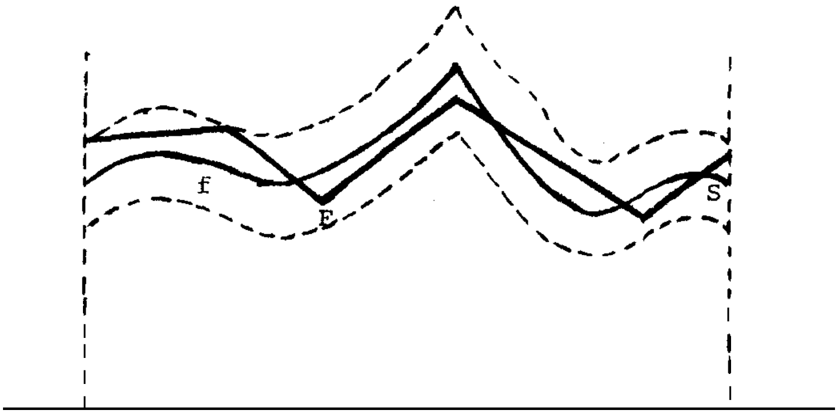


Fig. 2-5. $\left| /f-F/ \right|_{[a,b]} < \varepsilon$

ผลลัพธ์ที่ว่าเป็นประโยชน์ยิ่งของการประมาณค่านี้เรื่องหนึ่งก็คือ ทฤษฎีประมาณค่าไวแยร์สตราร์ส (Weierstrass approximation theorem) ซึ่งกล่าวว่า อาจประมาณค่าของฟังก์ชันต่อเนื่อง หนึ่งตัวแปรใด ๆ นิยามบนช่วงปิด [a,b] ด้วยฟังก์ชันพหุนาม เราจะไม่พิสูจน์ในที่นี้ และจะไม่ขยายความคิดนี้ไปยังฟังก์ชันหลายตัวแปร แต่เราจะพิสูจน์การประมาณค่าด้วยฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นช่วง ๆ (piecewise linear function) ซึ่งมีกราฟเป็น polygonal line

เริ่มแรกขอให้ศึกษาแนวคิด ของความต่อเนื่อง

ถ้าเรากลับไปพิจารณาฟังก์ชันพหุนาม ที่เคยกล่าวแล้วในหัวข้อก่อน ๆ คือฟังก์ชัน F กำหนดโดย

$$F(x,y) = x^2 + 3y$$

เราได้พิสูจน์กันแล้วว่า F ต่อเนื่องบนจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละหนึ่งหน่วย มีจุดยอดที่ (0,1), (1,0), (1,1) และเรายังทราบจากทฤษฎีเกี่ยวกับความต่อเนื่องอื่น ๆ อีกว่า F ต่อเนื่องในระนาบ R^2 เราจะเขียนอีกครั้งว่า

$$F(x,y) \quad F(x_0, y_0) = (x - x_0)(x + x_0) + 3(y - y_0)$$

ถ้าเรากำหนดจำนวนจำนวนหนึ่ง ε ไว้ให้ก่อน เราต้องหาเซต U ซึ่งเป็นย่านจุด $p_0 = (x_0, y_0)$ ที่จะทำให้ เมื่อจุด p ทั้งหมดอยู่ใน U แล้ว $|F(p) - F(p_0)| < \varepsilon$

ถ้าเราเลือก U เป็นจัตุรัสด้านยาวด้านละ 2δ มีศูนย์กลางที่ p_0 เรามี $|x - x_0| < \delta$ และ $|y - y_0| < \delta$ เมื่อจุด $p \in U$

จำนวน δ นี้ยังไม่ได้กำหนดว่าเป็นเท่าใด แต่เราอาจเลือกให้มีขนาดเล็กกว่า 1 ดังนั้น เมื่อ $p \in U$ เรามี

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leqq |x - x_0| + 2|x_0| \leqq 1 + 2|x_0|$$

ดังนั้น จุดใด ๆ $p \varepsilon U$ เรามี

$$\begin{aligned}|F(p) - F(p_0)| &\leqq |x - x_0|\,|x + x_0| + 3|y - y_0| \\ &\leqq \delta(1 + 2|x_0|) + 3\delta \\ &\leqq (4 + 2|x_0|)\delta\end{aligned}$$

เพื่อจะพิสูจน์ว่า F ต่อเนื่องที่ p_0 เราต้องการจะทำให้ทางซ้ายมือมีขนาดเล็กกว่า ε สำหรับทุก ๆ $p \in U$ ซึ่งทำได้โดยเลือก δ ที่ทำให้ทางขวามือของอสมการน้อยกว่า ε

ดังนั้นเราจึงเลือก δ เป็นจำนวนซึ่ง

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4 + 2|x_0|}$$

โดยการเลือก δ เช่นนี้ เราแน่ใจได้ทันทีว่า $|F(p) - F(p_0)| < \varepsilon$ สำหรับจุด p ทั้งหมด $\in$ U และ F ต่อเนื่องที่แต่ละจุด p_0

ในขณะนี้ขอให้ตรวจสอบโดยละเอียดว่า เราทำอะไรไปบ้าง เราสังเกตเห็นว่า ขนาดของเนเบอร์ฮูด U ซึ่งเลือกมานั้น ขึ้นอยู่กับค่าของ ε และค่าของ x_0 ซึ่งก็คือ ขึ้นกับจุด p_0 ด้วยนั่นเอง พบว่า ถ้าจุด p_0 อยู่ไกลออกไปทางขวามือเรื่อย ๆ $|x_0|$ จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และค่าของ δ จะลดลง

ถ้าเรากำลังพยายามจะแสดงว่า F ต่อเนื่องบนเซต D ที่มีขอบเขตโดยเฉพาะ ดังนั้น เนื่องจากจุด p_0 ต้องอยู่ใน D ฉะนั้น $|x_0|$ ต้องมีค่าขอบเขตบน เราก็สามารถเลือกค่าของ δ ซึ่งมีขนาดเล็กกว่า

ค่าที่กำหนดไว้ว่า $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4 + 2|x_0|}$ และเราสามารถจะเลือกย่านจุด p_0 ขนาดเดียวเท่านั้นที่ใช้ได้กับทุก ๆ ตำแหน่งของ p_0 ใน D ดังที่เราเคยหา δ ไปแล้วว่า $\delta = (.2\varepsilon)$ ใช้ได้กับจุดทั้งหมด-p_0 ในจัตุรัส ปรากฏการณ์พิเศษนี้ คือความสามารถในการเลือก δ ที่เป็นอิสระ จาก p_0 จึงเกิดเป็นนิยามขึ้นว่า

นิยาม 5.6.2 เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต E ก็ต่อเมื่อ สมนัยกับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนหนึ่ง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(p) - f(g)| < \varepsilon$ เมื่อ p และ q อยู่ใน E และ $|p - q| < \delta$

ความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอนี้เกี่ยวพันเชื่อมโยงกับเซตเซตหนึ่งเสมอ ซึ่งต้องกำหนดเซตใดเซตหนึ่งลงไปโดยเฉพาะจึงจะพิจารณาได้ว่าต่อเนื่องสม่ำเสมอบนเซตนั้นหรือไม่ เช่น ตัวอย่างของฟังก์ชัน F ที่อภิปรายมาแล้วว่า F ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต S เมื่อ S เป็นจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละหนึ่งหน่วย ซึ่งโดยแท้จริงแล้ว F ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซตที่มีขอบเขตจำกัดใด ๆ แต่เราสามารถพิสูจน์ว่า F ไม่เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนระนาบทั้งหมด

เราคงจะจำกันได้ว่า ถ้าฟังก์ชัน f ถูกนิยามที่จุด $p = p_0$ และถ้า $\lim_{p \to p_0} f(p)$ หาค่าได้ ดังนั้นกล่าวว่า f มีความต่อเนื่องที่ p_0 ถ้า

$$\lim_{x \to p_0} f(x) = f(p_0)$$

ซึ่งมีความหมายว่า ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$ ถ้า $|p - p_0| < \delta$ และ p อยู่ในโดเมนของ f

คุณสมบัติของความต่อเนื่องนี้เป็นคุณสมบัติเฉพาะที่ และเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติปิดของค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชัน กับค่าของ $f(p_0)$ เมื่อ p เข้าใกล้ p_0 กล่าวพอสังเขปว่า ความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (uniform continuity) บนเซตหนึ่ง ณ จุด p_0 สำหรับค่า p ทั้งหมดซึ่งอยู่ห่างจาก p_0 เป็นระยะทางซึ่งเป็นค่าเดียวกันโดยตลอด (เข้าใกล้ p_0 อย่างสม่ำเสมอ หรือเสมอกัน) สำหรับทุก ๆ จุด p_0 ในเซต

ขอให้มาดูตัวอย่างของฟังก์ชัน ซึ่งต่อเนื่องอย่างไม่สม่ำเสมอบนโดเมนของฟังก์ชัน

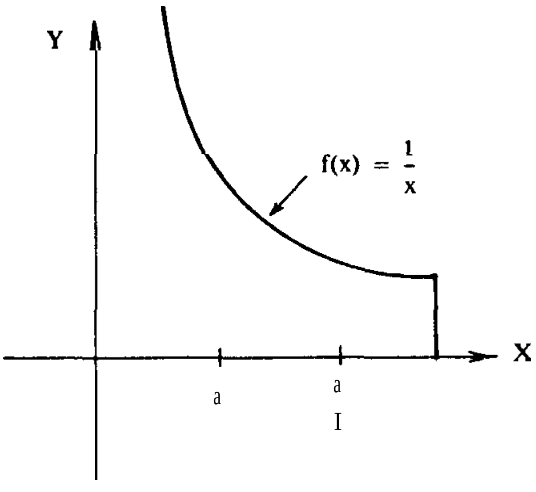
พิจารณาฟังก์ชัน f กำหนดโดย

$$f(x) = \frac{1}{x}, \ x \in (0, 1)$$

เราแสดงได้โดยไม่ยากว่า f ต่อเนื่องที่แต่ละจุด $a \in (0, 1)$

ถ้า $x > \frac{a}{2}$ ดังนั้น สำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon > 0$ เรามี

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - x}{ax} \right| < \frac{2}{a^2} |a - x| < \varepsilon$$



ก็ต่อเมื่อ $|a - x| < \frac{a^2\varepsilon}{2}$,

หรือ $-\frac{a^2\varepsilon}{2} < a - x < \frac{a^2\varepsilon}{2}$

เนื่องจากเราจำกัดค่า x โดย $x > \frac{a}{2}$ จะเห็นว่า δ คำนวณจาก

$$\delta = \min\left(\frac{a^2\varepsilon}{2}, \frac{a}{2}\right) = \delta(a, \varepsilon)$$

สิ่งที่สำคัญที่สุดก็คือ จงสังเกตว่า δ เป็นฟังก์ชันของทั้ง a และ ε เราสามารถมองเห็นว่า สำหรับจุด a ซึ่งใกล้ ๆ 0 δ จะเข้าใกล้ 0 ด้วย

นอกจากนี้ขณะที่ a เข้าใกล้ 0 เราต้องเลือก δ ให้มีขนาดเล็กลง ๆ เพื่อที่จะทำให้ค่า ของฟังก์ชัน $\frac{1}{x}$ เข้าใกล้ค่าของ $\frac{1}{a}$ ในตัวอย่างนี้พบว่าเราไม่อาจเลือก δ เพียงจำนวนเดียวและใช้ได้

กับทุกจุด $a \in (0, 1)$ หรือกล่าวอีกอย่างว่า ไม่อาจเลือก δ ซึ่งขึ้นกับ ε แต่อย่างเดียวไม่ขึ้นกับค่าของ x

สรุปว่า f ต่อเนื่องอย่างไม่สม่ำเสมอ

ลักษณะที่บ่งว่าเป็นความต่อเนื่องอย่างไม่สม่ำเสมอ

(Negation of Uniform continuity)

ฟังก์ชัน f ซึ่งถูกนิยามบนเซต E ต่อเนื่องอย่างไม่สม่ำเสมอ บน E ก็ต่อเมื่อ มี $\varepsilon > 0$ ซึ่งสำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\delta > 0$ มีจุด p และ q ซึ่ง

$$|p - q| > \delta \text{ และ } |f(p) - f(q)| \geqslant \varepsilon$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าฟังก์ชัน f กำหนดโดย

$$f(x) = \frac{1}{x}, \; x \in (0, 1)$$

ต่อเนื่องอย่างไม่สม่ำเสมอบน $(0, 1)$

วิธีทำ เลือก $\varepsilon = 2$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $\delta > 0$

ให้ $\delta_1 = \min(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{4})$ $p = 2\delta_1$, $q = \delta_1$

ดังนั้น

$$|f(p) - f(q)| = \frac{p - q}{pq} = \frac{\delta_1}{2\delta_1^2} = \frac{1}{2\delta_1} \geqslant 2$$

จึงสรุปได้ว่า f ต่อเนื่องอย่างไม่สม่ำเสมอบน $(0, 1)$ **ซ.ต.พ.**

ทฤษฎี 5.6.1 ถ้า E เป็นเซตคอมแพกต์ และ f ต่อเนื่องบน E ดังนั้น f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน E

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยอ้อม

สมมุติว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต E ย่อมหมายความว่าจะมีจำนวนบวกบางค่า $\varepsilon > 0$ ซึ่งสำหรับจำนวนใด ๆ $\delta > 0$ จะมีจุด p และ q ใน E ซึ่ง $|p - q| < \delta$ แต่ $|f(p) - f(q)| \geqslant \varepsilon$

ถ้าสมมุติฐานนี้จริงเราสามารถเลือกค่าเฉพาะของ ε และจากนั้นเลือก δ ให้มีขนาดต่าง ๆ กัน เช่นเป็น $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots;$

สำหรับการเลือก δ แต่ละค่า เราสามารถสร้างจุดสองจุดใน E เรียก p_n และ q_n สำหรับ $\delta = \frac{1}{n}$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$|p_n - q_n| < \delta = \frac{1}{n} \text{ และซึ่ง } |f(p) - f(q)| \geqslant \varepsilon$$

ต่อไปแสดงว่า เราทำไม่ได้ ถ้าหากว่า f ต่อเนื่องบน E

เพราะว่า เซต E เป็นเซตคอมแพกต์ เราประยุกต์ทฤษฎีโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ในการสรุปว่า ลำดับ $\{p_n\}$ ต้องมีจุดลิมิต $p_0 \in E$ และจะมี ลำดับย่อย $\{p_{n_k}\}$ ลู่เข้าไปสู่ p_0

เนื่องจากพจน์ต่าง ๆ ของลำดับ $\{q_n\}$ เข้าใกล้พจน์ต่าง ๆ ของลำดับ $\{p_n\}$ เราประสงค์จะได้ว่า $\{q_{n_k}\}$ ลู่เข้าไปสู่ p_0 ด้วย เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} |q_{n_k} - p_0| &= |q_{n_k} - p_{n_k} + p_{n_k} - p_0| \\ &< |q_{n_k} - p_{n_k}| + |p_{n_k} - p_0| \\ &< \frac{1}{n_k} + |p_{n_k} - p_0| \to 0 \end{aligned}$$

แต่ f ต่อเนื่องบน E f ต้องมีคุณสมบัติของการลู่เข้า และเราต้องได้ว่า

$$\lim_{k \to \infty} \left(f(p_{n_k}) - f(q_{n_k})\right) = f(p_0) - f(p_0) = 0$$

ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมติไว้ว่า $|f(p_n) - f(q_n)| \geqslant \varepsilon > 0$ สำหรับค่าทั้งหมด n

ดังนั้น f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน E

ทฤษฎี 5.6.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดและมีขอบเขต $[a, b]$ ดังนั้น สำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon > 0$ จะมีฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ F ซึ่งเป็นค่าประมาณของฟังก์ชัน f โดยสม่ำเสมอ โดย ε บนช่วงนั้น

พิสูจน์ ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ มีกราฟประกอบไปด้วยเส้นตรงหลายเส้น มีจำนวน

จำกัด ขณะที่ ε เล็กลง จำนวนเซกเมนต์ในกราฟของฟังก์ชัน F อาจจะต้องเพิ่มขึ้น เพื่อว่าจะได้สอดคล้องกับพฤติกรรมของ f

ในการพิสูจน์ เราเลือกจุด $P_0\ P_1 \ldots, P_N$ บนกราฟของฟังก์ชัน f ที่กำหนดมาให้ จากนั้นสร้างฟังก์ชัน F โดยลากเส้นเชื่อมจุดเหล่านี้ ซึ่งเป็นกลวิธีที่ทำให้มั่นใจได้ว่า จุดทั้งหลาย P_k อยู่ใกล้ชิดกันอย่างเพียงพอ

เราจะตัดสินใจขนาดของ จำนวน N ภายหลัง แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ N ช่วงที่จุด

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

ให้ P_k เป็นจุด (x_k , y_k) ซึ่ง $y_k = f(x_k)$ โปรดสังเกตว่า P_k อยู่บนกราฟของ f ต่อไป นิยามฟังก์ชัน F บนแต่ละช่วงย่อย โดย

$$F(x) = \frac{(x_{k+1} - x)\, y_k + (x - x_k)\, y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \qquad \text{..........(1)}$$

สำหรับค่าทั้งหมด x ซึ่ง $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ จะสังเกตเห็นว่า $F(x)$ อยู่ในรูป $A + Bx$ บนช่วงนี้ ดังนั้นกราฟจะเป็นเส้นตรง

เช่นเดียวกัน ให้ $x = x_k$ แทนลงใน (1) จะได้ $F(x_k) = y_k = f(x_k)$

ขณะที่ $F(x_{k+1}) = y_{k+1} = f(x_{k+1})$ ดังนั้น ส่วนของกราฟของ F จะเริ่มจาก P_k ไปยัง P_{k+1}

ขณะนี้เราพร้อมที่จะเลือกจำนวนเต็ม N

กำหนด ε ให้ไว้ก่อน เราใช้ความต่อเนื่องโดยสม่ำเสมอของ f เลือก $\delta < 0$ ที่มีคุณสมบัติว่า $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ เมื่อ x และ x′ เป็นจุดสองจุดที่ตำแหน่งใด ๆ บนช่วง $[a, b]$ ซึ่ง $|x - x'| < \delta$

เลือก N ให้มีขนาดใหญ่พอที่ $\dfrac{(b - a)}{N} < \delta$ มีผลให้แต่ละช่วงย่อยสั้นกว่า δ

เนื่องจากจุด x และ x′ ต้องสอดคล้องกับ $|x - x'| < \delta$ เราสรุปว่า $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$ ซึ่งเป็นจริงกับทุก ๆ ช่วงย่อย $[x_k , x_{k+1}]$ เห็นชัดเจนว่าเราได้พิสูจน์ความสม่ำเสมอนี้บนช่วงทั้งหมด $[a, b]$ และ $\|F - f\| < \varepsilon$

6.7 คุณสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีหลายตัวแปร

ทฤษฎี 6.7.1 ให้ f ต่อเนื่องบนเซต D และให้ $p_0 \in D$ ซึ่ง $f(p_0) > 0$ ดังนั้น มีเซต U ซึ่งเป็นย่านจุด p_0 และจำนวนบวกจำนวนหนึ่ง $\varepsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $f(p) \geqslant \varepsilon$ สำหรับจุดทั้งหมด $p \in U \cap D$

กล่าวง่าย ๆ คือ ถ้า f เป็นบวกอย่างเดียวที่ p_0 f ต้องเป็นบวกใกล้ ๆ-p_0 ด้วย

พิสูจน์ เลือก ε เป็นจำนวนบวก $\varepsilon = \frac{1}{2} f(p_0)$

โดยนิยามความต่อเนื่อง เราสามารถเลือกย่านจุด p_0 ซึ่ง

$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$ เมื่อ $p \in U \cap D$

สำหรับจุด p ใด ๆ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(P) &= f(P) - f(p_0) + f(p_0) \\
&\geqslant f(p_0) - |f(p) - f(p_0)| \\
&> f(p_0) - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0
\end{aligned}
$$

ทฤษฎี 6.7.2 ถ้า S เป็นเซตคอมแพกต์ ดังนั้น ฟังก์ชันต่อเนื่องใด 9 บนเซต S มีขอบเขตบน S

พิสูจน์ การพิสูจน์เห็นได้ชัด ถ้ากระทำกับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร โดยทฤษฎี 5.6.2 จะมีฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นช่วง 9 ซึ่งเป็นการประมาณค่าของ f โดยสม่ำเสมอภายในค่า $\frac{1}{2}$

นั่นคือ $|F(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ สำหรับค่าทั้งหมด $x \in S$

แน่นอนว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต กราฟของฟังก์ชัน คือ เส้นที่มีหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนเหลี่ยมเป็นจำนวนจำกัด

ถ้า $|F(x)| \leqslant B$ สำหรับค่าทั้งหมด $x \in S$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant |f(x) - F(x)| + |F(x)| \\
&\leqslant \frac{1}{2} + B
\end{aligned}
$$

สำหรับค่าทั้งหมด $x \in S$ และ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน S ด้วย

ฟังก์ชันใด ๆ ที่มีขอบเขตและต่อเนื่องบนเซตเซตหนึ่ง อาจไม่มีค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดบนเซตนั้นก็ได้ ตัวอย่างเช่น

ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ บนช่วงเปิด $0 < x < 1$

และ ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ บนช่วง $0 \leqslant x < \infty$

แต่ถ้าเซตนั้นเป็นเซตคอมแพกต์ สถานการณ์ก็จะเปลี่ยนไป

ทฤษฎีบท 5.7.3 ถ้า S เป็นเซตคอมแพกต์ และ f ต่อเนื่องบน S ดังนั้น f มีค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดที่บางจุดบน S

พิสูจน์ โดยทฤษฎี 5.7.2 f มีขอบเขต บน S

ฉะนั้น จะมีจำนวน B และ b ซึ่ง $b \leqslant f(p) \leqslant B$ สำหรับจุดทั้งหมด $p \in S$

ให้ M เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของค่าของ f บน S

และให้ m เป็นค่าขอบเขตล่างมากสุด ของค่าของ f บน S

จะได้ว่า $m \leqslant f(p) \leqslant M$ สำหรับจุดทั้งหมด $p \in S$

แต่ขณะนี้ M ไม่อาจมีค่าเพิ่มขึ้น และ m ไม่อาจมีค่าลดลง

กรณีที่ 1 ถ้ามีจุด p_0 ใน S ซึ่ง $f(p_0) = M$ ดังนั้น M เป็นค่าสูงสุดของ f บน S

กรณีที่ 2 ถ้าไม่มีจุด p_0 ซึ่ง $f(p_0) = M$ ดังนั้น $f(p) < M$ สำหรับจุด p ทั้งหมดใน S กรณีเช่นนี้

สร้างฟังก์ชัน $g(p) = \dfrac{1}{M - f(p)}$

เนื่องจากตัวหารไม่มีโอกาสเป็นศูนย์ได้เลย g ต่อเนื่องบน S และแน่นอนว่า g ต้องมีขอบเขตบน S

ถ้าเราสมมุติให้ $g(p) \leqslant A$ สำหรับจุดทั้งหมด $p \in S$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{M - f(p)} \leqslant A \quad p \text{ ทั้งหมดที่อยู่ใน } S$$

นั่นคือ $f(p) \leqslant M - \dfrac{1}{A}$

ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ M เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของค่าของฟังก์ชัน f

บน S เราจึงสรุปว่า กรณีที่ 2 นี้ เกิดขึ้นไม่ได้ ฉะนั้น จะต้องมีจุด p_0 หนึ่งจุด ใน S ซึ่ง $f(p_0) = M$

ในทางคล้าย ๆ กันเราพิสูจน์ได้ว่า ต้องมีจุด ๆ หนึ่งใน S ซึ่ง f มีค่าเท่ากับ m ซึ่งเป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของค่าของฟังก์ชัน f บน S

ทฤษฎี 5.7.4 Intermediate value theorem

ให้ f กำหนดให้มีค่าบนเซต E เมื่อ E เป็นเซตคอมแพกต์

ดังนั้น f ต่อเนื่องบน E ก็ต่อเมื่อ กราฟของ f เป็นเซตคอมแพกต์

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์เพียงตอนเดียว ส่วนที่เหลือให้เป็นแบบฝึกหัดของผู้อ่าน

สมมุติให้กราฟของ f เป็นเซตคอมแพกต์ เรียกว่า เซต C

$$C = \{\text{จุดทั้งหมด } (x, y) \text{ ซึ่ง } x \in E \text{ และ } y = f(x)\}$$

เราจะพิสูจน์ว่า f ต้องต่อเนื่องบน E ถ้าข้อความนี้เป็นเท็จ

ดังนั้น จะมีจุดจุดหนึ่ง $x_0 \in E$ และจำนวนหนึ่ง $\varepsilon > 0$

และลำดับหนึ่ง $\{x_n\}$ ใน E ซึ่งลู่เข้าไปสู่ x_0 แต่ว่า

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

ให้ $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$, $p_n = (x_n , y_n)$

ดังนั้น จุด p_n ทั้งหลายอยู่ในเซต C

โดยสมมุติฐาน C เป็นเซตคอมแพกต์

ลำดับ $\{p_n\}$ ต้องมีลำดับย่อย $\{p_{n_k}\}$ หนึ่งลำดับ ซึ่งลู่เข้าไปสู่จุด $p = (a, b)$ ในเซต C

เนื่องจาก $p_{n_k} = (x_{n_k} , y_{n_k})$ เราทราบว่า

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \text{ และ } \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = b$$

เนื่องจาก $(a, b) \in C$ และ C เป็นกราฟของ f เราทราบอีกว่า $b = f(a)$

ในขณะนี้ เราเลือก $\{x_n\}$ ให้ลู่เข้าไปสู่ x_0 ฉะนั้นลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ก็ต้องลู่เข้าไปสู่ x_0 ด้วย และเราสรุปได้ว่า $a = x_0$ นั่นคือ $b = f(x_0)$

อย่างไรก็ตาม เราเขียนไว้แล้วว่า $y_0 = f(x_0)$ และเราจึงทราบว่า $b = y_0$ อันเป็นการแสดงว่า $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่มีอยู่ว่า

$$|y_n - y_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$$

ฟังก์ชัน f ต้องต่อเนื่องบน E