บทที่ 4
ลิมิต

4.1 คำนำ

ฟังก์ชัน (Function) ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B (หรือ mapping จากเซต A ไปยังเซต B) คือ กฎความสัมพันธ์ที่กำหนดให้แต่ละสมาชิก $a \varepsilon A$ กับสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น $f(a) = b \varepsilon B$ เรียกเซต A ว่า**โดเมน** (domain) ของ f และเรียกเซต $\{f(a) \mid a \varepsilon A\} \subset B$ ว่า **พิสัย** (range) ของ f จะสะดวกอย่างยิ่งที่จะใช้สัญลักษณ์

$$f : A \rightarrow B$$

เพื่อแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน มีโดเมนคือ A และพิสัย อยู่ใน B

ในบทที่ 2 เรานิยามลิมิตของลำดับ กล่าวโดยสังเขป คือ ลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ คือ L ถ้าพจน์ต่าง ๆ ของลำดับ $\{a_n\}$ เข้าใกล้ L ขณะที่ n มีขนาดใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่าอาจเลือกจำนวน a_n ให้มีขนาดใกล้เคียงกับ L เพียงใดก็ได้ โดยเลือกดรรชนีล่าง n ที่ใหญ่เพียงพอ

พิจารณาลำดับ $\{a_n\} \equiv \{f(n)\}$ ซึ่งก็คือ ฟังก์ชันที่โดเมนของมันคือจำนวนเต็มบวก ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$ มีความหมาย เมื่อ $f(n)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามลำดับ ในบทนี้เราจะพูดถึงนิยามของลิมิต

ให้นักศึกษาพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ฟังก์ชัน $f : R \rightarrow R$ กำหนดโดยสมการ $y = 2x + 3$

นั่นคือ สมมุติว่า $f(x) = 2x + 3$ สำหรับทุกค่าจริงของ x ขอให้นักศึกษาตรวจสอบค่า $f(x)$ สำหรับค่าต่าง ๆ ของ x ซึ่งใกล้เคียงกับบางจำนวน ให้จำนวนนั้นคือ 1 ดังตารางต่อไปนี้

X	.75	.9	.99	.999	.9999	1.00001	1.001	1.01	1.11	1.25
2x + 3	4.5	4.8	4.98	4.998	4.9998	5.00002	5.002	5.02	5.2	5.5

จากตารางจะเห็นว่า สำหรับค่าของ x ที่ใกล้เคียงกับ 1 พบว่าค่าของฟังก์ชัน f ใกล้เคียงกับ 5 นักศึกษาคงจะทราบดีว่า เมื่อ x มีค่าเท่ากับ 1 ค่าของฟังก์ชัน f เท่ากับ 5 พอดี แต่กรณีที่ x เท่ากับ 1 พอดี นี้ไม่อยู่ในความสนใจของเรา สิ่งที่ต้องการชี้ให้เห็นก็คือ เมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ 1 แต่ไม่เท่ากับ 1 ค่าของฟังก์ชันใกล้กับ 5 โดยความเป็นจริงแล้วเราสามารถทำให้ค่าของ $2x + 3$ ใกล้กับ 5 เพียงใดก็ได้เท่าที่ต้องการโดยเลือก x ที่ใกล้ ๆ (แต่ไม่เท่ากับ) 1 ภายใต้สภาวการณ์เช่นนี้เรากล่าวว่า ลิมิตของ $2x + 3$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 1 เป็น 5 แสดงด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^2 + x - 3)}{x - 1}$

วิธีทำ

$$\frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

$$= 2x + 3 \text{ เมื่อ } x \neq 1$$

เนื่องจากในการหาค่าลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ 1 เราสนใจพฤติกรรมเมื่อ x ใกล้ 1 มากพอแต่ไม่เท่ากับ 1 เราสามารถหาลิมิตของ $\dfrac{2x' + x - 3}{x - 1}$ โดยการหาค่าลิมิตของ $(2x + 3)$ เนื่องจาก $\dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ กับ $2x + 3$ เทียบเท่ากัน เมื่อ $x \neq 1$ จึงได้ผลตามมาว่า

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^* + x - 3}{x - 1}\right) = \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 6$$

แบบฝึกหัด 4.1

จงหาค่าของ

1. $\underset{x\to 3}{\mathrm{Pim}} \; (x^2 + 7x - 5)$

2. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x' - 27}{x - 3}$

4. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

5. $\underset{y\to -1}{\mathrm{Pim}} \; (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$

6. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

8. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

9. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

4.2 นิยามของลิมิต สิ่งที่เรากล่าวไปแล้วในหัวข้อ 4.1 เกี่ยวกับลิมิตนั้น เรากล่าวคร่าว ๆ ว่า : **ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a มีค่าเป็น L ถ้าค่าของฟังก์ชัน f เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a** ในหัวข้อนี้เราจะนิยามลิมิตให้รัดกุมชัดเจนยิ่งขึ้น

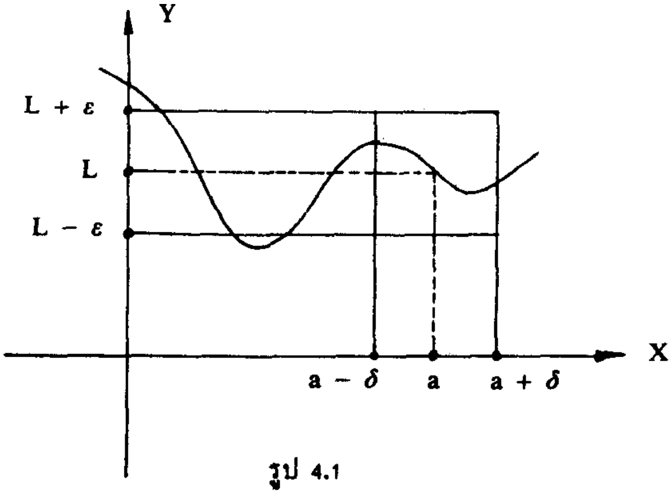
นิยาม 4.2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a คือ L (ใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$) ถ้าสำหรับเลขจำนวนบวกทุก ๆ จำนวน ε มีเลขจำนวนบวก δ ที่มีคุณสมบัติว่า

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

สำหรับทุกค่าของ x ในโดเมนของ f ซึ่ง

$$a - \delta < x < a + \delta, x \neq a$$

(ในนิยาม 4.2.1 นี้ และในการอภิปรายเกี่ยวกับลิมิตเราสมมุติว่า มีจำนวนอื่น ๆ ในโดเมนของ f ที่ใกล้ ๆ กับ a ถ้า a อยู่ในโดเมนของ f กล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า a เป็นจุดลิมิตของโดเมนของ f



รูป 4.1

แนวความคิดเกี่ยวกับลิมิตอาจแสดงด้วยกราฟ (ดูรูป 4.1) ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ดังนั้น สำหรับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนบวกจำนวนหนึ่ง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้จุดต่าง ๆ ของกราฟ $y = f(x)$ ทั้งหมดอยู่ระหว่างเส้น $y = L + \varepsilon$ และ $y = L - \varepsilon$ เมื่อ x มีค่าจำกัดในช่วงเปิด $(a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$

ในหัวข้อ 4.1 แสดงให้เห็นแล้วว่า $\lim_{x\to 1} (2x + 3) = 5$ เป็นการง่ายมากที่จะพิจารณาว่า x ต้องอยู่ในช่วงใดจึงจะทำให้ 2x + 3 ห่างจาก 5 เพียงพอ ตัวอย่างเช่น เลือก $\varepsilon = \frac{1}{10}$

ถ้าเราให้ $5 - \frac{1}{10} < 2x + 3 < 5 + \frac{1}{10}$

ดังนั้นเป็นความจริงที่

$$-\frac{1}{10} < 2x - 2 < \frac{1}{10}$$

หรือ

$$-\frac{1}{20} < x - 1 < +\frac{1}{20}$$

$$1 - \frac{1}{20} < x < 1 + \frac{1}{20}$$

นั่นคือ ถ้าเราให้ x อยู่ในช่วงเปิด$((1 - \frac{1}{20}),(1 + \frac{1}{20}))$แล้ว 2x + 3 จะมีค่าอยู่ระหว่าง $5 - \frac{1}{10}$ และ $5 + \frac{1}{10}$ ดังนั้น จากนิยามโดยตรงของลิมิต ค่าของ δ ที่สมนัยกับ $\varepsilon = \frac{1}{10}$ คือ $\frac{1}{20}$

ต่อไปสมมุติว่า ε เป็นจำนวนบวกใด ๆ ที่มีขนาดเล็ก ๆ

อสมการ $5 - \varepsilon < 2x + 3 < 5 + \varepsilon$ เป็นจริง

ทำให้ได้ว่า $-\varepsilon < 2x - 2 < \varepsilon$

หรือ $-\frac{\varepsilon}{2} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2}$

และจะได้ $1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

เพราะเหตุว่าขั้นตอนในการอภิปรายนี้ย้อนกลับได้ เราแสดงให้เห็นแล้วว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนบวกจำนวนหนึ่ง δ (ในกรณีนี้ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$) ซึ่งสำหรับ x ที่อยู่ในช่วง $(1 - \delta, 1 + \delta) = (1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$ ค่าของ 2x + 3 อยู่ระหว่าง $5 - \varepsilon$ และ $5 + \varepsilon$ แสดงให้เห็นว่า $\lim_{x\to 1} (2x + 3) = 5$ โดยเป็นไปตามนิยามโดยตรงของลิมิต

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จงหา δ ที่ทำให้ $|f(x) - 4| < \varepsilon$ ถ้า $0 < |x - 2| < \delta$, เมื่อ $f(x) = x^3 - x^2$ ซึ่งจะแสดงว่า $\lim_{x\to 2} (x^3 - x^2) = 4$

วิธีทำ เราได้ว่า $x^3 - x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + x + 2)$

เริ่มแรก ขอให้มาพิจารณาเฉพาะค่าของ x ซึ่ง $|x - 2| < 1$

หรือ 1 c x< 3 สำหรับ x ใด 7 เราพบว่า

$$4 < x^2 + x + 2 < 14$$

และดังนั้น $|x^3 - x^2 - 4| < 14\ |x - 2|$

ขณะนี้เราเห็นว่า $|x^3$ – x2-41 $< \varepsilon$ ทำให้ได้ว่า $14\ |x - 2| < \varepsilon$

หรือ $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{14}$ ฉะนั้นเราเลือก δ เป็นจำนวนบวกใด ๆ

$\delta \leqq$ | หรือ $\delta \leqq \frac{\varepsilon}{14}$

ตัวอย่าง 2 ลิมิตของ f(x) ขณะที่ $x \to a$ อาจไม่มีเพราะ

1) ลิมิตด้านขวา และลิมิตด้านซ้าย มีค่าแต่ไม่เท่ากัน ดังกรณีเช่น

$$f(x) = 1 + \frac{|x|}{x}$$

ซึ่ง $f(x) \to 2$ ขณะที่ $x \to 0+$

และ $f(x) \to 0$ ขณะที่ $x \to 0-$

2) ค่าของ f(x) อาจมีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีขอบเขต ขณะที่ $x \to x_0$ จากด้านใดด้านหนึ่ง หรือทั้งสองด้าน เช่น $f(x) = \frac{1}{x}$ ขณะที่ $x \to 0$

3) ค่าของ f(x) อาจแกว่งกวัด (oscillate) มาก ไม่เข้าใกล้ลิมิตใดเลย เช่น $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ซึ่งแกว่งกวัดมากระหว่าง -1 และ $+1$ ขณะ $x \to 0$ จากทางทั้งสองด้าน

ข้อสังเกต จากตัวอย่างนี้ ถ้าเราพิจารณา ข้อ 1) พบว่า เป็นโอกาสดีที่ควรจะกล่าวถึงแนวความคิดเรื่องลิมิตข้างเดียว (One - side limit)

ฟังก์ชัน f(x) มีลิมิตด้านขวา ที่ a หรือขณะที่ x เข้าใกล้ a จากทางขวา เป็น L ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนบวก ε มีจำนวนบวก δ จำนวนหนึ่ง ซึ่งทำให้

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ x ในโดเมนของ f โดยที่

$$a < x < a + \delta$$

ภายใต้เงื่อนไขนี้ เราเขียน $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

เรากล่าวว่า f(x) มีลิมิตด้านซ้าย ที่ a (หรือขณะที่ x เข้าใกล้ a จากทางซ้าย) ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนบวกใด ๆ ε มีจำนวนบวกจำนวนหนึ่ง δ ซึ่ง

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ x ในโดเมนของ f โดยที่

$$a - \delta < x < a$$

* ใช้สัญลักษณ์ $f(a_-) = \lim_{x \to a_-} f(x) = L$

ถ้าลิมิตด้านขวา กับลิมิตด้านซ้ายเท่ากัน เรากล่าวว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า และค่าของลิมิตก็คือค่าของ-ลิมิตด้านขวา และลิมิตด้านซ้ายนั่นเอง เช่นเดียวกัน ถ้า $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า ดังนั้น ลิมิตด้านขวาและ-ลิมิตด้านซ้าย มีค่าและก็คือลิมิตของฟังก์ชันนั่นเอง

แบบฝึกหัด 4.2

จงหาค่าของลิมิต และจงพิสูจน์ค่าลิมิตโดยอาศัยนิยามโดยตรงของลิมิต

1) $\lim_{x \to 0} 2^{\log x^2}$

2) $\lim_{x \to 0} \cos (e^{-1/x^2})$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + \cos x}{1 + (\log x^2)^2}$

4) $\lim_{x \to 4} \log \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)$

4.3 ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต เนื้อหาของหัวข้อนี้เกี่ยวกับคุณสมบัติขั้นมูลฐานของลิมิต เรารวบรวมคุณสมบัตินั้น ๆ ในรูปของทฤษฎีสามทฤษฎี

ทฤษฎี 4.3.1 ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $L > 0$ ดังนั้น มีช่วงเปิด $(a - \delta, a + \delta)$ ซึ่งทำให้ $f(x) > 0$ สำหรับค่า x ทั้งหมดในโดเมนของ f ซึ่งอยู่ในช่วง $(a - \delta, a + \delta)$ ยกเว้นเมื่อ $x = a$

พิสูจน์ เนื่องจาก L เป็นจำนวนบวก ฉะนั้น $\frac{L}{2}$ เป็นบวกด้วย เลือก $\varepsilon = \frac{L}{2}$ โดยนิยามของลิมิตเราทราบว่า มีจำนวน $\delta > 0$ a J

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

หรือ

$$L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}$$

หรือ

$$0 < \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$$

สำหรับค่าทั้งหมด x ที่ $x \neq a$ ในโดเมนของ f ซึ่งสอดคล้องตาม $a - \delta < x < a + \delta$

ทฤษฎี 4.3.2 ถ้าโดเมนของ f(x) และ g(x) คือ โดเมนเดียวกันในบางช่วงเปิด $(a - \delta, a + \delta)$ และถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ ดังนั้น

(1) $$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$$

(2) $$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

(3) $$\lim_{x \to a} [f(x)\; g(x)] = \lim_{x \to a} f(x)\; \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$$

$$(4)\quad \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\text{cim}\limits_{x\to a}\ g(x)} = \frac{L}{M},\ \text{ถ้า}\ M \neq 0$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะคุณสมบัติข้อ 3 เท่านั้น เพราะว่าการพิสูจน์สำหรับข้ออื่น ๆ มีวิธีการคล้าย ๆ กัน

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$

เราสามารถเลือก x ให้ใกล้กับ a* มากพอเพื่อให้ $|f(x) - L|$ และ $|g(x) - M|$ มีขนาดเล็กเพียงใดก็ได้ นั่นคือ สำหรับ x ที่ใกล้เคียงกับ a มากเพียงพอ เราได้

$$f(x) - L = \varepsilon_1$$

$$g(x) - M = \varepsilon_2$$

เมื่อ ε_1 และ ε_2 เป็นค่าที่เล็กมากเกือบเป็นศูนย์ ขณะที่ x เข้าใกล้ a ฉะนั้น

$$f(x) = L + \varepsilon_1$$

$$g(x) = M + \varepsilon_2$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$f(x)\ g(x) = LM + M_{\varepsilon_1} + L\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$$

หรือ $$f(x)\ g(x) - LM = M\varepsilon_1 + L\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$$

โดยใช้คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ เราได้

$$|f(x)\ g(x) - LM| \leqslant |M\varepsilon_1| + |L\varepsilon_2| + |\varepsilon_1\varepsilon_2|$$

ต่อไปโดยการเลือก x ใกล้ ๆ กับ a มากพอ เราสามารถทำให้ค่าของเทอมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ ε_1 และ ε_2 มีค่าใกล้ศูนย์เพียงใดก็ได้ นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนหนึ่ง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|M\varepsilon_1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|L\varepsilon_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|\varepsilon_1\varepsilon_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

* เครื่องหมายนี้ปรากฏที่ใดก็ตาม x ถูกสมมุติให้อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องด้วย

สำหรับ $0 < |x - a| < \delta$ ทำให้ได้ผลตามมาว่า

สำหรับ $0 < |x - a| < \delta$

$$|f(x)\ g(x) - LM| \leqslant |M\varepsilon\ | + |L\varepsilon_2| + |\varepsilon_1\varepsilon_2|$$
$$\leqslant \frac{c}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ทฤษฎี 4.3.3 $\lim_{x\to b} f(x)$ มีค่า ถ้าสมนัยกับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon > 0$ เราสามารถหาจำนวนหนึ่ง δ ซึ่ง $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ เมื่อไรก็ตามที่ x' และ x'' สอดคล้องตามเงื่อนไข $0 < |x - b| < \delta$ เงื่อนไขโคชี (Cauchy condition)นี้ บางทีเขียนว่า

$$\lim_{\substack{x'\to b\\ x''\to b}} |f(x') - f(x'')| = 0$$

เพราะสมมุติฐานนี้บน f, เราสามารถเลือก $\delta_n > 0$ เพื่อว่า ถ้า x' และ x'' สอดคล้อง ตาม $0 < |x' - b| < \delta_n$ และ $0 < |x'' - b| < \delta_n$ ดังนั้น $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n}$

เห็นชัดเจนว่า เราสามารถเลือกให้ลำดับ $\{\delta_n\}$ มีค่าไม่เพิ่มขึ้น และมีลิมิตเป็นศูนย์

ให้ x_n เป็นจุดใด ๆ ซึ่ง $0 < |x_n - b| < \delta_n$ ดังนั้น ลำดับ $\{f(x_n)\}$ เป็นลำดับโคชีของจำนวน

เนื่องจากจำนวนจริง มีคุณสมบัติบริบูรณ์ (complete)

ดังนั้น ลำดับโคชีลู่เข้า และ $\lim_{x\to\infty} f(x_n)$ หาค่าได้ เรียกลิมิตนี้ว่า L ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to b} f(x) = L$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก x ใด ๆ ซึ่ง $0 < |x - b| < \delta$

เนื่องจาก ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าไปสู่ b และ $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้าไปสู่ L เราสามารถเลือกดรรชนีต่าง k เพื่อว่า $0 < |x_k - b| < \delta$ และ $|f(x_k) - L| < \varepsilon$ คู่ของจุด $x' = x$ และ $x'' = x_k$ สอดคล้องตามเงื่อนไข ของสมมุติฐาน ดังนั้น $|f(x) - f(x_k) < \varepsilon$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|f(x) - L| &= |f(x) - f(x_k) + f(x_k) - L|\\ &\leqslant |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - L|\\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

กล่าวได้ว่า $\lim_{x \to b} f(x) = L$ ซ.ต.พ.

นิยาม 4.3.1 เราเขียนว่า $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ สมนัยกับจำนวนบวกใด ๆ B จะมีจำนวนหนึ่ง $\delta > 0$ ซึ่ง $f(x) > B$ เมื่อไรก็ตามที่ x สอดคล้องตาม $0 < |x - b| < \delta$

เช่น เราเขียนว่า $\lim_{x \to 1} (x-1)^{-2} = \infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(x^2)} = \infty$$

เราไม่เขียนว่า $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ เนื่องจากพฤติกรรมของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จากทางขวามือและจากทางซ้ายมือแตกต่างกัน และเราจะเขียนว่า $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

นิยาม 4.3.2 เราเรียกว่า $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

เมื่อไรก็ตามที่ f ถูกนิยามบนช่วงไม่จำกัดบางช่วง $0 < x < \infty$ และ สมนัยกับจำนวนบวกใด ๆ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวน x_0 ซึ่ง $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $x > x_0$

ตัวอย่างเช่น

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x - 10} = 1$$

ขณะที่ $\lim_{x \to \infty} \sin x$ และ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \sin x}$ หาค่าไม่ได้

แบบฝึกหัด 4.3

1) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$

3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ (n = จำนวนเต็มบวก)

4) $\lim_{x \to 0} \frac{(x + 2)^2 - 4}{x}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2}\right)$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{(4 + x)^2} - \frac{1}{16}\right)$

7) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$

8) $\lim_{x \to -1} \frac{108\,(x^2 + 2x)(x + 1)'}{(x^3 + 1)^3 (x - 1)}$

4.4 ลิมิตของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัว

เราได้ทบทวนเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเดียวมาแล้ว เราทราบว่า มีทิศทางที่จุด x สามารถเข้าใกล้ a ได้เพียง 2 ทิศเท่านั้น กล่าวคือ x เข้าใกล้ a ในทิศทางที่ x น้อยกว่า a และเข้าใกล้ a ในทิศทางที่ x มากกว่า a ฉะนั้น การศึกษาพฤติกรรมของฟังก์ชันใกล้จุดใดจุดหนึ่งก็จะสังเกตได้ง่าย และเรายังได้นำแนวความคิดเกี่ยวกับทิศทางต่าง ๆ ที่ x เข้าใกล้ a มานิยามลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวา

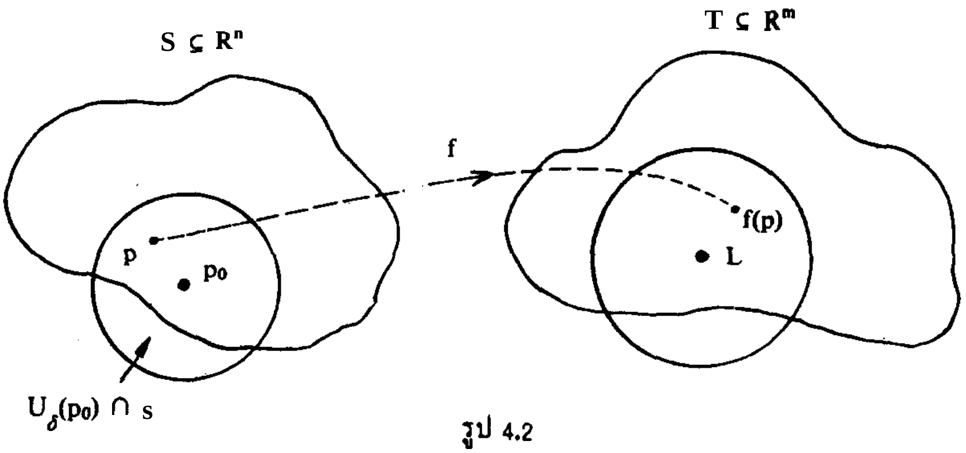
เมื่อศึกษาลิมิตของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัว พฤติกรรมของฟังก์ชันใกล้จุดใดจุดหนึ่งนั้นสังเกตได้ยาก เราพบว่ามีทิศทางที่จุด p สามารถจะเข้าใกล้ p_0 ได้อย่างมากมายนับไม่ถ้วน เช่น กรณีตัวแปรสองตัว มีทิศทางที่จุด $p = (x, y)$ จะสามารถเข้าใกล้ จุด $p_0 = (x_0, y_0)$ ได้อย่างมากมาย ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(p)$ จะมีลิมิตที่ p_0 หรือไม่นั้น นอกจากจะขึ้นอยู่กับความประพฤติของมันใกล้จุด p_0 แล้วยังขึ้นอยู่กับโดเมนของ f อีกด้วย ให้ S เป็นเซตย่อยของ R^n และให้ p_0 เป็นจุดเกาะกลุ่มของ S เรานิยามลิมิตของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัวดังนี้

นิยาม 4.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตย่อย S ของ R^n ไปใน R^m เรากล่าวว่า $f(p)$ ลู่เข้าไปสู่ L ขณะที่ p เข้าใกล้ p_0 ในเซต S เขียนว่า

$$\lim_{p \to p_0} f(P) = L \qquad [p \varepsilon S]$$

ก็ต่อเมื่อ สมนัยกับจำนวนบวกใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์ จะต้องมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(p) - L| < \varepsilon$ ถ้า $p \varepsilon S$ และ $0 < |p - p_0| < \delta$

หมายความว่า สำหรับจำนวนจริงบวก ε แต่ละตัว ไม่ว่าจะมีค่าน้อยเพียงใดก็ตาม จะต้องมีบอลเปิด $U_\delta(p_0)$ เมื่อ δ เป็นจำนวนจริงบวกที่เล็กพอเพียง เพื่อว่า เมื่อไรก็ตามที่ p อยู่ใน $U_\delta(p_0) \cap S$ แล้ว $f(p)$ จะอยู่ห่างจาก L ด้วยระยะทางน้อยกว่า ε หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า เราสามารถทำให้ค่า $f(p)$ อยู่ใกล้ชิดกับ L เท่าใดก็ได้ตามที่เราต้องการ ด้วยวิธีลดขนาดของบอลเปิด $U_\delta(p_0)$ ให้เล็กเพียงพอ ดูรูป 4.2



รูป 4.2

มีกรณีพิเศษของนิยามข้างต้น เกิดขึ้นเมื่อ S เป็นส่วนของเส้นตรง หรือเส้นโค้งที่มี P_0 เป็นจุดปลาย และพิสัยของฟังก์ชัน f เป็นเซตย่อยของ R ในกรณีนี้การคำนวณค่าลิมิตของ f(p) ขณะที่ p ในเซต S เข้าใกล้ p_0 จะถูกลดลงมาเป็นการคำนวณหาลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงที่มีตัวแปรเดียว เพราะถ้า S ถูกกำหนดด้วยสมการพาราเมตริก $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ โดย $0 \leqslant t \leqslant 1$ และ $\lim_{t\to 0} \phi(t) = x_0$, $\lim_{t\to 0} \psi(t) = y_0$ เมื่อ x_0, y_0 เป็นพิกัดของจุด p จากนั้น ถ้าให้ $g(t) = f(\phi(t), \psi(t))$- พบว่า $\lim_{p\to p_0} f(p)$ จะมีค่าเท่ากับ $\lim_{t\to 0} g(t)$ เช่นเมื่อ S เป็นเซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรง $y = x$ ในระนาบ xy เราจะได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ มีค่าเท่ากับ $\lim_{t\to 0} f(t,t)$ ซึ่งเป็นลิมิตของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเดียว

ทฤษฎีบทต่อไปนี้มีประโยชน์มาก เมื่อต้องการอภิปรายถึงการมีลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงที่มีตัวแปรหลายตัว แต่เราจะไม่พยายามพิสูจน์ในที่นี้ นักศึกษาที่สนใจการพิสูจน์ให้ค้นคว้าได้ในหนังสือคณิตศาสตร์ขั้นสูงทั่ว ๆ ไป

ทฤษฎี 4.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งนิยามทุกจุดในย่านจุด p_0 (neighborhood of p_0) แต่อาจจะเว้นที่จุด p_0 ก็ได้ เราจะได้ว่า ถ้า $\lim_{p\to p_0} f(p) = L$ ดังนั้น ลิมิตของ f(p) จะมีอยู่เสมอ ไม่ว่า p จะเข้าใกล้ p_0 ในเซต S ใด ๆ และค่าลิมิตนี้จะเท่ากับ L เสมอ

ทฤษฎี 4.4.2 ถ้าฟังก์ชัน f มีลิมิตที่ต่างกันขณะที่จุด p เข้าใกล้ p_0 ในเซตของจุดที่ต่างกันสองเซต ซึ่งมี p_0 เป็นจุดเกาะกลุ่มดังนั้น $\lim_{p \to p_0} f(p)$ ไม่มี

พิสูจน์ ให้ S_1 และ S_2 เป็นเซตของจุดใน R_2 ที่ต่างกันและ

ให้ $\lim_{\substack{p \to p_0 \\ (p \in S_1)}} f(p) = L_1$

และ $\lim_{\substack{p \to p_0 \\ (P \in S_2)}} f(p) = L_2$

ต่อไปสมมติว่า $\lim_{p \to p_0} f(p)$ มีอยู่ ดังนั้น โดยทฤษฎี 4.4.1 L_1 ต้องเท่ากับ L_2 แต่โดยสมมุติฐาน- $L_1 \neq L_2$ นำไปสู่ข้อขัดแย้ง ฉะนั้น $\lim_{p \to p_0} f(p)$ ไม่มี

นิยาม 4.4.2 เราจะเขียนสัญลักษณ์

$$\lim_{|p| \to \infty} f(p) = L \quad (L \in R)$$

ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง ε ใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์ จะต้องมีจำนวนจริงบวก N ที่ทำให้ $|f(p) - L| < \varepsilon$ เมื่อใดก็ตามที่ $|p| \geqslant N$

ตัวอย่าง 1 กำหนด $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ จงหา $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ ถ้ามี

วิธีทำ ให้ S_1 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนแกน x ดังนั้น

$$\lim_{\substack{p \to p_0 \\ (P \in S_1)}} f(p) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2+0} = 0$$

ให้ S_2 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนเส้นตรง $y = x$ ดังนั้น

$$\lim_{\substack{p \to p_0 \\ (p \in S_2)}} f(p) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{\substack{p\to p_0 \\ p\in S_1}} f(p) \neq \lim\limits_{\substack{p\to p_0 \\ p\in S_2}} f(P)$

จะได้ว่า $\lim\limits_{p\to p_0} f(p)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$ (ถ้ามี)

เมื่อโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$ คือ เซตย่อยของ R^2 ที่กำหนดให้ดังนี้

ก) $S_1 = \{(x,y) \in R^2 \mid Y = x\}$

ข) $S_2 = \{(x,y) \in R^2 \mid y = x^2\}$

ค) $S_3 = \{(x,y) \in R^2 \mid y^2 = x\}$

ง) $S_4 = R^2$

วิธีทำ

ก) บนเส้นตรง $y = x$

$$f(p) = f(x,x) = \frac{x^2 - x^2}{1 + x^2 + x^2}$$

ดังนั้น

$$\lim_{\substack{p\to(0,0) \\ p\in S_1}} f(p) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2}{1 + x^2 + x^2} = 0$$

ข) บนเส้น $y = x^2$

$$f(p) = f(x,x^2) = \frac{x^2 - x^4}{1 + x^2 + x^4}$$

ดังนั้น

$$\lim_{\substack{p\to 0 \\ p\in S_2}} f(p) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^4}{1 + x^2 + x^4}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} x^2 - x^4}{\lim\limits_{x\to 0} 1 + x^2 + x^4} = \frac{0}{1} = 0$$

ค) เช่นเดียวกับข้อ (ข) พบว่าเมื่อโดเมนของ f คือ S_3 แล้ว f จะมีลิมิตเท่ากับศูนย์ที่จุด (0,0)

ง) จากข้อ (ก) (ข) และ (ค) ทำให้สรุปได้ว่า เมื่อ p เข้าใกล้จุด (0,0) บนเส้นทุกเส้นที่ผ่านจุดกำเนิดและบนเส้นโค้งพาราโบลาทุกเส้นที่ผ่านจุดกำเนิด ค่าของ f(p) จะเข้าใกล้ศูนย์เพียงค่าเดียวเท่านั้น เราจึงคาดว่าบนเซต S_4 ฟังก์ชัน f ควรจะมีลิมิตเท่ากับศูนย์ที่จุด (0,0) เราจะพิสูจน์โดยใช้นิยามของลิมิตว่า

$$\lim_{p\to 0} f(p) = 0$$

ในการพิสูจน์ เราต้องแสดงว่าเราสามารถที่จะทำให้

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} - 0\right|$$

มีค่าน้อยเพียงใดก็ได้ โดยการเลือกจุด (x,y) ให้ใกล้กับ (0,0) อย่างเพียงพอ ซึ่งทำได้หลายวิธี วิธีที่จะแสดงนี้ก็คือ พยายามเขียน นิพจน์ $|f(x,y) - f(0,0)|$ ให้มีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับการรวมเชิงเส้นของนิพจน์ $|(x,y) - (0,0)|$ (หรือน้อยกว่าหรือเท่ากับ $|(x,y) - (0,0)|^r$ เมื่อ r เป็นจำนวนตักยะ

a m $\quad |f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} - 0\right|$

$$= \frac{|x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2}$$

$$\leqslant \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

$$\leqslant x^2 + y^2 = |(x, y) - (0,0)|^2$$

$\therefore$ ถ้า ε เป็นจำนวนจริงบวกใดที่กำหนดให้ไว้ก่อน อสมการสุดท้ายนี้แนะให้เราเลือก $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ และถ้า $0 < |(x, y) - (0,0)| < \delta$ แล้วเราจะได้ว่า

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} - 0\right|$$

$$\leqslant \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

$$< |(x, y) - (0, 0)|^2 \leqslant \delta^2 = \varepsilon$$

$\therefore$ f มีลิมิตเป็นศูนย์ที่จุด (0,0)

ตัวอย่าง 8 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^4}$

จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

พิสูจน์ ให้ S_1 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนแกน x หรือแกน y แกนใดแกนหนึ่ง

ดังนั้น ถ้า (x,y) อยู่ใน S_1, $xy = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(p \text{ ใน } S_1)}} f(x,y) = 0$

ให้ S_2 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่ง ซึ่งผ่านจุดกำเนิด ดังนั้น ถ้า (x,y) เป็นจุดอยู่ใน S_2 , $y = mx$ แล้ว เราจะได้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(p \text{ ใน } S_2)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$$

ให้ S_3 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนพาราโบลา $y = x^2$ แล้ว

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(p \text{ ใน } S_3)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_3)}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_2)\\ \text{และ } (p \text{ ใน } S_1)}} f(x,y)$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $f(x,y) = (I + y^2)` \frac{\sin x}{X}, \frac{x^2 + x^2 + 1}{xy + 2}$ ที่จุด (0.0) (ถ้ามี)

2. ควรจะให้จุด (x,y) อยู่ใกล้กับจุด (0,0) มากเพียงใดเพื่อที่จะให้ $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ ถ้า

   n) $f(x,y) = x^2 + y^2$ และ $\varepsilon = 0.01$

   ข) $f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}$ และ $\varepsilon = 0.001$

3. จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่มีลิมิตที่จุด (0.0)

   n) $f(x,y) = \frac{A ?}{x^2 + x^2}$ * $(x,y) \neq (0,0)$

   ข) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$. $(x,y) \neq (0,0)$

   ค) $f(x,y) = \frac{(xy)^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

4. จงใช้บทนิยามอภิปรายการมีอยู่ของลิมิตต่อไปนี้

   n) $\operatorname{Pim}\limits_{|p|\to\infty} \frac{x + y}{x^2+y^2}$
   $P = (x,y)$

   (ข) $\operatorname{Pim}\limits_{|p|\to\infty} \frac{xy - z^2}{x^2+y^2+z^2}$

4.5 ทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชันที่มีหลายตัวแปร

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตหนึ่งของ R^n ไปใน R และ p_0 เป็นจุด ๆ หนึ่งใน R ที่มีคุณสมบัติว่า $\lim_{p \to p_0} f(p)$ และ $\lim_{p \to p_0} g(p)$ มีอยู่

ถ้าจุด p ทุกจุดที่อยู่ใกล้กับ p_0 เรามี f(p) อยู่ใกล้กับ L และ g(p) อยู่ใกล้กับ M แล้ว เราสมควรจะคาดคะเนได้ว่า สำหรับ p ทุกจุดที่อยู่ใกล้กับ p_0 เราควรจะได้ว่า

$(f+g)(p) = f(p) + g(p)$ อยู่ใกล้กับ $L + M$ ขณะที่

$(fg)(p) = f(p)\,g(p)$ อยู่ใกล้กับ LM และ

$\dfrac{f(p)}{g(p)}$ อยู่ใกล้กับ $\dfrac{L}{M}$ ถ้า $M \neq 0$ จึงสรุปเป็นทฤษฎีดังนี้

ทฤษฎีบท 4.5.1 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตหนึ่งของ R^n ไปใน R ถ้า $\lim_{p \to p_0} f(p) = L$ และ $\lim_{p \to p_0} g(p) = M$ แล้ว

ก) $\lim_{p \to p_0} (f+g)(P) = L + M$

ข) $\lim_{p \to p_0} (fg)(P) = LM$

ค) $\lim_{p \to p_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(P) = \dfrac{L}{M}$ ถ้า $M \neq 0$

ตัวอย่าง 1

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{x^2+y^2+1}{xy+2} = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,a)} x^2+y^2+1}{\lim_{(x,y)\to(a,a)} xy+2}$$

$$= \frac{a^2+a^2+1}{a^2+2} = \frac{2a^2+1}{a^2+2}$$

ตัวอย่าง 2 จงหา $\lim_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{3x-y}{27x^3-y^3}$

วิธีทำ

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x-y}{27x^3-y^3} = \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x-y}{(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{1}{9x^2+3xy+y^2}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (9x^2+3xy+y^2)}$$

$$= \frac{1}{9+9+9} = \frac{1}{27}$$

ตัวอย่าง 3 จงหา $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^3-2x^2y-2xy^2+y^3}{x^2-y^2}$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)-2xy(x+y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-3xy+y^2}{x-y} = \frac{1^2-3(1)(-1)+(-1)^2}{1-(-1)}$$

$$= \frac{5}{2}$$

การพิสูจน์ (ก)

ให้ V เป็น ผลตัดของโดเมนของ f และ g

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงที่กำหนดให้

เนื่องจาก $\lim\limits_{p\to p_0} f(p) = L$

ดังนั้นจะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ที่มีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ สมาชิก $p \in V \cap U_{\delta_1}(p_0)$ เรามี $|f(p) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{p\to p_0} g(p) = M$

ดังนั้นจะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ สมาชิก $p \varepsilon V \cap U_{\delta_2}(p_0)$ เรามี

$|g(p) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ สมาชิก $p \varepsilon V \cap U_{\delta}(p_0)$ เรามี

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < f(p) < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

และ
$$M - \frac{\varepsilon}{2} < g(p) < M + \frac{\varepsilon}{2}$$

บวกอสมการนี้เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$(L + M) - \varepsilon < f(p) + g(p) < (L + M) + \varepsilon$$

หรือ

$$|(f + g)(P) - (L + M)| < \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{p \to p_0} (f + g)(p) = L + M$ **ซ.ต.พ.**

การพิสูจน์ (ข)

ให้ W เป็นผลตัด (intersection) ของโดเมนของ f และ g และให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงที่กำหนดให้ไว้ก่อน จากนิยามของค่าสัมบูรณ์และจากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(p)\,g(p) - LM| &= |f(g)\,g(p) - Lg(p) + Lg(p) - LM| \\ &6\ |g(p)\,(f(p) - L)| + |L(g(p) - W| \\ &\leqslant |g(p)|\,|f(p) - L| + |L|\,|g(p) - M| \end{aligned} \qquad \text{.........(1)}$$

เนื่องจาก $\mathop{\text{Pim}}\limits_{p \to p_0} f(p) = L$ และ $\lim\limits_{p \to p_0} (p) = M$

นั่นคือ เราสามารถทำให้ $If(p) - L|$ และ $|g(p) - M|$ มีขนาดเล็กเท่าใดก็ได้ตามที่เราต้องการด้วยวิธีการทำให้ $If(p) - L|$ และ $|g(p) - M|$ เล็กพอเพียง จึงพอจะแน่ใจได้ว่า $|f(p)\,g(p) - LM| < \varepsilon$

เพื่อให้ละเอียดยิ่งขึ้น เราหา $\delta_1 > 0$ ที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ สมาชิก $p \varepsilon V \cap U_{\delta_1}(p_0)$ เรามี

$$|f(p) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} \qquad \text{.........(2)}$$

ต่อไปหา $\delta_2 > 2$ ที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ สมาชิก $p \varepsilon V \cap U_{\delta_2}(p_0)$ เรามี

$$M - 1 < g(p) < M + I$$

สำหรับ p นั้น เรามี

$$g(p) < |M| + 1 \qquad \text{.........(3)}$$

ขั้นสุดท้ายหา $\delta_3 > 0$ ที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก 9 สมาชิก $p \varepsilon V \cap U_{\delta_3}(p_0)$ เรามี

$$|g(p) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L| + 1)} \qquad \text{..........(4)}$$

ถ้าให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ แล้วอสมการ (2), (3), (4) เป็นจริงพร้อมกันเมื่อ p อยู่ในอินเตอร์-เซกชัน ของ V กับย่านจุด p_0 รัศมี δ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ p_0 อีกนัยหนึ่งคือ $P \varepsilon V \cap U_{\delta}(p_0)$ นั่นเอง สำหรับจุด p นั้น จากอสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} |f(p)\ g(p) - LM| &\leqslant |g(p)|\ |f(p) - L| + |L|\ |g(p) - M| \\ &< (|d| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|d| + 1)} + |c|\frac{\varepsilon}{2(|c| + 1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{p \to p_0} f(p)\ g(p) = LM$ ซ.ต.พ.

การพิสูจน์ (ค) เราเพียงแต่แสดงว่า $\lim\limits_{p \to p_0} (\frac{1}{g}) = \frac{1}{M}$ ก็พอสำหรับการพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{p \to p_0} (\frac{f}{g}) = \frac{L}{M}$ นั้น เป็นผลโดยตรงมาจาก (ข) เนื่องจาก $\frac{f}{g} = f(\frac{1}{g})$

ให้ V เป็นโดเมนของ $(\frac{1}{g})$ และให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงที่กำหนดให้ไว้ก่อน เราต้องการหา p ที่อยู่ใกล้ p_0 เพียงพอที่จะทำให้

$$\left|\frac{1}{g(p)} - \frac{1}{M}\right| - \left|\frac{g(p) - M}{M.g(p)}\right| \text{ น้อยกว่า } \varepsilon$$

เนื่องจาก $M \neq 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ สมาชิก $p \varepsilon V \cap U_{\delta_1}(p_0)$-เรามี

$$M - \frac{|M|}{2} < g(p) < M + \frac{|M|}{2} \qquad \text{..........(5)}$$

พิจารณาเมื่อ $M < 0$ และ $M > 0$ จากอสมการ (5) พบว่าเรามี

$$g(p) > \frac{|M|}{2} \qquad \text{..........(6)}$$

ต่อไปเลือก $\delta_2 > 0$ ที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับทุกสมาชิก $p \in V \cap U_{\delta_2}(p_0)$ เรามี

$$|g(p) - M| < \frac{\varepsilon}{2}|M|^2 \qquad \text{..........(7)}$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $p \in V \cap U_\delta(p_0)$ ความสัมพันธ์ (6) และ (7) จะเป็นจริงพร้อมกัน และ

$$\left|\frac{1}{g(p)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{g(p) - M}{M \cdot g(p)}\right|$$

$$= \frac{|g(p) - M|}{|M|\,|g(p)|}$$

$$= \frac{\frac{\varepsilon}{2}|M|^2}{|M|\frac{|M|}{2}}$$

$$= \varepsilon \qquad \text{ช.ต.พ.}$$

แบบฝึกหัด 4.5

จงหาค่าของลิมิต

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (3x - 4y)$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,4)} (5x - 3y)$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + y^2)$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(5,3)} (2x^2 - y^2)$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-4)} (x^2 + 2x - y)$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} (x^2 + y^2 - 4x + 2y)$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,2)} y^3\sqrt{x^3 + 4y}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \sqrt{\dfrac{x^2 + 12y}{x - y^2}}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{X - Y}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^3 + 8y'}{x + 2y}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^x + e^y}{e^{-x} + e^{-y}}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \dfrac{x - 3y}{9y^2 - x^2}$

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{3x - y}{27x^3 - y^3}$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 + 4Y}{2xy - 3y}$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{2x^2 + xy - 6y^2}{4x^2 - 8xy + 3y^2}$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{x - y}$

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x + y} - \sqrt{y}}{x}$