บทที่ 3

อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

3.1 คำนำ จากบทที่แล้ว เรากล่าวถึงลำดับซึ่งเราศึกษาดูว่า เมื่อ $n \to \infty$ นั้น พจน์ที่ n หรือ S_n จะเข้าสู่จุดอะไร ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาดูว่า ถ้าเราเอาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับตั้งแต่พจน์ที่หนึ่ง และพจน์ต่อ ๆ ไปทั้งหมดมาบวกกันเข้า ค่าที่ได้จะมีค่าหรือไม่

นิยาม 3.1.1 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของจำนวน ซึ่งผลรวมของทุก ๆ พจน์คือ

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \ldots$$

หรือ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$

เรียกว่าอนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

จากนิยาม 3.1.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \ldots$$

ก็คือ การนำเอาลำดับตั้งแต่พจน์ที่ 1 รวมกับพจน์ถัด ๆ ไปจนถึงพจน์ที่ n

เช่น $\sum\limits_{n=1}^{2} S_n = S_1 + S_2$

$$\sum_{n=1}^{3} S_n = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\sum_{n=1}^{4} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

จำนวน $S_1, S_2, S_3, \ldots$ เป็นพจน์ และให้ $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$ เป็น partial sums (ผลบวกย่อย)

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$ มีค่า และมีค่าเป็น S แล้ว อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ ลู่เข้าสู่ S ด้วย และเขียนว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S$$

แต่ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$ หาค่าไม่ได้ แล้วอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ จะลู่ออก

โดยทั่วไปเราจะเขียน ΣS_n แทน $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$

ตัวอย่าง 3.1.1 จงพิจารณาว่า อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ลู่เข้า หรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \quad \because \text{ เป็นอนุกรมเรขาคณิต} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ เมื่อ $n\to\infty$ แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้า #

ตัวอย่าง 3.1.2 พิจารณาอนุกรมที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก
ถ้ากำหนดอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

วิธีทำ จาก $\frac{1}{n(n+1)}$ แยกเป็นเศษส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

เพราะฉะนั้น อนุกรมนี้ลู่เข้า #

ตัวอย่าง 3.1.3 จงพิจารณาอนุกรมที่กำหนดให้ลู่เข้า หรือลู่ออก ถ้ากำหนดอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

วิธีทำ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots..$

แต่ถ้า n เป็นคี่ (คือ เอาสามเทอมแรก, ห้าเทอมแรก, เจ็ดเทอมแรก,...รวมกัน)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1$$

แต่ถ้า n เป็นคู่ (คือเอาสองเทอมแรก, สี่เทอมแรก, ห้าเทอมแรก, ...รวมกัน)

$$\sum_{n=2}^{n} (-1)^{n-1} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น อนุกรมนี้จึงลู่ออก +

ทฤษฎีบท 3.1.1 ถ้า ΣS_n ลู่เข้า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$

พิสูจน์ ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k = S$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k = S$

เพราะว่า

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1} + S_n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1}$$

แล้ว

$$\sum_{k-1}^{n} 8 - \sum_{k-1}^{n-1} S_k = S_n$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{fim}} \sum_{k=1}^{n} S_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k-1}^{n-1} S_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$s - s = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} S_n$$

ทฤษฎีบทนี้ไม่ได้บอกว่า ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ แล้ว ΣS_n จะลู่เข้า แต่ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n \neq 0$ แล้ว ΣS_n จะ ลู่เข้า หรือลู่ออกก็ได้

ตัวอย่าง 8.1.4 **จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ลู่เข้า หรือลู่ออก**

วิธีทำ **เพราะว่า**

$$\frac{n^n}{\text{II}!} = \frac{n.n.n.n \ldots n}{1.2.3.....n}$$

$$= \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\ldots\left(\frac{n}{n}\right) > 1$$

แสดงว่า $\underset{n\to\infty}{\text{fim}} \frac{n^n}{n!} \neq 0$ **เพราะฉะนั้นอนุกรม** $\sum_{n=1} \frac{n^n}{n!}$ **ต้องลู่ออก**

ตัวอย่าง 8.1.5 **จงแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิต** (Geometric series)

Σar^{n-1} เมื่อ r เป็นอัตราส่วนระหว่างพจน์สองพจน์ที่ต่อเนื่องกัน และ $a \neq 0$ ลู่เข้าเมื่อ $|r| < 1$ และลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

วิธีทำ **i) เมื่อ $|r| < 1$**

เพราะว่า $\Sigma ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1}$

$$r\Sigma ar^{n-1} = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$\Sigma ar^{n-1} - r\Sigma ar^{n-1} = a - ar^n$$

$$\Sigma ar^{n-1}(1 - r) = a - ar^n$$

$$\Sigma\, ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$= \frac{a}{1 - r}$$ เพราะว่า $r^n \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

เพราะฉะนั้น $\Sigma\, ar^{n-1}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{a}{1 - r}$ เมื่อ $|r| < 1$

ii) เมื่อ $|r| \geqslant 1$ เราจะได้ว่า $r \geqslant 1$ หรือ $r \leqslant -1$

ถ้า $r \geqslant 1$

พิจารณา $\lim\limits_{n \to \infty} ar^{n-1} = a \lim\limits_{n \to \infty} r^{n-1} \neq 0$

เพราะว่า $a \neq 0$ และ $\lim\limits_{n \to \infty} r^{n-1} \geqslant 1$

เพราะฉะนั้น Ear^{n-1} ลู่ออก ....*. (1)

ถ้า $r \leqslant -1$

พิจารณา $\lim\limits_{n \to \infty} ar^{n-1} = a\ \underset{n \to \infty}{Pim}\ r^{n-1} \neq 0$

เพราะว่า $a \neq 0$ และ $\lim\limits_{n \to \infty} r^{n-1} \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\Sigma\, ar^{n-1}$ ลู่ออก ....(2)

จากสมการ (1) และ (2)

อนุกรมเรขา $\Sigma\, ar^{n-1}$ ลู่ออก เมื่อ $|r| \geqslant 1$ #

หมายเหตุ อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series) $\Sigma\, ar^n$

ลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$ และ

ลู่ออก เมื่อ $|r| \geqslant 1$

ทฤษฎีบท 3.1.2 อนุกรม $\Sigma\, S_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{m,n \to \infty} (S_m + S_{m+1} + \ldots + S_n) = 0$$

พิสูจน์ ให้ $\ell im_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S_k = S$

แล้ว $\ell im_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{Ill\cdot1} Sk = S$ ด้วยสำหรับ $m < n$

พิจารณา

$$\left(\sum_{k=1}^{n} S_k - \sum_{k=1}^{m-1} S_k \right) = (S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n)-(S_1+S_2+\ldots+S_{m-1})$$

$$= (S_m + S_{m+1} + Sm.2 + snl.3 + \ldots + S_n)$$

$$0 = Pim_{m,n\to\infty} (S_m + S_{m+1} + Sm.2 + \ldots + S_n)$$ #

ทฤษฎีบท 3.1.3 อนุกรม Σ S,, ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $N(\varepsilon)$ ซึ่ง

$$|S_m + S_{m+1} + \ldots + S_n| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n > m > N$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.1.2

$$S_m + S_{m+1} + S_{m+2} + \ldots + S_n = 0 \text{ สำหรับ } m\to\infty \text{ และ } n\to\infty$$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $N(\varepsilon)$ ซึ่ง

$$|S_m + S_{m+1} + S_{m+2} + \ldots + S_n| = 0 < \varepsilon$$ #

สำหรับ $|S_m + S_{m+1} + S_{m+2} + \ldots + S_n|$ อาจเขียนได้เป็น

$$|S_m + S_{m+1} + S_{m+2} + \ldots + S_{m+p}| \text{ สำหรับ } p \geqslant 1$$

หรือให้ $p = n - m$

ตัวอย่าง 3.1.6 จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เพราะว่า

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n} \leqslant \frac{1}{1\cdot2\cdot2\cdot2\cdots\cdot2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

พิจารณา

$$\left|\ {}^{n+\Sigma}_{n+1}\ \frac{1}{k!}\right| = \sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{k!} \leqslant \sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{n}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2}} + \frac{1}{2^{3}} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n}}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{p}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$< \frac{1}{2^{n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n}} \cdot 2$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

จะได้ว่า

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{k!}\right| < 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

แต่ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$ เมื่อ $n \to \infty$

ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} < \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N$$

เพราะฉะนั้น

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{k!}\right| c\ \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N \text{ และ } p \geqslant 1$$

แสดงว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.1.4 ถ้า $\Sigma |S_n|$ ลู่เข้าแล้ว ΣS_n ลู่เข้าด้วย

พิสูจน์ เพราะว่า

$$|S_{n+1} + S_{n+2} + \dots + S_{n+p}| \leqslant |S_{n+1}| + |S_{n+2}| + \dots + |S_{n+p}| \text{..........(1)}$$

เพราะว่า $\Sigma |S_n|$ ลู่เข้า นั้นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$\left||S_{n+1}| + |S_{n+2}| + \ldots + |S_{n+p}|\right| < \varepsilon$ สำหรับ $n > N, p \geqslant 1$ ....(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า

$|S_{n+1} + S_{n+2} + \ldots + S_{n+p}| < e$ สำหรับ $n > N. p \geqslant 1$

จากทฤษฎีบท 3.i.3 จะได้ว่า ΣS_n ลู่เข้า #

ตัวอย่าง 3.1.7 จงพิจารณาอนุกรม

$\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n/[n(n+1)]$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา $\sum\limits_{1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

จากตัวอย่าง 3.1.2 $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ลู่เข้า

แล้ว $\sum\limits_{1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right|$ ลู่เข้าด้วย

จากทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ ลู่เข้า #

แบบฝึกหัด 8.1

จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ว่า ลู่เข้า หรือ ลู่ออก
ถ้าลู่เข้าจงหาผลรวมของอนุกรมนั้น

1. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

2. $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}$

3. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$

4. $\sum\limits_{1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

5. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

6. $\sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$

7. $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{n+5}{(n^{2}-1)(n+2)}$

8. $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{n^{2}-n-1}{n!}$ (ให้ $\dfrac{n^{2}-n-1}{n!} = \dfrac{(n^{2}-n)}{n!} - \dfrac{1}{n!}$)

3.2 อนุกรมที่พจน์ไม่เป็นลบ และการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

(Series with Nonnegative Terms and Comparision Tests)

ในหัวข้อต่อไปนี้จะพิจารณาอนุกรม ΣS_n ซึ่งไม่เป็นลบ และการพิจารณา อนุกรม ΣS_n ว่าลู่เข้า หรือลู่ออก โดยใช้การทดสอบแบบต่าง ๆ ที่จะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 ถ้า ΣS_n เป็นอนุกรมที่มีแต่ละพจน์ไม่เป็นลบ จะลู่เข้าก็ต่อเมื่อ ลำดับของผลรวมย่อยมีขอบเขต

พิสูจน์ ให้

$$\begin{aligned}
A_1 &= S_1 \\
A_2 &= S_1 + S_2 = A_1 + S_2 \\
A_3 &= S_1 + S_2 + S_3 = A_2 + S_3 \\
&\vdots \\
A_n &= S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = A_{n-1} + S_n
\end{aligned}$$

เพราะว่า $S_n \geqslant 0$ และ $A_n - A_{n-1} = S_n \geqslant 0$

หรือ $A_n - A_{n-1} \geqslant 0$ แสดงว่า

ลำดับ $\{A_n\}(A_n = \Sigma S_n)$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และจากทฤษฎีบทของลำดับ กล่าวว่า "ทุก ๆ โมโนโทนิคลำดับที่มีขอบเขตจะต้องเป็นลำดับลู่เข้า"

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\Sigma S_n (A_n = \Sigma S_n)$ เป็นโมโนโทนิค ลำดับจะลู่เข้าก็ต่อเมื่อ ลำดับของ ΣS_n มีขอบเขต #

ตัวอย่าง 3.2.1 จงแสดงว่า อนุกรม k, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, จะลู่เข้า ถ้า $k > 1$ และจะลู่ออก ถ้า $k \leqslant 1$

วิธีทำ i) สมมุติ $k > 1$ จะแสดงว่า $\Sigma \frac{1}{n^k}$ ลู่เข้า

จะทดสอบผลรวมย่อยของอันดับ (order) $2^n - 1$ (1, 3, 7, 15, ...) หมายถึง เอาพจน์ของ S_n รวมกันเป็นกลุ่มโดยกลุ่มที่ 1 คือ S_1 กลุ่มที่ 2 คือ $S_2 + S_3$ กลุ่มที่ 3 คือ $S_4 + S_5 + S_6 + S_7$ เป็นต้น

เพราะฉะนั้น

$$A_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{8^k} + \frac{1}{9^k} + \ldots + \frac{1}{15^k} \right)$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^k} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^k} \right)$$

$$\leqslant 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \right) + \left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \ldots + \frac{1}{8^k} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^k} + \ldots + \frac{1}{(2^{n-1})^k} \right)$$

$$= 1 + \frac{2}{2^k} + \frac{4}{4^k} + \frac{8}{8^k} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^{k-1}} + \frac{1}{8^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^{n-1})^{k-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{(2^{k-1})^2} + \frac{1}{(2^{k-1})^3} + \ldots + \frac{1}{(2^{k-1})^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - [1/(2^{k-1})^n]}{1 - (1/2^{k-1})}$$ จากอนุกรมเรขา $\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a - r^n}{1 - r}$

$$< \frac{1}{1 - (1/2^{k-1})} = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1} - 1}$$ คงที่

สำหรับจำนวนเต็ม m จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $2^n - 1 > m$ แล้ว

$$A_m \leqslant A_{2^n-1} < \frac{2^{k-1}}{2^{k-1} - 1}$$

แสดงว่าผลรวมย่อยมีขอบเขต และอนุกรมนี้มีแต่ละพจน์ไม่เป็นลบ จากทฤษฎี 3.2.1 จะได้ว่า A_{2^n-1} เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า นั้นคือ $\Sigma \frac{1}{n^k}$ ลู่เข้า เมื่อ $k > 1$

ii) สมมุติให้ $k \leqslant 1$ จะแสดงว่า $\Sigma \frac{1}{n^k}$ ลู่ออก

แรกให้ $n^k \leqslant n$ และพิจารณาผลรวมย่อยของอันดับ 2^n (2, 4,...) นั้นคือ เอาพจน์ของ S_n รวมกันเป็นกลุ่ม ๆ โดยกลุ่มที่ 1 คือ $S_1 + S_2$, กลุ่มที่ 2 คือ $S_3 + S_4$, กลุ่มที่ 3 คือ $S_5 + S_6 + S_7 + S_8$, เป็นต้น

เพราะฉะนั้น

$$A_{2^n} = \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k}\right) + \left(\frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} + \frac{1}{8^k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{(2^{n-1} + 1)^k} + \ldots + \frac{1}{(2^n)^k}\right)$$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$

$$\left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{n}{2}$$

นั่นคือ $A_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ หรือผลรวมย่อมไม่มีขอบเขต และอนุกรมนี้แต่ละพจน์ไม่เป็นลบ จากทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า A_{2^n} ลู่ออก หรือ $\Sigma \frac{1}{n^k}$ ลู่ออก เมื่อ $k \leq 1$

#

สรุป อนุกรม k, $\Sigma \frac{1}{n^k}$ ลู่เข้า ถ้า $k > 1$

และ $\Sigma \frac{1}{n^k}$ ลู่ออก ถ้า $k \leq 1$

ถ้า $k = 1$

$$\Sigma \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

อนุกรมนี้เรียกว่า "อนุกรมฮาโมนิค" ซึ่งจะลู่ออก

ต่อไปจะพิจารณาการทดสอบแบบเปรียบเทียบ (Comparison test) การทดสอบแบบนี้ เราอาศัยอนุกรมอันหนึ่ง ซึ่งทราบว่าลู่เข้า หรือลู่ออกแล้วนำไปเปรียบเทียบกับอนุกรมอื่น ๆ ซึ่งอนุกรมทั้งสองมีความเกี่ยวข้องและสัมพันธ์กัน

ความสัมพันธ์กันระหว่างอนุกรมต่าง ๆ จะทำให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นเมื่อศึกษาจากทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่จะกล่าวต่อไปนี้

และทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไปนี้จะเรียกว่า การทดสอบแบบเปรียบเทียบ (Comparison test)

ทฤษฎีบท 3.2.2 (การทดสอบแบบเปรียบเทียบ)

สมมุติให้ Σa_n และ Σb_n เป็นอนุกรมที่มีแต่ละพจน์ไม่เป็นลบ (nonegative) และมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$a_n \leqslant b_n$ ถ้า $n \geqslant N$ แล้ว

i) ถ้า Σb_n ลู่เข้า แล้ว Σa_n จะลู่เข้าด้วย

ii) ถ้า Σa_n ลู่ออก แล้ว Σb_n จะลู่ออกด้วย

พิสูจน์ i) จากสมมุติฐาน กำหนดให้

$a_n \leqslant b_n$ สำหรับ $n > N$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_n \leqslant b_{N+1} + b_{N+2} + \dots + b_n$$

$$\Sigma a_n \leqslant \Sigma b_n \qquad \dots\dots\dots(1)$$

จากสมมุติฐาน Σb_n เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

นั่นคือ $\Sigma b_n = B$ เมื่อ B เป็นจำนวนจริง

จากสมการ (1)

$$\Sigma a_n \leqslant B$$

เพราะ Σa_n ซึ่งแต่ละเทอมไม่เป็นลบ

จะได้ว่า Σa_n เป็นโมโนโทนิคลำดับที่ไม่มีค่าไม่ลดลง และมีขอบเขตบน คือ B จากทฤษฎีบทที่ 3.2.1 จะได้ว่า อนุกรม Σa_n ลู่เข้า

ii) ถ้า Σa_n ลู่ออก

สมมุติให้ Σb_n ลู่เข้า แล้วจะได้ว่า Σa_n ลู่เข้าด้วย (จากตอนที่ (i)) ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานของตอนที่ (ii) ที่ว่า $E a_n$ ลู่ออก

เพราะฉะนั้น ที่สมมุติให้ Σb_n ลู่เข้าก็ไม่จริง

นั่นคือ Σb_n จะต้องลู่ออก #

ตัวอย่าง 3.2.2 จงพิจารณา อนุกรม $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ ลู่เข้า หรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณาเทอมที่ n

$$\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$$

ดังนั้น $$\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}} > \sqrt{\frac{1}{n^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n}$$

เพราะว่า $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก เพราะเป็นอนุกรมฮาโมนิค

จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จะได้ว่า

อนุกรม $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ ลู่ออก #

ตัวอย่าง 3.2.3 จงพิจารณาอนุกรม

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\ell n\, n}{2n^3 - 1}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก

$\ell n\ n < n$ และ $\frac{1}{2n^3 - 1} < \frac{1}{n^3}$

ดังนั้น $$\frac{\ell n\, n}{2n^3 - 1} < \frac{n}{n^3}$$

$$\frac{I \quad n}{2n^3 - 1} < \frac{1}{n^2}$$

เพราะว่า $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรม k เมื่อ $k > 1$

จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{\ell n\ n}{2n^3 - 1}$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 3.2.4 จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$

ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{1}{2^n + 3} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

เพราะว่า $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $|r| < 1$

จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$ ลู่เข้า #

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เรียกว่า **"การทดสอบแบบเปรียบเทียบโดยลิมิต"** (limit from of the comparison-test)

ทฤษฎีบท 3.2.3 ถ้า Σa_n และ Σb_n เป็นอนุกรมที่มีแต่ละพจน์ไม่เป็นลบ และถ้า

$$0 < \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$$

แล้ว Σa_n และ Σb_n ลู่เข้า หรือ Σa_n และ Σb_n ลู่ออก

พิสูจน์ จากสมมุติฐาน $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ นั่นคือจะต้องมีจำนวนจริงบวก A ซึ่ง

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

จากนิยามของลิมิตของลำดับ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \frac{A}{2} \text{ สำหรับ } n \geq N$$

หรือ $-\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} - A < \frac{A}{2}$

$$\frac{A}{I} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2} < 2A$$

$$\frac{A}{I} < \frac{a_n}{b_n} < 2\ A$$

หรือ $b_n < \left(\frac{2}{A}\right)$ an ....(I)

$a_n < (2A)\ b_n$ . ...(2)

จากทฤษฎีบทที่ 3.2.2 (การทดสอบแบบเปรียบเทียบ)

จากสมการที่ (1)

ถ้า $\Sigma\, a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\Sigma\, b_n$ ลู่เข้า

จากสมการที่ (2)

ถ้า $\Sigma\, a_n$ ลู่ออก แล้ว $\Sigma\, b_n$ ลู่ออก #

ตัวอย่าง 3.2.5 จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ a_n มีค่าโดยประมาณ $\frac{1}{n} = b_n$

พิจารณา
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\sqrt{n(2n+1)}} = \frac{n}{\sqrt{n^2(2+\frac{1}{n})}} = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}$$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

และ $\Sigma\, b_n = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ ลู่ออก เพราะเป็นอนุกรมฮาโมนิค

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_2^\infty \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ ลู่ออกจากการเปรียบเทียบโดยลิมิต- #

ตัวอย่าง 3.2.6 จงพิจารณาอนุกรม $\sum_1^\infty \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$

ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ ให้

$$a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1} = \frac{n\left(1+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{2n^3-1}$$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ a_n มีค่าโดยประมาณ $\frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2} = b_n$

เพราะว่า

$$\operatorname*{Pim}_{n\to\infty} \frac{a.}{b_n} = \operatorname*{Pim}_{n\to\infty} \frac{(n+\sqrt{n}) \,.\, 2n^2}{2n^3 - I}$$

$$= \operatorname*{Pim}_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 2n^{5/2}}{2n^3 - 1}$$

= 1 จาก L' Hospital's rule

และ $\Sigma\, b_n = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรม k เมื่อ $k > 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_1^\infty \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ ลู่เข้า #

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เรียกว่า **"การทดสอบแบบอินทีกรัล"** (Integral test) ซึ่งเป็นการทดสอบแบบเปรียบเทียบแบบหนึ่ง ซึ่งการเปรียบเทียบนี้จะเปรียบเทียบระหว่าง อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral)กับอนุกรม ซึ่งต่างกับการเปรียบเทียบกับแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว ซึ่งเปรียบเทียบระหว่างอนุกรมสองอนุกรม

ทฤษฎีบท 3.2.4 (การทดสอบแบบอินทีกรัล)

ให้ $\Sigma\, S_n$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์ต่าง ๆ เป็นบวก และทุก ๆ พจน์มีค่าไม่เพิ่มขึ้น

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น และมีค่าสำหรับ $x \geqslant N$ นั่นคือ

$$f(n) = S_n \text{ สำหรับ } n \geqslant N \ (n = N, N + 1, N + 2, \ldots)$$

แล้ว อนุกรม ΣS_n และอินทีกรัล $\int_N^{\infty} f(x)\,dx = \ell im_{M\to\infty} \int_N^M f(x)\,dx$ จะต้องลู่เข้าทั้งคู่ หรือจะต้องลู่ออกทั้งคู่

พิสูจน์ กำหนดให้ $N = 1$

สำหรับ $n \geqslant N$ พิจารณา $n \leqslant x \leqslant n + 1$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น จึงได้ว่า

$$f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n + 1)$$

$S_n = f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n + I) = S_{n+1}$ จากสมมุติฐาน

อินทีกรัลจาก $x = n$ ถึง $x = n + 1$

$$\int_n^{n+1} S_n\,dx \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \int_n^{n+1} S_{n+1}\,dx$$

เพราะว่า S_n และ S_{n+1} คงที่จึงได้

$$S_n\, x \Big|_n^{n+1} \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant S_{n+1}\, x \Big|_n^{n+1}$$

$$S_n \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant S_{n+1}$$

Summation จาก $n = 1$ ถึง $M - I$

$$\sum_{1}^{M-1} S_n \geqslant \sum_{1}^{M-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{1}^{M-1} S_{n+1}$$

$S_1 + S_2 \ldots + S_{M-1} \geqslant \int_1 f(x)\,dx \geqslant S_2 + S_3 + \ldots + S_M$ ....(1)

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$S_2 + S_3 + \ldots + S_M \leqslant \int_1^M f(x)\,dx$ ....(2)

หรือ $\int_1^M f(x)\,dx \leqslant S_1 + S_2 + \ldots + S_{M-1}$ ....(3)

จากสมการ (2)

ถ้า $\ell im_{M\to\infty}$ I''_1 f(x) dx หาค่าได้ และเท่ากับ S'

เพราะว่า $S_2 + S_3 + . . . + S_M$ เป็นโมโนโทนิคชนิดเพิ่มขึ้น และมีขอบเขตบน คือ S' นั่นคือ

$$S_2 + S_3 + . . . + S_M \leqslant S'$$

เพราะฉะนั้น ΣS_n ต้องลู่เข้า

จากสมการ (3)

ถ้า $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx$ ไม่มีขอบเขต แล้ว $S_1 + S_2 + ... + S_{M-1}$ ก็ไม่มีขอบเขต

ด้วย

เพราะฉะนั้น ΣS_n ลู่ออก #

ตัวอย่าง 3.2.7 จงทดสอบอนุกรม k

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^k} \text{ เมื่อ } k < 1,\ k > 1,\ k = I$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_1^M f(x)\,dx = \int_1^M \frac{1}{x^k}\,dx \text{ เมื่อ } f(n) = \frac{1}{n^k}$$

$$= \int_1^M x^{-k}\,dx$$

$$= \left.\frac{x^{1-k}}{1-k}\right|_1^M \text{ และ } k \neq 1$$

$$= \frac{M^{1-k}}{I - k} - \frac{1}{1-k}$$

$$= \frac{M^{1-k} - 1}{1-k} \qquad \text{........(1)}$$

จากสมการ (1) ถ้า $k < 1$

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{x^k}\,dx = \underset{M\to\infty}{\text{Pim}} \frac{M^{1-k} - 1}{1-k} = \infty$$

ซึ่งไม่มีขอบเขต หรือลู่ออก

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ลู่ออก #

จากสมการ (1) ถ้า k > 1

$$\underset{M\to\infty}{\text{Cim}} \int_1^M \frac{1}{x^k}\,dx = \underset{M\to\infty}{\text{Pim}} \frac{M^{1-k}-1}{1-k} = \frac{-1}{1-k}$$

ซึ่งลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^k}$ ลู่เข้า #

ถ้า k = 1

$$\int_1^M \frac{1}{x^k}\,dx = \int_1^M \frac{dx}{x}$$

$$= \text{Pn}\ |x| \Big|_1^M$$

$$= \ell n\ M - \ell n\ 1$$

$$= \ell n\ M$$

เพราะว่า $\underset{M\to\infty}{\text{Pim}} \int_1^M \frac{dx}{x} = \underset{M\to\infty}{\text{Pim}}\ \ell n\ M$

$$= \infty$$

ซึ่งไม่มีขอบเขต หรือลู่ออก

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^k}$ ลู่ออก #

หมายเหตุ

1. ถ้า $\underset{M\to\infty}{\text{Pim}} \int_1^M f(x)\,dx$ หาค่าได้ แสดงว่า ลู่เข้า
2. ถ้า $\underset{M\to\infty}{\ell\text{im}} \int_1^M f(x)\,dx$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า ลู่ออก

ตัวอย่าง 3.2 8 จงพิจารณาอนุกรม $\sum\limits_1^\infty \frac{n}{n^2+1}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

พิจารณา $\int_1^M f(x)\,dx = \int_1^M \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$$= \int_{1}^{M} \frac{1}{2} d \frac{(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ell n \, (x^2 + 1) \Big|_{1}^{M}$$

$$= \frac{1}{2} (\ell n \, (M^2 + 1) - \ell n \, 2)$$

$$\underset{M \to \infty}{\text{fim}} \int_{1}^{M} f(x) \, dx = \underset{M \to \infty}{\text{Cim}} \frac{1}{2} (\ell n \, (M^2 + I) - \ell n \, 2)$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้ เพราะว่า $\underset{M \to \infty}{\ell im} \ \text{Pn} \, (M^2 + 1)$ หาค่าไม่ได้

แสดงว่า $\underset{M \to \infty}{\ell im} \int_{1}^{M} f(x) \, dx$ ลู่ออก

เพราะฉะนั้น $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ ลู่ออกด้วย #

ตัวอย่าง ๘.2.๙ จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} ne^{-n^2}$ ลู่เข้า หรือลู่ออก

วิธีทำ ให้ $f(x) = xe^{-x^2}$

พิจารณา $\int_{1}^{M} f(x) \, dx = \int_{1}^{M} xe^{-x^2} \, dx$

$$= \int_{1}^{M} -\frac{1}{2} d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{1}^{M} d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{1}^{M}$$

$$= -\frac{1}{2} (e^{-M^2} - e^{-1})$$

$$= \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-M^2}$$

$$\underset{M \to \infty}{\ell im} \int_{1}^{M} f(x) \, dx = \underset{M \to \infty}{\ell im} \frac{1}{2} e^{-1} - \underset{M \to \infty}{\ell im} \frac{1}{2} e^{-M^2}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-1} - 0$$

$$= \frac{1}{2} e^{-1}$$

แสดงว่า $\underset{M \to \infty}{\ell im} \int_{1}^{M} f(x) \, dx$ ลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{1}^{\infty} ne^{-n^2}$ ลู่เข้าด้วย #

การทดสอบแบบเปรียบเทียบแบบต่อไปเรียกว่า "Couchy root test" ซึ่งเป็นการพิจารณาหารากที่ n ของพจน์ S_n ของอนุกรม ΣS_n และแต่ละพจน์ S_n จะต้องไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 3.2.5 (Cauchy root test)

ให้ ΣS_n เป็นอนุกรมซึ่งแต่ละพจน์ไม่เป็นลบ

i) ถ้ามีจำนวนจริง $r < 1$ และมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$\sqrt[n]{S_n} \leqslant r$ สำหรับ $n > N$

แล้ว ΣS_n ลู่เข้า

ii) สำหรับค่า n จำนวน infinite ซึ่ง $\sqrt[n]{S_n} > 1$ แล้ว ΣS_n ลู่ออก

ถ้า $\sqrt[n]{S_n} = 1$ การทดสอบสรุปผลไม่ได้

พิสูจน์ i) สำหรับ $n > N$

$\sqrt[n]{S_n} \leqslant r$

$S_n \leqslant r^n$ ยกกำลัง n ทั้งสองข้าง

แต่ Σr^n เมื่อ $r < 1$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งลู่เข้า จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จะได้ว่า

ΣS_n ต้องลู่เข้าด้วย

ii) สำหรับค่า n จำนวน infinite ซึ่ง

$\sqrt[n]{S_n} > 1$

$S_n > 1$ ยกกำลัง n ทั้งสองข้าง

แล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} S_n > 1$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} S_n \neq 0$

∴ จากทฤษฎีบทที่ 3.1.1 จะได้ว่า

ΣS_n ต้องลู่ออก #

ตัวอย่าง 3.2.10 จงตรวจสอบอนุกรม $\Sigma \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ จาก Couchy root test พิจารณา

$$\sqrt[n]{S_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e} \quad \because \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

$$< 1$$

เพราะฉะนั้น $\Sigma \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ลู่เข้า #

หมายเหตุ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\qquad e \approx 2.7182818$

ตัวอย่าง 3.2.11 จงพิจารณาอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ และ $\Sigma \frac{1}{n^4}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ จาก Couchy rout test พิจารณา

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(n)^{1/n}}$$

$$= 1 \text{ เมื่อ } n \to \infty \text{ หรือ } \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

แต่ $\Sigma \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมฮาโมนิค ซึ่งลู่ออก

และพิจารณา

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2_4}} \approx \frac{1}{(n^{1/n})^4}$$

$$= 1 \text{ เพราะว่า } \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

แต่ $\Sigma \frac{1}{n^4}$ ลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรม k ซึ่ง $k > 1$

จากทั้งสองอนุกรม ถ้าใช้ Couchy root test แล้ว

$$\sqrt[n]{S_n} = 1$$

ทฤษฎีบทนี้ก็จะสรุปไม่ได้ว่าอนุกรมลู่เข้า หรือลู่ออก #

ตัวอย่าง 3.2.12 จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{1}^{n} \frac{3^n}{n\cdot 5^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{3''}{n\cdot 5^n} = \frac{3n}{5}\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{3}{5}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$= \frac{3}{5} \text{ เมื่อ } n \to \infty \text{ และ } \sqrt[n]{n} = 1$$

$$< 1$$

จาก Cauchy root test อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 5^n}$

ลู่เข้า #

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เป็นการทดสอบแบบอัตราส่วน (Ralio test) การทดลองแบบนี้ เป็นการพิจารณาอัตราส่วนของพจน์ที่ S_{n+1} กับ S_n ว่าผลที่ได้เป็นอย่างไร เมื่อ n ย่างเข้าสู่ ∞ $(n \to \infty)$-

ทฤษฎีบท 3.2.6 ให้ ΣS_n เป็นอนุกรมซึ่งแต่ละพจน์เป็นบวก ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1}}{S_n} = p$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริง แล้ว

i) ΣS_n ลู่เข้า ถ้า $p < 1$

ii) ΣS_n ลู่ออก ถ้า $p > 1$

ถ้า $p = 1$ การทดสอบสรุปผลไม่ได้

พิสูจน์ i) ถ้า $p < 1$ แล้วจะต้องมีจำนวนจริง r ซึ่ง

$$p < r < 1 \text{ และ } r = \frac{1 + p}{2}$$

จากสมมุติฐาน $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1}}{S_n} = p$ และ $p < 1$

แสดงว่า เมื่อ n มีค่ามาก ๆ แล้วพจน์ S_{n+1} มีค่าน้อยกว่าพจน์ S_n นั่นคือ S_n มีค่าลดลง

สำหรับจำนวนเต็มบวก N จะได้ว่า

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} \leqslant r \text{ สำหรับ } n \geqslant N \ (r < 1)$$

สำหรับ $k > N$

$$S_k = \frac{S_k}{S_{k-1}} \cdot \frac{S_{k-1}}{S_{k-2}} \cdot \frac{S_{k-2}}{S_{k-3}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{N+1}}{S_N} \cdot S_N$$

$$\leqslant r \cdot r \cdot r \cdot \ldots \cdot r \cdot S_N \text{ เมื่อ } S_N \text{ เป็นค่าคงที่}$$

$$= r^{k-N} S_N$$

นั่นคือ $S_k \leqslant r^{k-N} S_N$

เพราะว่า $r < i$, และ Σr^{k-N} เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งลู่เข้า

เพราะฉะนั้น ΣS_n ลู่เข้าด้วย (จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบ) #

ii) ถ้า $p > 1$ แล้วจะต้องมีจำนวนจริง r ซึ่ง $1 < r < p$ และ

$$r = \frac{1 + p}{2}$$

จากสมมุติฐาน $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = p > r > 1$

หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} > 1$

แสดงว่าเมื่อ n มีค่ามาก ๆ แล้วพจน์ S_{n+1} มีค่ามากกว่าพจน์ S_n นั้นคือ S_n มีค่าเพิ่มขึ้น

สำหรับจำนวนเต็มบวก N จะได้ว่า

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} > 1$$

แล้ว $\{S_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นสำหรับ $n > N$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \neq 0$

เพราะฉะนั้น อนุกรม ΣS_n ลู่ออก (จากทฤษฎีบทที่ 3.1.1) #

ตัวอย่าง 3.2.13 จงพิจารณา อนุกรม $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ โดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 3.1.4 และ การทดสอบแบบอัตราส่วน พิจารณา

$$\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{2^n} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n}{2^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,2''}{n \cdot 2^{n+1}}$$

$$= \text{Cim}_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{2^n} \right|$ ลู่เข้า

จากทฤษฎีบทที่ 3.1.4 จะได้ว่า

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ ลู่เข้าด้วย #

ตัวอย่าง 3.2.14 จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา $\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{3^n} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^3$

$= 3$ เมื่อ $n \to \infty$

เพราะว่า $3 > 1$

แสดงว่า $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 3.2.15 จงพิจารณาอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ ให้ $S_n = n^4 e^{-n^2}$

พิจารณา $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^4}{e^{+(n+1)^2}} \Big/ \frac{n^4}{e^{+n^2}}$

$$= \frac{(n + 1)^4}{n^4} \quad \frac{e^{+n^2}}{e^{+(n+1)^2}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{e^{+n^2}}{e^{+n^2+2n+1}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{e^{2n+1}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \ e^{-2n-1}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 . \lim\limits_{n\to\infty} e^{-2n-1}$

$$= 1.0$$

$$= 0$$

$$< 1$$

จากการทดสอบแบบอัตราส่วน อนุกรม $\sum\limits_{1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ ลู่เข้า #

ตัวอย่าง 3.2.16 จงพิจารณาอนุกรม $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ ให้ $S_n = \frac{n!}{n^n}$

พิจารณา $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)!}{(n\ t\ 1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n}$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n''}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)! \qquad n''}{n! \quad \cdot (n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1) \ . \ n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)''}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

เพราะว่า $\underset{n\to\infty}{\text{Pim}} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$= \frac{1}{e} \quad \because \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$= \frac{1}{e} \qquad e \approx 2.7182818$$

$$< 1$$

จากการทดสอบแบบอัตราส่วน

อนุกรม $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ลู่เข้า #

แบบฝึกหัด 3.2

จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก
โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

1. $\sum^{\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

3. ; - l - -
   1 $4n^2 - 3$

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n + 2}{(n + 1)\sqrt{n + 3}}$

5. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{5n - 3}$

6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n - 1}{(3n + 2)n^{1/3}}$

7. $\sum_{1}^{\infty} \frac{4n^2 + 5n - 2}{n(n^2 + 1)^{3/2}}$

8. $\sum_{1}^{\infty} \sqrt{\frac{n - \ell n\, n}{n^2 + 10n^3}}$

จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก
โดยการทดสอบแบบอินทีกรัล

9. $\sum_{1}^{\infty} e^{-n}$

10. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n\, \ell n\, n}$

11. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$

12. $\text{P I} \frac{n'}{2n^3 - 1}$, lower limit 1

13. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ell n\; n)'}$

14. $\sum_{2}^{\infty} \frac{\ell n\; n}{n}$

15. $\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก
โดยการทดสอบแบบ “Cauchy root test”

16. $\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot 3^n}$

17. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(en\; n)''}{n^n}$

18. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก
โดยการทดสอบแบบอัตราส่วน (Ratiotest)

19. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n + 1)\; e''}$

20. $\sum_{I}^{\infty} \frac{10^{2n}}{(2n - I)!}$

21. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$

22. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{3n}}{3^{2n}}$

23. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

24. $\frac{2^n n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n - 1)}$

2s. $\frac{3^n n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n - I)}$

26. $\frac{n^{3n}}{n^2 (n!)^2 e^n}$

8.3 **อนุกรมสลับ** (Alternating series)

อนุกรมสลับ คือ อนุกรมซึ่งมีพจน์ต่าง ๆ เป็นบวก (Positive) **และ ลบ** (Negative) **สลับกัน**

เช่น $\sum_{1}^{\infty} (-1)'' \frac{n}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \dots$

ซึ่ง $S_1 = -\frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{2}{3}$

$S_3 = -\frac{3}{4}$

$S_4 = \frac{4}{5}$

$S_5 = -\frac{5}{6}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$S_n = (-1)'' \frac{n}{n+1}$

พบว่า พจน์ต่าง ๆ ของ S_n นี้เป็นบวกและลบสลับกัน

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ เป็นอนุกรมสลับ (Alternating series)

และอนุกรมสลับนี้บางอันลู่เข้า บางอันลู่ออก แต่อนุกรมสลับที่ลู่เข้านั้นจะต้องมีคุณสมบัติตามทฤษฎีบทต่อไปนี้ ซึ่งเรียกว่า "การทดสอบอนุกรมสลับ" (Alternating series test)

ทฤษฎีบท 3.3.1 ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ต่าง ๆ เป็นบวก ซึ่งมีคุณสมบัติ

i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ ($\{b_n\}$เป็นลำดับไม่เพิ่มขึ้น)

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

แล้วอนุกรม $\Sigma (-1)'' b_n$ ลู่เข้า และ

$|S - A_n| \leqslant b_{n+1}$

เมื่อ S เป็นผลบวกของอนุกรม, A_n เป็นผลบวกย่อยที่ n

พิสูจน์ พิจารณา

$$\sum_{n-1}^{\infty} (-1)^n b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + b_6 - b_7 + b_8 \; . \; . \; . \; . \; .$$

แบ่งการพิสูจน์เป็นสองกรณี คือ

กรณีที่ 1 ถ้า n เป็นคี่

ให้ $n = 2m - 1$ หรือ $n = 2m + 1$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก

ผลบวกย่อยของ A_{2m-1} คือ

$$A_{2m-1} = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + \; . \; . + b_{2m-2} - b_{2m-1}$$

$$= -b_1 + (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) + \; . \; . \; . + (b_{2m-2} - b_{2m-1}) \; ..... \; (I)$$

$$A_{2m+1} = -b_1 + (b_2 - b_3) + (b_4 - b,) + \ldots + (b_{2m-2} - b_{2m-1}) + (b_{2m} - b_{2m+1}) (2)$$

สมการ (2) − (1)

$$A_{2m+1} - A_{2m-1} = b_{2m} - b_{2m+1}$$

$$A_{2m+1} = A_{2m-1} + (b_{2m} - b_{2m+1})$$

$$\geqslant A_{2m-1}$$

เพราะว่า $b_{2m} - b_{2m+1} \geqslant 0$

แสดงว่า ผลรวมย่อยของพจน์คี่ เป็นลำดับที่มีค่าเพิ่มขึ้น

จากสมการ (2)

$$A_{2m+1} = -(b_1 - b_2) - (b_3 - b_4) - \ldots - (b_{2m-1} - b_{2m}) - b_{2m+1}$$

$$\leqslant -(b_1 - b_2)$$

เพราะว่า แต่ละพจน์ในวงเล็บและ b_{2m+1} เป็นบวก

แสดงว่า ผลรวมย่อยของพจน์คี่มีขอบเขต

เพราะว่า ผลรวมของพจน์คี่ $\left(A_{2m+1} = \sum_{n=1}^{2m+1} (-1)^n b_n\right)$

เป็นลำดับที่มีค่าเพิ่มขึ้น และมีขอบเขต

เพราะฉะนั้น ผลรวมย่อยของพจน์คี่จะต้องลู่เข้า

ให้ $\lim\limits_{m\to\infty} A_{2m+1} = S$

กรณีที่ 2 ถ้า n เป็นคู่ ให้ n = 2m

เพราะว่า

$$Az_{,,,} = A_{2m-1} + b_{2m}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{m\to\infty} A_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} A_{2m-1} + \lim\limits_{m\to\infty} b_{2m}$

$= S + 0$ เพราะจากผลกรณีที่ 1 และสมมุติฐาน

$= S$

นั่นคือ ผลรวมย่อยของพจน์คู่ ลู่เข้า และเท่ากับ S

จากกรณีที่ 1 และ 2

แสดงว่า อนุกรม $\Sigma(-1)^n b_n$ ลู่เข้า #

ต่อไปพิจารณาค่าโดยประมาณของ $|S - A_n|$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
|S - A_n| &= |(-b_1+b_2-b_3+b_4\ldots+(-1)^n b_n+(-1)^{n+1}b_{n+1}+(-1)^{n+2}b_{n+2}+\ldots) \\
&\qquad -(-b_1+b_2-b_3+\ldots+(-1)^n b_n)| \\
&= |(-1)^{n+1}b_{n+1}+(-1)^{n+2}b_{n+2}+(-1)^{n+3}b_{n+3}+\ldots| \\
&= |b_{n+1}-b_{n+2}+b_{n+3}-b_{n+4}+\ldots \\
&= |(b_{n+1}-b_{n+2})+(b_{n+3}-b_{n+4})+\ldots| \\
&= (b_{n+1}-b_{n+2})+(b_{n+3}-b_{n+4})+\ldots
\end{aligned}$$

เพราะว่า แต่ละพจน์ในวงเล็บเป็นบวก เมื่อรวมกันทั้งหมดก็เป็นบวก (|x| = x - &l x ⩾ 0)

$$\begin{aligned}
|S - A_n| &= (b_{n+1}-b_{n+2})+(b_{n+3}-b_{n+4})+\ldots \\
&= b_{n+1}-(b_{n+2}-b_{n+3})-(b_{n+4}-b_{n+5})-\ldots \\
&\leqslant b_{n+1}
\end{aligned}$$

เพราะว่า แต่ละพจน์ในวงเล็บเป็นบวก

เพราะฉะนั้น

$$|S - A_n| \leqslant b_{n+1} \qquad \#$$

ตัวอย่าง 3.3.1 จงพิจารณาว่า อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ ให้ $b_n = \frac{1}{3n}$

$$b_{n+1} = \frac{1}{3(n+1)}$$

เพราะว่า $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{3(n+1)} \cdot 3n$

$$= \frac{n}{n+1}$$

< 1 เพราะว่า $n < n + 1$

แสดงว่า $\{b_n\}$ เป็นลำดับลดลง ....(1)

เพราะว่า

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n}$$

$$= 0 \qquad \text{..........(2)}$$

จากสมการ (1) และ (2) แสดงว่า

อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ ลู่เข้า #

ตัวอย่าง 3.3.2 จงพิจารณา อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ ให้ $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$$b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

พิจารณา $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1 \cdot (n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}$

$$E \quad \frac{n+1}{n} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$> \ 1$ เพราะว่า $n + 1 > n$ และ $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ ....(I)

แสดงว่า $\{b_n\}$ เป็นลำดับลดลง

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$= 0$ ....(2)

จากสมการ (1) และ (2) แสดงว่า

อนุกรม $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ ลู่เข้า #

แบบฝึกหัด 3.3

จงพิจารณาอนุกรมสลับต่อไปนี้ลู่เข้า หรือลู่ออก

1. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

2. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2n + 2}$

3. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n - 1}$

4. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{Pn\ n}$

5. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$

b. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}$

7. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ Pn\ n}$

8. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1}$

9. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$

3.4 การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

(Converges absolutely and Coverges Conditionally)

จากหัวข้อการทดสอบอนุกรมแบบต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เราจะนำมาใช้ทดสอบว่าอนุกรมต่าง ๆ นั้น ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ (Converges absolutely) หรือ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข (Converges Conditionally)

นิยาม 3.4.1 อนุกรม ΣS_n เรียกว่า ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ (Converges absolutely) ถ้า $\Sigma |S_n|$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 3.4.1 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^k}$ ลู่เข้าสัมบูรณ์หรือไม่ เมื่อ $k > 1$

วิธีทำ พิจารณา

$$\left| \frac{\sin n\theta}{n^k} \right| \leqslant \frac{1}{n^k}$$

แต่ $\Sigma \frac{1}{n^k}$ ลู่เข้า (จากอนุกรม k)

เพราะฉะนั้น $\Sigma \left| \frac{\sin n\,\theta}{n^k} \right|$ ลู่เข้าด้วย

(จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบ)

ดังนั้น $\Sigma \frac{\sin n\,\theta}{n^k}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.4.2 จงพิจารณาว่า อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} (\frac{-1}{n^k})^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์หรือไม่ เมื่อ $0 < k<1$

วิธีทำ พิจารณา

$$\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^k} \right| = \Sigma \frac{1}{n^k}$$

ซึ่งไดเวอร์จ เพราะเป็นอนุกรม k เมื่อ $k < 1$

เพราะฉะนั้น $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^k}$ ไม่ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ #

ตัวอย่าง 8.4.8 จงพิจารณา อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์หรือไม่

วิธีทำ พิจารณา

$$\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n!}{n^n} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

จากการทดสอบอัตราส่วน (Ration test)

พิจารณา $\operatorname{Pim}_{n \to \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$

เพราะว่า

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e}$$

$$= \frac{1}{3.5} < 1$$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} (\quad + \frac{1}{n})^n = e = 3.5$

ดังนั้น $\sum_{1}^{\infty} \frac{-1)^n n!}{n^n} \Big| = \sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ลู่เข้า

และทำให้ได้ $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ #

นิยาม 3.4.2 อนุกรม ΣS_n ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข (Converges ถ้าอนุกรม ΣS_n ลู่เข้า แต่อนุกรม $\Sigma |S_n|$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 3.4.4 จงพิจารณา อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขหรือไม่

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

ให้ $b_n = \frac{1}{n}$

$b_{n+1} = \frac{1}{n +}$

เพราะว่า $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n+1} \Big/ \frac{1}{n}$

$= \frac{n}{n+1}$

$<$ เพราะว่า $n + \quad > n$

เพราะฉะนั้น $\{b_n\}$ เป็นลำดับลดลง

และ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$= 0$

เพราะว่า $\{b_n\}$ เป็นลำดับลดลง และลิมิตหาค่าได้เท่ากับศูนย์

จากการทดสอบอนุกรมสลับ จะได้ว่า

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้า ..……(1)

ต่อไปพิจารณา $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$

เพราะว่า $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก เนื่องจากเป็นอนุกรมฮาโมนิค

เพราะฉะนั้น $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ ลู่ออก ……….(2)

จากสมการ (1) และ (2)

อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

ตัวอย่าง 3.4.5 จงพิจารณา อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\ell n\, n}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขหรือไม่

วิธีทำ ให้ $b_n = \frac{1}{n\,\ell n\, n}$

$$b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\,\ell n\,(n+1)}$$

เพราะว่า $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{(n+1)\,\ell n\,(n+1)} \Big/ \frac{1}{n\,\ell n\, n}$

$$= \frac{n\ en\ n}{(n+1)\,\ell n\,(n+1)}$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ell n\ n}{Pn\,(n+1)}$$

< 1 เพราะว่า $n + 1 > n$

และ $\ell n\,(n+1) > \ell n\ n$

แสดงว่า $\{b_n\}$ เป็นลำดับลดลง

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,\ell n\, n}$

$$= 0$$

เพราะว่า $\{b_n\}$ เป็นลำดับลดลง และลิมิตหาค่าได้เท่ากับศูนย์

จากการทดสอบอนุกรมสลับจะได้ว่า

อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ell n\ n}$ ลู่เข้า ....(1)

พิจารณา $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n \ell n\ n} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n \ell n\ n}$

จากการทดสอบแบบอินทิกรัล

ให้ $f(x) = \frac{1}{x \ell n\ x}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_1^n f(x)\ dx &= \int_1^n \frac{1}{x \ell n\ x}\ dx \\
&= \int_1^n \frac{d(\ell n\ x)}{\ell n\ x} \\
&= \ell n\ (Pn\ x)\Big|_1^n \\
&= \ell n\ (On\ n) - \ell n\ (en\ I) \\
&= \ell n\ (\ell n\ n) - en\ (0)
\end{aligned}$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้ เมื่อ $n \to \infty$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n \to \infty} \int_1^n f(x)\,dx$ ลู่ออก แล้วทำให้

$\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n \ell n\ n} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n \ell n\ n}$ ลู่ออกด้วย ....(2)

จากสมการ (1) และ (2)

อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)"}{n \ell n\ n}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

แบบฝึกหัด a.4

จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ หรือ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n^{3/2}}$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$

3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ell n^2 n}$

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1}$

5. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ell n n}$

6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2'' - 1}$

7. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$

a. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)' 2^{3n}}{3^{2n}}$

๓.๕ การทดสอบแบบพิเศษ

ในหัวข้อนี้ เป็นการทดสอบอนุกรมที่ลู่เข้า ซึ่งหลังจากการทดสอบแบบอัตราส่วน (Ratio test) นั้น ไม่สามารถที่จะใช้ทดสอบได้ นั้นคือ $\ell im \dfrac{S_{n+1}}{S_n} = 1$

การทดสอบแบบแรกเรียกว่า Kummer's test

ทฤษฎีบทที่ ๓.๕.1 ให้ ΣS เป็นอนุกรมซึ่งมีพจน์ต่าง ๆ เป็นบวก

i) ถ้ามีลำดับ $\{b_n\}$ ซึ่ง $b_n > 0$, มีจำนวนคงที่ $\alpha > 0$ และมีจำนวน N ซึ่ง

$$C_n = \frac{S_n}{S_{n+1}} . b_n - b_{n+1} \geqslant \alpha \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

แล้ว ΣS_n ลู่เข้า

ii) ถ้า $C_n \leqslant 0$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$ แล้ว ΣS_n ลู่ออก ถ้า $\Sigma \dfrac{1}{b_n}$ ลู่ออก

พิสูจน์ i) จาสมมุติฐาน $S_{n+1} > 0$ และ

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . b_n - b_{n+1} \geqslant a \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

$$S_n \cdot b_n - b_{n+1} \cdot S_{n+1} \geqslant \alpha S_{n+1}$$

เพราะฉะนั้น $S_N b_N - b_{N+1} S_{N+1} \geqslant \alpha S_{N+1}$

$$S_{N+1} b_{N+1} - b_{N+2} S_{N+2} \geqslant \alpha S_{N+2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$S_{N+p-1} b_{N+p-1} - b_{N+p} S_{N+p} \geqslant \alpha S_{N+p}$$

รวมกันทั้งหมดจะได้

$$S_N b_N - b_{N+p} S_{N+p} \geqslant a \ (S_{N+1} + S_{N+2.} + \ldots + S_{N+p})$$

$$S_N b_N - b_{N+p} S_{N+p} \geqslant \alpha (A_{N+p} - A_N)$$

เมื่อ A_N เป็นผลรวมย่อย

$$\alpha (A_{N+p} - A_N) \leqslant S_N b_N - b_{N+p} . S_{N+p}$$

$\leqslant \; S_N b_N$ เพราะว่า b_N และ S_N เป็นบวก

$$A_{N+p} - A_N \leqslant \frac{1}{\alpha} S_N b_N$$

$$A_{N+p} \leqslant A_N + \frac{1}{a} S_N \, b_N$$

แสดงว่าผลรวมย่อยมีขอบเขต เพราะว่า A_N และ $S_N b_N$ คงที่

เพราะฉะนั้น อนุกรม ΣS_n ลู่เข้า #

ii) ถ้า $C_n \leqslant 0$ สำหรับ $n \geqslant N$ และ $\Sigma \frac{1}{b_n}$ ลู่ออก

แต่ $C_n = \frac{S_n}{S_{n+1}} . b_n - b_{n+1} \leqslant 0$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . b_n - b_{n+1} \leqslant 0$$

$$S_n \; b_n - b_{n+1} S_{n+1} \leqslant 0$$

แสดงว่า ลำดับ $\{S_n b_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น

เพราะฉะนั้น

$$S_N \; b_N \leqslant S_{N+1} \, b_{n+1} \leqslant S_{N+2} \, b_{N+2} \leqslant . \; . \; . \; 6 \; S_n \, b_n$$

$k = S_N b_N \leqslant S_n b_n$ เมื่อ k คงที่

$$\frac{k}{b_n} \leqslant S_n$$

จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

$\Sigma \frac{1}{b_n}$ ลู่ออก

เพราะฉะนั้น ΣS_n ลู่ออกด้วย #

การทดสอบแบบที่สองเรียกว่า Raabe's test

ทฤษฎีบท 3.5.2 ให้ ΣS_n เป็นอนุกรมซึ่งมีพจน์ต่าง ๆ เป็นบวก และกำหนดให้

$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{S_n}{S_{n+1}} - 1 \right) = r$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงแล้ว

i) ΣS_n ลู่เข้า ถ้า $r > 1$

ii) ΣS_n ลู่ออก ถ้า $r < 1$

และ ถ้า $r = 1$ การทดสอบนี้สรุปผลไม่ได้

พิสูจน์ i) ถ้า $r > 1$ แล้ว $I + r > r > I$

เพราะว่า $n \left(\frac{S_n}{S_{n+1}} - 1 \right) = r$ เมื่อ $n \to \infty$

$$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - n - 1 = r - 1$$

$$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - (n + 1) = r - 1$$

$$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - (n + I) = r - 1$$

$$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - (n + 1) = r - 1 \qquad \text{..........(1)}$$

จากสมการ (1)

ให้ $b_n = n$ แล้ว $b_{n+1} = n + 1$ เป็นลำดับบวก

และ $r - 1 > 0$ เป็นตัวคงที่มากกว่าศูนย์ (0)

จาก Kummer's test (ทฤษฎีบท 3.5.1)

เพราะฉะนั้น ΣS_n ลู่เข้า #

ii) ถ้า $r < 1$ แล้ว $r - 1 < 0$

เพราะว่า $n \left(\frac{S_n}{S_{n+1}} - 1 \right) = r$ เมื่อ $n \to \infty$

$$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - n = r$$

$$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - n - 1 = r - 1$$ เอา -1 บวกทั้งสองข้าง

$$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - n - 1 < 0$$ เพราะว่า $r - 1 < 0$

$$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - (n + 1) < 0$$

ดังนั้น $$n \frac{S_n}{S_{n+1}} - (n + 1) < 0 \qquad \text{..........(2)}$$

จากสมการ (2)

ให้ $b_n = n$ แล้ว $b_{n+1} = n + 1$ เป็นลำดับบวก

และ $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n}$ และ $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออก

จากสมการ (2) และ Kummer's test

เพราะฉะนั้น ΣS_n ลู่ออก #

ตัวอย่าง 3.5.1 จงพิจารณาอนุกรม

$$\frac{1}{4} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8} + \ . \ . \ . + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n - 1)}{4.6.8\cdots\cdots(2n + 2)} + \ \cdots$$

ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ ให้

$$S_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n - 1)}{4\cdot 6\cdot 8\cdots\cdots(2n + 2)}$$

$$S_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n - 1)\ (2n + 1)}{4\cdot 6\cdot 8\cdots\cdots(2n + 2)\ (2n + 4)}$$

ลองทดสอบแบบอัตราส่วน

เพราะว่า $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{2n + 1}{2n + 4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1$ โดย L'Hospital's rule

แสดงว่าการทดสอบแบบอัตราส่วนใช้ไม่ได้

ทดสอบโดย Raabe's test

เพราะว่า

$$n\left(\frac{S_n}{S_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n + 4}{2n + 1} - 1\right)$$

$$= \frac{n\,(2n + 4 - 2n - 1)}{2n + 1}$$

$$= \frac{3n}{2n + 1}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{S_n}{S_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{2n + 1} = \frac{3}{2}$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{S_n}{S_{n+1}} - 1\right) = \frac{3}{2} > 1$

เพราะฉะนั้นอนุกรมที่กำหนดให้ลู่เข้าตาม Rasbe's test

การทดสอบแบบที่สามเรียกว่า "Gauss's test"

ทฤษฎีบท 3.5.3 ถ้า ΣS_n เป็นอนุกรมซึ่งมีพจน์ต่าง ๆ เป็นบวก และมีลำดับที่มีขอบเขต $\{B_n\}$ ซึ่งสำหรับ $n > N$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = 1 + \frac{r}{n} + \frac{B_n}{n^2} \text{ แล้ว}$$

i) ΣS_n ลู่เข้า ถ้า $r > 1$

ii) ΣS_n ลู่ออก ถ้า $r \leqslant 1$

พิสูจน์ i) ถ้า $r > 1$

จากสมมุติฐาน

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = 1 + \frac{r}{n} + \frac{B_n}{n^2}$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} - 1 = \frac{r}{n} + \frac{B_n}{n^2}$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . n - n = r + \frac{B_n}{n} > 1 + \frac{B_n}{n} \qquad r > 1$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . n - n > 1 + \frac{B_n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{S_n}{S_{nn+1}} - 1\right) > 1 \because \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{n} = 0$$

จาก Raabe's test (i) จะได้ว่า

$\Sigma S''$ ลู่เข้า #

ii) ถ้า $r \leqslant 1$

จาก $\frac{S''}{S_{n+1}} = 1 + \frac{r}{n} + \frac{B_n}{n^2}$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} - 1 = \frac{r}{n} + \frac{B_n}{n^2}$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . n - n = r + \frac{B_n}{n}$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . n - n \leqslant 1 + \frac{B_n}{n}$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . n - n - 1 \leqslant \frac{B_n}{n}$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . n - (n + 1) \leqslant \frac{B_n}{n} = 0 \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} . n - (n + 1) \leqslant 0 \qquad \text{..........(1)}$$

ถ้าให้ $b_n = n$ **แล้ว** $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n}$ **และ** $\Sigma \frac{1}{n}$ **ลู่ออก**

จากสมการ (1) **และจาก** "Kummer's test" (ii) **จะได้ว่า**

ΣS_n **ลู่ออก** #

ตัวอย่าง 3.5.2 **จงพิจารณาอนุกรม**

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot3}{2.4} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6} + \ldots + \frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} + \ldots$$

ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ **จากการทดสอบแบบอัตราส่วน**

เพราะว่า $S_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots\ldots(2n)}$

$$S_{n+1} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)\ (2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)\ (2n+2)}$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

แสดงว่าการทดสอบแบบอัตราส่วนใช้ไม่ได้ หรือสรุปไม่ได้ จาก Gauss's test

$$\frac{Sn}{Sn+1} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$= \quad 1 + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \quad 1 + \frac{2n}{2n(2n+1)}$$

$$= \quad 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n(2n+1)}$$

$$3 \quad 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2(2n+1)}$$

จาก Gauss's test ให้

$$r = \frac{1}{2}, \; B_n = \frac{n}{2(2n+1)}$$

เนื่องจาก $r < 1$ และ $\{B_n\}$ มีขอบเขต เพราะว่า ลำดับนี้ลู่เข้าสู่ $\frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น อนุกรมนี้ ลู่ออก #