บทที่ 2
ลำดับ (Sequence)

2.1 คำนำ

ถ้าพิจารณาฟังก์ชัน f ที่มีนิยาม (defined) บนเซตของจำนวนเต็มบวก, $I^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ นั่นคือ

f(n) นิยามสำหรับทุก ๆ $n \in I^+$ แล้วจะเรียกฟังก์ชันชนิดนี้ว่าลำดับ (Sequence)- และใช้สัญลักษณ์

$\{S_n\}$ แทนลำดับ และ

S_n คือ พจน์ที่ n ของลำดับ $\{S_n\}$

นิยาม 2.1.1 เทรซ์ (Trace) ของลำดับ $\{S_n\}$ คือเซต A = $\{$ทุก ๆ $S_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$

นิยาม 2.1.2 ลำดับ จำกัด (Finite sequence) คือ ลำดับที่มีจำนวนพจน์จำกัด

นิยาม 2.1.3 ลำดับไม่จำกัด (Infinite Sequence) คือ ลำดับที่มีจำนวนพจน์ไม่จำกัด

ตัวอย่าง 2.1.1 เซตของจำนวน 2, 7, 12, 17, ..., 32 เป็นลำดับจำกัด ซึ่งพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$S_n = 2 + 5(n-1) = 2 + (5n-5)$$

$$= 5n - 3 \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \ldots, 7 \qquad \#$$

ตัวอย่าง 2.1.2 เซตของจำนวน $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ เป็นลำดับไม่จำกัด ซึ่งพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$S_n = \frac{1}{2n-1} \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \ldots$$

ในการศึกษาเกี่ยวกับลำดับ นี้จะศึกษาเฉพาะลำดับไม่จำกัด (Infinite sequence)

ตัวอย่าง 2.1.3 กำหนดให้ ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = 2n$$

จงหา เทรซ์ (trace) ของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะว่า $S_1 = 2(1) = 2$

$S_2 = 2(2) = 4$

$S_3 = 2(3) = 6$

$$
\begin{array}{ccc}
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

$\therefore$ เทรซของลำดับ $\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$

$= \{2, 4, 6, \ldots\}$ #

2.2 ลิมิตของลำดับ (Limit of a sequence)

การศึกษากับลำดับนี้จะศึกษาดูว่า สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ $(n \to \infty)$ นั้น พจน์ที่ n ของลำดับ คือ S_n นั้นจะเข้าใกล้จุดอะไร

ตัวอย่าง 2.2.1 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

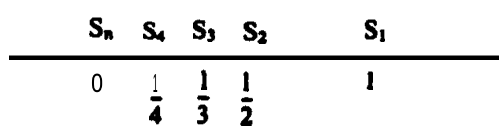
$$S_n = \frac{1}{n}$$

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{S_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ นั้นคือ เมื่อ n ย่างเข้าสู่ ∞

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= \frac{1}{2} \\
S_3 &= \frac{1}{3} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

จะพบว่าพจน์ที่ n นั้นจะลู่เข้าสู่ (convergent) จุด 0 ดังรูป 2.2.1



รูป 2.2.1

นั่นคือ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

นิยาม 2.2.1 จำนวนจริง s เป็นลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N (N depending on ε) ซึ่ง

$$|S_n - s| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

ในกรณีเช่นนี้เรียกว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และเขียนได้เป็น

$$\lim_{n \to \infty} S_n = s$$

นิยาม 2.2.2 ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ มีลิมิตเป็น s เมื่อ s เป็นจำนวนจริงแล้วจะเรียกลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ s

และเรียกลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า (Convergent sequence)

นั่นคือ ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ หาค่าได้ (Exist)

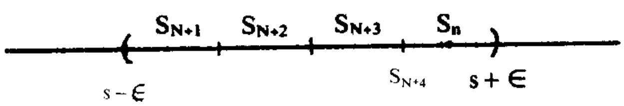
และถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้แล้ว เรียกลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก (Divergent sequence)

จากนิยาม 2.2.1 ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของจุดใน 1 มิติ (R) แล้ว

$$|S_n - s| < \in \Longleftrightarrow - \in < (S_n - s) < \in$$

$$\Longleftrightarrow s - \in < S_n < s + \in$$

หมายความว่า สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$ นั้น พจน์ S_n ต่าง ๆ จะอยู่ในช่วงเปิด $(s - \in, s + \in)$ ดังรูป 2.2.2



รูป 2.2.2

ทฤษฎีบท 2.2.1 ถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ หาค่าได้ แล้วค่าลิมิตจะมีเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ จะต้องแสดงว่า ถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = s$ และ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = s'$ แล้ว $s = s'$

พิจารณา $|s - s'| = |s - S_n + S_n - s'|$

$$\leq |s - S_n| + |S_n - s'|$$

$$= |S_n - s| + |S_n - s'| \qquad (1)$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ จากนิยาม 2.2.1

ก็ต่อเมื่อสำหรับ จำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{\in}{2} \text{ สำหรับทุก } n \geq N_1 \qquad (2)$$

และจาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s'$ จากนิยาม 2.2.1

ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|S_n - s'| < \frac{\in}{2} \text{ สำหรับทุก } n \geq N_2 \qquad (3)$$

เลือก N ที่มากกว่า N_1 และ N_2 แล้วสำหรับ $n \geq N$

จากสมการ (1)

$$|s - s'| \leq |S_n - s| + |S_n - s'|$$

$$< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in \text{ จากสมการ (2) และ (3)}$$

ได้ว่า $|s - s'| < \in$

หรือ $-\in < s - s' < \in$

นั่นคือ $s - s'$ น้อยกว่าจำนวนจริงบวก ($\because \in > 0$)

และ $s - s'$ มากกว่าจำนวนจริงลบ ($\because -\in < 0$)

และ $s - s'$ เป็นค่าคงที่ และต้องเท่ากับศูนย์ เพียงกรณีเดียว

นั่นคือ $s - s' = 0$ แล้ว $s = s'$ #

จากทฤษฎีบทนี้ อาจกล่าวได้อีกแบบว่า ถ้าลำดับใด ๆ ที่ลู่เข้า (convergent) แล้วจะลู่เข้าสู่เพียงจุด ๆ เดียวเท่านั้น

แต่ถ้าลำดับใดก็ตามที่ลู่เข้าสู่มากกว่าหนึ่งจุด ลำดับนั้นก็เป็นลำดับลู่ออก

เช่น ลำดับ $\{(-1)^n\}$

เพราะว่า $(-1)^n = 1$ เมื่อ n เป็นคู่

และ $(-1)^n = -1$ เมื่อ n เป็นคี่

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นคี่} \\ 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นคู่} \end{cases}$$

จะพบว่าลำดับนี้ลู่เข้าสู่ -1 และ 1

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับที่ลู่ออก

หรือลำดับ $\{n\}$ พบว่าจะลู่เข้าสู่ ∞ เพียงค่าเดียว ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ (หาค่าไม่ได้)

ดังนั้น ลำดับ $\{n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

หมายเหตุ ลำดับจะลู่เข้าก็ต่อเมื่อลิมิตหาค่าได้ (เป็นจำนวนจำกัด) และมีค่าเพียงค่าเดียว

ทฤษฎีบท 2.2.2 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n + T_n) = s + t$

พิสูจน์ จะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N

ซึ่ง $(S_n+T_n) - (s +)| < \in$ สำหรับทุก $n \geqslant N$

พิจารณา
$$\begin{aligned} |(S_n + T_n) - (s + t)| &= |S_n + T_n - s - t| \\ &= |(S_n - s) + (T_n - t)| \\ &\leqslant |S_n - s| + |T_n - t| \qquad (1) \end{aligned}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ จากนิยาม 2.2.1

กำหนดให้จำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{\in}{2} \text{ สำหรับทุก } n \geqslant N_1 \qquad (2)$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ จากนิยาม 2.2.1

กำหนดให้จำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|T_n - t| < \frac{\in}{2} \text{ สำหรับ } n \geqslant N_2 \qquad (3)$$

เลือก N มีมากกว่า N_1 และ N_2 แล้วสำหรับ $n \geqslant N$

จากสมการ (1)

$$\begin{aligned} |(S_n + T_n) - (s + t)| &\leqslant |S_n - s| + |T_n - t| \\ &< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in \text{ จากสมการ (2) และ (3)} \end{aligned}$$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n + T_n) = s + t$ #

หมายเหตุ แต่ส่วนกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง เช่น

ถ้ากำหนด พจน์ที่ n ของลำดับ $\{S_n\}$ และ $\{T_n\}$ คือ

$$S_n = (-1)^n \text{ และ}$$

$$T_n = (-1)^{n+1}$$

เพราะว่า $S_n + T_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (S_n + T_n) = 0$ หาค่าได้

แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ หาค่าไม่ได้

(เพราะว่าลิมิตมี 2 ค่า คือ -1 กับ 1 และ $-1 \neq 1$)

และ $\lim T_n = \lim (-1)^{n+1}$ หาค่าไม่ได้

(เพราะว่าลิมิตมี 2 ค่า คือ 1 กับ -1 และ $1 \neq -1$)

ทฤษฎีบท 2.2.3 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = st$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
|S_nT_n - st| &= |S_nT_n - S_nt + S_nt - st| \\
&= |S_n(T_n - t) + (S_n - s)t| \\
&\leqslant |S_n(T_n - t)| + |(S_n - s)t| \\
&\leqslant |S_n|\,|T_n - t| + |S_n - s|\,|t| \\
&\leqslant |S_n|\,|T_n - t| + |S_n - s|\,(|t| + 1) \qquad (1)
\end{aligned}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ จะได้ว่า $\{S_n\}$ มีขอบเขต นั่นคือ $|S_n| < B$ สำหรับทุก ๆ ค่า n (จากทฤษฎีบท 2.3.2)

จากสมการ (1)

$$|S_nT_n - st| \leqslant B|T_n - t| + |S_n - s|\,(|t| + 1) \qquad (2)$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{\in}{2(|t| + 1)} \qquad \text{..........(3)}$$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|T_n - t| < \epsilon/2B \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

เลือก N ที่มากกว่า N_1, N_2 แล้ว สำหรับ $n \geqslant N$

จากสมการ (3), (4) แทนในสมการ (2)

$$|S_nT_n - st| < B\frac{\epsilon}{2B} + \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}(|t|+1) = \epsilon$$

สำหรับทุก $n \geqslant N$ ซึ่ง N มากกว่า N_1 และ N_2

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = st$ #

จากทฤษฎีบทนี้ ในทางกลับกันไม่เป็นจริง นั่นคือ

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n$ หาค่าได้ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ อาจหาค่าได้บางตัว หรือหาค่าไม่ได้ทั้งสองตัว

เช่น $\{(-1)^n\}$ และ $\{(-1)^{n+1}\}$

$$\text{และ} \quad (-1)^n(-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n(-1)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}$$

$$= -1$$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n(-1)^{n+1}$ หาค่าได้เท่ากับ -1

แต่ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ หาค่าไม่ได้ และ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ หาค่าไม่ได้เช่นกัน

ทฤษฎีบท 2.2.4 ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $s \neq 0$

แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่ง $\frac{1}{|S_n|} < \frac{2}{|s|}$ สำหรับ $n \geqslant n_0$

พิสูจน์ พิจารณา

$$|s| = |s - S_n + S_n|$$

$$\leqslant |s - S_n| + |S_n|$$

$$= |S_n - s| + |S_n| \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่ง $|S_n - s| < \in = \frac{|s|}{2}$ สำหรับ $n \geqslant n_0$

สำหรับ $n \geqslant n_0$

จากสมการ (1)

$$|s| \leqslant |S_n - s| + |S_n|$$

$$< \frac{|s|}{2} + |S_n|$$

$$|s| - \frac{|s|}{2} < |S_n|$$

$$\frac{|s|}{2} < |S_n|$$

$$\frac{1}{|S_n|} < \frac{2}{|s|}$$

#

ทฤษฎีบท 2.2.6 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $s \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{s}$

พิสูจน์ พิจารณา

$$\left|\frac{1}{S_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s - S_n}{sS_n}\right|$$

$$= \frac{|s - S_n|}{|sS_n|}$$

$$= \frac{|S_n - s|}{|s|\,|S_n|}$$

$$< \frac{|S_n - s| \cdot 2}{|s|\;|s|} \quad \because \frac{1}{|S_n|} < \frac{2}{|s|}$$

$$= |S_n - s| \cdot \frac{2}{|s|^2} \quad \text{..........(1)}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{|s|^2}{2} \in$$

จากสมการ (1) สำหรับ $n \geqslant N$

$$\left|\frac{1}{S_n} - \frac{1}{s}\right| < |S_n - s| \cdot \frac{2}{|s|^2}$$

$$< \frac{|s|^2}{2} \in \cdot \frac{2}{|s|^2} = \in$$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{s}$ ≠

ทฤษฎีบท 2.2.8 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ และ $t \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \frac{s}{t}$$

พิสูจน์

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty} S_n \frac{1}{T_n}$$

$$= s \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \frac{s}{t}$$ #

ทฤษฎีบท 2.2.7 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $s \geqslant 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{S_n} = \sqrt{s}$

พิสูจน์ จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N-

ซึ่ง

$$|S_n - s| < \in \text{ สำหรับ } n \geqslant N \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

จาก $|S_n - s| = |(S_n^{1/2} - s^{1/2})(S_n^{1/2} + s^{1/2})|$

$$= |S_n^{1/2} - s^{1/2}|\,|S_n^{1/2} + s^{1/2}|$$

$$\geqslant |S_n^{1/2} - s^{1/2}|$$

จากสมการ (1)

$$|S_n^{1/2} - s^{1/2}| \leqslant |S_n - s| < \in \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

หรือ $|S_n^{1/2} - s^{1/2}| < \in$ สำหรับ $n \geqslant N$

นั้นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{S_n} = \sqrt{s}$ #

ทฤษฎีบท 2.2.8 ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = s$, $\lim_{n\to\infty} T_n = s$ และ $S_n \leqslant R_n \leqslant T_n$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} R_n = s$

พิสูจน์ จะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$|R_n - s| < \in$ สำหรับ $n \geqslant N$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\in > 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง $|S_n - s| < \in$ สำหรับ $n \geqslant N_1$

จากอสมการ $|S_n - s| < \in$ จะได้ว่า

$$-(S_n - s) \leqslant |S_n - s| < \in$$

หรือ $S_n - s > -\in$ ....(1)

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} T_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง $|T_n - s| < \in$ สำหรับ $n \geqslant N_2$

จากอสมการ $|T_n - s| < \in$ จะได้ว่า

$T_n - s \leqslant |T_n - s| < \in$ ....(2)

เนื่องจาก $S_n \leqslant R_n \leqslant T_n$ แล้ว

$$S_n - s \leqslant R_n - s \leqslant T_n - s$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$-\in < S_n - s \leqslant R_n - s \leqslant T_n - s < \in$ ....(3)

สำหรับ N ที่มากกว่า N_1 และ N_2 แล้วสำหรับ $n \geqslant N$ จะได้ว่า

$|S_n - s| < \in$ และ $|T_n - s| < \in$

จากสมการ (3) จะได้ว่า

$-\in < R_n - s < \in$ สำหรับ $n \geqslant N$

หรือ $|R_n - s| < \in$ จากทฤษฎีบท 1.4.5

นั่นแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} R_n = s$

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหา $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 6}{2n^2 + n}$

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 6}{2n^2 + n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}}$ เอา n^2 หารทั้งเศษและส่วน

$$= \frac{3 - 0 - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{3}{2} \qquad \#$$

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n + 1 - n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= 0 \qquad \#$$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 2.2.2 เอาคู่สังยุค (Conjugates) คูณเข้าแล้วหารออก เช่น $x - y$ เป็นคู่สังยุคของ $x + y$

ตัวอย่าง 2.2.3 กำหนดให้ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{3n^3 + 4n - 2}{2n^3 + 1}$$

จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 + 4n - 2}{2n^3 + 1}$ ....(1)

เพราะว่า $\dfrac{3n^3 + 4n - 2}{2n^3 + 1} = \dfrac{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^3}}$ เอา n^3 หารตลอด

แทนค่าในสมการ (1)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{3 + 0 - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{3}{2} \qquad \#$$

หมายเหตุ การหาลิมิตของลำดับ ก็เหมือนกับการหาลิมิตของฟังก์ชัน ตามที่เรียนมาใน MA 111(แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 1)

ตัวอย่าง 2.2.4 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{3n - 1}{4n + 1}$$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$

วิธีทำ จะต้องแสดงว่าสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้

$$|S_n - \tfrac{3}{4}| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

พิจารณา $|S_n - \frac{3}{4}| < \varepsilon$

$$\left| \frac{3n - 1}{4n + 1} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{12n - 4 - 12n - 3}{4(4n + 1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-7}{4(4n + 1)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{7}{4(4n + 1)} < \varepsilon$$

$$\frac{7}{4\varepsilon} < 4n + 1$$

$$\frac{7}{4\varepsilon} - 1 < 4n$$

$$\frac{7}{16\varepsilon} - \frac{1}{4} < n$$

ถ้าเลือก $N \geqslant \frac{7}{16\varepsilon} - \frac{1}{4}$ แล้ว $|S_n - \frac{3}{4}| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$

เพราะฉะนั้นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$ #

ตัวอย่าง 2.2.5 จงพิจารณาลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้าลิมิตหาค่าได้ สมมุติเท่ากับ s จงหาค่า N-ซึ่งทำให้

$$|S_n - s| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

ถ้ากำหนดให้ $S_n = \frac{1 + 2\cdot 10^n}{5 + 3\cdot 10^n}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2.10^n}{5 + 3.10^n} \qquad \text{..........(1)}$$

เพราะว่า $\frac{1 + 2.10^n}{5 + 3.10^n} = \dfrac{\frac{1}{10^n} + 2}{\frac{5}{10^n} + 3}$

แทนค่าในสมการ (1)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{10^n} + 2}{\frac{5}{10^n} + 3}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} + \lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{10^n} + \lim\limits_{n\to\infty} 3}$$

$$= \frac{0+2}{0+3} = \frac{2}{3}$$

ให้ $s = \frac{2}{3}$

ต่อไปจะหา N ซึ่งทำให้

$$\left|S_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } n \geq N$$

พิจารณา

$$\left|S_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1 + 2.10^n}{5 + 3.10^n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3 + 6.10^n - 10 - 6.10^n}{3(5 + 3.10^n)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-7}{15 + 9.10^n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{7}{15 + 9.10^n} < \varepsilon$$

$$\frac{7}{\varepsilon} < 15 + 9.10^n$$

$$\frac{7}{\varepsilon} - 15 < 9.10^n$$

$$\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{15}{9} < 10^n$$

$$\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{5}{3} < 10^n$$

take $\log_{10}$

$$\log_{10}\left(\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}\right) < \log_{10} 10^n = n \log_{10} 10 = n$$

นั่นคือ $n > \log_{10}\left(\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}\right)$

ถ้าเลือก $N \geqslant \log_{10}\left(\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}\right)$ แล้ว

$|S_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$ #

ตัวอย่าง 2.2.6 กำหนดให้ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{n^2 + n - 1}{3n^2 + 1}$$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{3}$

วิธีทำ จะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้

$$\left|S_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

พิจารณา $\left|S_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n^2 + n - 1}{3n^2 + 1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n^2 + 3n - 3 - 3n^2 - 1}{3(3n^2 + 1)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n - 4}{9n^2 + 3}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{3n - 4}{9n^2 + 3} \leqslant \left|\frac{3n - 4}{9n^2 + 3}\right| < \varepsilon \quad \because\ a \leqslant |a|$$

หรือ $\frac{3n - 4}{9n^2 + 3} < \varepsilon$

$$3n - 4 < 9\varepsilon n^2 + 3\varepsilon$$

$$-(3\varepsilon + 4) < 9\varepsilon n^2 - 3n$$

$$\frac{-(3\varepsilon + 4)}{9\varepsilon} < n^2 - \frac{n}{3\varepsilon} \quad \text{เอา } 9\varepsilon \text{ หารตลอด}$$

$$\left(\frac{1}{6\varepsilon}\right)^2 - \frac{(3\varepsilon + 4)}{9\varepsilon} < n^2 - \frac{n}{3\varepsilon} + \left(\frac{1}{6\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{1}{36\varepsilon^2} - \frac{(3\varepsilon + 4)}{9\varepsilon} < \left(n - \frac{1}{6\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{1 - 4\varepsilon(3\varepsilon + 4)}{36\varepsilon^2} < \left(n - \frac{1}{6\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}{36\varepsilon^2} < \left(n - \frac{1}{6\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}}{6\varepsilon} < n - \frac{1}{6\varepsilon}$$

$$\frac{1}{6\varepsilon} + \frac{\sqrt{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}}{6\varepsilon} < n$$

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}}{6\varepsilon} < n$$

ถ้าเลือก $N \geqslant \frac{1 + \sqrt{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}}{6\varepsilon}$ แล้ว $|S_n - \frac{1}{3}| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geqslant N$.

นั่นแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$ #

ตัวอย่าง 2.2.7 จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ ถ้า $|x| < 1$

วิธีทำ นั่นคือจะต้องแสดงว่า สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสำหรับ $\varepsilon > 0$

จะได้ว่า $|S_n - 0| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geqslant N$

พิจารณา $|S_n - 0| < \varepsilon$

$$|x^n - 0| < \varepsilon$$

$$|x^n| < \varepsilon$$

$$|x|^n < \varepsilon$$

take $\log_{10}$ $\quad \log_{10} |x|^n < \log_{10} \varepsilon$

$$n \log_{10} |x| < \log_{10} \varepsilon$$

$$\therefore \quad n > \frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10}|x|} \qquad \text{..........(1)}$$

เพราะว่า $|x| < 1$ แล้ว $\log_{10}|x|$ ก็เป็นลบ

จากสมการ (1) ให้ $N \geqslant \dfrac{\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}|x|}$

นั่นคือ สำหรับ $N \geqslant \dfrac{\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}|x|}$ แล้ว

$$|S_n - 0| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

นิยาม 2.2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N (depending on M) ซึ่ง

$$S_n > M \text{ ทุก ๆ } n \geqslant N$$

นิยาม 2.2.4 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N (depending on M) ซึ่ง

$$S_n < -M \text{ ทุก ๆ } n \geqslant N$$

ลิมิตของลำดับเป็น ∞ และ $-\infty$ ไม่ได้หมายความว่าลำดับลู่เข้า เพราะว่า ∞ และ $-\infty$ **ไม่เป็นจำนวน** (not number) การที่ลิมิตของลำดับคือ ∞ และ $-\infty$ จะเรียกลำดับนั้นเป็นลำดับลู่ออก (Divergent)

ตัวอย่าง 2.2.8 จงแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = n$$

เป็นลำดับลู่ออก (divergent)

วิธีทำ

$$\because \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n$$

$$= \infty$$

เราจะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนบวก M เราสามารถหาจำนวนเต็มบวก N (depending on M) ซึ่ง $S_n > M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$

พิจารณา $a_n > M$

$n > M$

เลือก $N \geq M$ แล้ว

$S_n > M$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$

แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก #

ตัวอย่าง 2.2.9 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{2n-1} = \infty$

วิธีทำ สำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $S_n > M$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
S_n &> M \\
3^{2n-1} &> M \\
\log_{10}(3^{2n-1}) &> \log_{10} M \because \text{take } \log_{10} \\
(2n-1)\log_{10} 3 &> \log_{10} M \\
2n - 1 &> \frac{\log_{10} M}{\log_{10} 3} \\
2n &> \frac{\log_{10} M}{\log_{10} 3} + 1 \\
n &> \frac{1}{2}\left(\frac{\log_{10} M}{\log_{10} 3} + 1\right)
\end{aligned}
$$

ถ้าเลือก $N \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\log_{10} M}{\log_{10} 3} + 1\right)$ แล้ว

$S_n > M$ สำหรับทุก ๆ $n \geq M$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{2n-1} = \infty$ #

ตัวอย่าง 2.2.10 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 2n) = -\infty$

วิธีทำ สำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $S_n < -M$ สำหรับทุกๆ $n \geq N$

พิจารณา $S_n < -M$

$$1 - 2n < -M$$

$$2n - 1 > M \quad \text{เอา } -1 \text{ คูณตลอด}$$

$$2n > 1 + M$$

$$n > \frac{1 + M}{2}$$

ถ้าเลือก $N \geqslant \dfrac{1 + M}{2}$ แล้ว $S_n < -M$ ทุก ๆ $n \geqslant N$

แสดงว่า $\lim_{n \to \infty} (1 - 2n) = -\infty$ #

ตัวอย่าง 2.2.11 จงแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} 10^n = \infty$ หรือแสดงว่าลำดับ $\{10^n\}$ ลู่ออก

วิธีทำ จะต้องแสดงว่าสำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$S_n > M \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

พิจารณา $10^n > M$

take $\log_{10}$

$$\log_{10} 10^n > \log_{10} M$$

$$n \log_{10} 10 > \log_{10} M$$

$$n > \log_{10} M$$

ถ้าให้ $N \geqslant \log_{10} M$ แล้วจะได้ว่า

$$S_n > M \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

แสดงว่า $\lim_{n \to \infty} 10^n = \infty$ หรือลำดับ $\{10^n\}$ ลู่ออก #

แบบฝึกหัด ๒.๒

1. จงเขียนห้าเทอมแรกของลำดับที่กำหนดให้

1.1 $\left\{\dfrac{2n-1}{2n+2}\right\}$

1.2 $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$

1.3 $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2.4.6\ldots2n}\right\}$

1.4 $\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right\}$

1.5 $S_1 = 1$

$S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{S_n}$ สำหรับ $n > 1$

1.6 $S_1 = 1$

$S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n}$ สำหรับ $n > 1$

1.7 $S_1 = 1,\ S_2 = 3$

$S_n = \dfrac{(S_{n-1} + S_{n-2})}{2}$ สำหรับ $n > 2$

1.8 $S_1 = 0,\ S_2 = 1$

$S_{n+2} = \dfrac{nS_{n+1} + S_n}{n+1}$

ข้อ 2 ถึงข้อ 8 จงหาค่าลิมิต

2. $\lim \left\{\dfrac{n(n+2)}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}\right\}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{3n+7}\right)^4$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5 - 4n^3}{3n^7 + n^3 - 10}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + 4.10^n}{3 + 2.10^n}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - n - 3n'}{2n^3 + n}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - n$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4.10^n - 3.10^{2n}}{3.10^{n-1} + 2.10^{2n-1}}$

ข้อ 9 ถึงข้อ 16 จงพิจารณาลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้าลิมิตหาค่าได้สมมุติเท่ากับ s จงหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้

$$|S_n - s| < \varepsilon \text{ สำหรับทุกๆ } n \geqslant N$$

ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

9. $S_n = \dfrac{n}{n+1}$

10. $S_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 + n}$

11. $S_n = \dfrac{3n^2 + 4n - 2}{2n^3 + 1}$

12. $S_n = \dfrac{n + 1}{n^3}$

13. $S_n = \dfrac{n^3 + 3}{n^2 + n}$

14. $S_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

15. $S_n = \dfrac{n}{n + 1} - \dfrac{n + 1}{n}$

16. $S_n = \sqrt{2n + 1} - \sqrt{n}$

17. **จงแสดงว่า** $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

18. **จงแสดงว่า** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

19. **จงแสดงว่า** $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - n^3 = -\infty$

20. จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$

21. สมมุติให้ $|S_n - s| \leqslant t_n$ สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ และ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$

22. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = |s|$

23. สมมุติให้ลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้า และสำหรับ $\varepsilon > 0$, $|S_n - T_n| < \varepsilon$ เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n$$

24. จงแสดงว่า ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{S_n} = \sqrt[3]{s}$

25. จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$

26. จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ถ้า $a > 0$
(ให้ $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ แล้วใช้ Bernoulli's inequallity)

27. จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (ให้ $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ แล้วใช้ Binonial theorem)

2.3 ลำดับที่มีขอบเขตจำกัด (Bounded sequence)

นิยาม 2.3.1 ลำดับ$\{S_n\}$ เรียกว่า ลำดับที่มีขอบเขตบน ถ้ามีจำนวนจริง U ซึ่ง

$$S_n \leqslant U \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

นิยาม 2.3.2 ลำดับ $\{S_n\}$ เรียกว่า ลำดับที่มีขอบเขตล่าง ถ้ามีจำนวนจริง L ซึ่ง

$$L \leqslant S_n \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

นิยาม 2.3.3 ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง

$$|S_n| \leqslant M \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

จากนิยาม 2.3.3 พิจารณา

$$|S_n| \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant S_n \leqslant M \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

จาก $-M \leqslant S_n$ สำหรับทุก ๆ n แสดงว่า $-M$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{S_n\}$

และ $M \geqslant S_n$ สำหรับทุก ๆ n แสดงว่า M เป็นขอบเขตบนของ $\{S_n\}$

จากนิยาม 2.3.3 ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด **ก็ต่อเมื่อ** ลำดับ $\{S_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ตัวอย่าง 2.3.1 ถ้า $S_n = [1 + (-1)^n]n$

เราพบว่า $S_1 = 0, S_2 = 4, S_3 = 0, S_4 = 8, \ldots\ldots\ldots$

และ $S_n \geqslant 0$ สำหรับทุก ๆ n

เพราะฉะนั้น 0 เป็นขอบเขตล่างของลำดับ $\{S_n\}$ แต่ไม่มีขอบเขตบน

ดังนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ ไม่เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

ทฤษฎีบท 2.3.1 ทุก ๆ ลำดับลู่เข้า (convergent) จะต้องมีขอบเขตจำกัด

พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

จากนิยาม กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|S_n - S| < 1 \quad \text{เมื่อให้ } \varepsilon = 1 \text{ สำหรับทุก ๆ } n > N$$

$$|S_n| - |S| \leqslant |S_n - S| < 1$$

$|S_n| - |S| < 1$

$|S_n| < 1 + |S| = M_1$ ......(1)

และ

$|S_n| \leqslant \max\{|S_0|, |S_1|, |S_2|, |S_3|, \ldots\} = M_2$ ....(2)

จาก (1) และ (2)

ถ้าเลือก M ที่มีค่ามากกว่า M_1 และ M_2 แล้วสมการ (1) และ (2) เป็นจริง นั่นคือ

$|S_n| < M_1 < M$ และ $|S_n| \leqslant M_2 < M$

เพราะฉะนั้น $|S_n| < M$ สำหรับทุก 9 n

แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

ทฤษฎีบท 2.3.1 บอกว่า ทุก ๆ ลำดับลู่เข้า จะต้องมีขอบเขต

แต่ถ้าทราบว่าลำดับมีขอบเขตแล้ว ลำดับอาจจะไม่ลู่เข้าก็ได้ เช่น กำหนด $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง

$S_n = (-1)^n$

เพราะว่า $|S_n| = |(-1)^n|$

$= 1$

ถ้าให้ $M = 2$ แล้ว

$|S_n| < 2$

จากนิยาม 2.3.3 แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขต

แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นคู่} \\ -1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นคี่} \end{cases}$

จะได้ว่า ลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้า เพราะหาลิมิตได้สองค่า คือ 1 และ −1

ทฤษฎีบท 2.3.2 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ และ $\{T_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = 0$

พิสูจน์

เพราะว่า $\{T_n\}$ มีขอบเขตนั้น แสดงว่า มีจำนวนจริง r ซึ่ง $|T_n| \leqslant r$ สำหรับทุก ๆ n

จาก $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$ จะได้ว่า

สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|S_n - 0| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

พิจารณา
$$\begin{aligned} |S_nT_n - 0| &= |S_nT_n| \\ &= |S_n|\ |T_n| \\ &\leqslant r|S_n| && \because |T_n| \leqslant r \\ &< r\varepsilon && \because |S_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

สำหรับ $n \geqslant N$

นั้นแสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} S_nT_n =$ #

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้ถ้าหากว่า $\{T_n\}$ ไม่มีขอบเขต

$$\lim_{n \to \infty} S_nT_n \neq 0$$

เช่น ให้ $\{S_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ และ $\{T_n\} = \{n\}$

จะพบว่า $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$ แต่ $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = \infty$ ซึ่งไม่มีขอบเขต และ $\lim\limits_{n \to \infty} S_nT_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}\, n = \lim\limits_{n \to \infty}$

$$= 1 \neq 0$$

แสดงว่า ทฤษฎีบทนี้ถ้าตกคำว่า $\{T_n\}$ มีขอบเขตแล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} S_nT_n \neq 0$

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{1}{n}$$

จงพิจารณาว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตหรือไม่

วิธีทำ สามารถแบ่งเป็นสองวิธี

วิธีที่ 1. เพราะว่า

$$\{S_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ แล้ว S_n จะย่างเข้าสู่ 0

และจะได้ว่า 0 เป็นขอบเขตล่างของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะว่า $0 \leqslant S_n$ สำหรับทุก ๆ n

และ 1 เป็นขอบเขตบนของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะว่า $S_n \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ n

และเพราะว่าลำดับ $\{S_n\}$ มีทั้งขอบเขตบน และขอบเขตล่าง

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

วิธีที่ 2

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

แสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้า และจากทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า

ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

แบบฝึกหัด 2.3

จากโจทย์ข้อ 9 ถึงข้อ 16 ของแบบฝึกหัด 2.2

จงพิจารณาว่า ลำดับใดมีขอบเขต

2.4 โมโนโทนิคลำดับ (Monotonic sequence)

กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง พจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{1}{n}$$

จะได้ว่า

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = \frac{1}{2}$$
$$S_3 = \frac{1}{3}$$
$$\vdots \quad \vdots$$

จากลำดับ $\{S_n\}$ ที่กำหนดมาให้จะเห็นว่า

$$S_1 > S_2 > S_3 > \ldots..$$

นั่นคือ ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ต่าง ๆ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ

นิยาม 2.4.1 ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น (Nonincreasing) ถ้า

$S_n \geqslant S_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

จาก $S_n \geqslant S_{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{S_n}{S_{n+1}} \geqslant 1$

หรือ $S_n \geqslant S_{n+1} \Leftrightarrow S_n - S_{n+1} \geqslant 0$

ตัวอย่าง 2.4.1 จงแสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น ถ้า $S_n = \dfrac{n+1}{n}$

วิธีทำ ให้ $S_n = \dfrac{n+1}{n}$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

พิจารณา $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n} \div \dfrac{n+2}{n+1}$

$$= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n}$$

$$> 1 \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

เพราะว่า $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \Leftrightarrow \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1$

จากสมการ (1) $\frac{S_n}{S_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow S_n > S_{n+1}$

จากนิยาม 2.4.1 แสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น ✱

ถ้ากำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{n - 1}{n}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{2}{[illegible]} \\ S_4 &= \frac{3}{a} \\ &\vdots \end{aligned}$$

จากลำดับ $\{S_n\}$ ที่กำหนดให้จะเห็นว่า

$$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$$

นั้นคือลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ต่าง ๆ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

นิยาม 2.4.2 ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง (Nondecreasing) ถ้า

$S_n \leqslant S_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

จาก $S_n \leqslant S_{n+1} \Leftrightarrow \frac{S_n}{S_{n+1}} \leqslant 1$

หรือ $S_n \leqslant S_{n+1} \Leftrightarrow S_n - S_{n+1}$ 4 0

ตัวอย่าง 2.4.2 จงแสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง ถ้า

$$S_n = \frac{n - 1}{n}$$

วิธีทำ ให้ $S_n = \frac{n-1}{n}$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

พิจารณา $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{n-1}{n} \quad \frac{n+1}{n}$

$$= \frac{n^2-1}{n^2} = 1 \quad \frac{1}{n^2} < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

เพราะว่า $n^2 - 1 < n^2 \Leftrightarrow \frac{n^2-1}{n^2} < 1$

จากสมการ (1)

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow S_n < S_{n+1}$$

จากนิยาม 2.4.2 แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง #

นิยาม 2.4.3 โมโนโทนิคลำดับ คือ ลำดับที่มีค่าไม่ เพิ่มขึ้น (Nonincreasing) หรือลำดับที่มีค่าไม่ลดลง (Nondecreasing) อย่างใดอย่างหนึ่ง

และ ถ้า $S_n > S_{n+1}$ เรียกว่าเป็นลำดับลดลง (decreasing)

หรือ ถ้า $S_n < S_{n+1}$ เรียกว่า เป็นลำดับเพิ่มขึ้น (increasing)

ทฤษฎีบท 2.4.1

(ก) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และมีขอบเขตข้างบน แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{l.u.b.}\{S_n\}$$

(ข) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้นและมีขอบเขตข้างล่าง แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{g.l.b.}\{S_n\}$$

พิสูจน์

(ก) ให้ $\beta = \text{l.u.b.}\{S_n\}$

จากนิยามจะได้ว่า

$S_n \leqslant \beta$ สำหรับทุก ๆ ค่า n

สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N บางตัวซึ่ง

$$\beta - \varepsilon < S_N < \beta \qquad \text{..........(1)}$$

แต่ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง

นั่นคือ ถ้า $n \geqslant N$ แล้ว

$$S_N \leqslant S_n \leqslant \beta \qquad \text{..........(2)}$$

จากสมการ (1) และ (2)

$$\beta - \varepsilon < S_N \leqslant S_n \leqslant \beta$$

แต่ $\beta < \beta + \varepsilon$

แล้ว $\beta - \varepsilon < S_N \leqslant S_n \leqslant \beta < \beta + \varepsilon$

หรือ $\beta - \varepsilon < S_n < \beta + \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < S_n - \beta < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad |S_n - \beta| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \beta$

แต่ $\beta = \text{l.u.b.}\{S_n\}$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{l.u.b.}\{S_n\} \qquad \#$$

หมายเหตุ สำหรับทฤษฎีบท 2.4.1 นี้จะสรุปได้ว่า ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนิค และมีขอบเขต แล้ว $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 2.4.3 กำหนดให้ $S_n = 2 + \frac{1}{n}$ จงพิจารณาว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนิค

วิธีทำ พิจารณาผลต่างของ $S_n - S_{n+1}$

เพราะว่า $S_n - S_{n+1} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)$

$$= 2 + \frac{1}{n} - 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

เพราะว่า เศษมากกว่า 0 และส่วนมากกว่า 0

นั่นแสดงว่า $S_n - S_{n+1} > 0$

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น (nonincreasing) #

จากตัวอย่างนี้อาจพิจารณาได้อีกวิธีหนึ่งคือ

สมมุติให้ $S_n \geqslant S_{n+1}$

unufii $2 + \frac{1}{n} \geqslant 2 + \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

$$n + 1 \geqslant n$$

$$1 \geqslant 0$$ ซึ่งเป็นจริง

นั่นแสดงว่า $S_n \geqslant S_{n+1}$ จริงและจากนิยามจะได้ว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น #

ตัวอย่าง 2.4.4 กำหนดให้ $S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

จงพิจารณาว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ **กรณีที่ 1** พิจารณาผลต่าง $S_n - S_{n+1}$

เพราะว่า

$$S_n - S_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)!} < 0$$

เพราะว่าเศษน้อยกว่า 0 และส่วนมากกว่า 0

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และ $S_n < S_{n+1}$

กรณีที่ 2 จะพิจารณาว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตข้างบน

เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})} \quad \text{จากอนุกรมเรขาคณิต} \\
&< 1 + \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})} \\
&= 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $S_n < 3$ เมื่อ 3 เป็นจำนวนจริง

นั่นแสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตข้างบน

จากทั้งสองกรณี แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และมีขอบเขตข้างบน

เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบท 2.4.1 ลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ จะต้องมีค่า แล้วลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

ตัวอย่าง 2.4.5 กำหนดให้ $S_n = \dfrac{2n - 7}{3n + 2}$ จงพิจารณาว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็น

ก) โมโนโทนิค ชนิดใด

ข) $\{S_n\}$ มีขอบเขตล่าง และขอบเขตบนหรือไม่

ค) $\{S_n\}$ มีขอบเขตหรือไม่

ง) ลิมิตของ $\{S_n\}$ หาค่าได้หรือไม่

วิธีทำ

ก) สมมุติให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง (Nondecreasing)

ดังนั้น $S_n \leqslant S_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ n

$$\frac{2n-7}{3n+2} \leqslant \frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2}$$

$$\frac{2n-7}{3n+2} \leqslant \frac{2n+2-7}{3n+3+2} = \frac{2n-5}{3n+5}$$

$$(2n-7)(3n+5) \leqslant (3n+2)(2n-5)$$

$$6n^2-11n-35 \leqslant 6n^2-11n-10$$

$$-35 \leqslant -10$$

ซึ่งเป็นจริง

นั้นแสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นโมโนโทนิค ลำดับ และ $-35 < -10$ อย่างเดียวนั้นแสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น #

ข) จาก $S_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$

$\because$ $S_1 = \dfrac{-5}{5} = -1$, $S_2 = \dfrac{-3}{8}$, $S_3 = \dfrac{-1}{11}$, $S_4 = \dfrac{1}{14}$, $S_5 = \dfrac{3}{17}$

จากการเขียนเราสามารถเดาได้ว่า 1 เป็นขอบเขตบนค่าหนึ่งของ $\{S_n\}$ นั่นคือ เราต้องแสดงได้ว่า $S_n \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ n

เพราะว่าถ้า $\dfrac{2n-7}{3n+2} \leqslant 1$

$$2n-7 \leqslant 3n+2$$

$-9 \leqslant n$ ซึ่งเป็นจริง

ถ้าทำย้อนขึ้นไป เราจะได้ว่า $S_n \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ n

นั้นแสดงว่า $\{S_n\}$ มีขอบเขตบน #

และจากการทดลองจะพบว่า $S_n \geqslant -1$ สำหรับทุก ๆ n

นั้นแสดงว่า $\{S_n\}$ มีขอบเขตล่าง #

ค) เพราะว่า $\{S_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง
ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด (Bounded sequence)
นั้นคือ $|S_n| \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ n #

ง) เนื่องจากทุก ๆ โมโนโทนิค ลำดับที่มีขอบเขตย่อมลู่เข้า หรือ มีลิมิตที่หาค่าได้ นั้นคือ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{3n+2} = \frac{2}{3}$$ #

ตัวอย่าง 2.4.6 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$$

จงแสดงว่า ลำดับนี้เป็นโมโนโทนิค และมีขอบเขต และเพราะฉะนั้นจะต้องเป็นลำดับลู่เข้า

วิธีทำ ก. พิจารณาว่าเป็นลำดับชนิดใด
ลองพิจารณาสองสามเทอมแรก พบว่า

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1\cdot3}{2\cdot4} = \frac{3}{8}S_1 \text{ หรือ } S_1 = \frac{8}{3}S_2 \text{ หรือ } S_1 > S_2$$

$$S_3 = \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6} = \frac{5}{6}S_2 \text{ หรือ } S_2 = \frac{6}{5}S_3 \text{ หรือ } S_2 > S_3$$

$$S_4 = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8} = \frac{7}{8}S_3 \text{ หรือ } S_3 = \frac{8}{7}S_4 \text{ หรือ } S_3 > S_4$$

โดยทั่วไป

$$S_n = \frac{2n-1}{2n} S_{n-1} \text{ หรือ } S_{n-1} = \frac{2n}{2n-1} S_n \text{ หรือ}$$

$S_{n-1} > S_n$

แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าลดลง #

ข. พิจารณาว่ามีขอบเขตหรือไม่

เพราะว่า แต่ละพจน์ของ S_n เป็นบวก เพราะฉะนั้น $0 < S_n$

และจากการพิจารณาแต่ละพจน์พบว่า

$$S_n \leqslant \frac{1}{2}$$

เราจะพิจารณาว่าจริงหรือไม่

จาก $S_n > 0$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n} > 0$$

$1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1) > 0$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

นั้นแสดงว่า $S_n > 0$ จริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

แสดงว่า 0 เป็นขอบเขตล่าง

และถ้า $S_n \leqslant \frac{1}{2}$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1) \leqslant 2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n$$

$$3\cdot5\cdot7\cdots(2n \quad 1) \leqslant 4\cdot6\cdot8\cdots2n$$

เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

แสดงว่า $S_n \leqslant \frac{1}{2}$ จริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

แสด งว่า $\frac{1}{2}$ เป็นขอบเขตบน

เพราะฉะนั้น สรุปว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขต #

จากข้อ ก และข้อ ข สามารถสรุปได้ว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

แบบฝึกหัด 2.4

จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้ เป็นโมโนโทนิกหรือไม่, มีขอบเขตหรือไม่, และลู่เข้า หรือลู่ออก

1. $\left\{\frac{2^n}{2^n + 1}\right\}$

2. $\left\{\frac{n!}{n! + 1}\right\}$

3. $\left\{(-1)^{2n} \frac{1}{2n}\right\}$

4. $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n + 1}\right\}$

5. $\left\{\frac{2n}{n!}\right\}$

6. $\left\{2 + (-1)^n\right\}$

7. $\left\{2^n + 1\right\}$

8. ให้ลำดับ $\{s_n\}$ ซึ่งพจน์ต่าง ๆ คือ

$$s_1 = \sqrt{2}$$

$$s_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

และพจน์ที่ $n + 1$ คือ

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}$$

จงแสดงว่าลำดับนี้เป็นโมโนโทนิค และมีขอบเขต แล้วหาลิมิตของลำดับ

9. ให้ลำดับ $\{s_n\}$ ซึ่งพจน์ต่าง ๆ คือ

$$s_1 = \sqrt{2}$$

$$s_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

และพจน์ที่ $n + 1$ คือ

$$s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$$

จงแสดงว่าพจน์นี้เป็นโมโนโทนิค และมีขอบเขต แล้วหาลิมิตของลำดับ

10. ให้ลำดับ $\{s_n\}$ ซึ่งพจน์ต่าง ๆ คือ

$$s_1 = 1$$

และพจน์ทั่ว ๆ ไปคือ

$$s_{n+1} = \sqrt{3s_n}$$

จงแสดงว่าลำดับ $\{s_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

2.5 ลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

(Subsequence of sequence $\{S_n\}$)

นิยาม 2.5.1 ลำดับ $\{\bar{S}_k\}$ เป็นลำดับย่อย (Subsequence) ของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้า

$$\bar{S}_k = S_{n_k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

ซึ่ง $\{n_k\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นของจำนวนเต็มในโดเมนของลำดับ $\{S_n\}$
เรากำหนดให้ ลำดับ $\{S_{n_k}\}$ แทนลำดับย่อย $\{\bar{S}_k\}$

ตัวอย่าง 2.5.1 กำหนดให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง

$S_n = \frac{1}{n}$ และถ้า $n_k = 2k$ จงหาลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

วิธีทำ จาก $n_k = 2k$ จะได้ว่า

$$n_1 = 2,\; n_2 = 4,\; n_3 = 6,\; n_4 = 8, \ldots$$

เพราะว่า $\{n_k\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น

และ $\{S_{n_k}\} = \{S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3} \ldots\}$

$= \{S_2, S_4, S_6, \ldots\}$ ....(1)

จาก $S_n = \frac{1}{n}$

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = \frac{1}{2}$$
$$S_3 = \frac{1}{3}$$
$$S_4 = \frac{1}{4}$$
$$S_5 = \frac{1}{5}$$
$$S_6 = \frac{1}{6}$$

แทนค่า S_n ในสมการ (1)

เพราะฉะนั้น $\{S_{n_k}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

#

ตัวอย่าง 2.5.2 กำหนดให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง

$S_n = (-1)^n$ และถ้า $n_k = 2k$

จงหาลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

วิธีทำ เพราะว่า $n_k = 2k$ แล้ว

$n_1 = 2,\ n_2 = 4,\ n_3 = 6,\ n_4 = 8,\ n_5 = 10,\ . . .$

จะเห็นว่า $\{n_k\} = \{2, 4, 6, 8, 10, . . .]$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น และลำดับ

$$\{S_{n_k}\} = \{S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, . . .)$$
$$= \{S_2, S_4, S_6, . . .] \qquad \text{..........(1)}$$

จาก $S_n = (-1)^n$

$S_2 = (-1)^2 = 1$

$S_4 = (-1)^4 = 1$

$S_6 = (-1)^6 = 1$

$\vdots \quad \vdots \qquad . \quad .$

แทนค่า S_n ในสมการ (1)

เพราะฉะนั้น $\{S_{n_k}\} = \{1, 1, 1, . . .\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

ทฤษฎีบท 2.5.1 ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้า แล้วทุก ๆ ลำดับย่อย (Subsequence) $\{S_{n_k}\}$ จะลู่เข้าด้วย และลู่เข้าสู่จุดเดียวกันด้วย

พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริงบวก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|S_n - s| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

เพราะว่า ลำดับ $\{S_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง ลำดับ $\{n_k\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น

ดังนั้น จะต้องมีจำนวนเต็มบวก K ซึ่ง

$n_k \geqslant N$ สำหรับ $k \geqslant K$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$|S_{n_k} - s| < \varepsilon$ สำหรับ $k \geqslant K$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{k \to \infty} S_{n_k} = s$ หรือกล่าวว่า

ลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่จุด s ด้วย #

จากทฤษฎีบท 2.5.1 นี้ในทางกลับกัน คือ ถ้าลำดับย่อยลู่เข้าสู่ s แต่ลำดับ $\{S_n\}$ อาจไม่ลู่เข้าก็ได้ เช่น

ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = (-1)^n$$

และให้ $S_{2n} = (-1)^{2n}$ แล้ว $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะว่า $$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = \lim_{n \to \infty} (-1)^{2n} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

แสดงว่า ลำดับย่อย $\{S_{2n}\}$ ลู่เข้าสู่ 1 แต่ลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้า เพราะลิมิตมีสองค่า คือ 1 กับ -1

นั่นแสดงว่า ถ้าลำดับย่อยลู่เข้า แล้วลำดับอาจไม่ลู่เข้าก็ได้

หรือ กำหนดให้ $\{S_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

เราพบว่า ลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

ถ้าให้ $\{S_{n_k}\} = \{S_{2k}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$

เราก็พบว่า ลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ 0 ด้วย

ตัวอย่าง 2.5.3 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$S_1 = 1$, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{S_n}$ จงพิจารณาลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เพราะว่า S_n จะมีค่าเป็นบวกเสมอ

$\therefore \quad S_{n+1} > S_n$

ดังนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น

จากนี้ สมมุติว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตด้วย ....(1)

จากทฤษฎีบท 2.4.1 ลำดับ $\{S_n\}$ จะลู่เข้าสู่ค่า ๆ หนึ่ง สมมุติเป็น s

นั่นคือให้ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$

$$\text{จาก} \quad S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n}$$

ใส่ลิมิต $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n}$

$$= s + \frac{1}{s}$$

$s = s + \frac{1}{s}$ $\because$ $\{S_{n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ดังนั้น ย่อมลู่เข้าสู่ s ด้วย

จาก $s = s + \frac{1}{s} \Rightarrow 0 = 1$ ซึ่งไม่เป็นจริง

ดังนั้นที่สมมุติ ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตก็ไม่เป็นจริง แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับ เพิ่มขึ้น และไม่มีขอบเขต

เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ ก็ลู่ออก (divergent) #

นิยาม 2.5.2 ช่วงสอดแทรก (Nested interval)

ให้ $\{I_n\}$ เป็นลำดับของช่วงปิด ซึ่งมีคุณสมบัติ

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

และ ℓ_n เป็นความยาวของแต่ละช่วงปิด I_n ซึ่ง

$\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 0$ แล้วลำดับ $\{I_n\}$ เรียกว่าลำดับของช่วงสอดแทรก (Nested interval)

ทฤษฎีบท 2.5.2 ถ้า $\{I_n\}$ เป็นลำดับของช่วงสอดแทรก (Nested interval) แล้วจะต้องมีจุดเพียงจุดเดียวเท่านั้นที่บรรจุอยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n

พิสูจน์ ให้ช่วง $I_n = \{x \mid a_n \leqslant x \leqslant b_n\}$

เพราะว่า $\{I_n\}$ เป็นลำดับของช่วงสอดแทรก จึงได้ว่า

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ หรือ

$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \dots$ หรือ $a_n \leqslant a_{n+1}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3 \dots$

และ $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \dots$ หรือ $b_n \geqslant b_{n+1}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3 \dots$

เพราะว่า $a_n \leqslant a_{n+1}$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดลง และมีขอบเขตจำกัดโดย b_1 เป็นขอบเขตข้างบน และ a_1 เป็นขอบเขตข้างล่าง

จากทฤษฎีบท 2.4.1 ลำดับ $\{a_n\}$ จะต้องลู่เข้าสู่จุด ๆ หนึ่ง คือ a

นั้นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

และเพราะว่า $b_n \geqslant b_{n+1}$ เพราะฉะนั้น $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่เพิ่มขึ้น และมีขอบเขตจำกัด โดย b_1 เป็นขอบเขตข้างบน และ a_1 เป็นขอบเขตข้างล่าง

จากทฤษฎีบท 2.4.1 ลำดับ $\{b_n\}$ จะต้องลู่เข้าสู่จุด ๆ หนึ่ง คือ b

นั้นคือ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

พิจารณา

$$b - a = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ell_n$$

$$= 0$$ เพราะว่า $\{I_n\}$ เป็นลำดับของช่วงสอดแทรก

จาก $b - a = 0$

เพราะฉะนั้น $b = a$

เนื่องด้วย $a_n \leqslant a = b$ เมื่อ a เป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของ $\{a_n\}$ และ $a = b \leqslant b_n$ เป็นขอบเขตข้างล่างสูงสุดของ $\{b_n\}$