ดังนั้น

$a_n \leqslant a = b \leqslant b_n$ แสดงว่าจุด $a = b$ จะอยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n แต่จะมีเพียงจุดเดียวเท่านั้นหรือไม่

สมมุติให้มีจุดสองจุดที่ต่างกันอยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n คือ a และ a

ให้ h เป็นระยะทางระหว่าง a และ a′ และ $h > 0$ เสมอ

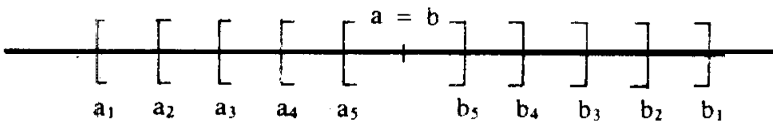
สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ พอ $(n \to \infty)$

$\ell_n = b_n - a_n < h$ และสำหรับภายใต้เงื่อนไขนี้จะไม่มีจุดที่ต่างกันสองจุดอยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n

เพราะว่า สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ พอระยะทาง ℓ_n จะมีค่าน้อยกว่า h เสมอ จากคุณสมบัติของช่วงสอดแทรก $\{I_n\}$ จะได้ว่า จุด a และ a′ ทั้งสองจุดจะไม่อยู่ในบางช่วงปิด I_n สำหรับ n ที่มีค่ามาก

ดังนั้น สรุปได้ว่า จะมีจุดเพียงจุดเดียวเท่านั้นที่อยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n #

จากทฤษฎีบทนี้ ให้นักศึกษาดูรูป 2.5.1 ประกอบจะเข้าใจง่ายขึ้น



รูป 2.5.1

นิยาม 2.5.3 จุด A เป็นจุดเกาะกลุ่ม (Cluster point) ของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้ามีลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ที่ลู่เข้าสู่จุด A

ทฤษฎีบท 2.5.3 ทุก ๆ ลำดับที่มีขอบเขตย่อมมีจุดเกาะกลุ่มอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจุด

พิสูจน์ ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต นั่นคือ

จะมีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง

$|S_n| < M$ สำหรับทุก ๆ n

เพราะว่า $|S_n| < M \Leftrightarrow -M < S_n < M$ ....(1)

นั่นคือ S_n เป็นสมาชิกของช่วงเปิด $(-M, M)$ สำหรับทุก ๆ n

แต่ $(-M, M) \subseteq [-M, M]$

เพราะฉะนั้น $S_n \in [-M, M]$ หรือ $-M \leqslant S_n \leqslant M$

ให้ $I = [-M, M]$ เป็นช่วงปิดใด ๆ แล้ว

$$S_n \in I \text{ สำหรับทุก ๆ } n \in N$$

หรือสำหรับจำนวนที่ไม่จำกัด (infinite) n ต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน

ถ้าแบ่งช่วงปิด I ออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน คือ

$\{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant 0\}$ และ $\{S_n | 0 \leqslant S_n \leqslant M\}$ ซึ่งแต่ละช่วงจะมีเทอม S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด เพราะว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่จำกัด (Infinite sequence)

เลือก $I_1 = \{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant 0\}$ เป็นช่วงปิด แล้วแบ่งช่วงปิด I_1 ออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน คือ

$$\{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant -\frac{M}{2}\} \text{ และ } \{S_n | -\frac{M}{2} \leqslant S_n \leqslant 0\}$$

ซึ่งแต่ละช่วงปิดจะมีเทอม S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด เพราะว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่จำกัด

เลือก $I_2 = \{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant -\frac{M}{2}\}$ เป็นช่วงปิดแล้วแบ่งช่วงปิด I_2-ออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน คือ

$$\{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant -\frac{3M}{4}\} \text{ และ } \{S_n | -\frac{3M}{4} \leqslant S_n \leqslant -\frac{M}{2}\}$$

ซึ่งแต่ละช่วงปิดจะมีเทอม S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด

แล้วเลือกช่วงปิดใดช่วงหนึ่งมาแล้วแบ่งช่วงปิดนั้นออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน แล้วดำเนินการเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จะหา

$I_1, I_2, I_3, \ldots$ ได้ซึ่ง

$$I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots..$$

เมื่อ $I_n = \{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}}M\}$ ซึ่งแต่ละช่วงปิดจะมีเทอม-S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด .... (2)

พิจารณาความยาวของแต่ละช่วง

I ยาว $= M - (-M) = 2M$

I_1 ยาว $= O - (-M) = M$

I_2 ยาว $= -\frac{M}{2} - (-M) = \frac{M}{2} = \frac{M}{2^{2-1}}$

โดยทั่วไป I_n ยาว $= \frac{M}{2^{n-1}}$ สำหรับ $n > 1$ ....(3)

ถ้ากำหนดให้จุดปลายของช่วงปิด $I_n = \left\{S_n \mid -M \leqslant S_n \leqslant \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} M\right\}$

คือ $a_n = -M$ ซึ่ง $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และมีขอบเขตข้างบน เช่น-
M เป็นขอบเขตข้างบนของ $\{a_n\}$

และ $b_n = \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} M$ ซึ่ง $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น และมีขอบเขตข้างล่าง เช่น $-M$ เป็นขอบเขตข้างล่าง

ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ จะต้องลู่เข้าเนื่องด้วย

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ell_n \quad \text{เมื่อ } \ell_n \text{ เป็นความยาวของ } I_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{M}{2^{n-1}} \quad \text{จากสมการ (3)}$$

$$= 0$$

แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ และให้เท่ากับ A

ดังนั้น $a_n \leqslant A \leqslant b_n$ หรือ

A เป็นสมาชิกของทุก ๆ ช่วงปิด I_n

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ซึ่ง $\varepsilon > 0$ แล้ว

ความยาว $I_n = \frac{M}{2^{n-1}} < \varepsilon$ สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ พอหรือ $n > N$

ให้ช่วงเปิด $\{S_n \mid A-\varepsilon < S_n < A+\varepsilon\}$ เป็นย่านจุด A

หรือ $\{S_n \mid |S_n - A| < \varepsilon\}$

สำหรับ $n > N$, ช่วงปิด I_n จะอยู่ในย่านจุด A นี้ เนื่องจากไม่มี $S_n \in I_n$ พจน์ใด ๆ เลยที่อยู่ไกลจาก A มากกว่าความยาวของ $I_n = \dfrac{M}{2^{n-1}}$

ดังนั้นย่านจุด A จะมีพจน์ S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด สำหรับจำนวนไม่จำกัด n ต่าง ๆ

ต่อไปจะแสดงว่า A เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$

นั่นคือ ต้องแสดงว่าจะมีลำดับย่อยที่ย่างเข้าสู่จุด A ถ้าเลือก $\varepsilon = 1$ จะมีจำนวนไม่จำกัด n ซึ่งพจน์ $S_n \in \{|S_n - A| < 1\}$ ดังนั้นจะมี

$$n_1 \text{ ซึ่ง } |S_{n_1} - A| < 1$$

จำมีจำนวนไม่จำกัด n ซึ่งพจน์ $S_n \in \{|S_n - A| < \frac{1}{2}\}$
ดังนั้นจะมี

$$n_2 > n_1 \text{ ซึ่ง } |S_{n_2} - A| < \frac{1}{2}$$

จะมีจำนวนไม่จำกัด n ซึ่งพจน์ $S_n \in \{|S_n - A| < \frac{1}{3}\}$
ดังนั้นจะมี

$$n_3 > n_2 \text{ ซึ่ง } |S_{n_3} - A| < \frac{1}{3}$$

ในทำนองเดียวกันจะมี

$$n_4 > n_3 \text{ ซึ่ง } |S_{n_4} - A| < \frac{1}{4}$$

$$n_k > n_{k-1} \text{ ซึ่ง } |S_{n_k} - A| < \frac{1}{k}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0 < \varepsilon$ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ

เพราะฉะนั้น สำหรับลำดับของจำนวน $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$
ซึ่ง $|S_n - A| < \frac{1}{k} < \varepsilon$ เมื่อ k มีค่ามาก ๆ นั้นแสดงว่า สำหรับลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ก็จะลู่เข้าสู่ A

ดังนั้น A เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$ #

นิยาม 2.5.4 ลำดับ $\{S_n\}$ เรียกว่า **โคชีซีเควนซ์** (Cauchy sequence) ถ้า กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N (ขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่ง

$|S_n - S_m| < \varepsilon$ สำหรับ $n, m > N$ หรือ สามารถเขียนได้ว่า

$\lim\limits_{m,n\to\infty} |S_n - S_m| = 0$ หมายความว่า ถ้า n และ m มีค่ามาก ๆ แล้ว

ระยะทางระหว่าง S_n และ S_m จะย่างเข้าสู่ 0

ทฤษฎีบท 2.5.4 ทุก ๆ ลำดับที่ลู่เข้า เป็นโคชีซีเควนซ์

พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$

จากนิยาม กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับ $n \geqslant N$

เพราะว่า $n + 1 > n \geqslant N$

เพราะฉะนั้น $n + 1 > N$ และเราจะได้ว่า

$|S_{n+1} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ ด้วย

สำหรับ $n + 1$, และ n ที่มีค่ามากกว่า N เราจะพิจารณา

$$\begin{aligned} |S_n - S_{n+1}| &= |S_n - s + s - S_{n+1}| \\ &= |(S_n - s) + (s - S_{n+1})| \\ &\leqslant |S_n - s| + |s - S_{n+1}| \\ &= |S_n - s| + |S_{n+1} - s| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ถ้าให้ $n + 1 = m$ เราจะได้ว่า

$|S_n - S_m| < \varepsilon$ สำหรับ n และ m มีมากกว่า N นี้แสดงว่าทุก ๆ ลำดับที่ลู่เข้าเป็นโคชีซีเควนซ์ #

ทฤษฎีบท 2.5.5 ถ้า $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์แล้ว ลำดับ $\{S_n\}$ ย่อมเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

พิสูจน์ เพราะว่าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์ จะได้ว่า สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|S_n - S_m| < 1 \text{ สำหรับ } n,\ m > N$$

$$|S_n| - |S_m| \leqslant |S_n - S_m| < 1$$

หรือ $|S_n| < 1 + |S_m|$

ถ้าเลือก $m > N$ เป็นตัวคงที่แล้ว สำหรับ $n > N$

จะได้ว่า $|S_n| < 1 + |S_m| = M_1$ ....(1)

จากสมการ (1) $|S_n| < M_1$ แสดงว่า ซีเควนซ์ $\{S_n\}$ มีขอบเขต นั่นคือ สำหรับ $n > N$ นั้น

$$|S_n| < M_1$$

ซึ่งจะมีจำนวนจำกัดของพจน์ที่ n ของลำดับ $\{S_n\}$

นั่นคือพจน์ที่ $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ ซึ่ง

$$S_k \not< M_1 \text{ สำหรับ } k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

ดังนั้นถ้าเพิ่ม M_1 ขึ้นไปเรื่อยจะได้จำนวนจริง M ซึ่ง

$$|S_n| < M \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

จากนิยาม 2.3.3 แสดงว่า

โคชีซีเควนซ์ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

ทฤษฎีบท 2.5.6 ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์แล้ว ลำดับ $\{S_n\}$ ย่อมลู่เข้า (convergent)

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.5.5 ทราบว่า โคชีซีเควนซ์ $\{S_n\}$ มีขอบเขต นั่นคือ สำหรับจำนวนจริงบวก M

$$|S_n| < M \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

และจากทฤษฎีบท 2.5.3 ถ้า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตแล้ว จะมีจุดเกาะกลุ่ม A นั่นคือ

จะมีลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่จุด A

หรือ $\lim\limits_{k \to \infty} S_{n_k} = A$

จากนิยามของลิมิต สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|S_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับ } n_k \geqslant N_1 \qquad ....(1)$$

เพราะว่าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n, m > N_2 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

เพราะว่า ลำดับ $\{n_k\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น และไม่มีขอบเขต

นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง N_2 จะมี n_k ซึ่ง $n_k > N_2$

จากสมการ (2) สำหรับ $n, n_k > N_2$

$$|S_n - S_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

สำหรับ N ที่มากกว่า N_1 และ N_2 ถ้าให้ n_k คงที่สำหรับ $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}|S_n - A| &= |S_n - S_{n_k} + S_{n_k} - A| \\ &\leqslant |S_n - S_{n_k}| + |S_{n_k} - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ จากสมการ (1) และ (3)} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|S_n - A| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งเป็นโคชีซีเควนซ์ย่อมลู่เข้าสู่ A #

ตัวอย่าง 2.5.4 กำหนด ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = \frac{1}{n}$$

จงแสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็น โคชีซีเควนซ์

วิธีทำ สำหรับ $n > N$

แต่ $n + 1 > N$ แล้ว

$$n, n + 1 > N$$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}S_n - S_{n+1} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n + 1 - n}{n(n + 1)} \\ &= \frac{1}{n^2 + n}\end{aligned}$$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} |S_n - S_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^2 + n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$= 0$$

จากนิยาม 2.5.4 แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์ #

แบบฝึกหัด 2.5

จงพิจารณา ลำดับต่อไปนี้ ลู่เข้า หรือลู่ออก

1. ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับซึ่งกำหนดให้

$$s_1 = 1 , s_{n+1} = s_n + \frac{1}{s_n} \text{ สำหรับ } n > 1$$

2. ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งกำหนดให้

$$s_1 = 1, s_{n+1} = s_n + \sqrt{s_n} \text{ สำหรับ } n > 1$$

3. ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งกำหนดให้

$$s_1 = I, \ s_2 = 3$$

$$s_n = (s_{n-1} + s_{n-2})/2 \text{ สำหรับ } n > 2$$

4. ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งกำหนดให้

$$s_1 = 1, s_2 = 2$$

$$s_{n+2} = (4s_{n+1} - s_n)/3$$

2.6 **ขอบเขตข้างบนต่ำสุด และขอบเขตข้างล่างสูงสุดของลำดับ** (least upper bound and greatest-lower bound of a sequence)

นิยาม 2.6.1 จำนวน M เรียกว่า ขอบเขตข้างบนต่ำสุด (least upper bound) ของ ลำดับ $\{S_n\}$ ถ้า

$$S_n \leqslant M \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \ldots$$

ขณะที่มีอย่างน้อยหนึ่งพจน์ที่มากกว่า $M - \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

นิยาม 2.6.2 จำนวน m เรียกว่า ขอบเขตข้างล่างสูงสุด (greatest lower bound) ของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้า

$$S_n \geqslant m \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \ldots$$

ขณะที่มีอย่างน้อยหนึ่งพจน์ที่น้อยกว่า $m + \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

ตัวอย่าง 2.6.1 จงหาขอบเขตข้างบนต่ำสุด และขอบเขตข้างล่างสูงสุดของลำดับ

$$\{2, -2, 1, -1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

วิธีทำ เพราะว่าทุก ๆ พจน์ของลำดับน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2 ขณะที่มีอย่างน้อยหนึ่งพจน์ เช่น พจน์ที่หนึ่งมากกว่า $2 - \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น 2 เป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุด #

เพราะว่าทุก ๆ พจน์ของลำดับมากกว่าหรือเท่ากับ -2

ขณะที่มีอย่างน้อยหนึ่งพจน์ เช่น พจน์ที่สองน้อยกว่า $-2 + \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น -2 เป็นขอบเขตข้างล่างสูงสุด #

ตัวอย่าง 2.6.2 จงหาขอบเขตข้างบนต่ำสุด และขอบเขตข้างล่างสูงสุดของลำดับ $\{(-1)^n\}$

วิธีทำ ลองหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับนี้ คือ

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n$$

เพราะว่า ทุก ๆ พจน์ของลำดับน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 ขณะที่มีพจน์คู่ทั้งหมดมากกว่า $1 - \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น 1 เป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุด $\#$

และเพราะว่าทุก ๆพจน์ของลำดับมากกว่าหรือเท่ากับ -1 ขณะที่มีพจน์คี่ทั้งหมด น้อยกว่า $-1 + \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น -1 เป็นขอบเขตข้างล่างสูงสุด $\#$

แบบฝึกหัด 2.6

จงหาขอบเขตข้างบนต่ำสุด และขอบเขตข้างล่างสูงสุดของลำดับต่อไป

1. $2, 1.9, 1.8, 1.7, \ldots 2 - \frac{(n-1)}{10}$

1. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$

3. $.6, .66, .666, \ldots \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

4. $-1, +2, -3, +4, -5, \ldots (-1)^n n$

5. $\left\{\frac{(-1)^{2n}}{n}\right\}$

6. $\{1 - 2n\}$

7. $\left\{\frac{n^2}{n^2 + n}\right\}$

8. $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$

2.7 **"จุดเกาะกลุ่ม" (Cluster Points หรือ limit point)**

จากการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องลิมิตของลำดับนั้น พบว่า ถ้าลิมิตหาค่าได้ และเท่ากับ s แล้วนั้น หมายความว่า ลำดับ $\{S_n\}$ พจน์ที่ n ของลำดับจะเข้าใกล้จำนวน s เข้าไปเรื่อย ๆ ในขณะที่ n มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ ปรากฏการณ์เช่นนี้ก็จะไม่เกิดขึ้น

เช่น กำหนดพจน์ที่ n ของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = (-1)^n$$

จะพบว่า ลำดับ $\{S_n\}$ หาค่าลิมิตไม่ได้

แต่พจน์ต่าง ๆ ของลำดับ $\{S_n\}$ จะอยู่ใกล้ ๆ รอบ ๆ จุดสองจุด คือ $+1$, กับ -1

นั่นคือ สำหรับจำนวน $\varepsilon > 0$ จะมีพจน์ต่าง ๆ บางพจน์ของ $\{S_n\}$ เป็นจำนวนไม่จำกัด อยู่ในย่านจุด $+1$ รัศมี ε และพจน์อื่น ๆ นอกจากนี้จะอยู่ในย่านจุด -1 รัศมี ε

ณ. จุดทั้งสองนี้ เรียกว่า จุดเกาะกลุ่ม ของลำดับ $\{S_n\}$

นิยาม 2.7.1 จุด A เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้ามีลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่จุด A

หมายเหตุ ณ.ที่นี้ คำ Cluster point กับ limit point ถือว่าเป็นจุดเดียวกัน

นิยาม 2.7.2 จุด A เป็น limit point (cluster point) ของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้า กำหนดย่านจุด A, $N(A,\varepsilon)$ จะมีเซตไม่จำกัด (Infinite) ของจำนวนเต็มบวก B ซึ่ง

$$S_n \in N(A,\varepsilon) \text{ สำหรับทุก ๆ } n \in B$$

ตัวอย่าง 2.7.1 กำหนด ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = (-1)^n$$

จงหา **limit point** ของลำดับ $\{S_n\}$

วิธีทำ กำหนดให้ $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง $S_{2n} = (-1)^{2n}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1$ นั้นคือ $\{S_{2n}\}$ ย่างเข้าสู่ 1 เพราะฉะนั้น 1 เป็น limit point ของลำดับ $\{S_n\}$ หรือที่ 1 ถ้าสร้างย่านจุด 1, N(1,0.5) แล้วเราสามารถหาเซต B ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกคู่ $B = \{2n | n \in N\}$ ซึ่ง

$S_n \in N(1,0.5)$ สำหรับทุก ๆ $N \in B$

ดังรูป 2.7.1

และถ้าให้ $\{S_{2n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$

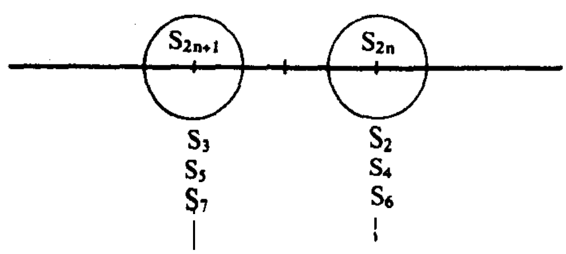
ซึ่ง $S_{2n+1} = (-1)^{2n+1}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} = -1$,

เพราะฉะนั้น -1 เป็น limit point ของลำดับ $\{S_n\}$ หรือที่ -1 ถ้าสร้างย่านจุด -1. N(-1,0.5) แล้วเราสามารถทำเซต B' ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกคี่, $B' = \{2n + 1 \mid n \in N\}$

ซึ่ง $S_n \in N(-1,0.5)$ สำหรับทุก ๆ $n \in B$

ดังรูป 2.7.1



รูป 2.7.1

ตัวอย่าง 2.7.2 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = n + 1 + (-1)^n \left(n + \frac{1}{n}\right)$$

จงหา limit point ของ $\{S_n\}$

วิธีทำ ให้ $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{2n} = 2n + 1 + (-1)^{2n} \left(2n + \frac{1}{2n}\right)$$

$= 2n + 1 + 2n + \frac{1}{2n}$

$= 4n + 1 + \frac{1}{2n}$

$\underset{n \to \infty}{\text{Pim}} \; S_{2n} = \underset{\text{n--Z-}}{\ell im} \left(4n + I + \frac{1}{2n}\right)$

$= \underset{\text{n - w}}{\ell im} \; 4n + 1 + \underset{n \to \infty}{\ell im} \; \frac{1}{2n}$

$= \underset{n \to \infty}{\text{Pim}} \; \text{in} + (1) + 0)$

$= I + \underset{n \to \infty}{\text{Pim}} \; 4n = \infty$

ให้ $\{S_{2n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$S_{2n+1} = (2n + 1) + 1 + (-1)^{2n+1}\left((2n + 1) + \frac{1}{2n+1}\right)$

$= 2n + 1 + 1 + (-1)\left(2n + 1 + \frac{1}{2n + 1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2n + 1}$

$\underset{n \to \infty}{\text{Pim}} \; S_{2n+1} = \underset{n \to \infty}{\ell im} \left(1 - \frac{1}{2n + 1}\right)$

$= \underset{n \to \infty}{\text{Pim}} \; 1 - \underset{n \to \infty}{\text{Pim}} \; \frac{1}{2n + 1}$

$= 1 - o$

$= 1$

เพราะฉะนั้น limit point ของลำดับ $\{S_n\}$ คือ 1 และ ∞ #

ตัวอย่าง 2.7.3 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$

$$S_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

จงหา limit point ของลำดับ $\{S_n\}$

วิธีทำ ให้ $\{S_{4n}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{4n} = \sin(2n\pi)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n} = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi)$$

$$= 0$$

($\because$ $\sin 2\pi = \sin 4\pi = \sin 6\pi = \ldots = 0$)

ให้ $\{S_{4n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{4n+1} = \sin \frac{(4n+1)\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{(4n+1)\pi}{2}$$

$$= 1$$

($\because$ $\sin \frac{5\pi}{2}$ $\sin \frac{9\pi}{2} = \sin \frac{13\pi}{2} = . = 1$)

ให้ $\{S_{4n+2}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{4n+2} = \sin \frac{(4n+2)\pi}{2}$$

$$= \sin (2n+1)\pi$$

$$= \sin (\pi + 2n\pi)$$

$$= -\sin (2n\pi) \quad \because \sin(\pi + A) = -\sin A$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n+2} = -\lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi)$$

$$= -0$$

$$= 0$$

($\because$ $\sin 2\pi = \sin 4\pi = \sin 6\pi = \ldots = 0$)

ให้ $\{S_{4n+3}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{4n+3} = \sin \frac{(4n+3)\pi}{2}$$

$$= \sin (2n + \frac{3}{2})\pi$$

$$= \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)$$

$$= \quad -\cos(2n\pi) \because \sin\left(\frac{3\pi}{2} + A\right) = -\cos A$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n+3} = -\lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi)$$

$$= \quad -(1)$$

$$= \quad -1$$

$(\because \cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi = \ldots = 1)$

เพราะฉะนั้น limit point **ของลำดับ** $\{S_n\}$ **คือ** 1, 0, -1 #

แบบฝึกหัด 2.7

จงหา limit point ของลำดับ $\{S_n\}$ ต่อไปนี้ ถ้า

1. $S_n = (-1)^n n$
2. $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{n\pi}{2}$
3. $S_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin \frac{n\pi}{2}$
4. $S_n = \frac{1}{n}$
5. $S_n = [(-1)^n + 1]\, n^2$
6. $S_n = \frac{(-1)^n n}{1 + n}$
7. $S_n = \tan \frac{n\pi}{2}$

2.8 ลิมิตซุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์

(Limit Superior and Limit Inferior)

จากการศึกษาเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ พบว่า ทุก ๆ ลำดับไม่จำเป็นว่าจะต้องหาค่าของลิมิตได้เสมอแต่สำหรับลำดับที่หาค่าลิมิตไม่ได้นั้น บางทีอาจมี **"จุดเกาะกลุ่ม"** ได้หลายจุด

ให้ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก นั้นคือ ลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ จะมีจุดเกาะกลุ่มหลายจุด และให้ C เป็นเซตของจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$

จะพิจารณาเซต C ว่ามีขอบเขต (bounded) หรือไม่ โดยที่จริงแล้ว เซต C ไม่จำเป็นจะต้องมีขอบเขต แต่เซต C อาจจะมีขอบเขตข้างบน หรือขอบเขตข้างล่างอย่างใดอย่างหนึ่ง

สมมุติให้ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตข้างบน และมีจุดเกาะกลุ่ม ถ้าเซต C เป็นเซตของจุดเกาะกลุ่ม แล้วเซต C ก็จะมีขอบเขตข้างบนด้วย แล้วจะต้องมีขอบเขตข้างบนต่ำสุด ซึ่งกำหนดโดย $\bar{\ell}$ และจำนวน $\bar{\ell}$ เรียกว่า *"ลิมิตซุพีเรียร์"* ของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$\bar{\ell} = \lim_{n\to\infty} \sup S_n \quad \text{หรือ}$$

$$\bar{\ell} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ S_n$$

สัญลักษณ์ $n\to\infty$ อาจตัดทิ้งได้ ดังนั้นจึงได้

$$\bar{\ell} = \lim \sup S_n \quad \text{หรือ}$$

$$\bar{\ell} = \overline{\lim}\ S_n$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\{S_n\}$ มีขอบเขตข้างล่าง และมีจุดเกาะกลุ่ม แล้วเซตของจุดเกาะกลุ่ม C ก็จะมีขอบเขตข้างล่าง แล้วจะต้องมีขอบเขตข้างล่างสูงสุด กำหนดโดย $\underline{\ell}$ และจำนวน $\underline{\ell}$ เรียกว่า **"ลิมิตอินฟีเรียร์"** ของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$\underline{\ell} = \lim \inf S_n \quad \text{หรือ}$$

$$\underline{\ell} = \underline{\lim}\ S_n$$

เกี่ยวกับเซตต่าง ๆ ที่มีขอบเขตข้างบนบางเซตอาจมีค่าสูงสุด บางเซตอาจไม่มีค่าสูงสุดก็ได้

ในกรณีเช่นนี้ ค่า $\bar{\ell}$ ก็อาจจะเป็นสมาชิกของเซต C หรือ อาจจะไม่เป็นสมาชิกของเซต C นั่นคือ $\bar{\ell}$ อาจจะไม่เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$

ในทำนองเดียวกัน $\underline{\ell}$ ก็อาจจะเป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$ หรือไม่เป็นก็ได้

แต่ $\bar{\ell}$ และ $\underline{\ell}$ เป็นจุดเกาะกลุ่มก็ต่อเมื่อค่าทั้งสองหาค่าได้ หรือในกรณีพิเศษ ดังนี้

ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขต นั่นคือ พจน์ที่ n ของลำดับมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ หรือมีค่าลดลงเรื่อย

จะหาลิมิตซุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ ได้ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 2.8.1 1) ถ้า $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขตข้างบน, แล้วลิมิตซุพีเรียร์ $\bar{\ell} = +\infty$

2) ถ้า $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขตข้างล่าง, แล้วลิมิตอินฟีเรียร์ $\underline{\ell} = -\infty$

3) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ แล้ว $\bar{\ell} = \underline{\ell} = -\infty$

4) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ แล้ว $\bar{\ell} = \underline{\ell} = +\infty$

โดยปกติเมื่อกล่าวว่า ลิมิตซุพีเรียร์ หรือลิมิตอินฟีเรียร์หาค่าได้ นั้นหมายความตามนิยามที่กล่าวไว้แล้ว หรือบางทีอาจกล่าวว่า ลิมิตซุพีเรียร์ หาค่าได้ และเป็นจำนวนจำกัด (finite)

เมื่อมีคุณสมบัติเหมือนกับข้อหนึ่งข้อใดในสี่ข้อนั้น ในนิยาม 2.8.1 เป็นกรณีพิเศษที่ลำดับไม่มีขอบเขต

ทฤษฎีบท 2.8.1 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $\bar{\ell}$ เป็นจำนวนจำกัด (finite) แล้วสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวน N_1 ซึ่ง

$$S_n < \bar{\ell} + \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N_1$$

และถ้า $\underline{\ell}$ เป็นจำนวนจำกัดแล้ว จะมีจำนวน N_2 ซึ่ง

$$S_n > \underline{\ell} - \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N_2$$

พิสูจน์ ในกรณีที่ $\bar{\ell}$ เป็นจำนวนจำกัด (finite) แล้ว

สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวน N_1 ซึ่ง

$$S_n < \bar{\ell} + \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N_1$$

สมมุติให้ข้อความข้างบนไม่เป็นจริงนั้นคือ

สมมุติให้มี $\varepsilon_0 > 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ที่มีค่ามาก ๆ ซึ่งสำหรับ $n > N$ ซึ่ง

$$S_n \geqslant \bar{\ell} + \varepsilon_0$$

ดังนั้น จะมีลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ที่ย่างเข้าสู่จุดต่าง ๆ ซึ่งมีค่ามากกว่า $\bar{\ell} + \varepsilon_0$ แต่ลำดับย่อยนี้มีขอบเขตข้างบน ดังนั้นจะต้องมีจุดเกาะกลุ่ม β ซึ่ง

$$\beta \geqslant \bar{\ell} + \varepsilon_0$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานที่ว่า $\bar{\ell}$ เป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของเซตของจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะฉะนั้นที่สมมุติให้ก็ไม่เป็นจริง

นั้นคือ ข้อความข้างบนนี้ก็เป็นจริง

ให้นักศึกษาดูรูป 2.8.1 ประกอบ

รูป 2.8.1

สำหรับกรณีที่สองให้นักศึกษาลองพิสูจน์ดู

ทฤษฎีบท 2.8.2 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้แล้ว มันจะต้อง necessary และ sufficient il

$$\text{Pim} \sup S_n = \ell\text{im} \inf S_n$$

พิสูจน์ Necessity ∵ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$ แล้วเซตของจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$ จะมีสมาชิกตัวเดียว คือ A เพราะว่าทุก ๆ ลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ จะย่างเข้าสู่ A ด้วย

เพราะฉะนั้น Pim sup s,, = Pim inf S_n = A

Sufficiency : สมมุติให้ $\bar{\ell} = \ell$

แล้วจากทฤษฎีบท 2.8.1 สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก

(N = moss $\{N_1, N_2\}$) ซึ่ง

$$\ell - \varepsilon < S_n < \bar{\ell} + \varepsilon$$

เนื่องด้วย $\bar{\ell}$ = e จึงได้ว่า

$$\ell - \varepsilon < S_n < \ell + \varepsilon \text{ หรือ}$$

$$-\varepsilon < S_n - \ell < 6 \text{ หรือ}$$

$$|S_n - \ell| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N$$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้ #

นิยาม 2.8.2 ลิมิตซุพีเรียร์ คือ limit point ตัวที่ใหญ่ที่สุดของลำดับ $\{S_n\}$ และลิมิตอินฟีเรียร์ คือ limit point ตัวที่เล็กที่สุดของลำดับ $\{S_n\}$

ตัวอย่าง 2.8.1 จงหาลิมิตซุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\left\{\frac{(-1)^n}{2n-1}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = 0$

จากทฤษฎีบท 2.8.2 จะได้ว่า

ลิมิตซุพีเรียร์ = ลิมิตอินฟีเรียร์ = 0 #

ตัวอย่าง 2.8.2 จงหาลิมิตสุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = 2^n$$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

จากนิยาม 2.8.1

ลิมิตสุพีเรียร์ = ลิมิตอินฟีเรียร์ = ∞ #

ตัวอย่าง 2.8.3 จงหาลิมิตสุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ ของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = n^{1+(-1)^n}$$

วิธีทำ เลือก $\{S_{2n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{2n+1} = (2n+1)^{1+(-1)^{2n+1}}$$

$$= (2n+1)^{1+(-1)} \quad \because 2n+1 \text{ เป็นคี่}$$

$$= (2n+1)^0$$

$$= 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 1$$

$$= 1$$

ซึ่ง 1 เป็น limit point ของ $\{S_n\}$

เลือก $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{2n} = (2n)^{1+(-1)^{2n}}$$

$$= (2n)^{1+1} \quad \because 2n \text{ เป็นคู่}$$

$$= (2n)^2$$

$$= 4n^2$$

$$\because \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} 4n^2$$

$$= \infty$$

ซึ่ง ∞ เป็น limit point ของ $\{S_n\}$

จากนิยาม 2.8.2

ลิมิตซุพีเรียร์ $= \infty$

ลิมิตอินฟีเรียร์ $= 1$ #

ตัวอย่าง 2.8.4 จงหาลิมิตซุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{(-1)^n(2n-1)\}$

วิธีทำ เลือก $\{(-1)^{2n}(4n^2-1)\}$ เมื่อ n เป็นคู่ เป็นลำดับย่อยของ $\{(-1)^n(2n-1)\}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n}(4n^2-1) = \lim_{n\to\infty} 4n^2 - 1 = \infty$

$$= \infty$$

เพราะฉะนั้น ∞ เป็น limit point ของ $\left\{(-1)^n (2n-1)\right\}$

เลือก $\left\{(-1)^{2n+1} (2(2n+1)-1)\right\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\left\{(-1)^n (2n-1)\right\}$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} (4n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} -(4n+1)$

$$= -\infty$$

เพราะฉะนั้น $-\infty$ เป็น limit point ของ $\left\{(-1)^n (2n-1)\right\}$

จากนิยาม 2.0.2

ลิมิตสุพีเรียร์ $= \infty$

ลิมิตอินฟีเรียร์ $= -\infty$ #

แบบฝึกหัด 2.8

จงหาลิมิตสุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{S_n\}$ ต่อไปนี้ซึ่ง

1. $S_n = \dfrac{(-1)^n n}{1 + n}$

2. $S_n = \sin\left(\dfrac{n^{(-1)^{n+1}}\pi}{4}\right)$

3. $S_n = (-1)^n \left(\sin \dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$

4. $S_n = 2 - \dfrac{(n - 1)}{10}$

5. $S_n = (-1)^{n-1}$

6. $S_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + 1}$

7. $S_n = (-1)^n n$

8. $S_n = (-1)^{n+1} \dfrac{(n + 1)}{(n + 2)}$

9. $S_n = [(-1)^n + 1]n^2$

10. $S_n = \dfrac{2^n}{2}$

2.9 ลำดับในปริภูมิ n มิติ (Sequence in n Space)

ต่อไปจะศึกษาลำดับในปริภูมิ n มิติ

ให้ $\{p_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิ 2 มิติ ซึ่งพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$p_n = (X_n , Y_n)$$

หรือ $\{p_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$p_n = (X_n , Y_n , Z_n)$$

ซึ่ง X_n , Y_n และ Z_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับในปริภูมิ 1 มิติ ที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น

นิยาม 2.9.1 ลำดับ $\{p_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิ n มิติลู่เข้าสู่จุด p_0 ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|p_n - p_0| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

จากนิยาม 2.9.1 ค่า $|p_n - p_0| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$ หมายถึง สำหรับ $n \geqslant N$ ทุก ๆ ตัวแล้ว p_n จะเป็นสมาชิกของย่านจุด p_0 รัศมี ε $(p_n \in N(p_0 , \varepsilon))$

โดยปกติจุด p_0 เรียกว่า ลิมิตของ ลำดับ $\{p_n\}$

และเขียนว่า $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ หรือ

$$p_n \to p_0 \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

อ่านว่า p_n ย่างเข้าใกล้ p_0 เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น

ถ้า $p_n = (X_n , Y_n)$ และ $p_0 = (X_0 , Y_0)$

$$|p_n - p_0| = |(X_n , Y_n) - (X_0 , Y_0)|$$

$$= |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0)|$$

uvi $|X_n - X_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0)| = |p_n - p_0|$

หรือ $|Y_n - Y_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0)| = |p_n - p_0|$

เพราะว่า $(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2 = (X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2$

$$\leqslant (X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2 + 2(X_n - X_0)(Y_n - Y_0)$$

$$\sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2} = \sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2 + 2(X_n - X_0)(Y_n - Y_0)}$$

$$= \sqrt{\left((X_n - X_0) + (Y_n - Y_0)\right)^2}$$

$$= (X_n - X_0) + (Y_n - Y_0)$$

$$\leq |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0|$$

เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2} \leq |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0|$$

$$|p_n - p_0| \leq |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0|$$

หมายเหตุ ถ้า $p_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ และ $p_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$

1. $|X_n - X_0| \leqslant |p_n - p_0|$
2. $|Y_n - Y_0| \leqslant |p_n - p_0|$
3. $|Z_n - Z_0| \leqslant |p_n - p_0|$
4. $|p_n - p_0| \leqslant |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0| + |Z_n - Z_0|$

ต่อไปจะศึกษาลำดับในปริภูมิ n มิติ โดยให้ $\{p_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิ n มิติ จะศึกษาดูว่าถ้า n มีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ $(n \to \infty)$ แล้วพจน์ p_n จะลู่เข้าใกล้จุดใด การหาจุดที่ p_n จะเข้าใกล้จุดใดนั้นจะอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.9.1 ลำดับในปริภูมิ n มิติลู่เข้า (Converge) ก็ต่อเมื่อลำดับของจำนวนจริง ซึ่งเป็นโคออร์ดิเนตของมันลู่เข้า (Converge)

พิสูจน์ ในปริภูมิ 3 มิติ

ให้ $p_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ ลู่เข้าสู่ $p_0 (X_0, Y_0, Z_0)$

ก็ต่อเมื่อ $X_n \to X_0$, $Y_n \to Y_0$, $Z_n \to Z_0$ เมื่อ $n \to \infty$

$(\Rightarrow)$ ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_0$,

$\text{Pim}\limits_{n\to\infty} Y_n = Y_0$, $\text{Pim}\limits_{n\to\infty} Z_n = Z_0$

จาก $\text{Pim}\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ จะได้ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N-

ซึ่ง $|p_n - p_0| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geq N$

เพราะว่า $|p_n - p_0| = |(X_n, Y_n, Z_n) - (X_0, Y_0, Z_0)|$

$= |(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)|$

และ $|X_n - X_0| \leq |(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)|$ ....(1)

$|Y_n - Y_0| \leq |(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)|$ ....(2)

$|Z_n - Z_0| \leq |(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)|$ ....(3)

จากสมการ (1)

$|X_n - X_0| \leq |(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geq N$

ดังนั้น $|X_n - X_0| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X_0$ #

จากสมการ (2)

$|Y_n - Y_0| \leq |(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geq N$

ดังนั้น $|Y_n - Y_0| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} Y_n = Y_0$ #

จากสมการ (3)

$|Z_n - Z_0| \leq |(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geq N$

ดังนั้น $|Z_n - Z_0| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n = Z_0$ #

(+) ให้ $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} Y_n = Y_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n = Z_0$

แล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p_0$

จาก $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X_0$ จะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$|X_n - X_0| < \frac{\varepsilon}{3}$ สำหรับ $n \geq N_1$ ....(4)

จาก $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y_0$ จะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$|Y_n - Y_0| < \frac{\varepsilon}{3}$ สำหรับ $n \geqslant N_2$ ....(5)

จาก $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_0$ จะได้ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_3 ซึ่ง

$|Z_n - Z_0| < \frac{\varepsilon}{3}$ สำหรับ $n \geqslant N_3$ ....(6)

สำหรับ N มากกว่า $\{N_1, N_2, N_3\}$

เพราะว่า $|(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)| \leqslant |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0| + |Z_n - Z_0|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ จากสมการ (4), (5), (6)

เพราะฉะนั้น $|(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

หรือ $|p_n - p_0| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} p_n = PO$ #

ตัวอย่าง 2.9.1 จงหา $\lim_{n\to\infty} \left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบท 2.9.1

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^2, \frac{1}{n}\right) = (1,0)$$ #

ตัวอย่าง 2.9.2 จงหา $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) = (0, 1)$ #

ตัวอย่าง 2.9.3 จงหา $\lim_{n\text{-}r\text{-}} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{(-1)^{n}}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$\text{Pim}_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} = 0$$

และ $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

เพราะฉะนั้น $\text{Pim}_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{(-1)^{n}}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = (1, 0, 1)$ #

ตัวอย่าง 2.9.4 จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) = (0, 1)$

วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0,1)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

นั่นคือ เราจะต้องหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งจะทำให้

$$\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0, 1)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N \quad \text{..........(1)}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0, 1)\right| &= \left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1} - 1\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n-n-1}{n+1}\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n+1}\right)\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \quad \text{จากนิยามนอร์ม}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} < \varepsilon \text{ จากสมการ (1)}$$

จาก $\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(m+1)^2}} < \varepsilon$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon^2$$

สำหรับ n ที่มีค่ามากกว่าบางจำนวน N $(n \geqslant N)$

แล้ว N จะมีขนาดเท่าไร

เนื่องด้วย

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}$$

ซึ่งถ้าเลือก N ที่ทำให้ $\frac{2}{N^2} < \varepsilon^2$ แล้ว $\frac{2}{\varepsilon^2} < N^2$

ก็จะทำให้ ได้ว่า $N \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ เป็นขนาดที่ต้องการ

นั่นคือ สำหรับ $n \geqslant N \left(N \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right)$ จะได้ว่า

$$\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0, 1)\right| < \varepsilon$$

นั่นแสดงว่า $\ell im \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) = (0, 1)$ #

ตัวอย่าง 2.9.5 จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) = (1, 0)$$

วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|\left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

นั่นคือ เราจะต้องหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งจะทำให้

$$\left|\left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา $\left|\left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0)\right|$

$= \left|\left((-1)^{2n} - 1, \frac{1}{n}\right)\right|$

$= \left|\left(0, \frac{1}{n}\right)\right|$

$= \sqrt{\frac{1}{n^2}}$ จากนิยามนอร์ม

$= \frac{1}{n}$

$< \varepsilon$ จากสมการ (1)

จาก $\frac{1}{n} < \varepsilon$ สำหรับ n ที่มีค่าบวกกว่าบางจำนวน N แล้ว N จะมีขนาดเท่าไร
จาก $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ซึ่งถ้าเลือก N ที่ทำให้ $\frac{1}{N} < \varepsilon$
แล้ว $\frac{1}{\varepsilon} < N$ เป็นขนาดที่ต้องการ
นั่นคือ สำหรับ $n \geqslant N \left(N > \frac{1}{\varepsilon}\right)$ จะได้ว่า

$$\left|\left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0)\right| < \varepsilon$$

นั่นแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) = (1, 0)$ #

ทฤษฎีบท 2.9.2 ถ้าลำดับ $\{p_n\}$ ลู่เข้า (converge) จุด p และ p′ แล้ว $p = p'$

พิสูจน์ ให้ $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก-

N_1 ซึ่ง

$$|p_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับ } n \geqslant N_1 \quad \text{..........(1)}$$

และ $\lim_{n\to\infty} p_n = p'$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|p_n - p'| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับ } n \geqslant N_2 \quad \text{..........(2)}$$

พิจารณา

$$|p - p'| = |p - p_n + p_n - p'|$$
$$= |(p - p_n) + (p_n - p')|$$
$$= |(-1)(p_n - p) + (p_n - p')|$$

$$\leqslant \ |(-1)(p_n - p)| + |p_n - p'|$$
$$= \ |-1|\,|p_n - p| + |p_n - p'|$$
$$= \ |p_n - p| + |p_n - p'|$$
$$< \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ จากสมการ (1) และ (2)

เพราะฉะนั้น $|p - p'| < \varepsilon$

หรือ $-\varepsilon < p - p' < \varepsilon$

แสดงว่า $p - p'$ มีค่าน้อยกว่าจำนวนจริงบวก $(\varepsilon > 0)$

และ $p - p'$ มีค่ามากกว่าจำนวนจริงลบ $(-\varepsilon < 0)$

ดังนั้น สรุปว่า $p - p' = 0$

หรือ $p = p'$ #

จากทฤษฎีบท 2.9.2 นี้ สรุปว่า ลำดับใด ๆ ที่ลู่เข้า จะลู่เข้าสู่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

หรืออาจสรุปได้ว่า ถ้าลำดับลู่เข้าสู่จุดมากกว่าหนึ่งจุดแล้ว ลำดับจะไม่ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 2.9.6 จงพิจารณา ลำดับ $\{p_n\}$ ซึ่ง

$$p_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$$

ลู่เข้า (converge) หรือลู่ออก (diverge)

44
วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right) = (1, 0)$ ถ้า n เป็นคู่

และ Pim n - m $\left((-1)^n, \frac{1}{n}\right) = (-1, 0)$ ถ้า n เป็นคี่

จึงได้ว่า ลำดับ $\{p_n\}$ ลู่เข้าจุด $(1, 0)$ และ $(-1, 0)$

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{p_n\}$ ลู่ออก #

ตัวอย่าง 2.9.7 จงพิจารณา ลำดับ $\{p_n\}$ ซึ่ง

$$p_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n}, \frac{n}{n + 1}\right)$$

ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty$ (หาค่าไม่ได้)

และ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

จากทฤษฎีบท 2.9.1 จะได้ว่า

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n}, \frac{n}{n+1} \right)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{p_n\}$ ลู่ออก #

แบบฝึกหัด 2.9

จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้ แล้วพิจารณาว่าลำดับลู่เข้า หรือ ลู่ออก

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{n^2}{n^3+1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{n}, \dfrac{n^2+n}{n^3}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n, \dfrac{n^2+2n+1}{n+1}\right)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+1}{n+1}, \dfrac{(-1)^{2n}}{2}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2}{2n^2+n+1}, \dfrac{(n-1)^3}{n^4}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n+1)^2}{n^3+1}, \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}\right)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^4+n^3}{(n+1)^5}, \dfrac{(-1)^n}{(-3)^{n+1}}\right)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n+1)'}{5n^3}, \dfrac{2n^2}{(n+1)'}\right)$