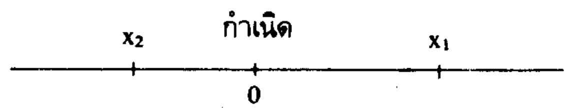
บทที่ 1
เซตและฟังก์ชัน

1.1 R และ R^n

กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง ทางเรขาคณิตจะกำหนดเซตนี้โดยเส้นตรงธรรมดาเส้นหนึ่ง โดยกำหนดจำนวนศูนย์ (0) เป็นจุดกำเนิด (origin) สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

ถ้า $x_1 > 0$ แล้วจำนวนจริง x_1 จะอยู่ทางขวาของศูนย์ (0) และอยู่ห่างจากศูนย์ (0) เป็นระยะทาง x_1 หน่วย ดังรูป 1.1.1

ถ้า $x_2 < 0$ แล้วจำนวนจริง x_2 จะอยู่ทางซ้ายของศูนย์ (0) และอยู่ห่างจากศูนย์ (0) เป็นระยะทาง x_2 หน่วย ดังรูป 1.1.1



รูป 1.1.1

บางทีเซต R นี้ เรียกว่า "ปริภูมิหนึ่งมิติ" (1-Space)

เซตของ R^2 คือเซตของจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนระนาบ (plane) และจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนระนาบนี้เขียนได้เป็นเลขคู่อันดับ (ordered pair) (x,y) และจุด (o,o) เป็นจุดกำเนิด เซตนี้บางทีเรียกว่า "ปริภูมิสองมิติ" (2-Space)

เซตของ R^3 คือเซตของจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนปริภูมิ (Space) จุดต่าง ๆ ที่อยู่บนปริภูมิ (Space) เขียนเป็นสิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ (ordered triple) (x,y,z) และจุด (o,o,o) เป็นจุดกำเนิด เซตนี้บางทีเรียกว่า "ปริภูมิสามมิติ" (3-Space)

โดยทั่ว ๆ ไป R^n คือเซตของจุดต่าง ๆ ที่อยู่ใน "ปริภูมิ n มิติ" และจุดต่าง ๆ ที่อยู่ในเซตนี้กำหนดโดย $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ และจุด (0, 0, 0, …) เป็นจุดกำเนิด

1.2 เซต (SET)

ถ้า S เป็นเซตของจุด, สัญลักษณ์ $p \in S$ หมายความว่า p เป็นสมาชิกของเซต S

นิยาม 1.2.1 เซตย่อย (Sub set)

เซต A เป็นเซตย่อย (Sub set) ของเซต B

ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิกทุกตัวที่เป็นของเซต A จะต้องเป็นของเซต B ใช้สัญลักษณ์ $A \subseteq B$

นิยาม 1.2.2 เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ เซต A เป็นเซตย่อยของเซต B และเซต B เป็นเซตย่อยของ เซต A

ให้สัญลักษณ์ $A = B$

นิยาม 1.2.3 ยูเนียน (Union)

$A \cup B$ อ่านว่า เซต A ยูเนียนกับเซต B คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของเซต A หรือ เซต B หรือ $A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$

หมายเหตุ 1. $A \subseteq (A \cup B)$

2. $B \subseteq (A \cup B)$

นิยาม 1.2.4 อินเตอร์เซคชัน (Intersection)

$A \cap B$ อ่านว่า เซต A อินเตอร์เซคชันเซต B คือเซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของเซต A และเซต B หรือ

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$

นิยาม 1.2.5 เซตว่าง (Empty set)

เซตว่างคือ เซตที่ไม่มีสมาชิก ใช้สัญลักษณ์ ϕ หรือ $\{\ \}$

หมายเหตุ

$A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตที่แยกกันโดยเด็ดขาด (Disjoint Set)

นิยาม 1.2.6 ส่วนเติมเต็ม (Complement) ของเซต A คือเซตที่มีสมาชิกไม่เป็นสมาชิกของเซต A ใช้สัญลักษณ์ A^c หรือ $A^c = \{x \mid x \notin A\}$

นิยาม 1.2.7 (De Morgan's law)

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1.3 จำนวนจริง (Real numbers)

นักศึกษาทราบระบบจำนวนจริงมาแล้วเป็นอย่างดี แต่ยังอาจจะไม่ได้ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของระบบจำนวนจริงทั้งหลาย ณ ที่นี้จะศึกษาคุณสมบัติของระบบจำนวนจริงเพียงสองสามอย่าง เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการเรียนวิชานี้ต่อไป

คุณสมบัติของฟิลด์ (Field properties)

ระบบจำนวนจริง เป็นเซตที่ไม่ว่างเปล่า (non empty set) {a,b,c,---} ภายใต้การกระทำ (operation) **ของการบวก** (addition) **และการคูณ** (multiplication) **ซึ่งถูกกำหนดว่า ทุก ๆ คู่ของจำนวนจริงที่บวกกันจะได้ผลบวกเพียงค่าเดียวเท่านั้น และทุก ๆ คู่ของจำนวนจริงที่คูณกันจะได้ผลคูณเพียงค่าเดียวเท่านั้น**

จำนวนจริงทั้งหลายภายใต้การบวกและการคูณ ซึ่งมีคุณสมบัติ

A. $a+b = b+a$ **และ** $ab = ba$

เรียกว่า กฎการสลับที่ (Commutative)

B. $(a+b)+c = a+(b+c)$ **และ** $(ab)c = a(bc)$

เรียกว่า กฎการจัดหมู่ (associative laws)

C. $a(b+c) = ab+ac$

เรียกว่า กฎการกระจาย (Distributive laws)

D. **จะมีจำนวน** 0 **และ** 1 **ซึ่ง**

$a+0 = a$ **และ** $a(1) = a$ **สำหรับทุก ๆ** a

E. **แต่ละจำนวนจริง** a **จะมีจำนวนจริง,** -a, **ซึ่ง**

$a+(-a) = 0$ **และ**

ถ้า $a \neq 0$, **จะมีจำนวนจริง,** $\frac{1}{a}$, **ซึ่ง** $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$

เซ็ตใด ๆ ก็ตามที่มีคุณสมบัติตั้งแต่ A ถึง E เรียก "ฟีลด์" (Field)

ดังนั้นเซตของจำนวนจริงเป็น "ฟิลด์" (Field) **เพราะมีคุณสมบัติครบตั้งแต่ A ถึง E**

หลักการคูณ $0.0 = 0.1 = 1.0 = 0$ **และ** $1.1 = 1$

ออร์เดอร์รีเลชัน (Order relation)

จำนวนจริงเป็นลำดับโดยความสัมพันธ์ (Relations) ' < " อ่านว่าน้อยกว่า **ดังต่อไปนี้**

F สำหรับจำนวนจริงสองจำนวน a, และ b **จะเป็นจริงเพียงอย่างเดียวเท่านั้นจากที่กำหนดให้**

$a = b$ อ่านว่า a เท่ากับ b

$a < b$ อ่านว่า a น้อยกว่า b

หรือ $b < a$ อ่านว่า b น้อยกว่า a

G. **ถ้า** $a<b$ **และ** $b<c$ **แล้ว** $a<c$

(ความสัมพันธ์ ' < " เป็น transitive)

H. ถ้า $a<b$ แล้ว $a+c < b+c$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง c และ ถ้า $o<c$ แล้ว $ac<bc$

เซ็ตใดก็ตามที่มีคุณสมบัติเป็น "ฟีลด์" (Field) และมีคุณสมบัติตั้งแต่ F ถึง H เรียกว่า Ordered field ดังนั้น เซ็ตของจำนวนจริงเป็น Order field

ตัวอย่าง 1.3.1

จงแสดงว่า $a.0 = 0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ

$b+o = b$		คุณสมบัติข้อ D
$a.(b+o) = a.b$		เอา a คูณทั้งสองข้าง
$a.b+a.o = a.b$		คุณสมบัติข้อ c
$a.b+a.o = a.b+o$		คุณสมบัติข้อ D

เพราะว่าทางซ้ายมือ และทางขวามือมีค่าเท่ากัน และจำนวนสองจำนวนบวกกันได้ผลบวกเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

เพราะฉะนั้น $a.0 = o$ #

ตัวอย่าง 1.3.2

จงแสดงว่า $(-1).a = -a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ

$1+(-1) = 0$	คุณสมบัติข้อ E
$a.(1+(-1)) = a.0$	เอา a คูณทั้งสองข้าง
$a.1+a.(-1) = a.0$	คุณสมบัติข้อ c
$a+a.(-1) = o$	คุณสมบัติข้อ D และผลจากตัวอย่าง 1.3.1
เพราะว่า $a+(-a) = 0$	จากคุณสมบัติข้อ E
เพราะฉะนั้น $a.(-1) = -a$	
$(-1).a = -a$	คุณสมบัติข้อ A #

ตัวอย่าง 1.3.3 จงแสดงว่า

ถ้า $a>o$ แล้ว $-a<0$

วิธีทำ $\because a>o$

$a>o = a+(-a)$ คุณสมบัติข้อ E

$a>a+(-a)$

$(-a)+a$	$> (-a) + (a+(-a))$	**คุณสมบัติข้อ** H
0	$> ((-a)+a)+(-a)$	**คุณสมบัติข้อ** E, B
0	$> (a+(-a)) + (-a)$	**คุณสมบัติข้อ** A
0	$> 0 + (-a)$	**คุณสมบัติข้อ** E
0	$> -a$	**คุณสมบัติข้อ** D

นั่นคือ $-a<0$ #

ตัวอย่าง 1.3.4 **จงแสดงว่า** $1>0$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 1.3.3

เพราะว่า $1 \neq 0$

ดังนั้น $1^2>0$

$1 \cdot 1>0$

$1>0$ จากคุณสมบัติข้อ D #

แบบฝึกหัด 1.3

สำหรับจำนวนจริง a,b ใด ๆ จงแสดงว่า

1. $b+(-a) = b-a$
2. $b(-a) = -(a.b)$
3. $-(-a) = a$
4. $(-a)(-b) = a.b$
5. ถ้า $a>0$ แล้ว $-a<0$
6. ถ้า $a>0$ และ $b>0$ แล้ว $ab>0$
7. ถ้า $a>0$ และ $b<0$ แล้ว $a.b<0$
8. ถ้า $a<0$ และ $b<0$ แล้ว $a.b>0$

1.4 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value)

นิยาม 1.4.1 ถ้า a เป็นจำนวนจริงแล้ว ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ a ใช้สัญลักษณ์ $|a|$ กำหนดโดย

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a \geq 0 \\ -a & \text{ถ้า } a<0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 1.4.1 จงหาค่า $|5|$ และ $|-2|$

วิธีทำ

$|5| = 5$ เพราะว่า $5 > 0$

$|-2| = -(-2)$ เพราะว่า $-2 < 0$

$= 2$ #

หมายเหตุ 1. สามารถเขียนค่าสัมบูรณ์ของ a ในรูปรากที่สองของ a^2 นั่นคือ $|a| = \sqrt{a^2}$

2. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ แล้ว $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

ทฤษฎีบท 1.4.1 สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ

$$|a| = |-a|$$

พิสูจน์

$|a| = \sqrt{a^2}$ จากหมายเหตุ

$= \sqrt{a.a}$

$= \sqrt{(-a)(-a)}$

$= \sqrt{(-a)^2}$

$= |-a|$ #

ทฤษฎีบท 1.4.2 สำหรับจำนวนจริง $a \neq 0$ ใด

$$\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$$

พิสูจน์

$\left|\frac{1}{a}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$ จากหมายเหตุ

$= \sqrt{\frac{1}{a^2}}$

$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2}}$

$= \frac{1}{|a|}$ #

ทฤษฎีบท 1.4.3 สำหรับจำนวนจริง a,b ใด ๆ

$$|ab| = |a||b|$$

พิสูจน์

กรณีที่ 1 ถ้า $a \geqslant 0$ และ $b \geqslant 0$ แล้ว $a.b \geqslant 0$ และ

$|a.b| = ab$ จากนิยาม 1.4.1

$= |a||b|$ จากนิยาม 1.4.1 #

กรณีที่ 2 ถ้า $a \geq o$ และ $b \leq o$ แล้ว $ab \leq o$ และ

$|ab| = -ab$ จากนิยาม 1.4.1

$= a(-b)$ คุณสมบัติข้อ A

$= |a||b|$ จากนิยาม 1.4.1 #

กรณีที่ 3 ถ้า $a \leq o$ และ b&o แล้ว $ab \geq o$ และ

$|ab| = ab$ จากนิยาม 1.4.1

$= (-a)(-b)$

$= |a||b|$ จากนิยาม 1.4.1 #

กรณีที่ 4 ถ้า $a \leq o$ และ $b \geq o$ แล้ว $a.b \leq o$ และ

$|ab| = -ab$ จากนิยาม 1.4.1

$= (-a)b$

$= |a||b|$ จากนิยาม 1.4.1 #

ทฤษฎีบท 1.4.4 สำหรับจำนวนจริง a และ b#o ใด

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

พิสูจน์ $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a.\frac{1}{b}\right|$

$= |a|\left|\frac{1}{b}\right|$ จากทฤษฎี 1.4.3

$= |a| \frac{1}{|b|}$ จากทฤษฎี 1.4.2

$= \frac{|a|}{|b|}$ #

ทฤษฎีบท 1.4.5 ถ้า $c>o$ จะได้

1. $|a|<c$ ก็ต่อเมื่อ $-c<a<c$
2. $|a|\leq c$ ก็ต่อเมื่อ $-c\leq a\leq c$
3. $|a|>c$ ก็ต่อเมื่อ $a>c$ หรือ $a< -c$
4. $|a|\geq c$ ก็ต่อเมื่อ $a\geq c$ หรือ $a \leq -c$

พิสูจน์

1. จาก $|a|<c$

$a<c$ ถ้า $a\geq o$ (1)

จาก $|a|<c$

$-a<c$ ถ้า $a<o$

$a> -c$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$-c<a<c$ #

และ จาก $-c<a<c$ จะได้ว่า

$a<c$

$|a|<c$ ถ้า $a\geq o$ (3)

หรือ $-c<a$

$c> -a$

$c>|a|$ ถ้า $a<o$ (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า

$|a|<c$

เพราะฉะนั้น $|a|<c$ ก็ต่อเมื่อ $-c<a<c$

3 . จาก $|a|>c$

$a>c$ ถ้า $a\geq o$ (1)

จาก $|a|>c$ ถ้า $a<o$

$-a>c$ ถ้า $a<o$

$ac \ -c$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$a>c$ หรือ $a < -c$ #

และ $a>c$ หรือ $a < -c$

จาก $a>c$

$|a|>c$ ถ้า $a\geq o$ (3)

จาก $a < -c$

$-a > c$

$|a| > c$ ถ้า $a < o$

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า

$|a| > c$

เพราะฉะนั้น $|a| > c$ ก็ต่อเมื่อ $a > c$ หรือ $a < -c$ #

หมายเหตุ ข้อ 2 จะทำคล้ายกับข้อ 1

และ ข้อ 4 จะทำคล้ายกับข้อ 3

ทฤษฎีบท 1.4.6 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ

$|a+b| \leqslant |a| + |b|$ ทฤษฎีบทนี้เรียกว่า (triangle inequality)

พิสูจน์

เพราะว่า $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ (1)

$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$ (2)

สมการ (1) + (2) $-|a| - |b| \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$

$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant (|a| + |b|)$ (3)

จาก ทฤษฎี 1.4.5 ข้อ 2 สมการ (3) จะได้

$|a + b| \leqslant (|a| + |b|)$

หรือ $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

ตัวอย่าง 1.4.1

จงหารากของอสมการ

$|x+4| < 6$

วิธีทำ $|x+4| < 6$

$-6 < x+4 < 6$ จากทฤษฎี 1.4.5 ข้อ 1

$-6-4 < x+4-4 < 6-4$

$-10 < x < 2$ #

ทฤษฎีบท 1.4.7 สำหรับจำนวนจริง a,b ใด ๆ

$|a-b| \geqslant |a| - |b|$

พิสูจน์ เพราะว่า $|a| = |a+b-b| = |a-b+b|$

$\leqslant |a-b| + |b|$

$|a| - |b| = |a-b|$

ทฤษฎีบท 1.4.8

ถ้า $a_1, a_2, \cdots, a_n$ และ $b_1, b_2, \cdots, b_n$ เป็นจำนวนจริง

จงพิสูจน์ Schwarz's ineqality

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

พิสูจน์

สำหรับจำนวนจริง λ จะได้ว่า

$$(a_1\lambda + b_1)^2 + (a_2\lambda + b_2)^2 + \cdots + (a_n\lambda + b_n)^2 \geqslant 0$$

$$a_1^2\lambda^2 + 2a_1b_1\lambda + b_1^2 + a_2^2\lambda^2 + 2a_2b_2\lambda + b_2^2 + \cdots + a_n^2\lambda^2 + 2a_nb_n\lambda + b_n^2 \geqslant 0$$

$$(a_1^2\lambda^2 + a_2^2\lambda^2 + \cdots + a_n^2\lambda^2) + (2a_1b_1\lambda + 2a_2b_2\lambda + \cdots + 2a_nb_n\lambda) + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant 0$$

$$A^2\lambda^2 + 2B\lambda + C^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

เมื่อ

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\ B &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ C^2 &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

จากสมการ (1) ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$\lambda^2 + \frac{2B}{A^2}\lambda + \frac{C^2}{A^2} \geqslant 0$$

$$\lambda^2 + \frac{2B}{A^2}\lambda + \left(\frac{B}{A^2}\right)^2 - \left(\frac{B}{A^2}\right)^2 + \frac{C^2}{A^2} \geqslant 0$$

$$\left(\lambda + \frac{B}{A^2}\right)^2 + \frac{C^2}{A^2} - \frac{B^2}{A^4} \geqslant 0 \qquad (3)$$

จากสมการ (3) จะเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า λ ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{C^2}{A^2} - \frac{B^2}{A^4} \geqslant 0$$

$$\frac{C^2}{A^2} \geqslant \frac{B^2}{A^4}$$

$$C^2A^2 \geqslant B^2$$

หรือ $B^2 \leqslant C^2A^2 \qquad (4)$

จากสมการ (2) แทนค่าในสมการ (4)

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

แบบฝึกหัด 1.4

จงหาค่า x เมื่อกำหนดให้

1. $|3x-5| > 4$
2. $|3x+2| = 5-x$
3. $|x-2| < 3$
4. $|2x-3| > 4$
5. $|x-4| = |x-2|$
6. $|3-x| = |1+x|$
7. $|2x-3| \leqslant 5$
8. $|3x+1| \geqslant 4$
9. $|x^2+x-2| = 0$

1.5 ค่าประจำ (Norm)

สำหรับ P และ Q ใน R^n

กำหนดให้ $P = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$

$Q = (y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_n)$

นิยาม 1.5.1 การบวก (Addition)

$$P + Q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots x_n + y_n)$$

นิยาม 1.5.2 การคูณด้วยสเกล่า

$$cP = c(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$$

$$= (cx_1, cx_2, cx_3, \cdots cx_n)$$

เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ $P - Q = P + (-1)Q$

นิยาม 1.5.3 ผลคูณสเกล่า (Scalar product **หรือ** dot product)

$$P.Q = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n$$

คำนิยาม 1.5.4 การเท่ากันของจุดสองจุด

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = (y_1, y_2 y_3, \cdots, y_n)$$

ก็ต่อเมื่อ $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3, \cdots, x_n = y_n$

กำหนด $P = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$

$Q = (y_1, y_2, y_3, \cdots y_n)$

เป็นจุดสองจุดใน R^n

เพราะว่า $P + Q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots x_n + y_n)$

$$\tfrac{1}{2}(P + Q) = \tfrac{1}{2}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots x_n + y_n)$$

$$= \left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \frac{x_3 + y_3}{2}, \cdots \frac{x_n + y_n}{2}\right)$$

เป็นจุดกึ่งกลางของจุด P และ Q

นิยาม 1.5.5 ให้ $P = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$

$Q = (y_1, y_2, y_3, \cdots y_n)$

เป็นจุดสองจุดใน R^n

ให้ C เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P และ Q ซึ่ง

$$C = \frac{P+Q}{2} = \left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}, ---, \frac{x_n+y_n}{2}\right)$$

ในระนาบ (R^2) ถ้าให้ $P = (x_1,y_1)$ และ $Q = (x_2,y_2)$

แล้ว ระยะทาง PQ $= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

แต่ถ้า $Q = (0,0)$ เป็นจุดกำเนิดแล้ว

ระยะทาง PQ $= \sqrt{(0-x_1)^2 + (0-y_1)^2}$

$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

นิยาม 1.5.6

ใน R^n ถ้า $P = (x_1,x_2,x_3,---x_n)$ เป็นจุด ๆ หนึ่งใน R^n แล้ว

$$|P| = \sqrt{P.P}$$

$$= \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+---+x_n^2}$$

สัญลักษณ์ $|P|$ อ่านว่า ค่าประจำ (Norm) ของ P

ซึ่งค่าประจำของ P หรือ $|P|$ นี้ ก็คือระยะทางจากจุด P ไปยังจุดกำเนิด

กำหนด $P = (x_1,x_2,x_3,---,x_n)$

$Q = (y_1,y_2,y_3,---,y_n)$

เป็นจุดสองจุดใน R^n

เพราะว่า

$$\begin{aligned} P-Q &= P+(-Q) \\ &= P+(-1)Q \\ &= (x_1,x_2,x_3,---x_n) + (-1)(y_1,y_2,y_3,---,y_n) \\ &= (x_1,x_2,x_3,---x_n) + (-y_1,-y_2,-y_3,---,-y_n) \\ &= (x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3,---,x_n-y_n) \end{aligned}$$

จากนิยาม 1.5.6

$$|P-Q| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 +---+(x_n-y_n)^2}$$

คือระยะทางระหว่างจุด P และ Q

นิยาม 1.5.7 ถ้า $P = (x_1,x_2,x_3,---,x_n)$

$Q = (y_1,y_2,y_3,---,y_n)$

เป็นจุดสองจุดใน R^n แล้ว

แล้วระยะทางระหว่างจุด P และ Q คือ $|P-Q|$ ซึ่ง

$$|P-Q| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

จากนิยามของค่าประจำ (Norm) ถ้า $P = x$ หรือ $P \in R$

แล้ว $$|P| = |x| = \sqrt{x^2}$$

เพราะว่าถ้า x เป็นบวก แล้ว $\sqrt{x}$ จะต้องเป็นบวก จึงจะได้ว่า $(\sqrt{x})^2 = x$

ถ้า x เป็นลบ, x^2 เป็นบวก แล้ว $\sqrt{x^2}$ จะต้องเป็นบวก และ $\sqrt{x^2} = -x$

เพราะฉะนั้น $|P| = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$

หรือ $|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$

สัญลักษณ์ $|x|$ เรียกว่า ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) และคุณสมบัติต่าง ๆ ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

ทฤษฎีบท 1.5.1

ถ้า $P = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$ เป็นจุดต่าง ๆ ใน R^n แล้ว $|P| \geqslant 0$

พิสูจน์

กรณีที่ 1 ถ้า $P = (0,0,0,\cdots 0)$

$$|P| = 0$$

กรณีที่ 2 ถ้า $P = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$

ซึ่ง x_i สำหรับ $i = 1,2,3,\cdots n$ ไม่เป็นศูนย์ เพราะว่า

$$|P| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \text{--------} (1)$$

เนื่องด้วย $x_i^2 > 0$ สำหรับ $i = 1,2,3,\cdots n$

แล้ว $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 > 0$ (บวก)

จากนิยามของค่าสมบูรณ์

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2} > 0 \text{ (บวก)}$$

จากสมการ (1)

$$|P| > 0$$

เพราะฉะนั้น

$$|P| \geqslant 0 \qquad \#$$

ทฤษฎีบท 1.5.2

ให้ $P = (x_1, x_2, x_3, --- x_n)$ เป็นจุดใด ๆ ใน R^n

$|P| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $P = \hat{0}$

เมื่อ 0 เป็นจำนวนจริงศูนย์

$\hat{0}$ เป็นจุดกำเนิดใน R^n

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) ให้ $P = (x_1, x_2, x_3, --- x_n)$ เป็นจุดใด ๆ ใน R_n ซึ่ง

$|P| = 0$

$\sqrt{x_1^2, x_2^2, x_3^2 + --- + x_n^2} = 0$ จากนิยาม 1.5.6

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + --- x_n^2 = 0$ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

เพราะฉะนั้น $x_1 = x_2 = x_3 = --- = x_n = 0$

นั่นคือ $P = (0,0,0,---,0) = \hat{0}$ #

($\Leftarrow$) ให้ $P = \hat{0} = (0,0,0,---,0)$

$$|P| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 --- + 0^2}$$

$$= 0$$ #

ทฤษฎีบท 1.5.3 สำหรับจำนวนจริง λ ใด ๆ

และ $P = (x_1, x_2, x_3, --- x_n)$ เป็นจุดใด ๆ ใน R^n

$$|\lambda P| = |\lambda||P|$$

พิสูจน์

จาก $P = (x_1, x_2, x_3, --- x_n)$

$\lambda P = \lambda(x_1, x_2, x_3, --- x_n)$

$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, ---, \lambda x_n)$

จากนิยามของค่าประจำ (Norm)

$$|\lambda P| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_3)^2 + --- + (\lambda x_n)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + \lambda^2 x_3^2 \ldots + \lambda^2 x_n^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 --- + x_n^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2} . \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + --- + x_n^2}$$

$$= |\lambda||P|$$ #

ทฤษฎีบท 1.5.4 สำหรับ P และ Q เป็นจุดใด ๆ ใน R^n

$$|P + Q| \leqslant |P| + |Q|$$

พิสูจน์

ให้ $P = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$

$Q = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$

จาก Schwarz's inequality

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

ถอดรากที่สองทั้งสองข้าง

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) \leqslant \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)}$$

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

เอา 2 คูณทั้งสองข้าง

$$2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + 2x_ny_n \leqslant 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

เอา $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ และ $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ บวกทั้งสองข้าง

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + 2x_ny_n + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

$$x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2 \quad 6$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

$$(x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2) + (xl + 2x_2y_2 + y_2^2) + \cdots + (x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2) \leqslant$$

$$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2})^2$$

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2 \leqslant (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2})^2$$

ถอดรากที่สองทั้งสองข้าง

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

จากนิยามของค่าประจำ

$$|P + Q| \leqslant |P| + |Q|$$

ทฤษฎีบท 1.6.6

ให้ P และ Q เป็จุดใด 9 ใน R" แล้ว

$$P.Q \quad 6 \quad |P||Q|$$

พิสูจน์

ให้ $P = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$

$Q = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$

จาก Schwarz's inequality

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + y_3y_3 + \cdots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2)$$

ถอดรากที่สองทั้งสองข้าง

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n \leqslant \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2)}$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}.\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2}$$

จากนิยามของ P.Q และค่าประจำได้ว่า

$$P.Q \leqslant |P||Q|$$

#

ตัวอย่าง 1.5.X ให้ $A = (1,2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ จงหาเซตของจุด P ที่อยู่บนระนาบซึ่ง

$$|P - A| = 2$$

วิธีทำ

ให้ $P = (x,y)$

เพราะว่า $P - A = (x,y) - (1,2)$

$= (x - 1, y - 2)$

จาก $|P - A| = 2$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

คือ สมการวงกลมมีจุด (1,2) เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมีเท่ากับ 2

$\therefore$ เซตของจุด P $= \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4\}$

#

ตัวอย่าง 1.6.2 จงหาจุด P ถ้า

$$(1,-1,4) + 2P = 3P + (2,0,5)$$

วิธีทำ

$$(1,-1,4) + 2P = 3P + (2,0,5)$$

$$2P - 3P = (2,0,5) - (1,-1,4)$$

$$-P = (2,0,5) + (-1)(1,-1,4)$$

$$= (2,0,5) + (-1,1,-4)$$

$$= (1,1,1)$$

$$\therefore \quad -P = (1,1,1)$$

หรือ $$P = (-1)(1,1,1)$$

$$= (-1,-1,-1)$$

#

ตัวอย่าง 1.5.3 ให้ A,B,C,D เป็นจุดสี่จุดของรูปสี่ด้าน (quodrilateral) ถ้าลากเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่แล้ว จุดกึ่งกลางเหล่านั้นเป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน

วิธีทำ

จากคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมด้านขนานจะได้ว่าเส้นทะแยงมุมจะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน จากรูป 1.5.1

ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB จากนิยาม 1.5.5

$$P = \frac{A+B}{2}$$

Q เป็จุดกึ่งกลางด้าน BC จากนิยาม 1.5.5

$$Q = \frac{B+C}{2}$$

R เป็นจุดกึ่งกลางด้าน CD จากนิยาม 1.5.5

$$R = \frac{C+D}{2}$$

S เป็นจุดกึ่งกลางด้าน DA จากนิยาม 1.5.5

$$S = \frac{D+A}{2}$$

ให้ PQRS เป็นสี่เหลี่ยมใด ๆ, เส้นตรง PR และ เส้นตรง QS เป็นเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยม PQRS

เพราะว่าจุดกึ่งกลางของจุด P และ R $= \dfrac{P+R}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{A+B+C+D}{2}\right)$$

$$= \frac{A+B+C+D}{4} \qquad (1)$$

และจุดกึ่งกลางของจุด Q และ S

$$= \frac{Q+S}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{B+C}{2}+\frac{D+A}{2}\right)$$

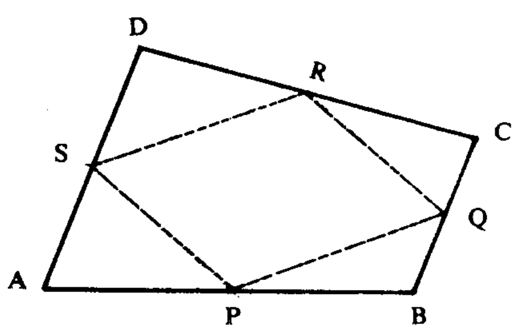
$$= \frac{1}{2}\frac{(B+C+D+A)}{2}$$

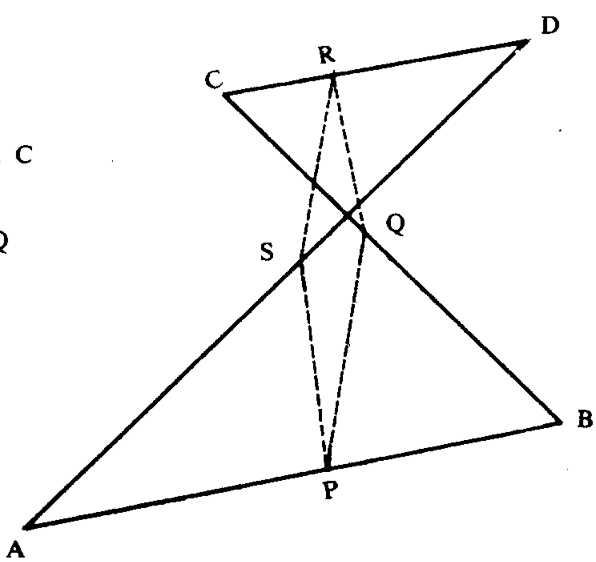
$$= \frac{(A+B+C+D)}{4} \qquad (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) แสดงว่าจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุม PR และ QS คือจุดเดียวกัน นั่นแสดงว่า เส้นทะแยงมุมตัดกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

เพราะฉะนั้นสี่เหลี่ยม PQRS เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

#





รูป 1.5.1

แบบฝึกหัด 1.5

1. สำหรับ $n = 1,2,$ และ 3

จงหาเซตของจุด $P \in R^n$ ซึ่ง

1.1 $|P| < 1$

1.2 $|P| \geqslant 1$

1.3 $|P| = 1$

2. ให้ $A = (4,2)$ จงหาเซตของจุด P ที่อยู่บนระนาบ ซึ่ง

2.1 $|P| \leqslant |P-A|$

2.2 $|P|+|P-A| = 6$

2.3 $|P|+|P-A| \leqslant 4$

3. จงพิสูจน์ $|P-Q| \geqslant |P|-|Q|$

สำหรับ P และ Q เป็นจุดสองจุดใด ๆ ใน R^n

4. ถ้า $P = (x,y)$ จงแสดงว่า

4.1 $|P| \leqslant |x|+|y|$

4.2 $|x| \leqslant |P|$, $|y| \leqslant |P|$

5. จงหาจุด P ถ้า

$$(2,1,-3)+P = (0,2,4)$$

6. จงหาจุด P และ Q ถ้า

$$2P+3Q = (0,1,2)$$
$$P+2Q = (1,-1,3)$$

7. จงหาจุด P และ Q ถ้า

$$3P+Q = (1,0,1,-4)$$
$$P-Q = (2,1,2,3)$$

8. ให้ $A = (1,1,3)$

$B = (2,-1,1)$

จุด P จะหาค่าได้หรือไม่ ถ้า

$P.A = 0$ และ $P.B = 0$

9. จงแสดงว่า จุด A,B,C,D เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนานก็ต่อเมื่อ $A+C = B+D$ หรือ $A+B = C+D$ หรือ $A+D = B+C$

10. ให้ $R = \lambda P+(1-\lambda)Q$ จงแสดงว่า

$$|R-P|+|P-Q| = |R-Q| \text{ เมื่อ } \lambda > 1$$

1.6 ขอบเขตบน (upper bound) **และขอบเขตล่าง** (lower bound)

ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง

นิยาม 1.6.1 เซต S มีขอบเขตบน (bounder above) ถ้ามีจำนวนจริง u ซึ่ง $x \leqslant u$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็นสมาชิกของ S ในกรณีเช่นนี้ u เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของเซต S

ถ้า u เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของเซต S จากคุณสมบัติของจำนวนจริงข้อ G ดังนั้นจะมีจำนวนที่มากกว่า u

ถ้า U เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของ S และไม่มีขอบเขตบนตัวใดที่น้อยกว่า U แล้ว U เป็นขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound) ของ S ซึ่งเขียนด้วยสัญญลักษณ์

$$U = \text{l.u.b.}S$$

นิยาม 1.6.2 เซต S มีขอบเขตล่าง (bound below) ถ้ามีจำนวนจริง l ซึ่ง $l \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็นสมาชิกของ S แล้ว l เป็นขอบเขตล่าง (lower bound)

ถ้า L เป็นขอบเขตล่าง (lower bound) ของเซต S และไม่มีขอบเขตล่างตัวใดที่มากกว่า L แล้ว L เป็นขอบเขตล่างสูงสุด (greatest lower bound) ของ S ซึ่งเขียนด้วยสัญญลักษณ์

$$L = \text{g.l.b.}S$$

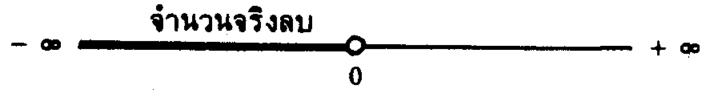
นิยาม 1.6.3 M เป็นค่าสูงสุด (Maximum) ของ S ถ้า $M \in S$ และ $x \leqslant M$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็นสมาชิกของ S

นิยาม 1.6.4 m เป็นค่าต่ำสุด (minimum) ของ S ถ้า $m \in S$ และ $m \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็นสมาชิกของ S

ตัวอย่าง 1.6.1

ถ้า เซต S เป็นเซตของจำนวนจริงลบแล้ว จำนวนที่ไม่เป็นจำนวนลบทั้งหลายจะเป็นขอบเขตบนของเซต S และพบว่าเลข 0 ก็เป็นขอบเขตบนตัวหนึ่ง ซึ่งไม่มีขอบเขตบนตัวไหนที่น้อยกว่า 0 ดังนั้น 0 เป็นขอบเขตบนน้อยสุด

ดูรูป 1.6.1



รูป 1.6.1

ตัวอย่างที่ 1.6.2

กำหนด $S = \{x \mid |x-1| < 5\}$

จงหาขอบเขตบน (upper bound) และขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound) ของเซต S

วิธีทำ จากคุณสมบัติของเซต S

$|x-1| < 5$

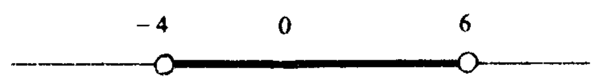
$-5 < x-1 < 5$ จาก ท.บ. 1.4.5

$1-5 < x-1+1 < 1+5$

$-4 < x < 6$

นั่นคือ เซต S คือจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง -4 กับ 6

ดังรูป 1.6.2



รูป 1.6.2

ดังนั้นขอบเขตบนของเซต S คือ จำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 6 นั่นคือ

เซ็ต $U = \{y \mid 6 \leq y$ และ y เป็นจำนวนจริง$\}$

ในบรรดาขอบเขตบนพบว่า 6 เป็นตัวที่มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น 6 เป็นขอบเขตบนน้อยสุด

#

ตัวอย่าง 1.6.3

กำหนด $S = \{x \mid 2 < x$ และ x เป็นจำนวนจริง$\}$

จงหาขอบเขตบน และขอบเขตบนน้อยสุด

วิธีทำ เซต S คือเซตของจำนวนจริงที่มากกว่า 2 จนถึง $+\infty$

ดังรูป 1.6.3

รูป 1.6.3

จากคุณสมบัติของ S ประกอบด้วยจำนวนจริง x ซึ่ง

$$2<x \qquad (1)$$

สมมุติ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง

$$x<y \qquad (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า

$$2<y \qquad \text{จากคุณสมบัติข้อ G}$$

นั้นแสดงว่า y เป็นสมาชิกของเซต S ด้วยเสมอ

เพราะฉะนั้นไม่มีจำนวนจริงใด ๆ เลยที่มากกว่าสมาชิกทุก ๆ ตัวของเซต S

ดังนั้นขอบเขตบนของเซต S จึงไม่มี และไม่มีขอบเขตบนน้อยสุดด้วย

#

ทฤษฎีบท 1.6.1 ถ้า S เป็นเซตที่มีขอบเขตข้างบน และ U = l.u.b.S (ขอบเขตบนน้อยสุดของS) แล้วสำหรับค่า $y<U$ จะมีจำนวน s ในเซต S ซึ่ง

$$y<s\leqslant U$$

พิสูจน์ กำหนด $y<U$ (1)

โดยวิธี Contradiction

สมมุติว่าไม่มีจำนวน s ในเซต S ซึ่ง

$$y<s\leqslant U \qquad (2)$$

นั้นคือ s จะไม่มากกว่า y ฉะนั้น s จะต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ y ดัง inequality

$$s\leqslant y \qquad (3)$$

จาก (3) และคุณสมบัติของ upper bound แสดงว่า y เป็น upper bound ของเซต S จากสมการ (1) จะได้ว่า y เป็นขอบเขตบน และมีค่าน้อยกว่าขอบเขตบนน้อยสุด U ซึ่ง Contradiction กับที่กำหนดให้ว่า U เป็นขอบเขตบนน้อยสุด #

หมายเหตุ: ค่า y นี้จะเป็นสมาชิกของเซต S หรือไม่เป็นสมาชิกของเซต S ก็ได้

ทฤษฎีบท 1.6.2(Dedekind's Theorem:)

สมมุติว่าจำนวนจริงทั้งหมดแบ่งออกเป็นสองเซต R และ L ไม่เป็นเซตเปล่า ซึ่ง

ถ้า $r\in R$ และ $l\in L$ แล้ว $l<r$

ดังนั้นจะมีจำนวนจริง x ตัวหนึ่ง ซึ่ง $x\geqslant l$ และ $x\leqslant r$ หรือ $l\leqslant x\leqslant r$

จากทฤษฎีบทนี้ ถ้าให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง

สมมุติแบ่งเซต S ออกเป็นเซตสองเซตคือ

$$L = \{x|x<0 \text{ และ } x \in R\}$$

และ $R = \{x|x>0 \text{ และ } x \in R\}$

ซึ่ง $L \neq \phi$, $R \neq \phi$ จะได้ว่า

ถ้า $r \in R$ และ $l \in L$ แล้ว $l < r$

ดังนั้นจะมี จุดศูนย์ (0) ซึ่ง

$$l < 0 < r$$

ทฤษฎีบท 1.6.3 ทุก ๆ เซต S ที่ไม่เป็นเซตเปล่า ซึ่งมีขอบเขตข้างบน จะต้องมีขอบเขตข้างบนน้อยสุด (l.u.b.)

พิสูจน์

โดย Dedekind's theorem

สร้างเซตสองเซตคือ R และ L

พิจารณาจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง $x \in S$ ซึ่ง

$$a < x$$

แล้ว $a \in L$

ถ้าไม่จริงแล้ว $a \in R$

ดังนั้นเซต L ประกอบด้วยจำนวนจริง a ทั้งหมดซึ่งจะมี $x \in S$

แล้ว $a < x$ (1)

และเซต R ประกอบด้วยจำนวนจริง b ต่าง ๆ ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต L ซึ่ง

$b \geqslant x$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$ (2)

จากสมการ (2) แสดงว่า เซต R เป็นขอบเขตบนของเซต S

สำหรับ $x \in S$ เพราะว่า $x-1<x$

ดังนั้น $x-1 \in L$ จาก (1)

แสดงว่าเซต $L \neq \phi$

ในทำนองเดียวกันเซต $R \neq \phi$

เนื่องด้วยเซต R เป็นขอบเขตบนของเซต S แสดงว่า เซต S มีขอบเขตข้างบน นั่นคือ จะมีจำนวนจริง M ซึ่ง $x \leqslant M$ สำหรับ $x \in S$

จากสมการ (2) แสดงว่า $M \in R$

เพราะว่า $a<x \leqslant b$ สำหรับ $a \in L$ และ $b \in R$

หรือ $a<b$

ดังนั้น $a \neq b$

นั่นแสดงว่า เซต R และเซต L ไม่มีจำนวนจริงที่เป็นสมาชิกของทั้งสองเซตร่วมกัน และสมาชิกทุกตัวใน R มากกว่าสมาชิกทุกตัวของ L จาก Dedekind's theorem จะมีจำนวน M_0 ซึ่ง

i) $M_0 \geqslant a$ ทุก ๆ $a \in L$

ii) $M_0 \leqslant b$ ทุก ๆ $b \in R$

เนื่องจาก M_0 เป็นจำนวนจริงซึ่ง $M_0 \in L$ หรือ $M_0 \in R$ จะแสดงว่า $M_0 \in R$

ถ้า $M_0 \in L$ จะต้องมี $x_0 \in S$ ซึ่ง

$M_0 < x_0$ จากสมการ (1)

ให้ $\delta = \dfrac{x_0 - M_0}{2}$ หรือ $x_0 = M_0 + 2\delta$ (3)

และกำหนด $a_0 = M_0 + \delta$ (4)

จาก (3) และ (4) ได้ว่า $a_0 < x_0$ ซึ่ง

แสดงว่า $a_0 \in L$ จากสมการ (1)

และจาก (4) $a_0 > M$ จาก i) แสดงว่า

$a_0 \notin L$

ซึ่ง Contradiction

แสดงว่า	$M_0 \notin L$
นั่นคือ	$M_0 \in R$
เพราะว่า	$M_0 \in R$
ดังนั้น	$M_0 \geqslant x$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$ จากสมการ (2)

เพราะฉะนั้น M_0 เป็นขอบเขตบนของ S

จาก ii) $M_0 \leqslant b$ สำหรับทุก ๆ $b \in R$ ซึ่ง R เป็นขอบเขตบนของ S

แสดงว่า M_0 เป็นขอบเขตบนตัวที่น้อยที่สุด หรือ M_0 เป็นขอบเขตบนน้อยสุด

ตัวอย่าง 1.6.4 จงหาค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุด, ขอบเขตล่างสูงสุด ของเซต-S ที่กำหนดให้ $S = \{x | x^2 \leqslant 9\}$

วิธีทำ จาก $x^2 \leqslant 9$

$|x|^2 \leqslant 9$ เพราะว่า $|x| = \sqrt{x^2}$

$|x| \leqslant 3$ ถอดรากที่สอง

$-3 \leqslant x \leqslant 3$ จากท.บ. 1.4.5

เพราะฉะนั้น $S = \{x | -3 \leqslant x \leqslant 3\}$

เพราะว่า $-3 \in S$ และ $-3 \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$

เพราะฉะนั้น -3 เป็นค่าต่ำสุด

เพราะว่า $3 \in S$ และ $3 \geqslant x$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$

เพราะฉะนั้น 3 เป็นค่าสูงสุด

เพราะว่า $-3 \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$

เพราะฉะนั้น -3 เป็นขอบเขตล่าง และไม่มีขอบเขตล่างตัวใดที่มากกว่า -3 ดังนั้น -3-เป็นขอบเขตล่างสูงสุด

ตัวอย่าง 1.6.5 จงหาค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุด, ขอบเขตบนน้อยสุด, หรือ ขอบเขตล่างสูงสุด ของเซต-S ที่กำหนดให้

$$S = \{x | |x-1| \geqslant 2\}$$

วิธีทำ   *จาก* $|x-1| \geqslant 2$

จากทฤษฎี 1.4.5 จะได้ว่า

$$(x-1) \geqslant 2 \qquad (1)$$

หรือ $$(x-1) \leqslant -2 \qquad (2)$$

จากสมการ (1)

$$x-1 \geqslant 2$$

$$x \geqslant 3 \qquad (3)$$

จากสมการ (2) $$x-1 \leqslant -2$$

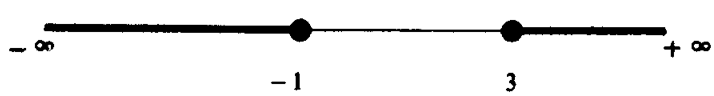
$$x \leqslant -1 \qquad (4)$$

จากสมการ (3) และ (4) เซต S คือ

$$S = \{x \mid |x-1| \geqslant 2\}$$

$$= \{x \mid x \leqslant -1 \text{ หรือ } x \geqslant 3\}$$

หรือ พิจารณาจากรูป 1.6.4



รูป 1.6.4

จากเซต S สำหรับ x ซึ่ง $x \geqslant 3$ แสดงว่า สมาชิกของเซต S เพิ่มขึ้นเรื่อยจนถึง ∞ นั้นคือ สำหรับ x_1 ใด ๆ ในเซต S สามารถหา x_2 ในเซต S ซึ่ง $x_1 < x_2$ แสดงว่า เซต S ไม่มีค่าสูงสุด

ให้ u เป็นขอบเขตบนของเซต S นั้นคือ

$$x \leqslant u \text{ สำหรับทุก ๆ } x \in S$$

แต่ $3 \leqslant x$

เพราะฉะนั้น $3 \leqslant x \leqslant u$ แสดงว่า $u \in S$ ด้วย

ถ้าให้ x_3 ซึ่ง $u < x_3$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แต่ $3 \leqslant x \leqslant u < x_3$

เพราะฉะนั้น $3 \leqslant x_3$ แสดงว่า $x_3 \in S$

จากกำหนดให้ u เป็นขอบเขตบนของเซต S และ $x_3 \in S$ และ

$$3 \leqslant u < x_3$$

สรุปได้ว่า u ก็ไม่เป็นขอบเขตบนของเซต S

เพราะฉะนั้น เซต S ไม่มีขอบเขตบน

เมื่อ เซต S ไม่มีขอบเขตบน เซต S ก็ไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด

จากเซต S สำหรับ x ซึ่ง $x \leqslant -1$ แสดงว่า สมาชิกของเซต S มีค่าลดลงเรื่อย ๆ จนถึง $-\infty$ นั่นคือสำหรับ x_4 ใด ๆ ในเซต S สามารถหา x_5 ในเซต S ซึ่ง $x_5 < x_4$ แสดงว่า เซต S ไม่มีค่าต่ำสุด

ให้ l เป็นขอบเขตล่างของเซต S นั่นคือ

$$l \leqslant x \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in S$$

แต่ $x \leqslant -1$

เพราะฉะนั้น $l \leqslant x \leqslant -1$ แสดงว่า $l \in S$

ถ้าให้ x_6 ซึ่ง $x_6 < l$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แต่ $x_6 < l \leqslant x \leqslant -1$

เพราะฉะนั้น $x_6 \leqslant -1$ แสดงว่า $x_6 \in S$

จากกำหนดให้ l เป็นขอบเขตล่างของเซต และ $x_6 \in S$ และ

$$x_6 < l \leqslant -1$$

สรุปได้ว่า l ก็ไม่เป็นขอบเขตล่างของเซต S

เพราะฉะนั้นเซต S ไม่มีขอบเขตล่าง

เมื่อ เซต S ไม่มีขอบเขตล่าง, เซต S ก็ไม่มีขอบเขตล่างสูงสุด

#

แบบฝึกหัด 1.6

ข้อ 1-12 จงหาค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุด, ขอบเขตบนต่ำสุด หรือขอบเขตล่างสูงสุด ของเซต-S ที่กำหนดให้ ถ้าหากว่ามี

1. $S_1 = \{x \mid x^2 < 9\}$
2. $S_2 = \{x \mid x^2 \leqslant 7\}$
3. $S_3 = \{x \mid |2x-1| < 5\}$
4. $S_4 = \{x \mid |x+3| \geqslant 5\}$
5. $S_5 = \{x \mid (x^2+1)^{-1} \geqslant \frac{1}{2}\}$
6. $S_6 = \{x \mid x^2 \leqslant 7$ และ x เป็นจำนวนตักยะ$\}$
7. $S_7 = \{x \mid x^2 - x < +2\}$
8. $S_8 = \{x \mid 2x - 4 < 3x + 7\}$
9. $S_9 = \left\{x \mid 1 + 2x < \frac{1}{1-2x}\right\}$
10. $S_{10} = \{x \mid \sqrt{2+x} > x\}$
11. $S_{11} = \{\frac{1}{n} \mid n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ$\}$
12. $S_{12} = \{2 + \frac{1}{2^n} \mid n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ$\}$
13. จงแสดงว่าทุก ๆ เซต S ซึ่ง $S \neq \phi$ และมีขอบเขตล่าง จะต้องมีขอบเขตล่างสูงสุด (g.l.b)
14. จงพิสูจน์ว่า ถ้าเซต S มีขอบเขตล่าง และ m_0 เป็นขอบเขตล่างสูงสุดแล้ว สำหรับ $y > m_0$ จะมีจำนวน $x \in S$ ซึ่ง $y > x \geqslant m_0$
15. จงแสดงว่า ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $na > b$

1.7 วิธีพิสูจน์โดยอุปมาณทางคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

พิจารณาเซตของจำนวนธรรมชาติ N ซึ่ง

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ---\}$$

จะพบว่าจำนวนธรรมชาตินั้นสมาชิกตัวแรก คือ 1 ตัวถัดไปคือ $2 = 1+1$ หรือสมาชิกตัวถัดไปของ 3 คือจำนวนอะไร คำตอบก็คือ 4 ซึ่ง $4 = 3+1$ หรือถ้าให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ตัวถัดไปก็คือ $n+1$ และจำนวน $n+1$ นี้เรียกว่า successors ของ n เช่น

successors ของ 2 คือ $2+1 = 3$ หรือ

successors ของ 3 คือ $3+1 = 4$ เป็นต้น

จะพบว่าจำนวนธรรมชาติทุกตัว ยกเว้น 1 จะเป็น successors ของจำนวนธรรมชาติใด ๆ เสมอ

จากเซตของจำนวนธรรมชาตินี้จะศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของจำนวนธรรมชาติ ซึ่งมีคุณสมบัติ คือ

1. $N \neq \phi$
2. สำหรับสมาชิก n แต่ละตัวซึ่ง $n \in N$ แล้ว จะมี n'(successors ของ n) เพียงตัวเดียวเท่านั้น
3. จะมีจำนวน 1 ซึ่งไม่เป็น successors ของจำนวนธรรมชาติใด
4. ถ้า n และ m เป็นจำนวนธรรมชาติ ซึ่ง $n \neq m$ แล้ว $n' \neq m'$
5. ถ้า $S \subseteq N$ ซึ่งมีคุณสมบัติ $1 \in S$ และทุก ๆ $n' \in S$ แล้ว $S = N$

ซึ่งคุณสมบัติจากข้อ 1 ถึงข้อ 5 นี้ เรียกว่า "Peono's postulates."

นิยาม 1.7.1 สมมุติให้ P(n) เป็นข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีคุณสมบัติ

1. P(1) เป็นจริง
2. ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k + 1) เป็นจริงด้วย

ดังนั้น P(n) จะเป็นจริงสำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก นิยามนี้เรียกว่า "หลักของการอุปมาณทางคณิตศาสตร์" (Principle of mathematical induction)

ตัวอย่าง 1.7.1

จงพิสูจน์โดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ว่า $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

วิธีทำ ให้ P(k) เป็นข้อความ $1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

1) P(1) เป็นจริง เพราะว่า $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$

2) สมมุติให้ P(k) เป็นจริง นั่นคือให้ $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

เอา k + 1 บวกทั้งสองข้าง

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2} \end{aligned}$$

แสดงว่า P(k + 1) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริงด้วย

ดังนั้น P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า n #

ตัวอย่าง 1.7.2

จงพิสูจน์โดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ว่า

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \text{ ถ้า } x \geqslant -1$$

วิธีทำ ให้ P(k) เป็นข้อความ $(1+x)^k \geqslant 1+kx$

1) P(1) เป็นจริง เพราะว่า

$$\begin{aligned} (1+x)^1 &= 1+1(x) \\ &= 1+x \end{aligned}$$

2) สมมุติให้ P(k) เป็นจริง นั่นคือ

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx$$

เอา $(1+x)$ คูณทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} (1+x)^k(1+x) &\geqslant (1+kx)(1+x) \\ (1+x)^{k+1} &\geqslant 1+kx+x+kx^2 \\ (1+x)^{k+1} &\geqslant 1+(1+k)x+kx^2 \\ &\geqslant 1+(1+k)x \end{aligned}$$

แสดงว่า P(k + 1) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า n #

แบบฝึกหัด 1.7

จงพิสูจน์โดย Mathematical Induction

1. $1+4+7+\cdots+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

2. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $(1+x)^n \geqslant 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$, เมื่อ $x \geqslant 0$

5. $(1-x)^n \leqslant 1-nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$, เมื่อ $0 \leqslant x < 1$

6. $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n) \geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$ สำหรับทุก ๆ $a \geqslant 0$

7. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ เมื่อ $i^2 = -1$

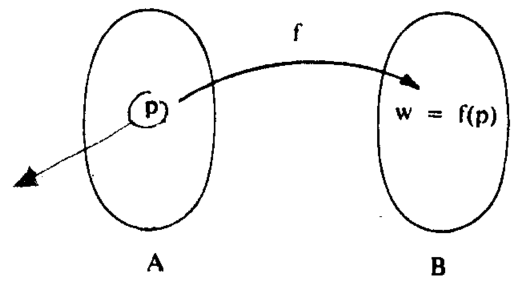
8. $|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+|x_3|+\cdots+|x_n|$

9. $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ เมื่อ $r \neq 1$

1.8 ฟังก์ชัน (Function)

นิยาม 1.8.1 ฟังก์ชันเป็นการส่ง (mapping) จากสมาชิกของเซต ๆ หนึ่ง สมมุติเป็นเซต A ไปยังสมาชิกของอีกเซตหนึ่ง สมมุติเป็นเซต B ซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับสมาชิกใด ๆ ในเซต A, p จะสมนัย (corresponding) กับสมาชิกของเซต B, w เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $w = f(p)$ เรียกว่าค่าของฟังก์ชัน f ณ. จุด p

ใช้สัญญลักษณ์ $f: A \rightarrow B$ ดังรูป 1.8.1



รูป 1.8.1

นิยาม 1.8.2 โดเมน (Domain) ของฟังก์ชัน f คือ เซตของจุด p ซึ่งทำให้ f(p) มีค่า

นิยาม 1.8.3 พิสัย (Range) ของฟังก์ชัน f คือ เซตของค่าฟังก์ชัน f, f(p)

นิยาม 1.8.4 ฟังก์ชันค่าตัวเลข (A numerical-value function) ของฟังก์ชัน f ซึ่งถูกกำหนด ณ. จุด p ใด ๆ ในโดเมน คือจำนวนจริง f(p) จำนวนหนึ่ง

ลองพิจารณาฟังก์ชันค่า ตัวเลข ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.8.1 กำหนด $f(x) = x^2+2x+1$ สำหรับ $x \in R$

ถ้า $x = 1$, $f(1) = 1^2+2(1)+1$

$= 4$ #

ตัวอย่าง 1.8.2 กำหนด $f(p) = x^2 - xy$ สำหรับ $p \in R^2$

ถ้า $p = (1,2)$

$$f(1,2) = 1^2 - 1(2)$$

$$= 1-2$$

$$= -1$$ #

ตัวอย่าง 1.8.3 กำหนด $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x>y \\ x^2+y & \text{ถ้า } x \leq y \end{cases}$

ถ้า $(x,y) = (2,1)$

$f(2,1) = 2$

ถ้า $(x,y) = (1,1)$

$f(1,1) = 1^2+1$

$= 2$

ถ้า $(x,y) = (1,2)$

$f(1,2) = 1^2+2$

$= 3$

ตัวอย่าง 1.8.4 กำหนด $f(x,y,z) = x^2+xy+z$

ถ้า $(x,y,z) = (1,2,3)$

$f(1,2,3) = 1^2+1(2)+3 = 6$

จากตัวอย่างต่าง ๆ ที่แสดงมา ทำให้พอทราบว่า ฟังก์ชันนั้นก็คือกฎ หรือการส่ง (Mapping) ขณะที่ $f(p)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่กำหนดบนจุด p

บางทีอาจคิดว่าฟังก์ชันเป็นเสมือนคอมพิวเตอร์ ซึ่งแต่ละฟังก์ชันเปรียบเสมือนโปรแกรม ซึ่ง $f(p)$ เป็นข้อมูลออก (OUT PUT) ที่สมนัย (Corresponding) ข้อมูลเข้า (IN PUT), p

ฟังก์ชันค่าจริง (Real value function) บ่อยครั้งที่พิจารณาตามลักษณะ โดเมนของฟังก์ชัน

เช่น ถ้า $f(p)$ มีค่าสำหรับทุก ๆ จุด p ซึ่ง $p \in R$ และ R เป็นโดเมน แล้ว p ก็คือจำนวนจริง x และ $f(p)$ ก็คือ $f(x)$ และจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร (one variable)

หรือ ถ้า $f(p)$ มีค่าสำหรับทุก ๆ จุด p ซึ่ง $p \in R^2$ และ R^2 เป็นโดเมน แล้ว p ก็คือ คู่อันดับ-(x,y) และ $f(p)$ ก็คือ $f(x,y)$ และจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร (two variable)

หรือ ถ้า $f(p)$ มีค่าสำหรับทุก ๆ จุด p ซึ่ง $p \in R^3$ และ R^3 เป็นโดเมน แล้ว p ก็คือ สิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ (x,y,z) และ $f(p)$ ก็คือ $f(x,y,z)$ และจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร (three variable)

โดยทั่ว ๆ ไป เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันของ n ตัวแปร (n variable) ถ้าโดเมนของ f คือเซตของ R^n

เช่น $f(x) = x^5+2x^2+5x+1$

เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร x

หรือ $f(x,y) = x^2+2xy+y^2$

เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร x และ y

หรือ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x,y และ z

ค่าของฟังก์ชัน f ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเสมอไป บางทีค่าฟังก์ชันอาจเป็นจุด หรือ เวคเตอร์ก็ได้

จาก $f: A \rightarrow B$ คือ ฟังก์ชัน f ส่งสมาชิกจากเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B เมื่อเซต A คือโดเมนของฟังก์ชัน f และเซต B คือค่าของฟังก์ชัน f (พิสัย) ซึ่งโดเมน A อยู่ใน R^n และค่าของฟังก์ชันอยู่ใน R^m

ตัวอย่าง 1.8.6 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2$

โดเมน คือเซตของจำนวนจริง

ค่าของฟังก์ชัน f คือเซตของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R

ตัวอย่าง 1.8.6 กำหนดฟังก์ชัน $f(x,y) = x^2 - y^2$

โดเมน คือเซตของจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนระนาบ XY

ค่าของฟังก์ชัน f คือเซตของจำนวนจริง

ถ้า $(x,y) = (1,2)$ เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ .

$f(1,2) = 1^2 - 2^2$

$= -3$ เป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก R^2 ไปยัง R

ตัวอย่าง 1.8.7 กำหนด $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

โดเมน คือเซตของจุดต่าง ๆ ที่อยู่ในปริภูมิสามมิติ (3-space)

ค่าของฟังก์ชัน f คือเซตของจำนวจริง

ถ้า $(x,y,z) = (0,1,2)$ เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ

$f(0,1,2) = 0^2 + 1^2 + 2^2$

$= 0 + 1 + 4$

$= 5$ เป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก R^3 ไปยัง R #

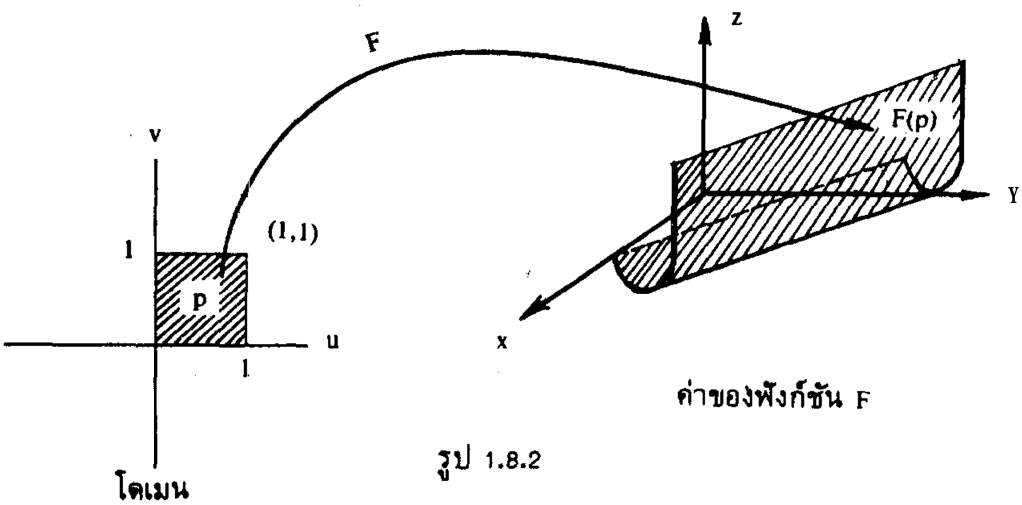
ตัวอย่าง 1.8.8 กำหนดเซตของสมการ

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v+1 \\ z = u^2 \end{cases}$$

ซึ่ง $0 \leq u \leq 1$

$0 \leq v \leq 1$

ฟังก์ชัน F จะส่งจุดต่าง ๆ บนระนาบ UV ไปยังปริภูมิสามมิติ
เช่น $p = (u,v)$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาวด้านละ 1 หน่วย
และค่าของฟังก์ชัน $F(p) = (x,y,z)$ เป็นจุดที่อยู่บนผิวในปริภูมิสามมิติ ดังรูป 1.8.2



รูป 1.8.2

เช่น $p=(1,0)$ จุดในปริภูมิสองมิติ

$f(1,0)=(1,2,1)$ จุดในปริภูมิสามมิติ

เพราะฉะนั้น F เป็นฟังก์ชันจาก R^2 ไปยัง R^3 #

จากตัวอย่างต่าง ๆ ที่ยกมาเป็นการแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันจาก R^n ไปยัง R^m

นิยาม *1.8.6* กราฟของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร f คือเซตของจุด (x,y) ต่าง ๆ บนระนาบ XY ซึ่ง x เป็นสมาชิกของโดเมน f และ $y=f(x)$

และ กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปร คือเซตของจุด (x,y,z) ต่าง ๆ บนปริภูมิสามมิติ ซึ่ง (x,y) สมาชิกของโดเมน f และ $z=f(x,y)$

นิยาม 1.8.6 ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product) ของเซต A และ B คือเซตของเลขคู่อันดับ (x,y) เมื่อ $x \in A$ และ $y \in B$ ใช้สัญลักษณ์ $A \times B = \{(x,y) | x \in A \text{ และ } y \in B\}$

ตัวอย่าง 1.8.9 กำหนดให้ $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ จงหา $A \times B$, $B \times A$

วิธีทำ

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$

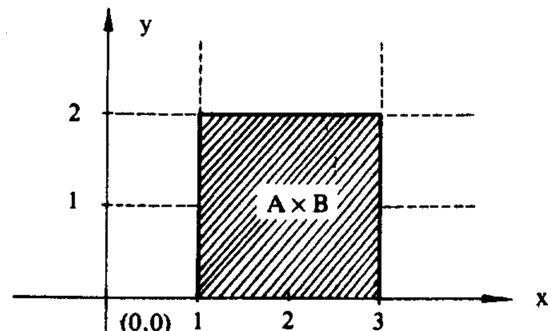
เพราะฉะนั้น $A \times B \neq B \times A$ #

ตัวอย่าง 1.8.10 กำหนด $A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

$B = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

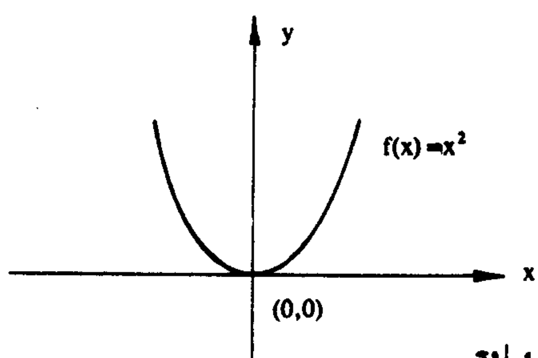
$A \times B = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ และ } 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

ดังรูป 1.8.3



รูป 1.8.3 #

ฟังก์ชันค่าตัวเลข (A numerical-valued function) จากตัวอย่าง 1.8.5 f เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R จะได้ว่ากราฟของ f คือ เลขคู่อันดับ (x,y) ซึ่ง $x \in R$ และ $y = f(x)$ เป็นเซตย่อยของ $R \times R = R^2$ ดังรูป 1.8.4



รูป 1.8.4

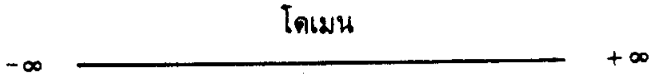
หรือจากตัวอย่าง 1.8.6 f เป็นฟังก์ชันจาก R^2 ไปยัง R จะได้ว่ากราฟของ f คือ เซตของจุด (x,y,z) ซึ่ง $(x,y) \in R^2$ และ $z = f(x,y)$ เป็นเซตย่อยของ $R^2 \times R = R^3$

โดยทั่วไป ถ้า F เป็นฟังก์ชันบน R^n ไปยัง R^m แล้วกราฟของฟังก์ชัน F จะเป็นเซตย่อยของ $R^n \times R^m = R^{n+m}$

ตัวอย่าง 1.8.10 จงหาโดเมนของ $f(x) = x^2 + 2x$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x)$ มีค่าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น โดเมนของ $f(x)$ คือ เซตจำนวนจริง ดังรูป 1.8.5



รูป 1.8.5 #

ตัวอย่าง 1.8.11 จงหาโดเมนของ $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+2x+1}$

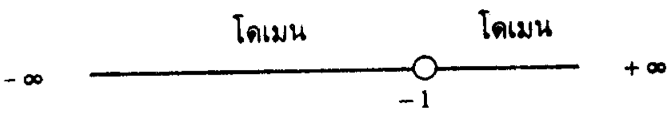
เพราะว่า $f(x)$ หาค่าไม่ได้ ถ้าส่วนคือ $x^2+2x+1 = 0$

จาก
$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

นั่นคือ $f(x)$ หาค่าไม่ได้ถ้า $x = -1$

หรือ $f(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x ยกเว้น $x = -1$

เพราะฉะนั้นโดเมนของ $f(x)$ คือเซตของจำนวนจริงยกเว้น $x = -1$ ดังรูป 1.8.6



รูป 1.8.6 #

หมายเหตุ ถ้า $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ แล้ว $f(x)$ จะหาค่าไม่ได้เมื่อ $v(x) = 0$

ตัวอย่าง 1.8.12 จงหาโดเมนของ $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x)$ หาค่าไม่ได้ ถ้า $x^2+2x < 0$ แล้ว $\sqrt{x^2+2x}$ เป็นจินตภาพ

จาก $x^2+2x < 0$

$x(x+2) < 0$

เมื่อ $x<0$ หรือ $x+2 > 0$ หรือ $x > -2$

นั้นคือ $f(x)$ หาค่าไม่ได้ ถ้า $x<0$ หรือ $x>-2$

เพราะฉะนั้น โดเมนของ $f(x)$ คือ เซตของจำนวนจริงยกเว้นจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง 0 กับ -2 ดังรูป 1.8.7

#

รูป 1.8.7

ตัวอย่าง 1.8.18 จงหาโดเมนของ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

วิธีทำ การพิจารณาแบ่งเป็นสองกรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $x+1 = 0$ แล้ว $f(x)$ หาค่าไม่ได้

จาก $x+1 = 0$

$x = -1$

นั้นคือ $f(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = -1$

กรณีที่ 2 ถ้า $x^2-1 < 0$ แล้ว $f(x)$ หาค่าไม่ได้ เพราะว่า $\sqrt{x^2-1}$ จะเป็นค่าจินตภาพ

จาก $x^2-1 < 0$

$(x+1)(x-1) < 0$

ถ้า $x+1 > 0$ จะได้ว่า $x > -1$

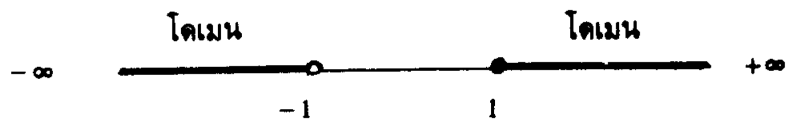
และถ้า $x-1 < 0$ จะได้ว่า $x < 1$

นั้นคือ $f(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ x อยู่ ระหว่าง -1 กับ 1

จากทั้งสองกรณีสรุปว่า

$f(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ x อยู่ระหว่าง -1 กับ 1 และ $x = -1$

เพราะฉะนั้นโดเมนของ $f(x)$ เป็นเซตจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 และน้อยกว่า -1 ดังรูป 1.8.8



รูป 1.8.8

#

หมายเหตุ 1. $\sqrt{f(x)}$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $f(x) < 0$

2. ถ้า $xy < 0$ แล้ว $x<0, y>0$ หรือ $x>0, y<0$

ตัวอย่าง 1.8.14 จงหาโดเมนของ $f(x,y) = x^2+y^2$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x,y) = x^2+y^2$ มีค่าสำหรับทุกจุด $P = (x,y)$ ในระนาบ XY

เพราะฉะนั้น โดเมนของ $f(x,y)$ คือ จุดต่าง ๆ ที่อยู่บนระนาบ XY

#

ตัวอย่าง 1.8.15 จงหาโดเมนของ $f(x,y) = \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x-y}$

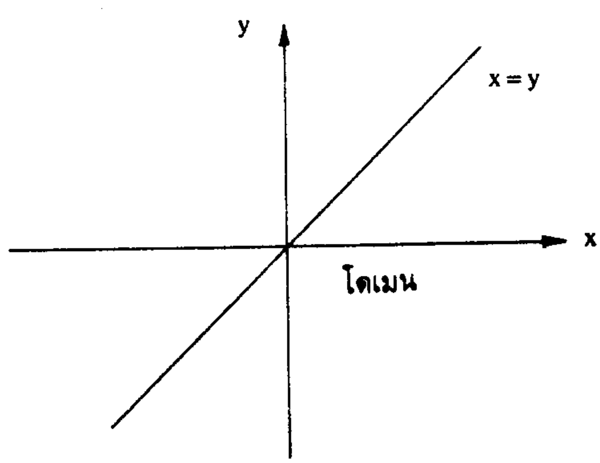
วิธีทำ เพราะว่า $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ ถ้า $x-y = 0$

จาก $x-y = 0$

$x = y$

นั่นคือ $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้สำหรับทุกจุด (x,y) ต่าง ๆ ที่อยู่บนเส้น $x=y$

เพราะฉะนั้น โดเมนของ $f(x,y)$ คือจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนระนาบ XY ยกเว้นจุดต่าง ๆ บนเส้น $x=y$ ดังรูป 1.8.9



#

รูป 1.8.9

ตัวอย่าง 1.8.16 จงหาโดเมนของ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ ถ้า $x^2+y^2-4 < 0$

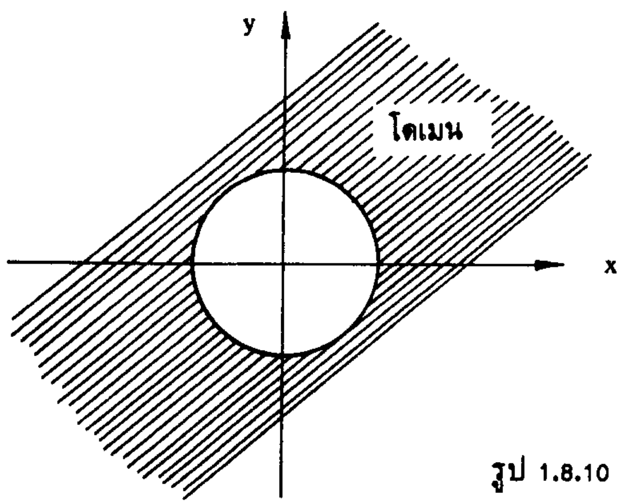
จาก $x^2+y^2-4 < 0$

$x^2+y^2 < 4$

หรือ $x^2+y^2 < 2^2$ เป็นจุดต่าง ๆ ที่อยู่ภายในวงกลมรัศมี 2 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) ไม่รวมจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนเส้นรอบวงกลม

นั่นคือ $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ สำหรับจุด (x,y) ต่าง ๆ ที่อยู่ภายในวงกลมรัศมี 2 หน่วย จุดศูนย์กลาง คือ จุด (0,0)

เพราะฉะนั้น โดเมนของ $f(x,y)$ คือ จุด (x,y) ต่าง ๆ ที่อยู่บนระนาบ XY ยกเว้นจุดต่าง ๆ ที่อยู่ภายในวงกลมรัศมี 2 หน่วย จุดศูนย์กลางคือ จุด (0,0) ดังรูป 1.8.10



รูป 1.8.10 #

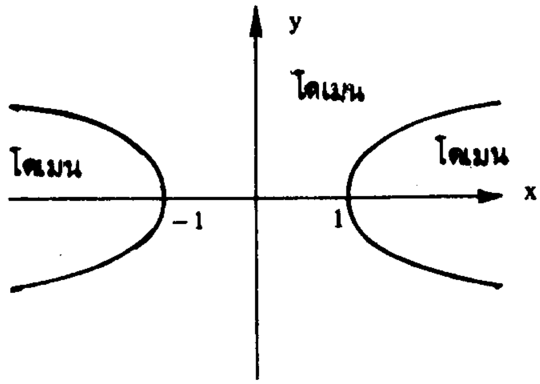
ตัวอย่าง 1.8.17 จงหาโดเมนของ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2-1}$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ ถ้า $x^2-y^2-1 = 0$

จาก $x^2-y^2-1 = 0$

$x^2-y^2 = 1$ เป็นไฮเปอร์โบลา

นั่นคือ $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้สำหรับจุด (x,y) ต่าง ๆ ที่อยู่บนไฮเปอร์โบลา $x^2-y^2=1$ เพราะฉะนั้น โดเมนของ $f(x,y)$ คือ จุดต่าง ๆ บนระนาบ XY ยกเว้นจุดบนไฮเปอร์โบลา $x^2-y^2 = 1$ ดังรูป 1.8.11



#

รูป 1.8.11

ตัวอย่าง 1.8.18 จงหาโดเมนของ $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+2y}$

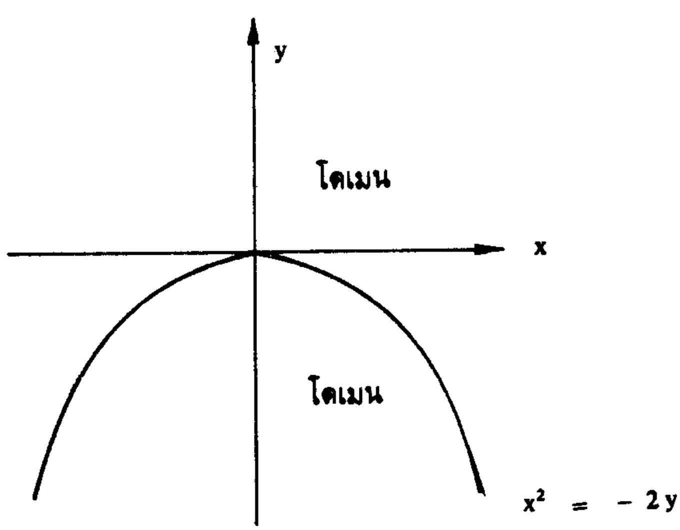
วิธีทำ เพราะว่า $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ ถ้า $x^2+2y = 0$

จาก $x^2+2y = 0$

$x^2 = -2y$ เป็นพาราโบลาคว่ำจุดยอด คือ จุด $(0,0)$

นั่นคือ $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้สำหรับจุด (x,y) ต่างที่อยู่บนพาราโบลาคว่ำ $x^2 = -2y$ เพราะฉะนั้น โดเมนของ $f(x,y)$ คือ จุดต่าง ๆ บนระนาบ XY ยกเว้นจุดที่อยู่บนพาราโบลาคว่ำ $x^2 = -2y$ ดังรูป 1.8.12

รูป 1.8.12



#

แบบฝึกหัด 1.8

จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงขอบเขตของโดเมน

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

3. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

4. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

5. $f(x) = \sqrt{x^2+2x-8}$

6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x^2-4}$

8. $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

9. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

10. $f(x,y) = \sqrt{4+2x^2-y^2}$

11. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}$

12. $f(x,y) = \sqrt{x-y-4}$

1.9 แนวความคิดเกี่ยวกับเซตเชิงโทโพโลยี (Topological Idea)

นิยาม 1.9.1 ย่านจุด PO (Neighborhood of the point PO) หมายถึงจุด P ทั้งหลายที่อยู่ห่างจากจุด P_o น้อยกว่าระยะคงที่ ซึ่ง ณ.ที่นี้ ระยะคงที่คือ d และ $\delta>0$ (d นี้จะเป็นค่าบวกน้อย ๆ ที่อยู่ใกล้กับ 0)

นั้นคือจุด P ทั้งหลายซึ่ง $|P-P_o| < d$

และ ใช้สัญลักษณ์ $N(P_o,\delta)$ แทน neighborhood ของ PO นั้นคือ

$$N(P_o,\delta) = \{P \mid (P- P_o| < \delta\}$$

ถ้า $P=P_o$ แล้ว $P-P_o$ = OUR: $|P-P_o|< \delta$ แสดงว่า $P_o \in N(P_o,\delta)$

จะพิจารณาว่า ย่านจุด P_o นี้จะมีรูปร่างเป็นอย่างไร เมื่อจุด P และ P_o เป็นจุดในปริภูมิ-n มิติ (R^n)

ถ้า P และ PO เป็นจุดในปริภูมิหนึ่งมิติ (R)

นั้นคือ P และ P_o เป็นจำนวนจริง

ให้ P = x และ $P_o = x_o$ จะพิจารณา

$$N(P_o,\delta) = N(x_o,\delta)$$

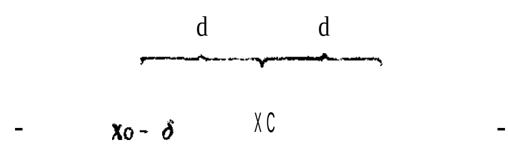
$$= \{x \mid |x - x_o| <.\delta\} \qquad \text{------------(1)}$$

แต่ $|x - x_o| <d \Leftrightarrow$ -- dcx $- x_o<\delta$

$$\Leftrightarrow x_o-\delta<x<x_o+\delta$$

นั้นคือ $|x-x_o|<\delta \Leftrightarrow x_o-\delta<x<x_o+\delta$

คือ จำนวนจริง x ต่าง ๆ ที่มากกว่า $x_o-\delta$ และน้อยกว่า $x_o+\delta$ ดังรูปที่ 1.9.1



รูป 1.9.1

จาก (1)

$$N(P_o,\delta) = \{x \mid |x - x_o|<\delta\}$$

$$= \{x \mid x_o-\delta<x<x_o+\delta\}$$

นั้นคือ ถ้า P และ P_o เป็นจุดในปริภูมิหนึ่งมิติ ย่านจุด P_o ก็จะเป็นช่วงเปิด (open interval) $(x_o-\delta,\ x_o+\delta)$

ถ้า P และ P_o เป็นจุดในปริภูมิสองมิติ (R^2) นั่นคือ P และ P_o เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ

ให้ $P = (x,y)$ และ $P_o = (x_o,y_o)$ เราพิจารณา

$$N(P_o,\delta) = \{P \mid |P-P_o| < \delta\}$$

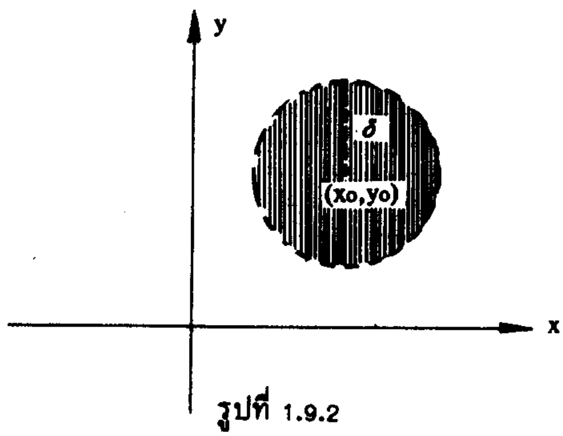
$$= \{(x,y) \mid |(x,y)-(x_o,y_o)| < \delta\} \qquad \text{----------(2)}$$

จาก $|(x,y)-(x_o,y_o)| < \delta \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} < \delta \Leftrightarrow (x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta^2$

$\Leftrightarrow (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < \delta^2$

นั่นคือ $|(x,y)-(x_o,y_o)| < \delta \Leftrightarrow (x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta^2$

คือจุด (x,y) ต่าง ๆ ที่อยู่ภายในบริเวณวงกลม ซึ่งมีจุด (x_o,y_o) เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม และมีรัศมีเป็น δ และไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง ดังรูปที่ 1.9.2



รูปที่ 1.9.2

จาก (2)

$$N(P_o,\delta) = \{(x,y) \mid |(x,y)-(x_o,y_o)| < \delta\}$$

$$= \{(x,y) \mid (x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta^2\}$$

นั่นคือ ถ้า P และ P_o เป็นจุดในปริภูมิสองมิติ

ย่านจุด P_o คือ จุดต่าง ๆ ที่อยู่ภายในบริเวณวงกลม ซึ่งมีจุด (x_o,y_o) เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว δ และไม่รวมจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม

และย่านจุด P แบบนี้เรียกว่า Circular neighborhood

จาก $|(x,y)-(x_o,y_o)| < \delta \Leftrightarrow |(x-x_o, y-y_o)| < \delta$

เพราะว่า $\quad |x-x_o| \leq |(x-x_o,y-y_o)| < \delta$

จะได้ว่า $\quad |x-x_o| < \delta$

และเพราะว่า $\quad |y-y_o| \leq |(x-x_o,y-y_o)| < \delta$

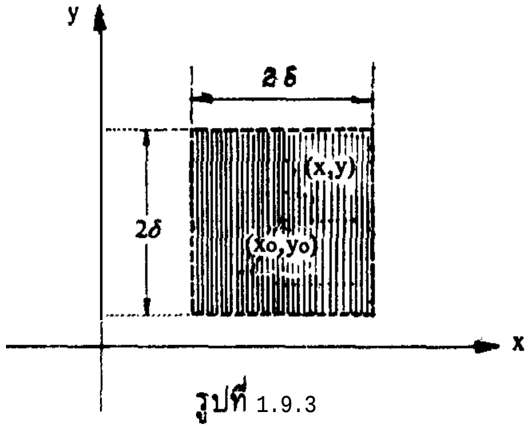
จะได้ $\quad |y-y_o| < \delta$

ถ้าพิจารณาจุด (x,y) ใด ๆ ที่อยู่ภายในสี่เหลี่ยมจตุรัส ซึ่งมีจุด (x_0,y_0) เป็นจุดศูนย์กลาง และสี่เหลี่ยมจตุรัสนี้ยาวด้านละ 2δ และจุด (x,y) ใด ๆ ซึ่งคล้องตามอสมการ (inequality)

$$|x-x_0| < \delta \text{ และ } |y-y_0| < \delta$$

เรียกว่า Square neighborhood ของจุด (x_0,y_0) ดังรูปที่ 1.9.3

และใช้สัญ ลักษณ์ $N(P_0,\delta)$ และ $N(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid |x-x_0|<\delta \text{ และ } |y-y_0<\delta\}$



รูปที่ 1.9.3

นิยาม 1.9.2 ย่านใกล้เคียงจุด Po (deleted neighborhood of Point Po) ใช้สัญ ลักษณ์ $N^*(P_0,\delta)$

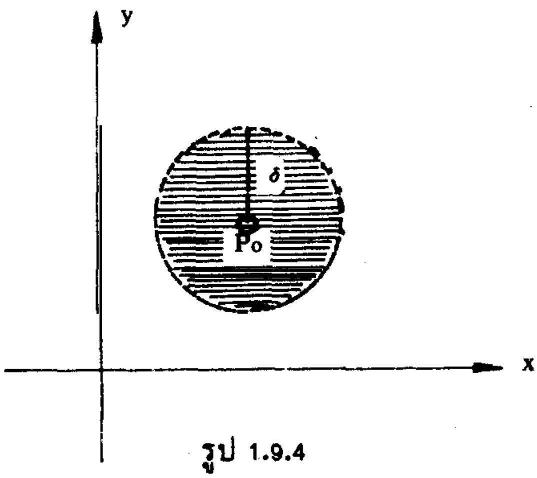
$$N^*(P_0,\delta) = \{P \mid 0 < |P-P_0| < \delta\}$$

จาก $0 < |P-P_0|$ ทำให้ทราบว่า $P \neq P_0$ แล้ว

$N^*(P_0,\delta)$ คือ ย่านจุด P_0 (Neighborhood of point Po) ที่ดึงเอาจุด Po ออก หรือ

$$N^*(P_0,\delta) = N(P_0,\delta) - \{P_0\}$$

ดังรูป 1.9.4



รูป 1.9.4

ตัวอย่าง 1.9.1 จงพิจารณาว่าจำนวนต่าง ๆ ต่อไปนี้ จำนวนใดเป็นสมาชิก N(3.0.J)

4,2.8,3.6,3.1, และ 3

วิธีทำ

เพราะว่า $N(x_o,\delta) = \{x | x_o - \delta < x < x_o + \delta\}$

ถ้า $x_o = 3, \delta = 0.5$ แล้ว $N(3,0.5) = \{x | 3 - 0.5 < x < 3 + 0.5\}$

$= \{x | 2.5 < x < 3.5\}$

เพราะว่า $2.5 < 4$ แต่ $4 \nless 3.5$

เพราะฉะนั้น 4 ไม่เป็นสมาชิก N(3,0.5)

เพราะว่า $2.5 < 2.0 < 3.5$

เพราะฉะนั้น 2.8 เป็นสมาชิก N(3,0.5)

เพราะว่า $2.5 < 3.6$ แต่ $3.6 \nless 3.5$

เพราะฉะนั้น 3.6 ไม่เป็นสมาชิก N(3,0.5)

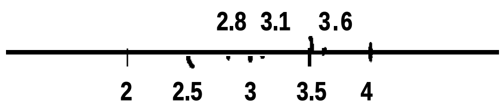
เพราะว่า $2.5 < 3.1 < 3.5$

เพราะฉะนั้น 3.1 เป็นสมาชิก N(3,0.5)

เพราะว่า $2.5 < 3 < 3.5$

เพราะฉะนั้น 3 เป็นสมาชิก N(3,0.5)

ดังรูป 1.9.5 #



รูป 1.9.5

ตัวอย่าง 1.9.2 จงพิจารณาว่าจุดใด ๆ ต่อไปนี้เป็นสมาชิก N((0, 0), 1)

$(1,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0,2) (0, \frac{1}{2})$ และ $(-1,0)$

วิธีทำ เพราะว่าจุดต่าง ๆ เหล่านี้อยู่บนระนาบ

ดังนั้น $N((0,0),1) = \{(x,y) | (x-0)^2 + (y-0)^2 < 1^2\}$

$= \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$

จุด (1,0) เพราะว่า $1^2+0^2 = 1$ ไม่น้อยกว่า 1

เพราะฉะนั้น (1,0) ไม่เป็นสมาชิก $N((0,0),1)$

จุด $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ เพราะว่า $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$

เพราะฉะนั้น (½,½) เป็นสมาชิก $N((0,0),1)$

จุด (0,2) เพราะว่า $0^2 + 2^2 = 0+4 = 4$ มากกว่า 1

เพราะฉะนั้น (0.2) ไม่เป็นสมาชิก(N(0,0),1)

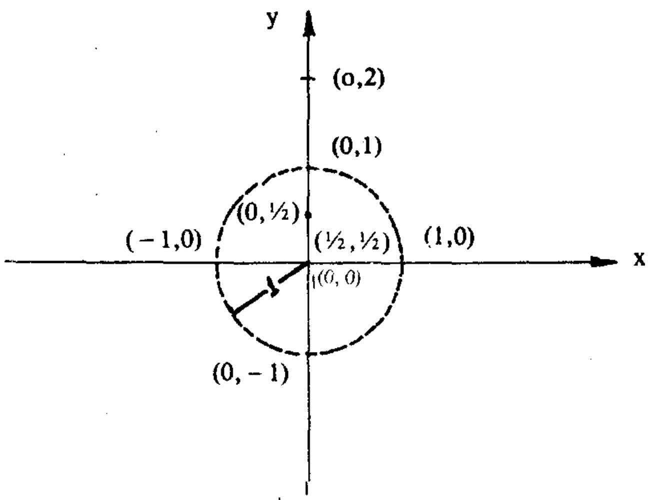
จุด $(0, \frac{1}{2})$ เพราะว่า $0^2 + (½)^2 = 0 + ¼ = ¼ < 1$

เพราะฉะนั้น (0,½) เป็นสมาชิก $N((0,0),1)$

จุด (– 1,0) เพราะว่า $(-1)^2 + (0)^2 = 1 + 0 = 1$ ไม่น้อยกว่า 1

เพราะฉะนั้น (– 1,0) ไม่เป็นสมาชิก N((0,0) , 1)

ดังรูป 1.9.6



รูป 1.9.6

#

ตัวอย่าง 1.9.3 จงพิจารณาจุดใด ๆ ต่อไปนี้เป็นสมาชิก square neighborhood ของ N(Po,δ)

เมื่อ PO = (1.1). δ = 1, (0,0), $(1, \frac{1}{2})$, $(1. \frac{3}{2})$ และ (1,2)

วิธีทำ เพราะจุดต่าง ๆ เหล่านี้อยู่บนระนาบ

ดังนั้น $N((1,1),1) = \{(x,y) \mid |x-1| < 1$ และ $|y-1| < 1\}$

จุด (0,0) เพราะว่า $|0-1| = |-1| = 1$ ไม่น้อยกว่า 1

$|0-1| = |-1| = 1$ ไม่น้อยกว่า 1

เพราะฉะนั้น จุด (0,0) ไม่เป็นสมาชิก square neighborhood ของ N((1,1),1)

จุด $(1,\frac{1}{2})$ เพราะว่า $|1-1| = |0| < 1$ และ

$$|\frac{1}{2}-1| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$$

เพราะฉะนั้น จุด $(1,\frac{1}{2})$ เป็นสมาชิก square neighborhood ของ $N((1,1),1)$

จุด $(1,3/2)$ เพราะว่า $|1-1| = |0| < 1$ และ

เพราะฉะนั้น $|3/2-1| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$

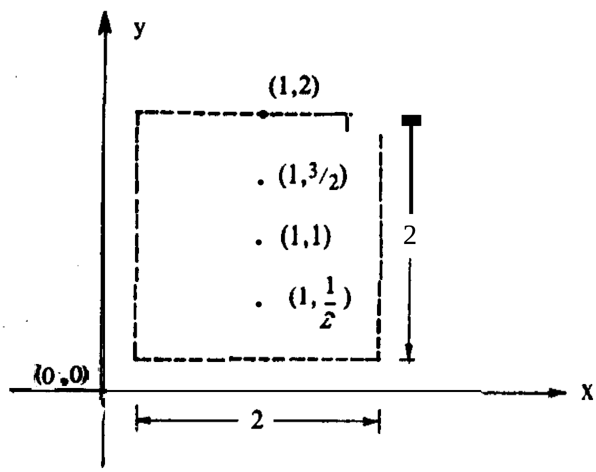
จุด $(1,3/2)$ เป็นสมาชิก square neighborhood ของ $N((1,1),1)$

จุด $(1,2)$ เพราะว่า $|1-1| = |0| = 0 < 1$ และ

$|2-1| = |1| = 1$ ไม่น้อยกว่า 1

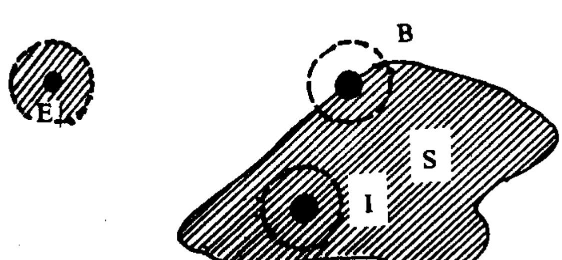
เพราะฉะนั้น จุด $(1,2)$ ไม่เป็นสมาชิก square neighborhood ของ $N((1,1),1)$

ดังรูป 1.9.7



รูป 1.9.7

ถ้า พิจารณาเซต S ดังรูปที่ 1.9.8



รูป 1.9.8

จะพบว่าเซต S นี้ประกอบด้วย หนึ่งสมาชิกที่อยู่ข้างในเซต S เช่น จุด I
สอง สมาชิกที่ไม่ได้อยู่ภายในเซต S เช่นจุด E
สาม สมาชิกที่อยู่ระหว่างส่วนภายในเซต S และภายนอกเซต S เช่น จุด B

ดังตัวอย่างทั้งสามจุดคือ **จุด I, จุด E และจุด B จะมีคุณสมบัติต่าง ๆ กัน** ถ้าเรากำหนด-**neighborhood ณ. จุดเหล่านั้น**

นิยาม 1.9.3 จุด I เป็น interior point ของเซต S ถ้ามีย่านจุด I, $N(I,\delta)$, **เป็น**สมาชิกของเซต S ทั้งหมด หรือมี $N(I,\delta) \subseteq S$

จากรูป 1.9.8 ณ.จุด I สามารถหาย่านจุด I ซึ่งเป็นสมาชิกของเซต S ทั้งหมด

นิยาม 1.9.4 จุด E ไม่เป็นสมาชิกของเซต S เป็น exterior point ของเซต S ถ้ามี ย่านจุด E, $N(E,\delta)$ **ไม่เป็น**สมาชิกของเซต S เลย หรือมีย่านจุด E เป็นสมาชิกของคอมพลีเมนต์ของเซต S ทั้งหมด หรือถ้ามี $N(E,\delta) \cap S = \phi$

จากรูป 1.9.8 ณ.จุด E สามารถหา neighborhood ของจุด E ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต S เลย

นิยาม 1.9.5 จุด B เป็น boundary point ของเซต S ถ้าทุก ๆ ย่านจุด B, $N(B,\delta)$ มีทั้งสมาชิกของเซต S และสมาชิกของคอมพลีเมนต์ของเซต S

จากรูป 1.9.8 ณ.จุด B ทุก ๆ ย่านจุด B จะมีทั้งสมาชิกของเซต S และสมาชิกของคอมพลีเมนต์ของเซต S

หมายเหตุ คอมพลีเมนต์ของเซต S คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่**ไม่เป็น**ของเซต S ทั้งหมด ใช้สัญลักษณ์ S^c ซึ่ง

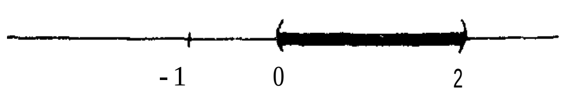
$$S^c = \{x | x \notin S\}$$

จากรูป 1.9.8 ส่วนที่ไม่ได้แรเงา และส่วนที่ไม่ใช่เส้นรอบรูป คือ คอมพลีเมนต์ของเซต S

นิยาม 1.9.6 เซตที่ประกอบด้วย boundary point ของเซต S ทั้งหมดเรียกว่า "boundary" ใช้สัญลักษณ์ "bdy (S)"

ตัวอย่าง 1.9.4 จงพิจารณา $S_1 = \{x | 0 < x < 2 \text{ และ } x \in R\}$

วิธีทำ ลองเขียนเซต S_1 จะได้ว่าคือ ช่วงเปิด (0,2) ดังรูป 1.9.9



รูปที่ 1.9.9

จะได้ว่า สมาชิกทุกตัวของเซต $S_1 = \{x|0<x<2\}$ เป็น interior point ของเซต S_1

เซต $\{x|x<0$ และ $x>2\}$ เป็น exterior point ของเซต S_1

จำนวน 0 และ 2 เป็น boundary point ของเซต S_1 #

ตัวอย่าง 1.9.5 จงพิจารณา $S_2 = \left\{x \,\middle|\, (x-21 < 5\right\}$

วิธีทำ ลองเขียนเซต S_2

จาก $|x-2| < 5 \Leftrightarrow -5<x-2<5$

$$\Leftrightarrow 2-5<x-2+2<5+2$$

$$\Leftrightarrow -3<x<7$$

ดังนั้น เซต $S_2 \Leftrightarrow \{x \mid |x-2| < 5\}$

$$\Leftrightarrow \left\{x \,\middle|\, -3<x<7\right\}$$

ดังรูป 1.9.10

รูป 1.9.10

สมาชิกทุกตัวของเซต S_2 = {x | -3cxc7) เป็น interior point ของเซต S_2

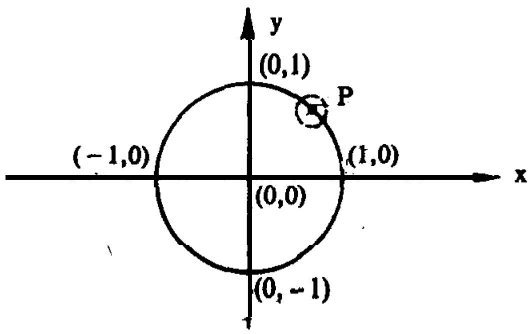
เซต S = {x | xc − 3 และ x > 7} เป็น exterior point ของเซต S_2

จำนวน − 3 และ 7 เป็น boundary point ของเซต S_2 #

ตัวอย่าง 1.9.6 จงพิจารณา $S_3 = \left\{(x,y) \,\middle|\, x^2+y^2 = 1\right\}$

วิธีทำ จาก $x^2+y^2 = 1$ คือวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางคือจุด (0,0) และรัศมี 1 หน่วย

ดังรูป 1.9.11



รูป 1.9.11

เซต S_3 ไม่มี interior point เพราะว่า

ถ้าให้จุด $P_1 \in S_3$ แล้วสร้าง $N(P_1,\delta)$ เราจะพบว่า $N(P_1,\delta)$ ประกอบด้วยสมาชิกของเซต S_3 (ส่วนที่เป็นเส้นรอบวงของวงกลม) และสมาชิกของคอมพลีเมนต์ของ S_3

$$S_3^c = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1 \text{ และ } x^2+y^2>1\}$$

เพราะฉะนั้นจุด $P_1 \in S_3$ เป็น boundary point ของ S_3

และเซต $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1 \text{ และ } x^2+y^2>1\}$ เป็น exterior point #

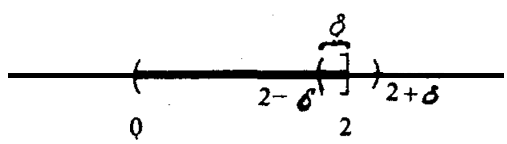
นิยาม 1.9.7 เซต S เรียกว่าเซตเปิด (open set) ถ้าสมาชิกทุก 9 ตัวของเซต S เป็น interior point ของเซต S

จากตัวอย่างที่ 1.9.4 และ 1.9.5 เซต S_1 และ S_2 เป็นเซตเปิด (open set)

แต่ตัวอย่างที่ 1.9.6 เซต S_3 ไม่เป็นเซตเปิด (open set) เพราะสมาชิกทุกตัวไม่เป็น interior point ของเซต S

ตัวอย่าง 1.9.7 จงพิจารณา $S_4 = \{x \mid 0<x\leq 2\}$

วิธีทำ เซต S_4 คือจำนวนซึ่งมากกว่า 0 แต่ไม่รวม 0 และน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2 ซึ่งรวม 2 ด้วย ดังรูป 1.9.12



รูป 1.9.12

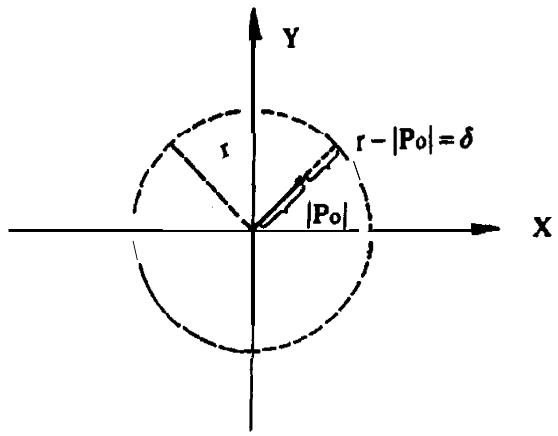
พิจารณา จำนวน 2 ซึ่ง $2 \in S_4$ ถ้าสร้าง $N(2,\delta)$ ซึ่งเป็นช่วงเปิด $(2-\delta, 2+\delta)$ ดังรูปที่ 1.9.12 เราจะพบว่าทุก ๆ ย่านจุด 2, $N(2,\delta)$ จะประกอบด้วยสมาชิกของเซต S_4 และสมาชิกของ- S_4^c เพราะฉะนั้น $N(2,\delta) \not\subset S_4$ และจะได้ว่า 2 ไม่เป็น interior point ของ S_4

ดังนั้นเซต S_4 ไม่เป็นเซตเปิด (open set) #

ตัวอย่าง 1.9.8 จงแสดงว่าเซต $S_5 = \{P \mid |P| < r\}$ เป็นเซตเปิด

วิธีทำ เราจะพิสูจน์ว่าเซต S_5 เป็นเซตเปิด เราจะต้องพิสูจน์ว่าสมาชิกทุก ๆ ตัวของเซต S_5 เป็น- interior point

สมมุติให้ $P_0 \in S_5$ แล้วเราจะได้ว่า $|P_0| < r$



จาก $|P_0| < r \Rightarrow r-|P_0| > 0$

ถ้าให้ $r-|P_0| = \delta$ ซึ่ง $\delta > 0$

ณ.จุด P_0 สร้าง neighborhood ของจุด P_0, $N(P_0, \delta/_2)$

ให้ $P_1 \in N\left(P_0, \frac{\delta}{2}\right)$ แล้วจะได้ว่า $|P_1 - P_0| < \frac{\delta}{2}$

พิจารณาว่า
$$\begin{aligned}
|P_1| &= |P_1+P_0-P_0| \\
&= |P_1-P_0+P_0| \\
&\leqslant |P_1-P_0| + |P_0| \\
&< \frac{\delta}{2} + |P_0| \quad \because |P_1-P_0| < \frac{\delta}{2} \\
&= \delta/_2 + r - \delta \quad \because |P_0| = r-\delta \\
&= r - \delta/_2 \\
&< r \quad \because r - \delta/_2 < r
\end{aligned}$$

นั้นแสดงว่า $P_1 \in S_5$

และ ได้ว่าทุก ๆ $P_1 \in N(P_0, \frac{\delta}{2})$ แล้ว $P_1 \in S_5$

เพราะฉะนั้น $N(P_0, \frac{\delta}{2}) \subseteq S_5$ และจะได้ว่าจุด P_0 เป็น interior point ของ S_5

ดังนั้น เซต S_5 เป็นเซตเปิด #

นิยาม 1.9.8 เซต S เรียกว่าเซต ปิด (closed set) ถ้าคอมพลีเมนต์ของเซต S (S^c) เป็นเซตเปิด (open set)

นิยาม 1.9.9 closure ของเซต S คือเซต S ผนวก (union) กับ boundary points

หรือ closure ของเซต S = S U bdy (S)

ตัวอย่าง 1.9.9 พิจารณา $S_6 = \{x | 1 \leqslant x \leqslant 5\}$

วิธีทำ

เพราะว่า S_6^c = [xl x < 1 และ x > 5] ซึ่งเป็นเซตเปิด (open set)

เพราะฉะนั้น $S_6 = \{x| 1 \leq x \leq 5\}$ เป็นเซต ปิด

boundary ของเซต S $(bdyS) = \{1,5\}$

และ Closure ของเซต S $= S \cup bdyS$

$= \{x| 1 \leq x \leq 5\} \cup \{1,5\}$

$= [\ x \ | 1 \leq x \leq 5\}$

$= S$

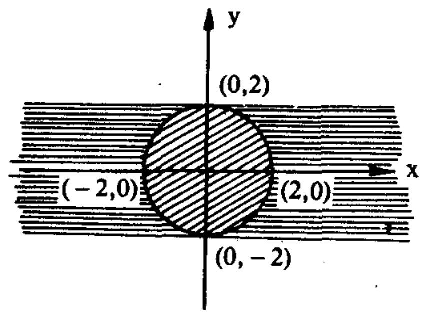
นิยาม 1.9.10 เซต S เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set) ถ้ามีจำนวน M ซึ่ง $|P| < M$ สำหรับทุก ๆ $P \in S$

ตัวอย่าง 1.9.10 พิจารณา $S_7 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

วิธีทำ

เพราะว่า $S_7^c = \{(x,y) \mid x^2+y^2<4$ และ $x^2+y^2>4\}$

ดังรูป 1.9.13 พื้นที่ที่แรเงา เซต S_7^c เป็นเซตเปิด



รูป 1.9.13

เพราะฉะนั้นเซต S เป็นเซตปิด #

boundary ของเซต S (bdyS) = $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4)$ #

Closure ของเซต S = S ∪ bdyS

$= \{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$ u $\{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$

$= \{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$

$= S$

พิจารณาว่าเซต S_7 เป็นเซตที่มีขอบเขตหรือไม่

เพราะว่า $|P| = |(x,y)|$ สำหรับ $P \in S_7$

$= \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{4} = 2 < 3$ ถ้าให้ M = 3

∴ $|P| < 3$

เพราะฉะนั้นเซต S_7 เป็นเซตที่มีขอบเขต

#

ทฤษฎีบท 1.9.1 ถ้า เซต A และเซต B เป็นเซตเปิด แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์

เพราะว่า $A \subseteq A \cup B$ และ $B \subseteq A \cup B$ สำหรับ a ใด ๆ ซึ่ง

$$a \in (A \cup B) \Leftrightarrow a \in A \text{ หรือ } a \in B$$

ถ้า $a \in A$ แต่ A เป็นเซตเปิด แล้ว a จะต้องเป็น interior point ของเซต A นั่นคือจะต้องมี $N(a,\delta) \subsetneq A$ แต่ $A \subsetneq (A \cup B)$ แล้วได้ว่า

$$N(a,\delta) \subsetneq A \subsetneq A \cup B$$

$$N(a,\delta) \subsetneq A \cup B$$

นั่นคือ สำหรับ a ใด ๆ ซึ่ง $a \in (A \cup B)$ จะมี $N(a,\delta) \subsetneq A \cup B$ แสดงว่า a เป็น interior point ของ $A \cup B$

ดังนั้น $A \cup B$ เป็นเซตเปิด #

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a \in B$ แต่ B เป็นเซตเปิด แล้ว จะพิสูจน์ได้ว่า $A \cup B$ เป็นเซตเปิด

#

ทฤษฎีบท 1.9.2 ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตเปิดแล้ว $A \cap B$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์

เพราะว่า $A \cap B \subsetneq A$ และ $A \cap B \subsetneq B$ สำหรับ a ใด ๆ ซึ่ง $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$ และ $a \in B$ เนื่องจาก A และ B เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้นจะมี $N(a,\delta_1) \subsetneq A$ และ $N(a,\delta_2) \subsetneq B$

แล้ว $\quad N(a,\delta_1) \cap N(a,\delta_2) \subsetneq A \cap B \qquad (1)$

$\quad N(a,\delta_1) \subsetneq A \cap B$ ถ้า $\delta_1 < \delta_2 \qquad (2)$

หรือ $N(a,\delta_2) \subsetneq A \cap B$ ถ้า $\delta_2 < \delta_1 \qquad (3)$

จากสมการ (2) และ (3)

แสดงว่าจะมีย่านจุด a (neighborhood) เป็นเซตย่อย (Subset) ของ $A \cap B$ และจะได้ว่า a เป็น interior point ของ $A \cap B$

ดังนั้น $A \cap B$ เป็นเซตเปิด #

ทฤษฎีบท 1.9.3 ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตปิด แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์

จากนิยาม 1.9.8 A เป็นเซตปิด ถ้า A^c เป็นเซตเปิด และ B เป็นเซตปิด ถ้า B^c เป็นเซตเปิด จาก De Morgan's law

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (1)$$

เพราะว่า A^c และ B^c เป็นเซตเปิด ฉะนั้น $A^c \cap B^c$ เป็นเซตเปิด

จากสมการ (I)

$$(A \cup B)^c \text{ เป็นเซตเปิด}$$

จากนิยาม 1 .9.8

$$A \cup B \text{ เป็นเซตปิด}$$

#

ทฤษฎีบท 1.9.4 ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตปิดแล้ว $A \cap B$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์

จากนิยาม 1.9.8 A เป็นเซตปิด ถ้า A^c เป็นเซตเปิด และ B เป็นเซตปิด ถ้า B^c เป็นเซตเปิด

จาก De Morgan's law

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad (1)$$

เพราะว่า A^c และ B^c เป็นเซตเปิด ฉะนั้น $A^c \cup B^c$ เป็นเซตเปิด

จากสมการ (I)

$$(A \cap B)^c \text{ เป็นเซตเปิด}$$

จากนิยาม 1.9.8

$$A \cap B \text{ เป็นเซตปิด}$$

#

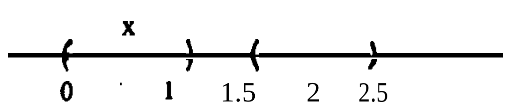
นิยาม 1.9.11 **จุดเอกเทศ (Isolated point)**

จุด P เป็นสมาชิกของเซต A เป็นจุดเอกเทศ (Isolated point) ถ้ามีย่านจุด P. $N(P,\delta)$ ไม่มีสมาชิกของเซต A เลย ยกเว้นจุด P เพียงจุดเดียว หรือ $N(P,\delta) \cap A = p$

ตัวอย่าง 1.9.11

กำหนดให้ $A = \{x \mid 0 < x < 1 \text{ และ } x \in R\} \cup \{2\}$ หาจุดเอกเทศ

วิธีทำ เซต A อาจแสดงได้ดังรูป 1.9.14



รูป 1.9.14

เพราะว่ามี $N(2,.5) = \{x \mid 1.5 < x < 2.5\}$ ซึ่ง $N(2,.5) \cap A = 2$

เพราะฉะนั้น จุดเอกเทศของเซต A คือ 2 #

ตัวอย่าง 1.9.12

กำหนด $A = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ จงพิจารณา

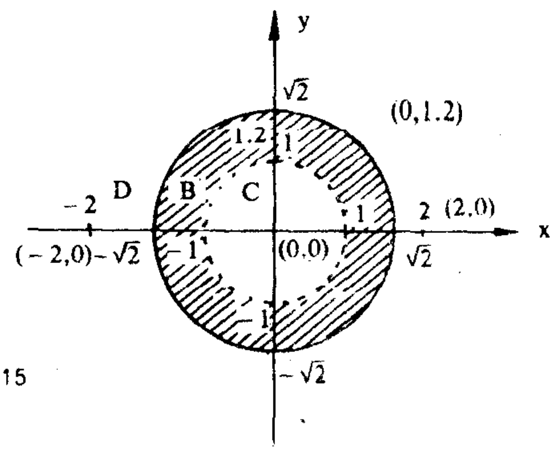
1. เซต A เป็นเซตเปิดหรือเซตปิด
2. boundary ของเซต A คืออะไร
3. เซต A เป็นเซตที่มีขอบเขตหรือไม่
4. จงยกตัวอย่างของ interior point, exterior point และ boundary point มาอย่างละจุด

วิธีทำ

ลองเขียนรูปเพื่อแสดงบริเวณของเซต A

เพราะว่า $x^2 + y^2 = 1$ เป็นสมการวงกลมรัศมี 1 หน่วย จุดศูนย์กลางที่ (0,0) แต่ จากโจทย์กำหนด $x^2 + y^2 > 1$ แสดงว่าไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง

และ $x^2 + y^2 = 2$ เป็นสมการวงกลมรัศมี $\sqrt{2}$ จุดศูนย์กลางที่ (0,0) แต่ โจทย์กำหนด $x^2 + y^2 \leqslant 2$ แสดงว่ารวมจุดบนเส้นรอบวงด้วย ดังรูป 1.9.15



รูป 1.9.15

และวงกลมสองวงนี้จะแบ่งระนาบออกเป็นสามส่วนคือ D, B, C ลองกำหนดจุดที่อยู่ในแต่ละส่วน แล้วแทนในเซต A ถ้าจุดใดคล้องตามคุณสมบัติของเซต A แสดงว่า ส่วนที่จุดนั้นอยู่คือบริเวณของเซต A

เช่น

จุด $(-2,0)$ อยู่ในบริเวณ D

เพราะว่า $x^2 + y^2 = (-2)^2 + 0^2 = 4$

ซึ่ง $1 < 4 \nleqslant 2$ ซึ่งไม่จริง

เพราะฉะนั้น บริเวณ D ไม่ใช่เซต A

จุด (0,1.2) อยู่ในบริเวณ B

เพราะว่า $x^2+y^2 = 0^2+(1.2)^2 = 1.44$

ซึ่ง $1 < 1.44 < 2$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น บริเวณ B คือขอบเขตของเซต A

1. เพราะว่า จุดต่าง ๆ บนเส้นรองวงรัศมี $\sqrt{2}$ เป็นสมาชิกของเซต A แต่ไม่เป็น interior point

   เพราะฉะนั้น เซต A ไม่เป็นเซตเปิด

   และเซต $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$ เป็นคอมพลีเมนต์ของเซต A ซึ่งเป็นเซตปิด

   และเซต $\{(x,y) \mid x^2+y^2 > 2\}$ เป็นคอมพลีเมนต์ของเซต A ซึ่งเป็นเซตเปิด

   เพราะคอมพลีเมนต์ของเซต A ไม่เป็นเซตเปิดทั้งหมด

   เพราะฉะนั้น เซต A ไม่เป็นเซตปิด #

2. boundary ของเซต A คือ

$$B = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1 \text{ และ } x^2+y^2=2\}$$

#

3. เซต A เป็นเซตที่มีขอบเขต เพราะว่ารัศมีที่ยาวที่สุดของเซต A คือ 2

   ถ้าให้รัศมีเป็น $\sqrt{5}$ และจุดศูนย์กลางคือ (0, 0) แล้ว จุด (x, y) ใด ๆ ที่เป็นสมาชิกของเซต A จะต้องได้ว่า $x^2+y^2 < 5$

   และ $|x^2+y^2| < |5| = 5$ สำหรับ $(x,y) \in A$

   แสดงว่าเซต A มีขอบเขต #

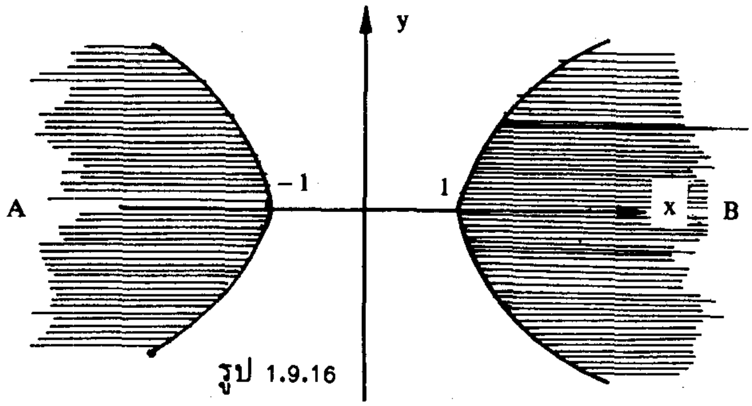
4. จุด (0,1.2) เป็น interior point

   จุด (0,0) เป็น exterior point

   จุด $(0,\sqrt{2})$ เป็น boundary point

เซตต่าง ๆ บางทีก็สามารถแบ่งเป็นหลายส่วนได้

เช่น $S = \{(x,y) \mid x^2-y^2 \geqslant 1\}$ ซึ่งบริเวณของเซต S แสดงได้ดังรูป 1.9.16

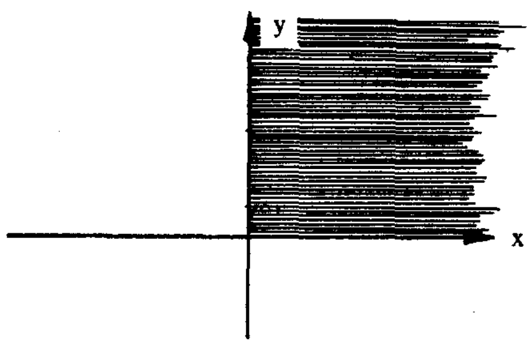


รูป 1.9.16

จากรูปเซต S ประกอบด้วยเซต A และเซต B หรือ $S = A \cup B$

และเซตต่าง ๆ บางทีก็ประกอบเพียงส่วนเดียว

เช่น $R = \{(x,y) \mid xy \geqslant 0$ และ $x \geqslant 0$ และ $y \geqslant 0\}$ เป็นจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนระนาบใน quadrant ที่ 1 ดังรูป 1.9.17



รูป 1.9.17

จากเซต R และ S ที่แสดงให้ดู ก็จะกล่าวถึงนิยามต่อไปนี้

นิยาม 1.9.12 เซต S เป็นเซตย่อยของ R^n เป็นเซตไม่ขาดตอน (Connected set) ถ้าเซต S ไม่สามารถแยกออกเป็นสองเซต A และ B ที่ disjoint กัน ($A \cap B = \phi$) ซึ่ง $A \neq \phi$, $B \neq \phi$

นิยาม 1.9.13 เซต S เป็นเซตย่อยของ R^n เป็นเซตขาดตอน (disconnected set) ถ้า เซต S คือยูเนียนของเซตสองเซต A และ B ($S = A \cup B$) ซึ่ง A#@, $B \neq \phi$

และเซต A disjoint กับ Closure ของเซต B,

และเซต B disjoint กับ Closure ของเซต A

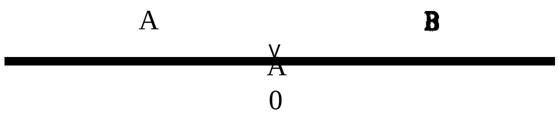
ตัวอย่าง 1.9.18

กำหนด $S_1 = \{x \mid |x| > 0$ และ $x \in R\}$

จงพิจารณาว่า เซต S_1 เป็น Connected set หรือ disconnected set

วิธีทำ เพราะว่า $|x| > 0$

จากค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า $x>0$ และ $x<0$ ซึ่งสามารถเขียนบริเวณของเซต S_1 ได้ ดังรูป 1.9.18



รูป 1.9.18

จากรูปจะได้ว่า

$S_1 = A \cup B$ พิจารณา

ข้อที่ 1 $A = \{x \mid x<0$ และ $x \in R\}$, $A \neq \phi$

และ $B = \{x \mid x>0|$ และ $x \in R\}, |B \neq \phi$

ข้อที่ 2 $A \cap B = \phi$

ข้อที่ 3

เพราะว่า Closure ของเซต $A = \{x \mid x \leqslant 0$ และ $x \in R\} \cap B = \phi$

และ Closure ของเซต $B = \{x \mid x \geqslant 0$ และ $x \in R\} \cap$ A=@

จากนิยาม 1.9.13

เซต S_1 เป็นเซตที่ขาดตอน (disconnected) #

ตัวอย่าง 1.9.14

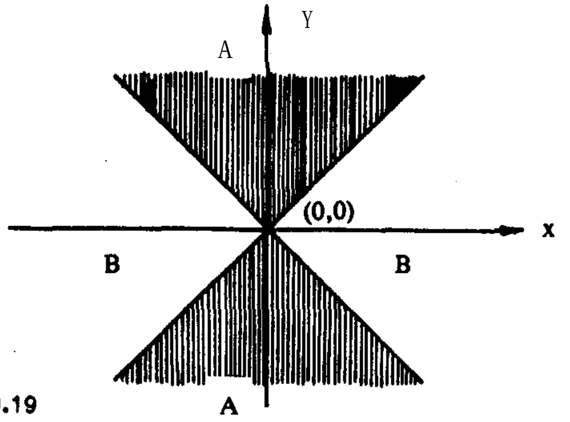
กำหนด $S_2 = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 \leqslant 0\}$

จงพิจารณาว่า เซต S_2 เป็น Connected set หรือ disconnected set

วิธีทำ

หาบริเวณของเซต S_2 9-m
$$x^2 - y^2 = 0$$
$$x^2 = y^2$$
$$x = \pm y$$

เมื่อแก้สมการจะได้ว่า $x = \pm y$ ซึ่งเป็นเส้นตรงสองเส้น ดังรูป 1.9.19



รูป 1.9.19

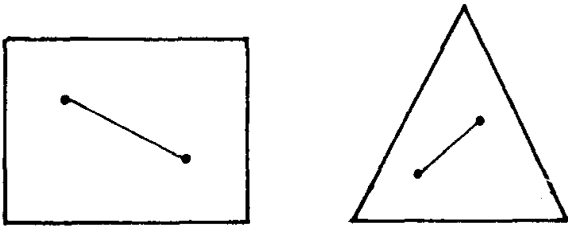
และแบ่งระนาบออกเป็นสองส่วน A และ B

เลือกจุด (0,2) $\in$ A ซึ่งเป็นสมาชิกของเซต S_2 เพราะว่า $0^2-(2)^2 = -4 \leqslant 0$ ซึ่งเป็นคุณสมบัติของเซต S_2

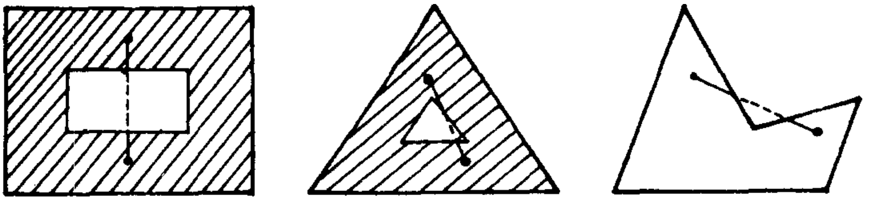
เพราะฉะนั้นบริเวณ A คือเซต S_2 ($A = S_2$) และบริเวณ A นี้ต่อเนื่องกันโดยจุด (0,0)

ดังนั้นเซต S_2 เป็น Connected set #

ในระนาบบริเวณ C เรียกว่า "Convex" ถ้ากำหนดจุดสองจุดใด ๆ ในบริเวณ C แล้วส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุดทั้งสองก็อยู่ในบริเวณ C ด้วย



รูปที่ 1.9.20



รูปที่ 1.9.21

รูปที่ 1.9.20 แสดงบริเวณที่เป็น Convex เพราะเมื่อกำหนดจุดสองจุดใด ๆ ในบริเวณนี้แล้ว ส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุดทั้งสองก็ยังอยู่ในบริเวณนี้

รูปที่ 1.9.21 แสดงบริเวณที่ไม่เป็น Convex เพราะเมื่อกำหนดจุดสองจุดใด ๆ ในบริเวณแล้ว ส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุดทั้งสองมีบางส่วนที่ไม่อยู่ในบริเวณนี้

นิยาม 19.14 เซต C ในปริภูมิ n มิติเป็น Convex ถ้าจุด P และ Q เป็นจุดสองจุดใน C แล้วจุด $\lambda P+(1-\lambda)Q$, $0<\lambda<1$ ต่าง ๆ ก็ยังอยู่ในบริเวณ C

จากจุด $\lambda P + (1-\lambda)Q,\ 0<\lambda<1$

ถ้า $\lambda=0$ ก็คือจุด $(1-0)Q = Q$

ถ้า $\lambda=1$ ก็คือจุด $1P+(1-1)Q = P$

ถ้า $\lambda=\frac{1}{2}$ ก็คือจุด $\frac{1}{2}P+(1-\frac{1}{2})Q = \frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q = \frac{P+Q}{2}$

ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ เพราะฉะนั้น ถ้า $0<\lambda<1$, จุด $\lambda P+(1-\lambda)Q$ คือเซตของจุดต่าง ๆ ที่อยู่ระหว่างจุด P และ Q

จากนิยาม 1.9.14 จะกล่าวว่าเซต C เป็น convex ถ้ากำหนดจุดสองจุดในเซต C แล้ว จุดต่าง ๆ ที่อยู่ระหว่างจุดทั้งสองก็ยังอยู่ในเซต C

ตัวอย่าง 1.9.15 $S_1 = \{x \mid |x| > 0 \text{ และ } x\in R\}$

จงพิจารณาว่า เซต S เป็น Convex หรือไม่

วิธีทำ จาก $|x| > 0$ จะได้ว่า

$x > 0$ และ $x < 0$

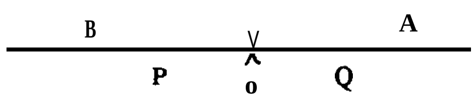
แล้ว เซต $S_1 = \{x \mid x>0 \text{ และ } x\in R\} \cup \{x \mid x<0 \text{ และ } x\in R\}$

$= A\cup B$

ถ้า $A = \{x \mid x>0 \text{ และ } x\in R\}$

$B = \{x \mid x<0 \text{ และ } x\in R\}$

และบริเวณของเซต S_1 แสดงได้ดังรูป 1.9.22



รูป 1.9.22

จากเซต S_1 เลข 0 ไม่อยู่ภายในเซตนี้

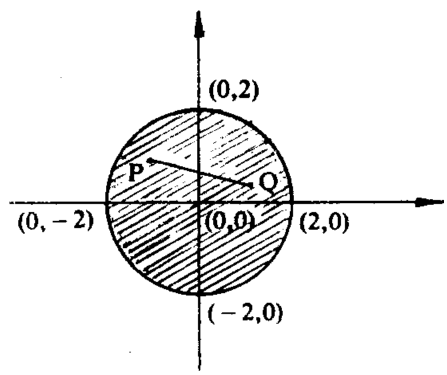
ถ้าให้ $P \in B$ และ $Q \in A$ แล้วเซตของจุดต่าง ๆ ที่อยู่ระหว่าง P และ Q คือ $\lambda P + (1-\lambda)Q$, $0 < \lambda < 1$ จะมีอยู่หนึ่งจุดคือ เลข 0 จะไม่อยู่ในเซต S_1 เพราะฉะนั้น เซต S_1 ไม่เป็น Convex

#

ตัวอย่าง 1.9.16 จงแสดงว่า เซต $S_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 4\}$ เป็น Convex

วิธีทำ

ให้จุด P และ Q เป็นจุดสองจุดในเซต S_2 และ เซต S_2 เป็นจุดต่าง ๆ ที่อยู่ภายในวงกลมหรือบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 2 หน่วย และจุด (0,0) เป็นจุดศูนย์กลาง ดังรูป 1.9.23



รูป 1.9.23

เพราะว่า $P \in S_2$, $Q \in S_2$ จะได้ว่า $|P| \leqslant 2$ และ $|Q| \leqslant 2$ เมื่อ $|P|$ และ $|Q|$ เป็นระยะทางจากจุด P และ Q มายังจุดกำเนิด (0.0)

แล้วจะต้องแสดงว่าระยะทางทางจุด $\lambda P + (1-\lambda)Q$, $0<\lambda<1$ ต่าง ๆ มายังจุด (0,0) จะต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2 $(|\lambda P + (1-\lambda)Q| \leqslant 2)$

พิจารณา $|\lambda P + (1-\lambda)Q| \leqslant |\lambda P| + |(1-\lambda)Q|$

$$= \lambda|P| + |(1-\lambda)Q| \quad \because \lambda > 0$$

$$= \lambda|P| + (1-\lambda)|Q| \quad \because 1-\lambda > 0$$

$$\leqslant 2\lambda + (1-\lambda)2 \quad \because |P| \leqslant 2,\ |Q| \leqslant 2$$

$$= 2\lambda + 2 - 2\lambda$$

$$= 2$$

เพราะฉะนั้น $|\lambda P + (1-\lambda)Q| \leqslant 2$ แสดงว่าจุดต่าง ๆ ที่อยู่ระหว่าง P และ Q เป็นสมาชิกของเซต S_2

ดังนั้น เซต S_2 เป็น Convex

#

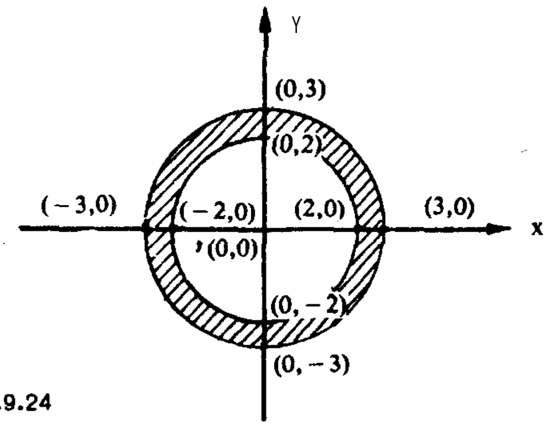
ตัวอย่าง 1.9.17 กำหนด $S_2 = \{(x,y) \mid 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9\}$

จงพิจารณาว่า เซต S_2 เป็น Convex หรือไม่

วิธีทำ

เพราะว่า $x^2+y^2 \leqslant 9$ เป็นบริเวณที่อยู่ภายในวงกลมรัศมี 3 หน่วย จุดศูนย์กลางคือจุด (0,0)
และ $4 \leqslant x^2+y^2$ เป็นบริเวณที่อยู่ภายนอกวงกลมรัศมี 2 หน่วยจุดศูนย์กลางคือจุด (0,0)

จากทั้งสองสมการสามารถหาบริเวณของเซต S_2 ได้ดังรูป 1.9.24



รูป 1.9.24

เพราะว่าจุด (−2,0) และ (2,0) เป็นจุดสองจุดที่เป็นสมาชิกของเซต S_2 และอยู่บนแกน x และเส้นตรงที่ลากต่อจุดทั้งสองก็ผ่านจุด (0,0) นั่นคือจุด (0,0) ก็อยู่บนส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุดทั้งสอง

$$\text{และ } 0^2+0^2 = 0 \text{ ซึ่ง } 4 \nleqslant 0 \nleqslant 9$$

แสดงว่า จุด (0,0) ไม่เป็นสมาชิกของเซต S_2

เพราะฉะนั้น เซต S_2 ไม่เป็น Convex

#

แบบฝึกหัด 1.9

จงพิจารณาเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 จงแสดงบริเวณของเซตที่กำหนดให้

1.2 เซตเปิด หรือ เซตปิด

1.3 boundary ของเซตคือเซตอะไร

1.4 Closure ของเซตที่กำหนดให้คือเซตอะไร

1.5 เป็น bounded set หรือไม่

1.6 เป็น Connected หรือ disconnected

1.7 เป็น Convex หรือไม่

1.8 จงยกตัวอย่างของ interior point, exterior point, และ boundary point มาอย่างละหนึ่งจุด

1) $S_1 = \{x \mid |x| \leqslant 5$ และ $x \in R\}$

2) $S_2 = \{x \mid |x| > 3$ และ $x \in R\}$

3) $S_3 = \{(x,y) \mid x$ และ y เป็นจำนวนเต็ม$\}$

4) $S_4 = \{(x,y) \mid x \geqslant 0\}$

5) $S_5 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$

6) $S_6 = \{(x,y) \mid 4 < x^2 + y^2 \leqslant 16\}$

7) $S_7 = \{(x,y) \mid x = y\}$

8) $S_8 = \{(x,y) \mid y - x^2 \; 6 \; 0\}$

9) $S_9 = \{(x,y) \mid x + y^2 \geqslant 0\}$

10) $S_{10} = \{(x,y) \mid x\,2 - J - I = 0\}$

11) $S_{11} = \{(x,y) \mid xy > 0\}$

12) $S_{12} = \{(x,y) \mid 2x^2 + 3y^2 = 6\}$