บทที่ 6

ทฤษฎีบทค่าตัวกลางและกฎของโลปิตาล
(Mean Value Theorem and l'Hôpital's rule)

6.1 คำนำ คุณสมบัติของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเดียวเกี่ยวข้องกับการหาอนุพันธ์ จากแคลคูลัสเบื้องต้น นักศึกษาคงจำได้ว่า

f กล่าวได้ว่าหาอนุพันธ์ได้ที่ x_0 ถ้า f ถูกกำหนดขึ้นให้มีค่าบนย่านจุด x_0 และถ้า $f'(x_0)$-หาค่าได้ และกำหนดขึ้นโดย

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x_0)}{h}$$

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ เป็นความไม่ต่อเนื่องที่ขจัดได้

การประยุกต์แคลคูลัสในการหาอนุพันธ์ที่พบกันบ่อย ๆ ก็คือ ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด กล่าวว่า f มีค่าสูงสุดเฉพาะที่ (local maximum) ที่ x_0 ถ้ามี ย่านจุด x_0 เรียกว่าประกอบด้วย x_0 ซึ่ง $f(x) \leqslant f(x_0)$ สำหรับทุก $x \in U$ สำหรับค่าต่ำสุด เฉพาะที่ (local minimum) นิยาม คล้าย ๆ กันว่า f มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่ x_0 ถ้ามีย่านจุด x_0 เรียกว่า U ประกอบด้วย x_0 ซึ่ง $f(x) \geqslant f(x_0)$ สำหรับทุก $x \in U$ คำว่า f มีค่าสุดขีด (extreme value) ที่ x_0 หมายความว่า f อาจมีค่าสูงสุดเฉพาะที่หรือไม่ก็มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่ x_0

ทฤษฎี 6.1.1 ให้ f ถูกกำหนดบนย่านจุด x_0 และมีค่าสุดขีดเฉพาะที่ (local extreme value) ที่ x_0 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x_0 และ $f'(x_0) = 0$

พิสูจน์ สมมุติว่า $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ สำหรับทุก h ซึ่ง $|h| < \delta$ และ

$$C = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0}{h} = f'(x_0)$$ มีค่า

ค่าลิมิตนี้คำนวณได้โดยการให้ h เข้าใกล้ 0 จากทางขวา และเข้าใกล้ 0 จากทางซ้าย จึงพบว่า

MA 214 269

$$C_1 = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

และ

$$C_2 = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

เนื่องจาก f มีอนุพันธ์ที่ x_0 ดังนั้น $C = C_1 = C_2 = 0$

นั่นคือ $f'(x_0) = 0$ **ช.ต.พ.**

ข้อควรจำ $f'(x_0)$ ไม่จำเป็นต้องเป็น 0 ถ้า x_0 เป็นจุดปลาย ซึ่งไม่ใช่จุดข้างใน (interior point) ของ U ดังนั้น การใช้ทฤษฎีนี้ในปัญหาค่าต่ำสุดและสูงสุดของฟังก์ชัน พิจารณาแยกจากกันกับความเป็นไปได้ของค่าสุดขีดที่จุดปลาย (endpoint) ของกราฟ

ทฤษฎี 6.2.1 ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem) ให้ f ต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] และให้ $f'(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก $x \in (a, b)$ ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้วย่อมมีจุด x_0 อย่างน้อยหนึ่งจุด ซึ่ง $f'(x_0) = 0$

พิสูจน์ 1) ถ้า f มีค่าคงที่ก็สามารถเลือก x_0 ใด ๆ ซึ่ง

$x_0 \in (a, b)$ แล้ว $f'(x_0) = 0$ เสมอ

2) ถ้า f มีค่าไม่คงที่แล้ว f ย่อมมีค่าสูงสุดเฉพาะที่ หรือต่ำสุดเฉพาะที่ที่จุดข้างใน $x_0 \in (a, b)$ และเนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ใน (a, b) ดังนั้น $f'(x_0) = 0$

ช.ต.พ.

บทแทรก 6.2.1 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) แล้วค่าที่ศูนย์ถูกแบ่งแยกโดยค่า 0 ของ f' หมายความว่า ถ้า $f(c) = 0$ และ $f(d) = 0$ และ d อยู่ใน (a, b) หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) แล้ว ย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งค่า $x_0 \in (c, d)$ ซึ่ง $f'(x_0) = 0$

บทแทรก 6.2.2 ให้ f และ g ต่อเนื่องบน [a, b] และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) สมมุติว่า $f(a) = g(a)$ และ $f(b) = g(b)$ แล้วย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด $x_0 \in (a, b)$ ซึ่ง $f'(x_0) = g'(x_0)$

ทฤษฎีบท 6.2.2 ทฤษฎีค่าตัวกลาง (Mean Value Theorem) ให้ f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และให้ $f'(x)$ มีค่าที่ทุก $x \in (a, b)$ แล้วย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด $x_0 \in (a,$ ซึ่ง

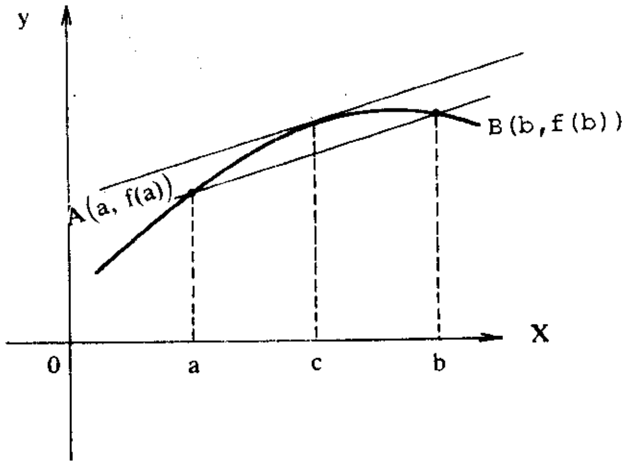
$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_0)$$

ก่อนพิสูจน์ทฤษฎีค่าตัวกลาง ขอให้มาทำความเข้าใจในเชิงเรขาคณิต ถ้าเราเขียนกราฟของฟังก์ชัน f พบว่า $\dfrac{[f(b) - f(a)]}{b - a}$ คือความชันของเซกเมนต์

ที่เชื่อมจุด $A(a, f(a))$ และจุด $B(b, f(b))$

ทฤษฎีค่าตัวกลางกล่าวว่า จะมีบางจุดบนเส้นโค้งระหว่าง A กับ B ซึ่งเส้นสัมผัสโค้งที่จุดนั้น ขนานกับเส้นที่เชื่อม A กับ B นั่นคือ มีบางจำนวน c ใน (a, b) ซึ่ง

$$\frac{f'(c) = f(b) - f(a)}{b - a}$$



รูป 6.1

พิสูจน์ สมการเส้นตรงที่เชื่อม A และ B คือ

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

หรือ $$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

ถ้าให้ $F(x)$ เป็นระยะทางในแนวดิ่ง ระหว่างจุด $(x, f(x))$ บนกราฟของฟังก์ชัน f และจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อม A กับ B

ดังนั้น $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$

จะเห็นว่า ฟังก์ชัน F สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์ ฟังก์ชัน F ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เพราะว่า F เป็นผลบวกของ f และฟังก์ชันพหุนามเชิงเส้น ซึ่งทั้งสองต่อเนื่องบน $[a, b]$ ดังนั้น F สอดคล้องตาม (i) และ F สอดคล้องตาม (ii) เนื่องจาก f มีอนุพันธ์บน (a, b) จาก (1) $F(a) = 0$ และ $F(b) = 0$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทของโรลล์ จะมีจำนวน c ในช่วงเปิด (a, b) ซึ่ง $F'(c) = 0$

แต่

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

นั่นคือ จะมีจำนวน c ใน (a, b) ซึ่ง

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

หรือ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ตัวอย่าง 1 กำหนด $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$

จงแสดงว่า เมื่อ $a = 1$ และ $b = 3$ ฟังก์ชันสอดคล้อง สมมุติฐานของทฤษฎีค่าตัวกลาง และจงหาจำนวน c ในช่วงเปิด $(1, 3)$ ซึ่ง $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$

วิธีทำ $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$

$f(1) = -7$ และ $f(3) = -27$

ดังนั้น $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{-27 - (-7)}{2} = -10$

ให้ $f'(c) = -10$

$\therefore \quad 3c^2 - 10c - 3 = -10$

หรือ

$$3c^2 - 10c + 7 = 0$$

หรือ

$$(3c - 7)(c - 1) = 0$$

จะได้ว่า $c = \frac{7}{3}$ และ $c = 1$

เพราะว่า $c = 1$ ไม่อยู่ในช่วงเปิด $(1, 3)$ ฉะนั้น c มีค่าเป็น $\frac{7}{3}$ ‖

ตัวอย่าง 2 กำหนด $f(x) = x^3$ จงหาค่าที่เหมาะสมของ c เมื่อ $a = -1$ และ $b = 2$

วิธีทำ

$$f'(x) = 3x^2$$

$$b^3 - a^3 = (b - a)\, 3c^2$$

เมื่อ $a = -1,\ b = 2$ จะได้ว่า

$$8 - (-1)^3 = \big(2 - (-1)\big)\, 3c^2$$

หรือ $c^2 = 1$

แก้สมการได้ $c = \pm 1$ เราต้องการค่า c ซึ่ง $a < c < b$

หรืออีกนัยหนึ่ง $-1 < c < 2$

ดังนั้น $c = 1$ คือค่าที่เหมาะสม

ทฤษฎีบท 6.2.3 ทฤษฎีบทค่าตัวกลางทั่วไป (general Mean Value Theorem) ให้ f และ g ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และให้ $f'(x)$ และ $g'(x)$ ทั้งสองมีค่าบน (a, b) แล้ว ย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด $x_0 \in (a, b)$ ซึ่ง

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0)$$

พิสูจน์ ถ้า $f'(x) = 0$ บนช่วง (a, b) ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคงที่

ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายเลยบนช่วง (a, b) ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวหรือเพิ่มอย่างเดียว (monotonic function)

ถ้า g เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

หรือฟังก์ชันกำลังหนึ่ง คือ $g(x) = x$ หรือ $g(x) = mx + c$ ทฤษฎีนี้ก็คือ ทฤษฎีค่าตัวกลาง 6.2.2

ในการพิสูจน์ เราจะสร้างฟังก์ชันพิเศษ F โดยให้

$$F(x) = f(x) - K\,g(x)$$

เพื่อว่าเราจะได้นำ ทฤษฎีบทของโรลล์มาใช้

K เป็นค่าคงที่ที่จะเลือกในภายหลัง จากฟังก์ชัน F ที่สร้างขึ้น เราทราบว่า F ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a, b) โดยการใช้ทฤษฎีบทของโรลล์ให้ $F(a) = F(b)$ จึงได้ว่า

$$f(a) - K\,g(a) = f(b) - K\,g(b)$$

หรือ $f(b) - f(a) = K\big(g(b) - g(a)\big)$

พิจารณาสมการนี้มีกรณีที่อาจเป็นไปได้ 2 กรณีคือ

1) ถ้า $g(b) - g(a) = 0$ จึงได้ $f(b) - f(a) = 0$

สมการเป็นความจริง คือ ทั้งสองข้างต่างเป็น 0 เท่ากัน

2) ถ้า $g(b) - g(a) \neq 0$ ก็สามารถแก้สมการเพื่อหาค่า K และ F ได้ โดยทฤษฎีบทของ โรลล์ย่อมมีจุด x_0 ที่ $F'(x_0) = 0$

เนื่องจาก $F'(x) = f'(x) - K\,g'(x)$

จึงได้ $f'(x_0) = K\,g'(x_0)$

เมื่อแทนค่า K ใน $f(a) - K\,g(a) = f(b) - K\,g(b)$

ก็จะได้สมการ

$$[f(b) - f(a)]\,g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\,f'(x_0)$$

ถ้า $g(x) = mx + c$ ผ่านจุด $\big(a, f(a)\big)$ และ $\big(b, f(b)\big)$

ดังนั้น $g'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(x_0)$

และ $g(b) = f(b)$, $g(a) = f(a)$

จึงได้

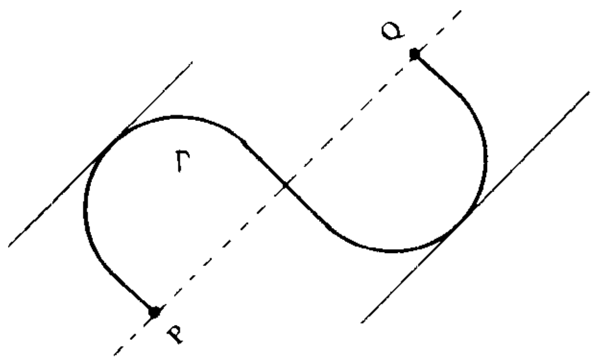
$$[f(b) - f(a)] \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = [f(b) - f(a)] f'(x_0)$$

จึงได้ $f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_0)$

ความหมายเชิงเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่าทั่ว ๆ ไป (ทฤษฎี 6.2.3) คล้ายกับทฤษฎีบทค่าตัวกลาง ถ้าสมมุติว่า $g'(x) \neq 0$ บนช่วง $[a, b]$ แล้ว จากทฤษฎีบทของโรลล์ และทราบว่า $g(b) \neq g(a)$ ก็สามารถเขียนสมการในทฤษฎี 6.2.3 เสียใหม่เป็น

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ให้ Γ เป็นเส้นในระนาบ ซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equation) เป็น $x = g(t)$, $y = f(t)$ ซึ่ง t เป็นค่าใด ๆ ในช่วง $[a, b]$ ทำให้ได้จุด (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้น Γ จากจุด $P(g(a), f(a))$ ไปยังจุด $Q(g(b), f(b))$ ทางซ้ายมือของสมการก็คือค่าความชันของเส้นตรงที่ต่อจุด P กับ Q ทางขวามือของสมการ สามารถเขียนได้ในรูป $(dy/dt)(dx/dt)$ เป็นความชันของเส้น ดังนั้น ความหมายของทฤษฎีบท 6.2.3 ก็คือ ต้องมีจุดบนเส้น Γ ซึ่งความชันเดียวกันกับเส้นตรง PQ-



ทฤษฎีค่าตัวกลาง (Mean value thearem)

การใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลาง ใช้กันอยู่ 2 ทางคือ ในทางปฏิบัติและทางทฤษฎี

ในทางปฏิบัติ เช่น การใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลาง เพื่อการประมาณค่าของบางฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 6.2.4 เมื่อ $u > 0$ และ $v \geqslant 0$, $\sqrt{u^2 + v}$ อาจเขียนแทนด้วย $u + v\sqrt{2u}$ ด้วยค่าผิดพลาดไม่เกิน $\dfrac{v^2}{4u^3}$

เช่น $\sqrt{87} = \sqrt{81 + 6} \sim 9 + \dfrac{6}{18} = 9\dfrac{1}{3}$ ซึ่งค่าผิดพลาดไม่เกิน $\dfrac{36}{(4)\,(9)^3} \approx .012$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = \sqrt{u^2 + x}$ ดังนั้น $f(0) = u$ ในขณะที่ $f(v)$ เป็นค่าที่ต้องการประมาณ โดยใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางย่อมมี x_0 ซึ่ง $0 < x_0 < v$ ที่

$$
\begin{aligned}
f(v) &= f(0) + (v + 0)\, f'(x_0) \\
&= u + \frac{v}{2\sqrt{u^2 + x_0}}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $x_0 > 0$, $\sqrt{u^2 + x_0} > u$ และได้กล่าวแล้วว่า

$$f(v) < u + \frac{v}{2u}$$

ดังนั้นค่าโดยประมาณ $u + \dfrac{v}{2u}$ มีค่ามากกว่าค่าจริง $\sqrt{u^2 + v}$ เสมอ

ค่าผิดพลาดที่คาดในการประมาณค่าสังเกตว่า $x_0 < v$ ดังนั้น

$$\sqrt{u^2 + x_0} < \sqrt{u^2 + v} < u + \frac{v}{2u}$$

ฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
f(v) &= u + \frac{v}{2\sqrt{u^2 + x_0}} \\
&> u + \frac{uv}{2\left|u + \dfrac{v}{2u}\right|} = u + \frac{uv}{2u^2 + v}
\end{aligned}
$$

และ

$$u + \frac{uv}{2u^2 + v} < \sqrt{u^2 + v} < u + \frac{v}{2u}$$

ค่าผิดพลาดอย่างมากที่สุด คือ

$$\left[u + \frac{v}{2u}\right] - \left[u + \frac{uv}{2u^2 + v}\right] = \frac{v^2}{(2u)(2u^2 + v)} < \frac{v^2}{4u^3}$$

6.3 ผลลัพธ์ที่มีประโยชน์ซึ่งได้จากทฤษฎีค่าตัวกลางทั่ว ๆ ไป

ก็คือ กฎของโลปิตาล โดยใช้ผลลัพธ์นี้เพื่อคำนวณหาค่าลิมิตของฟังก์ชันผลหาร

ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน เราพบว่า บางครั้ง เราจะพบฟังก์ชันในรูป $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{(1 - \cos x)}{x^2}$ ฯลฯ และเราก็หวังจะหาค่าลิมิตของฟังก์ชันเหล่านี้ หรือพูดง่าย ๆ ก็คือ เราพยายามหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในรูป $\frac{f(x)}{g(x)}$ โดยที่ $f(a) = 0$ และ $g(a) = 0$ ฟังก์ชันนี้อยู่ในรูปแบบที่ยังไม่กำหนด (indeterminate form) เมื่อ $x = a$ ซึ่งกฎของ l' Hôpital จะช่วยให้เราแก้ปัญหาเหล่านี้ได้

ทฤษฎีบท 6.3.1 กฎของโลปิตาล (l' Hôpital's rule)

ให้ f และ g หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $a \leq x < b$ ซึ่ง $g'(x) \neq 0$ บนช่วงดังกล่าว ถ้า

i) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$

หรือถ้า

ii) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$ และ $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = \infty$

และถ้า $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แล้ว

$\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ด้วย

จุดปลายข้างบน b อาจมีค่าแน่นอน หรือเป็น ∞ และ L อาจมีค่าแน่นอนหรือ ∞ ก่อนจะทำการพิสูจน์ ขอยกตัวอย่างการพิจารณาค่าลิมิตเสียก่อน

ในการคำนวณหาค่า

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \cos(x^2) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^4 = 0$

ถ้าพิจารณาค่าต่อไปนี้แทนคือ

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin(x^2)}{4x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

โดยทฤษฎีบทนี้ จึงได้ว่า $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2}$

ในการคำนวณหาค่า $\lim_{x\to 0^+} x^x$ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^+} \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

โดยทฤษฎีบทนี้ จึงได้

$$\lim_{x\to 0^+} \log x^x = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

เนื่องจาก ฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential function)
เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\log x^x}$$

$$= e^0$$

$$= 1$$

ขอให้นักศึกษา พิจารณา $\lim_{x\to \infty^-} e^{-\sin(x)}$ เราทราบแล้วว่า หาค่าไม่ได้

ถ้าเขียนลิมิตนี้เป็น $\lim_{x\to \infty^-} \frac{(2x + \sin 2x)}{(2x + \sin 2x)\, e^{\sin x}}$

แล้วใช้กฎของโลปิตาล เพื่อหาผลลัพธ์ และได้

$$\lim_{x\to \infty} \frac{4\cos x}{(2x + 4\cos x + \sin 2x)\, e^{\sin x}} = 0$$

ข้อขัดแย้งนี้อธิบายได้ คือ ข้อผิดพลาดอยู่ที่การสรุปว่า บทกลับของทฤษฎีบทนี้ เป็นจริง คือ เราสรุปเอาเองว่า

ถ้า $\ell im \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าไม่ได้ แต่ $\ell im \frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าได้

พิสูจน์ i) เนื่องจากค่าลิมิตของเศษและส่วนต่างเป็น 0 จึงไม่ทราบว่ามีค่าเท่าไร สมมุติว่า b มีค่าแน่นอนค่าหนึ่ง

และให้ f(b) = g(b) = 0 จึงได้ว่า f และ g ต่างต่อเนื่องบน [a, b] โดยใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางทั่วไป ให้ x เป็นจุดข้างในใด ๆ ของ [a, b] จึงมั่นใจว่ามีจุด t ที่ $x < t < b$ ซึ่ง

$$\frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

เนื่องจาก $f(b) = g(b) = 0$ จึงได้

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f'(t)}{g'(t)} - L$$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{t \to b} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} - L = 0$

เมื่อให้ t เข้าใกล้ b เนื่องจาก t อยู่ระหว่าง x และ b โดยการควบคุม x จะได้ว่า

กำหนด $\varepsilon > 0$ สามารถเลือก $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $b - \delta < x < b$

ทำให้ได้ $|b - t| < \delta$ และ $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$

จึงได้ $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ii) เนื่องจากค่าลิมิตของเศษและส่วนต่างเป็น ∞ ซึ่งไม่สามารถทราบค่าที่แน่นอนของเศษนั้นได้ ให้ $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ และ $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$ เมื่อ $x \to b$

และเนื่องจาก $g'(x)$ ไม่ใช่ศูนย์ ซึ่งทราบว่าต้องเป็นบวก ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียว เพราะฉะนั้น $g(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ ถ้าให้ $\varepsilon > 0$ เลือก x_0 ดังนั้น ถ้า $x_0 < t < b$

$$-\varepsilon < \frac{f'(t)}{g'(t)} - L < \varepsilon$$

เนื่องจาก $g'(t) > 0$ จึงได้

$$(L - \varepsilon)g'(t) < f'(t) < (L + \varepsilon)g'(t) \qquad \text{..........(1)}$$

ส่วนหนึ่งทางขวาของ (1) ได้ว่า

$$f'(t) - (L + \varepsilon)g'(t) < 0$$

แสดงว่า $f(x) - (L + \varepsilon)g(x)$ เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวบนช่วง $[x_0, b]$ เพราะว่าค่าอนุพันธ์เป็นลบบนช่วงนั้น ย่อมมีขอบเขตข้างบนในช่วงปิด $[x_0, b]$

ให้ $f(x) - (L + \varepsilon)g(x) < B$

หารตลอดด้วย $g(x) > 0$ จึงได้

$$\frac{f(x)}{g(x)} > L + \varepsilon + \frac{B}{g(x)}$$

เนื่องจาก $g(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to b^-$

จึงพบว่าสำหรับ x_1 ที่อยู่ใกล้ ๆ b $\frac{f(x)}{g(x)} < L + 2\varepsilon$ สำหรับทุก x ซึ่ง $x_1 < x < b$-

ถ้านำทางซ้ายมือของ (1) และคำนวณด้วยวิธีการเดียวกัน ก็จะได้ว่า

$\frac{f(x)}{g(x)} > L - 2\varepsilon$ สำหรับทุก x ซึ่ง $x_1 < x < b$

$$-2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - L < +2\varepsilon$$

หรือ $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < 2\varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2}$

โดย 6.3.1 $= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $\lim_{x\to +\infty} x \log \frac{x+1}{x-1}$

$$x \log \frac{x+1}{x-1} = \frac{\log \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

$\therefore \lim_{x\to +\infty} x \log \frac{x+1}{x-1}$ มีค่าเท่ากับ 2

แบบฝึกหัด 6.1

จงหาค่าของลิมิต

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\tan x}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\sin x}{\cos x - \cos^2 x}$

3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{10}}$

4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 3x}{1 - \cos 4x}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log \frac{1 + x}{1 - x}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x}$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - x}{x^3}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x}$

9. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

10. $\lim_{x\to \infty} \frac{\log x}{\sqrt{1 + x^3}}$

6.4 สูตรของเทย์เลอร์ กับเศษเหลือรูปอินทิกรัล

(Taylor's formula with integral remainder)

พิจารณาฟังก์ชันพหุนาม $P(x)$ ดีกรี n

$$P(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n, \; n \geqslant 0 \text{ เมื่อ } b_0 \neq 0 \qquad \dots\dots\dots(1)$$

ถ้าเลือกค่าเฉพาะของ x เช่นให้ $x = a$ เราสามารถเขียน $P(x)$ ในรูปของผลรวมของกำลังของ $(x - a)$ ซึ่งกำลังสูงสุดเป็น n :

$$P(x) = c_0(x - a)^n + c_1(x - a)^{n-1} + \dots + c_n \qquad \dots\dots\dots(2)$$

ถ้า $n = 0$ สมการ (1) กับ (2) คืออันเดียวกัน

ถ้า $n = 1$ เราจะได้ฟังก์ชันเชิงเส้น $P(x) = b_0x + b_1$

เราต้องการแสดงในรูปของ $c_0(x - a) + c_1$

เลือก $c_0 = b_0$ เราจะได้ว่า

$$P(x) - b_0(x - a) = b_1 + ab_0$$

เพื่อว่า $P(x) = b_0(x - a) + c_1$ ซึ่ง $c_1 = b_1 + ab_0$

โดยทั่ว ๆ ไป เราพิสูจน์โดยอุปนัยวิธีทางคณิตศาสตร์

สมมุติว่าสมการ (1) และ (2) จริงเมื่อ ดีกรี $\leqslant n - 1$ เมื่อ $n \geqslant 1$ ดังนั้น จาก (1) เราเลือก $c_0 = b_0$ เพื่อว่า $P(x) - b_0(x - a)^n$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดีกรีสูงสุดเป็น $n - 1$

ดังนั้น $P(x) - b_0(x - a)^n = c_1(x - a)^{n-1} + \dots + c_n$

เหมือนกับสมการ (2)

จาก $P(x) = c_0(x - a)^n + c_1(x - a)^{n-1} + \dots + c_n$

ถ้าเราหาอนุพันธ์ k ครั้ง $0 \leqslant k \leqslant n$ (ถ้า $k = 0$ $P^{(k)}(x)$ หมายถึง $P(x)$ จากนั้น ให้ $x = a$- โดยกระบวนการเหล่านี้ จะมีเพียงพจน์เดียวของ $P(x)$ ที่ผลลัพธ์

$c_{n-k}(x - a)^k$ ไม่เป็นศูนย์

$$P^k(a) = \left\{ \frac{d^k}{dx^k} \left[c_{n-k}(x - a)^k\right]\right\}_{x=a} = k!\, c_{n-k}$$

ซึ่ง $0! = 1$

$$c_0 = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}, \ c_1 = \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}, \ldots, c_n = P(a)$$

สมการ (2) อาจเขียนในรูปของ

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \ldots..(3)$$

ถ้าเราแทนฟังก์ชันพหุนาม $P(x)$ ด้วย $f(x)$ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพหุนาม เราอยากทราบว่า

$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n$ เกี่ยวข้องกับ $f(x)$

อย่างไร

เราสมมุติว่า เราหาอนุพันธ์ของ f ได้ n ครั้งที่ $x = a$ และสมมุติต่อไปอีกว่า ฟังก์ชัน f และ อนุพันธ์อันดับที่ $n + 1$ ของ f ต่อเนื่องในช่วงปิดที่มี $x = a$ อยู่ภายในช่วงด้วย

จากทฤษฎีบทแคลคูลัสเบื้องต้น เราทราบว่า

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

เขียนใหม่เป็น

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \qquad \ldots..(4)$$

โดย การอินทิเกรตทีละส่วน โดยให้

$$u = f'(t), \quad dv = dt$$

$$du = f''(t)\,dt, \quad v = -(x-t)$$

ดังนั้น $\int_a^x f'(t)\,dt = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$

และ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$

โดยวิธีอินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง โดยให้

$$u = f''(t), \qquad dv = (x-t)\,dt$$

$$du = f^{(3)}(t)\,dt, \qquad v = \frac{-(x-t)^2}{2!}$$

อินทิกรัลของสมการ (5) จะเป็น

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big|_a^x + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!}dt$$

และดังนั้น

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{1}{2!}\int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2\,dt$$

นักศึกษาคงจะเห็นแล้วว่า โดยการอินทิเกรตทีละส่วนซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง จะได้สูตร

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

ซึ่งเป็นสิ่งที่เราต้องการทราบ นั่นคือ ฟังก์ชัน $f(x)$ เขียนแสดงในรูปของฟังก์ชันพหุนามดีกรี n ใน $(x-a)$ บวกกับพจน์ที่เหลือ (remainder term) สรุปเป็นทฤษฎีว่า

ทฤษฎีบท 6.4.1 ให้ $f(x)$ และทุกอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ f ตั้งแต่ลำดับต้น ๆ จนถึงลำดับที่ $n+1$ หาค่าได้ และต่อเนื่องในช่วงปิดที่มี $x = a$ อยู่ข้างในช่วงซึ่งอาจเป็นจุดปลายช่วงก็ได้ ให้ x เป็นจุดใด ๆ ในช่วงนี้ ดังนั้น

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

เรียก สมการ (7) ว่า สูตรของเทย์เลอร์กับเศษเหลือ (Taylor's formula with-remainder)

ซึ่งเศษเขียนได้หลายแบบ ขนาดของเศษประมาณค่าโดยสูตร (8) ตัวอย่างเช่น ถ้า

$$|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M \text{ เมื่อ } a \leqslant t \leqslant x \text{ เราจะเห็นว่า}$$

$$|R_{n+1}| \leqslant \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt = \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

6.5 เศษในรูปแบบอื่น ๆ

เราสามารถเขียน

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n} + R_{n+1}$$

โดยเศษ R_{n+1} มีสูตรต่าง ๆ กันออกไป

ทฤษฎีบท 6.5.1 ให้ f และอนุพันธ์ลำดับต้น ๆ ถึง n ต่อเนื่องเมื่อ $a \leqslant x \leqslant b$ $(a < b)$ และให้อนุพันธ์ลำดับต้น ๆ ถึง $n+1$ นั้น $f^{(n+1)}(x)$ หาค่าได้เมื่อ $a < x < b$ ดังนั้นจะมี จำนวน $x = c, a < c < b$ ซึ่ง

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(b-a)^{n} + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad (1)$$

สูตรเดียวกันนี้เป็นจริงกรณีที่ $b < a$ และอสมการทั้งหมดยังคงเป็นไปตามเดิม พัฒนาการของทฤษฎีค่าตัวกลางนี้เป็นทฤษฎีเดียวกันกับทฤษฎีค่าตัวกลาง กรณี $n = 0$

พิสูจน์ กำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ดังนี้

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^{n}, \quad (2)$$

และ

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (3)$$

สังเกตเห็นว่า $F(b) = G(b) = 0$

การคำนวณหาอนุพันธ์ของ $F(x)$ พบว่า มีหลายพจน์ที่เกิดจากการหาอนุพันธ์หักล้างกันหมดไป จากการหาอนุพันธ์ของขวามือของ (1) พบว่า

$$\frac{d}{dx}[-f'(x)(b-x)] = -f''(x)(b-x) + f'(x)$$

พจน์ $f'(x)$ จะหักล้างกับอนุพันธ์ของพจน์ที่มาข้างหน้า $-f(x)$
พจน์ $-f''(x)(b-x)$ หักล้างกับพจน์หนึ่งที่มาจาก
อนุพันธ์ของ $-\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^{2}$ ผลลัพธ์ที่ได้ในที่สุด คือ

$$F'(x) = -\frac{f^{n+1}(x)}{n!}(b-x)^n \qquad (4)$$

และ $$G'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} \qquad (5)$$

จากทฤษฎีค่าตัวกลางทั่ว ๆ ไป 6.2.3 เนื่องจาก F(b) และ G(b) เป็น 0

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}, \text{ หรือ } F(a) = \frac{F'(c)}{G'(c)} G(a)$$

จาก (3) , (4) และ (5) เขียนใหม่ว่า

$$F(a) = f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (6)$$

ใน (2) ให้ $x = a$ และใช้ (6) เราจะได้สูตร (1)
การพิสูจน์นี้ใช้ได้เสมอ ไม่ว่า $a < b$ หรือ $b < a$ เพราะผลของทฤษฎี 6.2.3 ไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อสลับที่ a กับ b

สูตรในทฤษฎี 6.5.1 เขียนได้หลายแบบ โดยการเปลี่ยนสัญลักษณ์ มีรูปแบบสำคัญ ๆ ที่พบบ่อย ๆ ในตำราต่าง ๆ ได้มาจากการเขียนแทนด้วย $b = a + h$ เมื่อ h เป็นได้ทั้งบวกและลบ จำนวน c ระหว่าง a และ $a + h$ เขียนเสียใหม่เป็น $c = a + \theta h$ เมื่อ θ เป็นบางจำนวน ซึ่ง $0 < \theta < 1$ ดังนั้น

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + f^{n+1}\frac{(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad (7)$$

แบบอื่นได้มาจากการเขียนแทนด้วย $b = x$ ใน (1) จะได้ว่า

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1} \qquad (8)$$

ซึ่ง $$R_{n+1} = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (9)$$

เมื่อ c อยู่ระหว่าง x กับ a

เรียกสูตร (9) ว่า เศษเหลือในแบบของลากรองจ์ (Langrange's form of the remainder)

นักศึกษาควรจะแยกสูตร (8) ให้ออกจาก อนุกรมเทเลอร์ (Taylor's series) ซึ่งเป็นอนุกรมอนันต์ มีสูตรเป็น

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots \qquad (10)$$

ตัวอย่าง จงเขียนสูตรของเทย์เลอร์ เมื่อ กำหนด $f(x) = \frac{1}{2 + x}$, $a = -1$ และ $n = 2$ โดยใช้เศษเหลือในแบบของลากรองจ์

วิธีทำ

$$f(-1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(2 + x)^2}, \quad f'(-1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(2 + x)^3}, \quad f''(-1) = 2$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(2 + x)^4}, \quad f^{(3)}(-1) = -6$$

ดังนั้นจาก

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_{n+1}$$

จะได้ว่า $\frac{1}{2 + x} = 1 - (x + 1) + (x + 1)^2 + R_3$

เมื่อ
$$R_3 = \frac{-6}{(2 + c)^4} \cdot \frac{(x + 1)^3}{3!}$$
$$= -\frac{(x + 1)^3}{(2 + c)^4}$$

เมื่อ c อยู่ระหว่าง x กับ -1 ถ้าเราต้องการประมาณค่า R_3 พบว่า $\frac{1}{2 + c}$ อยู่ระหว่าง $\frac{1}{2 + x}$ กับ 1 และจะได้ว่า $|R_3|$ อยู่ระหว่าง $\frac{|x + 1|^3}{(2 + x)^4}$ และ $|x + 1|^3$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $x = -0.9$ R_3 เป็นจำนวนลบ และภายในค่าสัมบูรณ์ระหว่าง $\frac{0.001}{(1.1)4}$ และ 0.001

ทฤษฎี 6.5.2 สูตรของเศษในทฤษฎี 6.5.1 จากสมการ

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(b - a)^{n} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b - c)^{n}(b - a) \tag{11}$$

เมื่อ c เป็นจำนวนบางจำนวนระหว่าง a กับ b (โดยทั่วไปจำนวน c นี้ต่างไปจาก c ของ (1) ในทฤษฎี 6.5.1 โดย $b = a + h, c = a + \theta h\ (0 < \theta < 1)$-

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{n!}h^{n+1}(1 - \theta)^{n} \tag{12}$$

ซึ่ง (12) นี้ก็คือ พจน์สุดท้ายของ (7) แต่โดยปกติแล้ว θ ในสูตรทั้งสองเป็นคนละตัว

พิสูจน์ กำหนด $F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b - x) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - x)^{n}$

และ $G(x) = b - x$

โดยวิธีการพิสูจน์แบบทฤษฎี 6.5.1 จะได้

$$F'(x) = \frac{-f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^{n}$$

และ $G'(x) = -1$

สำหรับบางจำนวน c ระหว่าง a กับ b

$$F(a) = \frac{F'(c)}{G'(c)}G(a)$$

หรือ $F(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b - c)^{n}(b - a)$

เป็นสมการเดียวกับ (11) โดยการเปรียบเทียบกับ (2) และ (1) แสดงว่า พจน์เศษเหลือคือ $R_{n+1} = F(a)$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงเขียน x^4 ในกำลังของ $(x - 3)$

2. จงเขียนสูตรของเทย์เลอร์ กับ เศษเหลือในแบบของลากรองจ์

   ในกรณีที่ $f(x) = \dfrac{1}{n^2 + 3}$, $a = 1$, $n = 2$

3. จงเขียนสูตรของเทย์เลอร์กับเศษเหลือในแบบของลากรองจ์ เมื่อกำหนดให้

   ก) $f(x) = \sin^2 x, a = 0, n = 3$

   ข) $f(x) = \tan x, a = 0, n = 3$

   ค) $f(x) = e^{-x^2}, a = 0, n = 3$

   ง) $f(x) = \log(1 + e^x), a = 0, n = 2$

4. จาก $R_{n+1} = \dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \quad x < c < a$

   จงหา R_4 เมื่อ $f(x) = \sin x, a = \dfrac{\pi}{2}$