บทที่ 2
ลำดับ (Sequence)

2.1 คำนำ

ถ้าพิจารณาฟังก์ชัน f ที่มีนิยาม (defined) บนเซตของจำนวนเต็มบวก, $I^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ นั้นคือ

$f(n)$ นิยามสำหรับทุก ๆ $n \in I^+$ แล้วจะเรียกฟังก์ชันชนิดนี้ว่าลำดับ (Sequence)- และใช้สัญลักษณ์

$\{S_n\}$ แทนลำดับ และ

S_n คือ พจน์ที่ n ของลำดับ $\{S_n\}$

นิยาม 2.1.1 เทรซ์ (Trace) ของลำดับ $\{S_n\}$ คือเซต A = $\{$ทุก ๆ $S_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$

นิยาม 2.1.2 ลำดับ จำกัด (Finite sequence) คือ ลำดับที่มีจำนวนพจน์จำกัด

นิยาม 2.1.3 ลำดับไม่จำกัด (Infinite Sequence) คือ ลำดับที่มีจำนวนพจน์ไม่จำกัด

ตัวอย่าง 2.1.1 เซตของจำนวน 2, 7, 12, 17, ..., 32 เป็นลำดับจำกัด ซึ่งพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$S_n = 2 + 5(n-1) = 2 + (5n - 5)$$
$$= 5n - 3 \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \ldots, 7$$ #

ตัวอย่าง 2.1.2 เซตของจำนวน $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ เป็นลำดับไม่จำกัด ซึ่งพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$S_n = \frac{1}{2n-1} \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \ldots$$

ในการศึกษาเกี่ยวกับลำดับ นี้จะศึกษาเฉพาะลำดับไม่จำกัด (Infinite sequence)

ตัวอย่าง 2.1.3 กำหนดให้ ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = 2n$$

จงหา เทรซ์ (trace) ของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะว่า $S_1 = 2(1) = 2$

$S_2 = 2(2) = 4$

$S_3 = 2(3) = 6$

MA 214 69

$S_2 = 2(2) = 4$

$S_3 = 2(3) = 6$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$\therefore$ เทอมของลำดับ $\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$

$= \{2, 4, 6, \ldots\}$ #

2.2 ลิมิตของลำดับ (Limit of a sequence)

การศึกษากับลำดับนี้จะศึกษาดูว่า สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ ($n \to \infty$) นั้น พจน์ที่ n ของลำดับ คือ S_n นั้นจะเข้าใกล้จุดอะไร

ตัวอย่าง 2.2.1 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

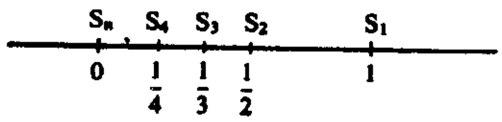
$$S_n = \frac{1}{n}$$

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{S_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ นั่นคือ เมื่อ n ย่างเข้าสู่ ∞

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{3} \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned}$$

จะพบว่าพจน์ที่ n นั้นจะลู่เข้าสู่ (convergent) จุด 0 ดังรูป 2.2.1



รูป 2.2.1

นั่นคือ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

นิยาม 2.2.1 จำนวนจริง s เป็นลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N (N depending on ε) ซึ่ง

$$|S_n - s| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

ในกรณีเช่นนี้เรียกว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และเขียนได้เป็น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s$$

นิยาม 2.2.2 ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ มีลิมิตเป็น s เมื่อ s เป็นจำนวนจริงแล้วจะเรียกลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ s

และเรียกลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า (Convergent sequence)

นั่นคือ ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้ (Exist)

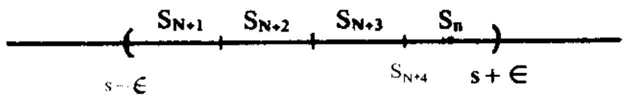
และถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าไม่ได้แล้ว เรียกลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก (Divergent sequence)

จากนิยาม 2.2.1 ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของจุดใน 1 มิติ (R) แล้ว

$$|S_n - s| < \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon < (S_n - s) < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow s - \epsilon < S_n < s + \epsilon$$

หมายความว่า สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$ นั้น พจน์ S_n ต่าง ๆ จะอยู่ในช่วงเปิด $(s - \epsilon, s + \epsilon)$ ดังรูป 2.2.2



รูป 2.2.2

ทฤษฎีบท 2.2.1 ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้ แล้วค่าลิมิตจะมีเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ จะต้องแสดงว่า ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ และ $\lim_{n\to\infty} S_n = s'$ แล้ว $s = s'$

พิจารณา $|s - s'| = |s - S_n + S_n - s'|$

$$\leqslant |s - S_n| + |S_n - s'|$$

$$= |S_n - s| + |S_n - s'| \qquad (1)$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ จากนิยาม 2.2.1

ก็ต่อเมื่อสำหรับ จำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{\in}{2} \text{ สำหรับทุก } n \geqslant N_1 \qquad (2)$$

และจาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s'$ จากนิยาม 2.2.1

ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|S_n - s'| < \frac{\in}{2} \text{ สำหรับทุก } n \geqslant N_2 \qquad (3)$$

เลือก N ที่มากกว่า N_1 และ N_2 แล้วสำหรับ $n \geqslant N$

จากสมการ (1)

$$|s - s'| \leqslant |S_n - s| + |S_n - s'|$$

$$< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in \text{ จากสมการ (2) และ (3)}$$

ได้ว่า $|s - s'| < \in$

หรือ $-\in < s - s' < \in$

นั่นคือ $s - s'$ น้อยกว่าจำนวนจริงบวก ($\because \in > 0$)

และ $s - s'$ มากกว่าจำนวนจริงลบ ($\because -\in < 0$)

และ $s - s'$ เป็นค่าคงที่ และต้องเท่ากับศูนย์ เพียงกรณีเดียว

นั่นคือ $s - s' = 0$ แล้ว $s = s'$ #

จากทฤษฎีบทนี้ อาจกล่าวได้อีกแบบว่า ถ้าลำดับใด ๆ ที่ลู่เข้า (convergent) แล้วจะลู่เข้าสู่เพียงจุด ๆ เดียวเท่านั้น

แต่ถ้าลำดับใดก็ตามที่ลู่เข้าสู่มากกว่าหนึ่งจุด ลำดับนั้นก็เป็นลำดับลู่ออก

เช่น ลำดับ $\{(-1)^n\}$

เพราะว่า $(-1)^n = 1$ เมื่อ n เป็นคู่

และ $(-1)^n = -1$ เมื่อ n เป็นคี่

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นคี่} \\ 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นคู่} \end{cases}$$

จะพบว่าลำดับนี้ลู่เข้าสู่ -1 และ 1

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับที่ลู่ออก

หรือลำดับ $\{n\}$ พบว่าจะลู่เข้าสู่ ∞ เพียงค่าเดียว ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ (หาค่าไม่ได้)

ดังนั้น ลำดับ $\{n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

หมายเหตุ ลำดับจะลู่เข้าก็ต่อเมื่อลิมิตหาค่าได้ (เป็นจำนวนจำกัด) และมีค่าเพียงค่าเดียว

ทฤษฎีบท 2.2.2 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n + T_n) = s + t$

พิสูจน์ จะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N

ซึ่ง $(S_n+T_n) \;\; - (s + t)| < \in$ สำหรับทุก $n \geqslant N$

พิจารณา
$$\begin{aligned} |(S_n + T_n) - (s + t)| &= |S_n + T_n - s - t| \\ &= |(S_n - s) + (T_n - t)| \\ &\leqslant |S_n - s| + |T_n - t| \qquad (1) \end{aligned}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ จากนิยาม 2.2.1

กำหนดให้จำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{\in}{2} \text{ สำหรับทุก } n \geqslant N_1 \qquad (2)$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ จากนิยาม 2.2.1

กำหนดให้จำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|T_n - t| < \frac{\in}{2} \text{ สำหรับ } n \geqslant N_2 \qquad (3)$$

เลือก N มีมากกว่า N_1 และ N_2 แล้วสำหรับ $n \geqslant N$

จากสมการ (1)

$$\begin{aligned} |(S_n + T_n) - (s + t)| &< |S_n - s| + |T_n - t| \\ &< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in \text{ จากสมการ (2) และ (3)} \end{aligned}$$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n + T_n) = s + t$ #

หมายเหตุ แต่ส่วนกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง เช่น

ถ้ากำหนด พจน์ที่ n ของลำดับ $\{S_n\}$ และ $\{T_n\}$ คือ

$$S_n = (-1)^n \text{ และ}$$

$$T_n = (-1)^{n+1}$$

เพราะว่า $S_n + T_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} (S_n + T_n) = 0 \text{ หาค่าได้}$$

$$\text{แต่ } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ หาค่าไม่ได้}$$

(เพราะว่าลิมิตมี 2 ค่า คือ -1 กับ 1 และ $-1 \neq 1$)

และ $\lim T_n = \lim (-1)^{n+1}$ หาค่าไม่ได้

(เพราะว่าลิมิตมี 2 ค่า คือ 1 กับ -1 และ $1 \neq -1$)

ทฤษฎีบท 2.2.3 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = st$

วิธีทำ พิจารณา
$$\begin{aligned}|S_nT_n - st| &= |S_nT_n - S_nt + S_nt - st| \\ &= |S_n(T_n - t) + (S_n - s)t| \\ &\leqslant |S_n(T_n - t)| + |(S_n - s)t| \\ &\leqslant |S_n|\,|T_n - t| + |S_n - s|\,|t| \\ &\leqslant |S_n|\,|T_n - t| + |S_n - s|\,(|t| + 1) \qquad (1)\end{aligned}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ จะได้ว่า $\{S_n\}$ มีขอบเขต นั่นคือ $|S_n| < B$ สำหรับทุก ๆ ค่า n (จากทฤษฎีบท 2.3.2)

จากสมการ (1)

$$|S_nT_n - st| \leqslant B|T_n - t| + |S_n - s|\,(|t| + 1) \qquad (2)$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{\in}{2(|t| + 1)} \qquad \text{..........(3)}$$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$|T_n - t| < \epsilon/2B$ ....(4)

เลือก N ที่มากกว่า N_1, N_2 แล้ว สำหรับ $n \geq N$

จากสมการ (3), (4) แทนในสมการ (2)

$$|S_nT_n - st| < B\ \frac{\epsilon}{2B} + \frac{\epsilon}{2(|t| + 1)}\ (|t| + 1) = \epsilon$$

สำหรับทุก $n \geqslant N$ ซึ่ง N มากกว่า N_1 และ N_2

นั้นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = st$ #

จากทฤษฎีบทนี้ ในทางกลับกันไม่เป็นจริง นั้นคือ

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n$ หาค่าได้ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ อาจหาค่าได้บางตัว

หรือหาค่าไม่ได้ทั้งสองตัว

เช่น $\{(-1)^n\}$ และ $\{(-1)^{n+1}\}$

$$\text{และ}\quad (-1)^n(-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n(-1)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1}$$

$$= -1$$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n(-1)^{n+1}$ หาค่าได้เท่ากับ -1

แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ หาค่าไม่ได้ และ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ หาค่าไม่ได้เช่นกัน

ทฤษฎีบท 2.2.4 ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $s \neq 0$

แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่ง $\dfrac{1}{|S_n|} < \dfrac{2}{|s|}$ สำหรับ $n \geqslant n_0$

พิสูจน์ พิจารณา

$$|s| = |s - S_n + S_n|$$

$$\leqslant |s - S_n| + |S_n|$$

$$= |S_n - s| + |S_n| \quad \text{..........(1)}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่ง $|S_n - s| < \in = \frac{|s|}{2}$ สำหรับ $n \geq n_0$

สำหรับ $n \geq n_0$

จากสมการ (1)

$$|s| \leq |S_n - s| + |S_n|$$

$$< \frac{|s|}{2} + |S_n|$$

$$|s| - \frac{|s|}{2} < |S_n|$$

$$\frac{|s|}{2} < |S_n|$$

$$\frac{1}{|S_n|} < \frac{2}{|s|}$$

#

ทฤษฎีบท 2.2.5 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $s \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{s}$

พิสูจน์ พิจารณา

$$\left|\frac{1}{S_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s - S_n}{sS_n}\right|$$

$$= \frac{|s - S_n|}{|sS_n|}$$

$$= \frac{|S_n - s|}{|s|\,|S_n|}$$

$$< \frac{|S_n - s| \cdot 2}{|s|\,|s|} \quad \because \frac{1}{|S_n|} < \frac{2}{|s|}$$

$$= |S_n - s| \cdot \frac{2}{|s|^2} \qquad \text{..........(1)}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{|s|^2}{2} \in$$

จากสมการ (1) สำหรับ $n \geqslant N$

$$\left|\frac{1}{S_n} - \frac{1}{s}\right| < |S_n - s| \cdot \frac{2}{|s|^2}$$

$$< \frac{|s|^2}{2} \in \cdot \frac{2}{|s|^2} = \in$$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{s}$ #

ทฤษฎีบท 2.2.6 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$ และ $t \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \frac{s}{t}$$

พิสูจน์

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty} S_n \frac{1}{T_n}$$

$$= s \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \frac{s}{t}$$ #

ทฤษฎีบท 2.2.7 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ และ $s \geqslant 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{S_n} = \sqrt{s}$

พิสูจน์ จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N-ซึ่ง

$$|S_n - s| < \in \text{ สำหรับ } n \geqslant N \qquad \text{..........(1)}$$

จาก
$$|S_n - s| = |(S_n^{1/2} - s^{1/2})(S_n^{1/2} + s^{1/2})|$$

$$= |S_n^{1/2} - s^{1/2}|\ |S_n^{1/2} + s^{1/2}|$$

$$\geqslant |S_n^{1/2} - s^{1/2}|$$

จากสมการ (1)

$$|S_n^{1/2} - s^{1/2}| \leqslant |S_n - s| < \in \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

หรือ $|S_n^{1/2} - s^{1/2}| < \in$ สำหรับ $n \geqslant N$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{S_n} = \sqrt{s}$ #

ทฤษฎีบท 2.2.8 ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = s$, $\lim_{n\to\infty} T_n = s$ และ $S_n \leqslant R_n \leqslant T_n$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} R_n = s$

พิสูจน์ จะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$|R_n - s| < \in$ สำหรับ $n \geqslant N$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\in > 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง $|S_n - s| < \in$ สำหรับ $n \geqslant N_1$

จากอสมการ $|S_n - s| < \in$ จะได้ว่า

$$-(S_n - s) \leqslant |S_n - s| < \in$$

หรือ $S_n - s > -\in$ ....(1)

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} T_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง $|T_n - s| < \in$ สำหรับ $n \geqslant N_2$

จากอสมการ $|T_n - s| < \in$ จะได้ว่า

$$T_n - s \leqslant |T_n - s| < \in \qquad \text{..........(2)}$$

เนื่องจาก $S_n \leqslant R_n \leqslant T_n$ แล้ว

$$S_n - s \leqslant R_n - s \leqslant T_n - s$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$$-\in < S_n - s \leqslant R_n - s \leqslant T_n - s < \in \qquad \text{..........(3)}$$

สำหรับ N ที่มากกว่า N_1 และ N_2 แล้วสำหรับ $n \geqslant N$ จะได้ว่า

$$|S_n - s| < \in \text{ และ } |T_n - s| < \in$$

จากสมการ (3) จะได้ว่า

$$-\in < R_n - s < \in \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

หรือ $|R_n - s| < \in$ จากทฤษฎีบท 1.4.5

นั่นแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} R_n = s$ #

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหา $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 6}{2n^2 + n}$

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 6}{2n^2 + n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}}$ เอา n^2 หารทั้งเศษและส่วน

$$= \frac{3 - 0 - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{3}{2} \qquad \#$$

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n + 1 - n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= 0 \qquad \#$$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 2.2.2 เอาคู่สังยุค (Conjugates) คูณเข้าแล้วหารออก เช่น $x - y$ เป็นคู่สังยุคของ $x + y$

ตัวอย่าง 2.2.3 กำหนดให้ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{3n^3 + 4n - 2}{2n^3 + 1}$$

จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 + 4n - 2}{2n^3 + 1}$ ....(1)

เพราะว่า $\dfrac{3n^3 + 4n - 2}{2n^3 + 1} = \dfrac{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^3}}$ เอา n^3 หารตลอด

แทนค่าในสมการ (1)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{3 + 0 - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{3}{2} \qquad \#$$

หมายเหตุ การหาลิมิตของลำดับ ก็เหมือนกับการหาลิมิตของฟังก์ชัน ตามที่เรียนมาใน MA 111 (แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 1)

ตัวอย่าง 2.2.4 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{3n - 1}{4n + 1}$$

จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$

วิธีทำ จะต้องแสดงว่าสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้

$$|S_n - \frac{3}{4}| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geq N$$

พิจารณา $|S_n - \frac{3}{4}| < \varepsilon$

$$\left| \frac{3n - 1}{4n + 1} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{12n - 4 - 12n - 3}{4(4n + 1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-7}{4(4n + 1)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{7}{4(4n + 1)} < \varepsilon$$

$$\frac{7}{4\varepsilon} < 4n + 1$$

$$\frac{7}{4\varepsilon} - 1 < 4n$$

$$\frac{7}{16\varepsilon} - \frac{1}{4} < n$$

ถ้าเลือก $N \geqslant \frac{7}{16\varepsilon} - \frac{1}{4}$ แล้ว $|S_n - \frac{3}{4}| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$

เพราะฉะนั้นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$ #

ตัวอย่าง 2.2.5 จงพิจารณาลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้าลิมิตหาค่าได้ สมมุติเท่ากับ s จงหาค่า N-ซึ่งทำให้

$$|S_n - s| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

ถ้ากำหนดให้ $S_n = \frac{1 + 2\cdot 10^n}{5 + 3\cdot 10^n}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2.10^n}{5 + 3.10^n} \qquad \text{..........(1)}$$

เพราะว่า $\frac{1 + 2.10^n}{5 + 3.10^n} = \frac{\frac{1}{10^n} + 2}{\frac{5}{10^n} + 3}$

แทนค่าในสมการ (1)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{10^n} + 2}{\frac{5}{10^n} + 3}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} + \lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{10^n} + \lim\limits_{n\to\infty} 3}$$

$$= \frac{0+2}{0+3} = \frac{2}{3}$$

ให้ $s = \frac{2}{3}$

ต่อไปจะหา N ซึ่งทำให้

$$|S_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } n \geqslant N$$

พิจารณา

$$|S_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1 + 2.10^n}{5 + 3.10^n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3 + 6.10^n - 10 - 6.10^n}{3(5 + 3.10^n)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-7}{15 + 9.10^n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{7}{15 + 9.10^n} < \varepsilon$$

$$\frac{7}{\varepsilon} < 15 + 9.10^n$$

$$\frac{7}{\varepsilon} - 15 < 9.10^n$$

$$\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{15}{9} < 10^n$$

$$\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{5}{3} < 10^n$$

take $\log_{10}$

$$\log_{10}\left(\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}\right) < \log_{10} 10^n = n \log_{10} 10 = n$$

นั่นคือ $n > \log_{10}\left(\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}\right)$

ถ้าเลือก $N \geqslant \log_{10}\left(\frac{7}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}\right)$ แล้ว

$|S_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$ #

ตัวอย่าง 2.2.6 กำหนดให้ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{n^2 + n - 1}{3n^2 + 1}$$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$

วิธีทำ จะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้

$$\left|S_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

พิจารณา $\left|S_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n^2 + n - 1}{3n^2 + 1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n^2 + 3n - 3 - 3n^2 - 1}{3(3n^2 + 1)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n - 4}{9n^2 + 3}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{3n - 4}{9n^2 + 3} \leqslant \left|\frac{3n - 4}{9n^2 + 3}\right| < \varepsilon \quad \because a \leqslant |a|$$

หรือ $\frac{3n - 4}{9n^2 + 3} < \varepsilon$

$$3n - 4 < 9\varepsilon n^2 + 3\varepsilon$$

$$-(3\varepsilon + 4) < 9\varepsilon n^2 - 3n$$

$$\frac{-(3\varepsilon + 4)}{9\varepsilon} < n^2 - \frac{n}{3\varepsilon} \quad \text{เอา } 9\varepsilon \text{ หารตลอด}$$

$$\left(\frac{1}{6\varepsilon}\right)^2 - \frac{(3\varepsilon + 4)}{9\varepsilon} < n^2 - \frac{n}{3\varepsilon} + \left(\frac{1}{6\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{1}{36\varepsilon^2} - \frac{(3\varepsilon + 4)}{9\varepsilon} < \left(n - \frac{1}{6\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{1 - 4\varepsilon(3\varepsilon + 4)}{36\varepsilon^2} < \left(n - \frac{1}{6\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}{36\varepsilon^2} < \left(n - \frac{1}{6\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}}{6\varepsilon} < n - \frac{1}{6\varepsilon}$$

$$\frac{1}{6\varepsilon} + \frac{\sqrt{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}}{6\varepsilon} < n$$

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}}{6\varepsilon} < n$$

ถ้าเลือก $N \geqslant \frac{1 + \sqrt{1 - 12\varepsilon^2 - 16\varepsilon}}{6\varepsilon}$ แล้ว $|S_n - \frac{1}{3}| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geqslant N$-

นั้นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$ #

ตัวอย่าง 2.2.7 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ ถ้า $|x| < 1$

วิธีทำ นั้นคือจะต้องแสดงว่า สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสำหรับ $\varepsilon > 0$

จะได้ว่า $|S_n - 0| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geqslant N$

พิจารณา $|S_n - 0| < \varepsilon$

$$|x^n - 0| < \varepsilon$$

$$|x^n| < \varepsilon$$

$$|x|^n < \varepsilon$$

take $\log_{10}$ $\log_{10} |x|^n < \log_{10} \varepsilon$

$$n \log_{10} |x| < \log_{10} \varepsilon$$

$\therefore$ $n > \frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10}|x|}$ ....(1)

เพราะว่า $|x| < 1$ แล้ว $\log_{10}|x|$ ก็เป็นลบ

จากสมการ (1) ให้ $N \geqslant \dfrac{\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}|x|}$

นั่นคือ สำหรับ $N \geqslant \dfrac{\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}|x|}$ แล้ว

$|S_n - 0| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

นิยาม 2.2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N (depending on M) ซึ่ง

$S_n > M$ ทุก ๆ $n \geqslant N$

นิยาม 2.2.4 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N (depending on M) ซึ่ง

$S_n < -M$ ทุก ๆ $n \geqslant N$

ลิมิตของลำดับเป็น ∞ และ $-\infty$ ไม่ได้หมายความว่าลำดับลู่เข้า เพราะว่า ∞ และ $-\infty$ **ไม่เป็นจำนวน** (not number) การที่ลิมิตของลำดับคือ ∞ และ $-\infty$ จะเรียกลำดับนั้นเป็นลำดับลู่ออก (Divergent)

ตัวอย่าง 2.2.8 จงแสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = n$$

เป็นลำดับลู่ออก (divergent)

วิธีทำ $\because \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n$

$$= \infty$$

เราจะต้องแสดงว่า สำหรับจำนวนบวก M เราสามารถหาจำนวนเต็มบวก N-(depending on M) ซึ่ง $S_n > M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$

พิจารณา $a_n > M$

$n > M$

เลือก $N \geqslant M$ แล้ว

$S_n > M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$

แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก #

ตัวอย่าง 2.2.9 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{2n-1} = \infty$

วิธีทำ สำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $S_n > M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
S_n &> M \\
3^{2n-1} &> M \\
\log_{10}(3^{2n-1}) &> \log_{10} M \quad \because \text{take } \log_{10} \\
(2n-1)\log_{10} 3 &> \log_{10} M \\
2n - 1 &> \frac{\log_{10} M}{\log_{10} 3} \\
2n &> \frac{\log_{10} M}{\log_{10} 3} + 1 \\
n &> \frac{1}{2}\left(\frac{\log_{10} M}{\log_{10} 3} + 1\right)
\end{aligned}$$

ถ้าเลือก $N \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\log_{10} M}{\log_{10} 3} + 1\right)$ แล้ว

$S_n > M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant M$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{2n-1} = \infty$ #

ตัวอย่าง 2.2.10 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 2n) = -\infty$

วิธีทำ สำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $S_n < -M$ สำหรับทุกๆ $n \geqslant N$

พิจารณา $S_n < -M$

$$1 - 2n < -M$$

$$2n - 1 > M \qquad \text{เอา } -1 \text{ คูณตลอด}$$

$$2n > 1 + M$$

$$n > \frac{1 + M}{2}$$

ถ้าเลือก $N \geqslant \dfrac{1 + M}{2}$ แล้ว $S_n < -M$ ทุก ๆ $n \geqslant N$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} (1 - 2n) = -\infty$ #

ตัวอย่าง 2.2.11 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} 10^n = \infty$ หรือแสดงว่าลำดับ $\{10^n\}$ ลู่ออก

วิธีทำ จะต้องแสดงว่าสำหรับจำนวนบวก M สามารถหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$S_n > M \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

พิจารณา $10^n > M$

take $\log_{10}$

$$\log_{10} 10^n > \log_{10} M$$

$$n \log_{10} 10 > \log_{10} M$$

$$n > \log_{10} M$$

ถ้าให้ $N \geqslant \log_{10} M$ แล้วจะได้ว่า

$$S_n > M \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} 10^n = \infty$ หรือลำดับ $\{10^n\}$ ลู่ออก #

แบบฝึกหัด ๒.๒

1. จงเขียนห้าเทอมแรกของลำดับที่กำหนดให้

   1.1 $\left\{\dfrac{2n - 1}{2n + 2}\right\}$

   1.2 $\left\{\dfrac{1 - (-1)^n}{n^3}\right\}$

   1.3 $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2.4.6\ldots2n}\right\}$

   1.4 $\left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\right\}$

   1.5 $S_1 = 1$

   $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{S_n}$ สำหรับ $n > 1$

1.6 $S_1 = 1$

$S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n}$ สำหรับ $n > 1$

1.7 $S_1 = 1, S_2 = 3$

$S_n = \dfrac{(S_{n-1} + S_{n-2})}{2}$ สำหรับ $n > 2$

1.8 $S_1 = 0, S_2 = 1$

$S_{n+2} = \dfrac{nS_{n+1} + S_n}{n + 1}$

ข้อ 2 ถึงข้อ 8 จงหาค่าลิมิต

2. $\ell im \left\{\dfrac{n(n + 2)}{n + 1} - \dfrac{n^3}{n^2 + 1}\right\}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n - 3}{3n + 7}\right)^4$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5 - 4n^3}{3n^7 + n^3 - 10}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + 4.10^n}{3 + 2.10^n}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - n - 3n^3}{2n^3 + n}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - n$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4.10^n - 3.10^{2n}}{3.10^{n-1} + 2.10^{2n-1}}$

ข้อ 9 ถึงข้อ 16 จงพิจารณาลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้าลิมิตหาค่าได้สมมุติเท่ากับ s จงหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้

$$|S_n - s| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N$$

ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

9. $S_n = \dfrac{n}{n+1}$

10. $S_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 + n}$

11. $S_n = \dfrac{3n^2 + 4n - 2}{2n^3 + 1}$

12. $S_n = \dfrac{n + 1}{n^3}$

13. $S_n = \dfrac{n^3 + 3}{n^2 + n}$

14. $S_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

15. $S_n = \dfrac{n}{n + 1} - \dfrac{n + 1}{n}$

16. $S_n = \sqrt{2n + 1} - \sqrt{n}$

17. จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

18. จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

19. จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - n^3 = -\infty$

20. จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$

21. สมมุติให้ $|S_n - s| \leq t_n$ สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ และ $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$

จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = s$

22. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} |S_n| = |s|$

23. สมมุติให้ลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้า และสำหรับ $\varepsilon > 0$, $|S_n - T_n| < \varepsilon$ เมื่อ n มีค่ามาก ๆ จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n$$

24. จงแสดงว่า ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{S_n} = \sqrt[3]{s}$

25. จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} |S_n| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$

26. จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ถ้า $a > 0$

(ให้ $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ แล้วใช้ Bernoulli's inequallity)

27. จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (ให้ $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ แล้วใช้ Binonial theorem)

2.3 ลำดับที่มีขอบเขตจำกัด (Bounded sequence)

นิยาม 2.3.1 ลำดับ $\{S_n\}$ เรียกว่า ลำดับที่มีขอบเขตบน ถ้ามีจำนวนจริง U ซึ่ง

$$S_n \leqslant U \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

นิยาม 2.3.2 ลำดับ $\{S_n\}$ เรียกว่า ลำดับที่มีขอบเขตล่าง ถ้ามีจำนวนจริง L ซึ่ง

$$L \leqslant S_n \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

นิยาม 2.3.3 ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง

$$|S_n| \leqslant M \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

จากนิยาม 2.3.3 พิจารณา

$$|S_n| \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant S_n \leqslant M \text{ สำหรับทุก ๆ } n$$

จาก $-M \leqslant S_n$ สำหรับทุก ๆ n แสดงว่า $-M$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{S_n\}$

และ $M \geqslant S_n$ สำหรับทุก ๆ n แสดงว่า M เป็นขอบเขตบนของ $\{S_n\}$

จากนิยาม 2.3.3 ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด **ก็ต่อเมื่อ** ลำดับ $\{S_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ตัวอย่าง 2.3.1 ถ้า $S_n = [1 + (-1)^n]n$

เราพบว่า $S_1 = 0, S_2 = 4, S_3 = 0, S_4 = 8, \ldots\ldots\ldots\ldots$

และ $S_n \geqslant 0$ สำหรับทุก ๆ n

เพราะฉะนั้น 0 เป็นขอบเขตล่างของลำดับ $\{S_n\}$ แต่ไม่มีขอบเขตบน

ดังนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ ไม่เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

ทฤษฎีบท 2.3.1 ทุก ๆ ลำดับลู่เข้า (convergent) จะต้องมีขอบเขตจำกัด

พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

จากนิยาม กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|S_n - S| < 1 \quad \text{เมื่อให้ } \varepsilon = 1 \text{ สำหรับทุก ๆ } n > N$$

$$|S_n| - |S| \leqslant |S_n - S| < 1$$

$$|S_n| - |S| < 1$$

$$|S_n| < 1 + |S| = M_1 \qquad \text{..........(1)}$$

และ

$$|S_n| \leqslant \max\{|S_0|, |S_1|, |S_2|, |S_3|, \ldots\} = M_2 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2)

ถ้าเลือก M ที่มีค่ามากกว่า M_1 และ M_2 แล้วสมการ (1) และ (2) เป็นจริง นั่นคือ

$$|S_n| < M_1 < M \text{ และ } |S_n| \leqslant M_2 < M$$

เพราะฉะนั้น $|S_n| < M$ สำหรับทุก ๆ n

แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

ทฤษฎีบท 2.3.1 บอกว่า ทุก ๆ ลำดับลู่เข้า จะต้องมีขอบเขต

แต่ถ้าทราบว่าลำดับมีขอบเขตแล้ว ลำดับอาจจะไม่ลู่เข้าก็ได้ เช่น กำหนด $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง

$$S_n = (-1)^n$$

เพราะว่า $|S_n| = |(-1)^n|$

$$= 1$$

ถ้าให้ $M = 2$ แล้ว

$$|S_n| < 2$$

จากนิยาม 2.3.3 แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขต

แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นคู่} \\ -1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นคี่} \end{cases}$

จะได้ว่า ลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้า เพราะหาลิมิตได้สองค่า คือ 1 และ -1

ทฤษฎีบท 2.3.2 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ และ $\{T_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = 0$

พิสูจน์

เพราะว่า $\{T_n\}$ มีขอบเขตนั้น แสดงว่า มีจำนวนจริง r ซึ่ง $|T_n| \leqslant r$ สำหรับทุก ๆ n

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ จะได้ว่า

สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|S_n - 0| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

$$
\begin{aligned}
\text{พิจารณา } |S_nT_n - 0| &= |S_nT_n| \\
&= |S_n|\,|T_n| \\
&\leqslant r|S_n| && \because \ |T_n| \leqslant r \\
&< r\varepsilon && \because \ |S_n| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

สำหรับ $n \geqslant N$

นั้นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n =$ #

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้ถ้าหากว่า $\{T_n\}$ ไม่มีขอบเขต

$$\lim_{n\to\infty} S_nT_n \neq 0$$

เช่น ให้ $\{S_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ และ $\{T_n\} = \{n\}$

จะพบว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$ ซึ่งไม่มีขอบเขต และ $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, n = \lim\limits_{n\to\infty}$

$$= 1 \neq 0$$

แสดงว่า ทฤษฎีบทนี้ถ้าตกคำว่า $\{T_n\}$ มีขอบเขตแล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n \neq 0$

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{1}{n}$$

จงพิจารณาว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตหรือไม่

วิธีทำ สามารถแบ่งเป็นสองวิธี

วิธีที่ 1. เพราะว่า

$$\{S_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ แล้ว S_n จะย่างเข้าสู่ 0

และจะได้ว่า 0 เป็นขอบเขตล่างของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะว่า $0 \leqslant S_n$ สำหรับทุก ๆ n

และ 1 เป็นขอบเขตบนของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะว่า $S_n \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ n

และเพราะว่าลำดับ $\{S_n\}$ มีทั้งขอบเขตบน และขอบเขตล่าง

ดังนั้นลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

วิธีที่ 2

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

แสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้า และจากทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า

ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

แบบฝึกหัด 2.3

จากโจทย์ข้อ 9 ถึงข้อ 16 ของแบบฝึกหัด 2.2

จงพิจารณาว่า ลำดับใดมีขอบเขต

2.4 โมโนโทนิคลำดับ (Monotonic sequence)

กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง พจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{1}{n}$$

จะได้ว่า

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{3}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

จากลำดับ $\{S_n\}$ ที่กำหนดมาให้จะเห็นว่า

$$S_1 > S_2 > S_3 > \ldots..$$

นั่นคือ ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ต่าง ๆ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ

นิยาม 2.4.1 ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น (Nonincreasing) ถ้า

$S_n \geqslant S_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

จาก $\quad S_n \geqslant S_{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{S_n}{S_{n+1}} \geqslant 1$

หรือ $\quad S_n \geqslant S_{n+1} \Leftrightarrow S_n - S_{n+1} \geqslant 0$

ตัวอย่าง 2.4.1 จงแสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น ถ้า $S_n = \dfrac{n+1}{n}$

วิธีทำ ให้ $\quad S_n = \dfrac{n+1}{n}$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

พิจารณา

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n}$$

$$> 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

เพราะว่า $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \Leftrightarrow \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1$

จากสมการ (1) $\frac{S_n}{S_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow S_n > S_{n+1}$

จากนิยาม 2.4.1 แสดงว่าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น ✱

ถ้ากำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{n-1}{n}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{2}{3} \\ S_4 &= \frac{3}{4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

จากลำดับ $\{S_n\}$ ที่กำหนดให้จะเห็นว่า

$$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$$

นั่นคือลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ต่าง ๆ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

นิยาม 2.4.2 ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง (Nondecreasing) ถ้า

$S_n \leqslant S_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

จาก $S_n \leqslant S_{n+1} \Leftrightarrow \frac{S_n}{S_{n+1}} \leqslant 1$

หรือ $S_n \leqslant S_{n+1} \Leftrightarrow S_n - S_{n+1} \leqslant 0$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงแสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง ถ้า

$$S_n = \frac{n-1}{n}$$

วิธีทำ ให้ $S_n = \frac{n-1}{n}$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

พิจารณา $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{n-1}{n} \; \frac{n+1}{n}$

$$= \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} < 1 \qquad \text{(1)}$$

เพราะว่า $n^2 - 1 < n^2 \Leftrightarrow \frac{n^2-1}{n^2} < 1$

จากสมการ (1)

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow S_n < S_{n+1}$$

จากนิยาม 2.4.2 แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง #

นิยาม 2.4.3 โมโนโทนิคลำดับ คือ ลำดับที่มีค่าไม่ เพิ่มขึ้น (Nonincreasing) หรือลำดับที่มีค่าไม่ลดลง (Nondecreasing) อย่างใดอย่างหนึ่ง

และ ถ้า $S_n > S_{n+1}$ เรียกว่าเป็นลำดับลดลง (decreasing)

หรือ ถ้า $S_n < S_{n+1}$ เรียกว่า เป็นลำดับเพิ่มขึ้น (increasing)

ทฤษฎีบท 2.4.1

(ก) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และมีขอบเขตข้างบน แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{l.u.b. } \{S_n\}$$

(ข) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้นและมีขอบเขตข้างล่าง แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{g.l.b. } \{S_n\}$$

พิสูจน์

(ก) ให้ $\beta = \text{l.u.b. } \{S_n\}$

จากนิยามจะได้ว่า

MA 214

$S_n \leqslant \beta$ สำหรับทุก ๆ ค่า n

สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N บางตัวซึ่ง

$$\beta - \varepsilon < S_N < \beta \qquad \text{..........(1)}$$

แต่ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง

นั่นคือ ถ้า $n \geqslant N$ แล้ว

$$S_N \leqslant S_n \leqslant \beta \qquad \text{..........(2)}$$

จากสมการ (1) และ (2)

$$\beta - \varepsilon < S_N \leqslant S_n \leqslant \beta$$

แต่ $\beta < \beta + \varepsilon$

แล้ว $\beta - \varepsilon < S_N \leqslant S_n \leqslant \beta < \beta + \varepsilon$

หรือ $\beta - \varepsilon < S_n < \beta + \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $-\varepsilon < S_n - \beta < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $|S_n - \beta| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \beta$

แต่ $\beta = \text{l.u.b. } \{S_n\}$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{l.u.b. } \{S_n\} \qquad \#$$

หมายเหตุ สำหรับทฤษฎีบท 2.4.1 นี้จะสรุปได้ว่า ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนิค และมีขอบเขต แล้ว $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 2.4.3 กำหนดให้ $S_n = 2 + \frac{1}{n}$ จงพิจารณาว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนิค

วิธีทำ พิจารณาผลต่างของ $S_n - S_{n+1}$

เพราะว่า $S_n - S_{n+1} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)$

$$= 2 + \frac{1}{n} - 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

เพราะว่า เศษมากกว่า 0 และส่วนมากกว่า 0

นั่นแสดงว่า $S_n - S_{n+1} > 0$

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น (nonincreasing) #

จากตัวอย่างนี้อาจพิจารณาได้อีกวิธีหนึ่งคือ

สมมุติให้ $S_n \geqslant S_{n+1}$

แทนค่า
$$2 + \frac{1}{n} \geqslant 2 + \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

$$n + 1 \geqslant n$$

$$1 \geqslant 0$$ ซึ่งเป็นจริง

นั่นแสดงว่า $S_n \geqslant S_{n+1}$ จริงและจากนิยามจะได้ว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น #

ตัวอย่าง 2.4.4 กำหนดให้ $S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

จงพิจารณาว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ **กรณีที่ 1** พิจารณาผลต่าง $S_n - S_{n+1}$

เพราะว่า

$$S_n - S_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)!} < 0$$

เพราะว่าเศษน้อยกว่า 0 และส่วนมากกว่า 0

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และ $S_n < S_{n+1}$

กรณีที่ 2 จะพิจารณาว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตข้างบน

เพราะว่า

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})} \quad \text{จากอนุกรมเรขาคณิต}$$

$$< 1 + \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

เพราะฉะนั้น $S_n < 3$ เมื่อ 3 เป็นจำนวนจริง

นั้นแสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตข้างบน

จากทั้งสองกรณี แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และมีขอบเขตข้างบน

เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบท 2.4.1 ลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ จะต้องมีค่า แล้วลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

ตัวอย่าง 2.4.5 กำหนดให้ $S_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ จงพิจารณาว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็น

ก) โมโนโทนิค ชนิดใด

ข) $\{S_n\}$ มีขอบเขตล่าง และขอบเขตบนหรือไม่

ค) $\{S_n\}$ มีขอบเขตหรือไม่

ง) ลิมิตของ $\{S_n\}$ หาค่าได้หรือไม่

วิธีทำ

ก) สมมุติให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง (Nondecreasing)

ดังนั้น $S_n \leqslant S_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ n

$$\frac{2n-7}{3n+2} \leqslant \frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2}$$

$$\frac{2n-7}{3n+2} \leqslant \frac{2n+2-7}{3n+3+2} = \frac{2n-5}{3n+5}$$

$$(2n-7)(3n+5) \leqslant (3n+2)(2n-5)$$

$$6n^2-11n-35 \leqslant 6n^2-11n-10$$

$$-35 \leqslant -10$$

ซึ่งเป็นจริง

นั้นแสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นโมโนโทนิค ลำดับ และ $-35 < -10$ อย่างเดียวนั้นแสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น #

ข) จาก $S_n = \dfrac{2n \div 7}{3n+2}$

$\because$ $S_1 = \dfrac{-5}{5} = -1$, $S_2 = \dfrac{-3}{8}$, $S_3 = \dfrac{-1}{11}$, $S_4 = \dfrac{1}{14}$, $S_5 = \dfrac{3}{17}$

จากการเขียนเราสามารถเดาได้ว่า 1 เป็นขอบเขตบนค่าหนึ่งของ $\{S_n\}$ นั้นคือ เราต้องแสดงได้ว่า $S_n \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ n

เพราะว่าถ้า $\dfrac{2n-7}{3n+2} \leqslant 1$

$$2n-7 \leqslant 3n+2$$

$-9 \leqslant n$ ซึ่งเป็นจริง

ถ้าทำย้อนขึ้นไป เราจะได้ว่า $S_n \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ n

นั้นแสดงว่า $\{S_n\}$ มีขอบเขตบน #

และจากการทดลองจะพบว่า $S_n \geqslant -1$ สำหรับทุก ๆ n

นั้นแสดงว่า $\{S_n\}$ มีขอบเขตล่าง #

ค) เพราะว่า $\{S_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด (Bounded sequence)

นั่นคือ $|S_n| \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ n #

ง) เนื่องจากทุก ๆ โมโนโทนิค ลำดับที่มีขอบเขตย่อมลู่เข้า หรือ มีลิมิตที่หาค่าได้ นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n - 7}{3n + 2} = \frac{2}{3}$$ #

ตัวอย่าง 2.4.6 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$$

จงแสดงว่า ลำดับนี้เป็นโมโนโทนิค และมีขอบเขต และเพราะฉะนั้นจะต้องเป็นลำดับลู่เข้า

วิธีทำ ก. พิจารณาว่าเป็นลำดับชนิดใด

ลองพิจารณาสองสามเทอมแรก พบว่า

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1\cdot3}{2\cdot4} = \frac{3}{8}S_1 \text{ หรือ } S_1 = \frac{8}{3}S_2 \text{ หรือ } S_1 > S_2$$

$$S_3 = \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6} = \frac{5}{6}S_2 \text{ หรือ } S_2 = \frac{6}{5}S_3 \text{ หรือ } S_2 > S_3$$

$$S_4 = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8} = \frac{7}{8}S_3 \text{ หรือ } S_3 = \frac{8}{7}S_4 \text{ หรือ } S_3 > S_4$$

โดยทั่วไป

$$S_n = \frac{2n-1}{2n} S_{n-1} \text{ หรือ } S_{n-1} = \frac{2n}{2n-1} S_n \text{ หรือ}$$

$S_{n-1} > S_n$

แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าลดลง #

ข. พิจารณาว่ามีขอบเขตหรือไม่

เพราะว่า แต่ละพจน์ของ S_n เป็นบวก เพราะฉะนั้น $0 < S_n$

และจากการพิจารณาแต่ละพจน์พบว่า

$$S_n \leqslant \frac{1}{2}$$

เราจะพิจารณาว่าจริงหรือไม่

จาก $S_n > 0$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n} > 0$$

$1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1) > 0$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

นั้นแสดงว่า $S_n > 0$ จริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

แสดงว่า 0 เป็นขอบเขตล่าง

และถ้า $S_n \leqslant \frac{1}{2}$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1) \leqslant 2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n$$

$$3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1) \leqslant 4\cdot6\cdot8\cdots2n$$

เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

แสดงว่า $S_n \leqslant \frac{1}{2}$ จริงสำหรับทุก ๆ ค่า n

แสดงว่า $\frac{1}{2}$ เป็นขอบเขตบน

เพราะฉะนั้น สรุปว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขต #

จากข้อ ก และข้อ ข สามารถสรุปได้ว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

แบบฝึกหัด 2.4

จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้ เป็นโมโนโทนิกหรือไม่, มีขอบเขตหรือไม่, และลู่เข้า หรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{2^n}{2^n + 1}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{n!}{n! + 1}\right\}$

3. $\left\{(-1)^{2n}\dfrac{1}{2n}\right\}$

4. $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n + 1}\right\}$

5. $\left\{\dfrac{2n}{n!}\right\}$

6. $\left\{2 + (-1)^n\right\}$

7. $\left\{2^n + 1\right\}$

8. ให้ลำดับ $\{s_n\}$ ซึ่งพจน์ต่าง ๆ คือ

$$s_1 = \sqrt{2}$$

$$s_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

และพจน์ที่ $n + 1$ คือ

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}$$

จงแสดงว่าลำดับนี้เป็นโมโนโทนิค และมีขอบเขต

แล้วหาลิมิตของลำดับ

9. ให้ลำดับ $\{s_n\}$ ซึ่งพจน์ต่าง ๆ คือ

$$s_1 = \sqrt{2}$$

$$s_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

และพจน์ที่ $n + 1$ คือ

$$s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$$

จงแสดงว่าพจน์นี้เป็นโมโนโทนิค และมีขอบเขต แล้วหาลิมิตของลำดับ

10. ให้ลำดับ $\{s_n\}$ ซึ่งพจน์ต่าง ๆ คือ

$$s_1 = 1$$

และพจน์ทั่ว ๆ ไปคือ

$$s_{n+1} = \sqrt{3s_n}$$

จงแสดงว่าลำดับ $\{s_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

2.5 ลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

(Subsequence of sequence $\{S_n\}$)

นิยาม 2.5.1 ลำดับ$\{\bar{S}_k\}$ เป็นลำดับย่อย (Subsequence) ของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้า

$$\bar{S}_k = S_{n_k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

ซึ่ง $\{n_k\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นของจำนวนเต็มในโดเมนของลำดับ $\{S_n\}$
เรากำหนดให้ ลำดับ $\{S_{n_k}\}$ แทนลำดับย่อย $\{\bar{S}_k\}$

ตัวอย่าง 2.5.1 กำหนดให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง

$S_n = \frac{1}{n}$ และถ้า $n_k = 2k$ จงหาลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

วิธีทำ จาก $n_k = 2k$ จะได้ว่า

$$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 6, n_4 = 8, \ldots$$

เพราะว่า $\{n_k\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น

และ
$$\begin{aligned} \{S_{n_k}\} &= \{S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3} \ldots\} \\ &= \{S_2, S_4, S_6, \ldots\} \qquad \ldots\ldots\ldots.(1) \end{aligned}$$

จาก
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \\ S_1 &= 1 \\ S_2 &= \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{3} \\ S_4 &= \frac{1}{4} \\ S_5 &= \frac{1}{5} \\ S_6 &= \frac{1}{6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

แทนค่า S_n ในสมการ (1)

เพราะฉะนั้น $\{S_{n_k}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ$\{S_n\}$

#

ตัวอย่าง 2.5.2 กำหนดให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง

$$S_n = (-1)^n \text{ และถ้า } n_k = 2k$$

จงหาลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

วิธีทำ เพราะว่า $n_k = 2k$ แล้ว

$$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 6, n_4 = 8, n_5 = 10, \ldots$$

จะเห็นว่า $\{n_k\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น และลำดับ

$$\begin{aligned}\{S_{n_k}\} &= \{S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, \ldots\} \\ &= \{S_2, S_4, S_6, \ldots\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)\end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned} S_n &= (-1)^n \\ S_2 &= (-1)^2 = 1 \\ S_4 &= (-1)^4 = 1 \\ S_6 &= (-1)^6 = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

แทนค่า S_n ในสมการ (1)

เพราะฉะนั้น $\{S_{n_k}\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

ทฤษฎีบท 2.5.1 ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้า แล้วทุก ๆ ลำดับย่อย (Subsequence) $\{S_{n_k}\}$ จะลู่เข้าด้วย และลู่เข้าสู่จุดเดียวกันด้วย

พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริงบวก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|S_n - s| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

เพราะว่า ลำดับ $\{S_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง ลำดับ $\{n_k\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น

ดังนั้น จะต้องมีจำนวนเต็มบวก K ซึ่ง

$$n_k \geqslant N \text{ สำหรับ } k \geqslant K$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$|S_{n_k} - s| < \varepsilon$ สำหรับ $k \geqslant K$

นั้นแสดงว่า $\lim\limits_{k \to \infty} S_{n_k} = s$ หรือกล่าวว่า

ลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่จุด s ด้วย #

จากทฤษฎีบท 2.5.1 นี้ในทางกลับกัน คือ ถ้าลำดับย่อยลู่เข้าสู่ s แต่ลำดับ $\{S_n\}$ อาจไม่ลู่เข้าก็ได้ เช่น

ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่งพจน์ที่ n คือ

$$S_n = (-1)^n$$

และให้ $S_{2n} = (-1)^{2n}$ แล้ว $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะว่า
$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = \lim_{n \to \infty} (-1)^{2n}$$
$$= \lim_{n \to \infty} 1$$
$$= 1$$

แสดงว่า ลำดับย่อย $\{S_{2n}\}$ ลู่เข้าสู่ 1 แต่ลำดับ $\{S_n\}$ ไม่ลู่เข้า เพราะลิมิต มีสองค่า คือ 1 กับ -1

นั้นแสดงว่า ถ้าลำดับย่อยลู่เข้า แล้วลำดับอาจไม่ลู่เข้าก็ได้

หรือ กำหนดให้ $\{S_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

เราพบว่า ลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

ถ้าให้ $\{S_{n_k}\} = \{S_{2k}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

เราก็พบว่า ลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ 0 ด้วย

ตัวอย่าง 2.5.3 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$S_1 = 1$, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{S_n}$ จงพิจารณาลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เพราะว่า S_n จะมีค่าเป็นบวกเสมอ

$\therefore \quad S_{n+1} > S_n$

ดังนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น

จากนี้ สมมุติว่า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตด้วย ....(1)

จากทฤษฎีบท 2.4.1 ลำดับ $\{S_n\}$ จะลู่เข้าสู่ค่า ๆ หนึ่ง สมมุติเป็น s

นั่นคือให้ $\lim_{n\to\infty} S_n = s$

$$\text{จาก} \quad S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n}$$

ใส่ลิมิต $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n}$

$$= s + \frac{1}{s}$$

$s = s + \frac{1}{s}$ $\because$ $\{S_{n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ดังนั้น ย่อมลู่เข้าสู่ s ด้วย

จาก $s = s + \frac{1}{s} \Rightarrow 0 = 1$ ซึ่งไม่เป็นจริง

ดังนั้นที่สมมุติ ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตก็ไม่เป็นจริง แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับ เพิ่มขึ้น และไม่มีขอบเขต

เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ ก็ลู่ออก (divergent) #

นิยาม 2.5.2 ช่วงสอดแทรก (Nested interval)

ให้ $\{I_n\}$ เป็นลำดับของช่วงปิด ซึ่งมีคุณสมบัติ

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

และ ℓ_n เป็นความยาวของแต่ละช่วงปิด I_n ซึ่ง

$\lim_{n\to\infty} \ell_n = 0$ แล้วลำดับ $\{I_n\}$ เรียกว่าลำดับของช่วงสอดแทรก (Nested interval)

ทฤษฎีบท 2.5.2 ถ้า $\{I_n\}$ เป็นลำดับของช่วงสอดแทรก (Nested interval) แล้วจะต้องมีจุดเพียงจุดเดียวเท่านั้นที่บรรจุอยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n

พิสูจน์ ให้ช่วง $I_n = \{x \mid a_n \leqslant x \leqslant b_n\}$

เพราะว่า $\{I_n\}$ เป็นลำดับของช่วงสอดแทรก จึงได้ว่า

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots..$ หรือ

$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$ หรือ $a_n \leqslant a_{n+1}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3.....$

และ $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots$ หรือ $b_n \geqslant b_{n+1}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3.....$

เพราะว่า $a_n \leqslant a_{n+1}$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดลง และมีขอบเขตจำกัดโดย b_1 เป็นขอบเขตข้างบน และ a_1 เป็นขอบเขตข้างล่าง

จากทฤษฎีบท 2.4.1 ลำดับ $\{a_n\}$ จะต้องลู่เข้าสู่จุด ๆ หนึ่ง คือ a

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

และเพราะว่า $b_n \geqslant b_{n+1}$ เพราะฉะนั้น $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่เพิ่มขึ้น และมีขอบเขตจำกัด โดย b_1 เป็นขอบเขตข้างบน และ a_1 เป็นขอบเขตข้างล่าง

จากทฤษฎีบท 2.4.1 ลำดับ $\{b_n\}$ จะต้องลู่เข้าสู่จุด ๆ หนึ่ง คือ b

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

พิจารณา

$$\begin{aligned} b - a &= \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \ell_n \\ &= 0 \quad \text{เพราะว่า } \{I_n\} \text{ เป็นลำดับของช่วงสอดแทรก} \end{aligned}$$

จาก $b - a = 0$

เพราะฉะนั้น $b = a$

เนื่องด้วย $a_n \leqslant a = b$ เมื่อ a เป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของ $\{a_n\}$ และ $a = b \leqslant b_n$ เป็นขอบเขตข้างล่างสูงสุดของ $\{b_n\}$

ดังนั้น

$a_n \leqslant a = b \leqslant b_n$ แสดงว่าจุด $a = b$ จะอยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n แต่จะมีเพียงจุดเดียวเท่านั้นหรือไม่

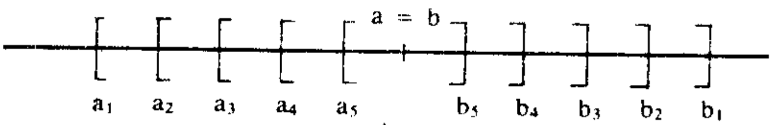
สมมุติให้มีจุดสองจุดที่ต่างกันอยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n คือ a และ a'
ให้ h เป็นระยะทางระหว่าง a และ a' และ $h > 0$ เสมอ
สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ พอ $(n \to \infty)$

$\ell_n = b_n - a_n < h$ และสำหรับภายใต้เงื่อนไขนี้จะไม่มีจุดที่ต่างกันสองจุดอยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n

เพราะว่า สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ พอระยะทาง ℓ_n จะมีค่าน้อยกว่า h เสมอ จากคุณสมบัติของช่วงสอดแทรก $\{I_n\}$ จะได้ว่า จุด a และ a' ทั้งสองจุดจะไม่อยู่ในบางช่วงปิด I_n สำหรับ n ที่มีค่ามาก

ดังนั้น สรุปได้ว่า จะมีจุดเพียงจุดเดียวเท่านั้นที่อยู่ในทุก ๆ ช่วงปิด I_n #

จากทฤษฎีบทนี้ ให้นักศึกษาดูรูป 2.5.1 ประกอบจะเข้าใจง่ายขึ้น



รูป 2.5.1

นิยาม 2.5.3 จุด A เป็นจุดเกาะกลุ่ม (Cluster point) ของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้ามีลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ที่ลู่เข้าสู่จุด A

ทฤษฎีบท 2.5.3 ทุก ๆ ลำดับที่มีขอบเขตย่อมมีจุดเกาะกลุ่มอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจุด

พิสูจน์ ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต นั่นคือ
จะมีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง

$|S_n| < M$ สำหรับทุก ๆ n

เพราะว่า $|S_n| < M \Leftrightarrow -M < S_n < M$ ....(1)

นั่นคือ S_n เป็นสมาชิกของช่วงเปิด $(-M, M)$ สำหรับทุก ๆ n

แต่ $(-M, M) \subseteq [-M, M]$

เพราะฉะนั้น $S_n \in [-M, M]$ หรือ $-M \leqslant S_n \leqslant M$

ให้ $I = [-M, M]$ เป็นช่วงปิดใด ๆ แล้ว

$S_n \in I$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$

หรือสำหรับจำนวนที่ไม่จำกัด (infinite) n ต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน

ถ้าแบ่งช่วงปิด I ออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน คือ

$\{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant 0\}$ และ $\{S_n | 0 \leqslant S_n \leqslant M\}$ ซึ่งแต่ละช่วงจะมีเทอม S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด เพราะว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่จำกัด (Infinite sequence)

เลือก $I_1 = \{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant 0\}$ เป็นช่วงปิด แล้วแบ่งช่วงปิด I_1 ออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน คือ

$$\{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant -\frac{M}{2}\} \text{ และ } \{S_n | -\frac{M}{2} \leqslant S_n \leqslant 0\}$$

ซึ่งแต่ละช่วงปิดจะมีเทอม S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด เพราะว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่จำกัด

เลือก $I_2 = \{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant -\frac{M}{2}\}$ เป็นช่วงปิดแล้วแบ่งช่วงปิด I_2-ออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน คือ

$$\{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant -\frac{3M}{4}\} \text{ และ } \{S_n | -\frac{3M}{4} \leqslant S_n \leqslant -\frac{M}{2}\}$$

ซึ่งแต่ละช่วงปิดจะมีเทอม S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด

แล้วเลือกช่วงปิดใดช่วงหนึ่งมาแล้วแบ่งช่วงปิดนั้นออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน แล้วดำเนินการเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จะหา

$I_1, I_2, I_3, \ldots$ ได้ซึ่ง

$$I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots..$$

เมื่อ $I_n = \{S_n | -M \leqslant S_n \leqslant \frac{-2^{n-1}+1M}{2^{n-1}}\}$ ซึ่งแต่ละช่วงปิดจะมีเทอม-

S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด ....(2)

พิจารณาความยาวของแต่ละช่วง

I ยาว $= M - (-M) = 2M$

I_1 ยาว $= 0-(-M) = M$

I_2 ยาว $= -\dfrac{M}{2} - (-M) = \dfrac{M}{2} = \dfrac{M}{2^{2-1}}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

โดยทั่วไป I_n ยาว $= \dfrac{M}{2^{n-1}}$ สำหรับ $n > 1$ ....(3)

ถ้ากำหนดให้จุดปลายของช่วงปิด $I_n = \left\{S_n \mid -M \leqslant S_n \leqslant \dfrac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} M\right\}$

คือ $a_n = -M$ ซึ่ง $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่ลดลง และมีขอบเขตข้างบน เช่น-M เป็นขอบเขตข้างบนของ $\{a_n\}$

และ $b_n = \dfrac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} M$ ซึ่ง $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้น และมีขอบเขตข้างล่าง เช่น $-M$ เป็นขอบเขตข้างล่าง

ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ จะต้องลู่เข้าเนื่องด้วย

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ell_n \quad \text{เมื่อ } \ell_n \text{ เป็นความยาวของ } I_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{M}{2^{n-1}} \quad \text{จากสมการ (3)}$$

$$= 0$$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ และให้เท่ากับ A

ดังนั้น $a_n \leqslant A \leqslant b_n$ หรือ

A เป็นสมาชิกของทุก ๆ ช่วงปิด I_n

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ซึ่ง $\varepsilon > 0$ แล้ว

ความยาว $I_n = \dfrac{M}{2^{n-1}} < \varepsilon$ สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ พอหรือ $n > N$

ให้ช่วงเปิด $\{S_n \mid A-\varepsilon < S_n < A+\varepsilon\}$ เป็นย่านจุด A

หรือ $\{S_n \mid |S_n - A| < \varepsilon\}$

สำหรับ $n > N$, ช่วงปิด I_n จะอยู่ในย่านจุด A นี้ เนื่องจากไม่มี $S_n \in I_n$ พจน์ใด ๆ เลยที่อยู่ไกลจาก A มากกว่าความยาวของ $I_n = \dfrac{M}{2^{n-1}}$

ดังนั้นย่านจุด A จะมีพจน์ S_n เป็นจำนวนไม่จำกัด สำหรับจำนวนไม่จำกัด n ต่าง ๆ

ต่อไปจะแสดงว่า A เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$

นั้นคือ ต้องแสดงว่าจะมีลำดับย่อยที่ย่างเข้าสู่จุด A ถ้าเลือก $\varepsilon = 1$ จะมีจำนวนไม่จำกัด n ซึ่งพจน์ $S_n \in \{|S_n - A| < 1\}$ ดังนั้นจะมี

$$n_1 \text{ ซึ่ง } |S_{n_1} - A| < 1$$

จำมีจำนวนไม่จำกัด n ซึ่งพจน์ $S_n \in \{|S_n - A| < \frac{1}{2}\}$ ดังนั้นจะมี

$$n_2 > n_1 \text{ ซึ่ง } |S_{n_2} - A| < \frac{1}{2}$$

จะมีจำนวนไม่จำกัด n ซึ่งพจน์ $S_n \in \{|S_n - A| < \frac{1}{3}\}$ ดังนั้นจะมี

$$n_3 > n_2 \text{ ซึ่ง } |S_{n_3} - A| < \frac{1}{3}$$

ในทำนองเดียวกันจะมี

$$n_4 > n_3 \text{ ซึ่ง } |S_{n_4} - A| < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$n_k > n_{k-1} \text{ ซึ่ง } |S_{n_k} - A| < \frac{1}{k}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 < \varepsilon$ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ

เพราะฉะนั้น สำหรับลำดับของจำนวน $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ ซึ่ง $|S_n - A| < \frac{1}{k} < \varepsilon$ เมื่อ k มีค่ามาก ๆ นั้นแสดงว่า สำหรับลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ก็จะลู่เข้าสู่ A

ดังนั้น A เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$ #

นิยาม 2.5.4 ลำดับ $\{S_n\}$ เรียกว่า โคชีซีเควนซ์ (Cauchy sequence) ถ้า กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N (ขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่ง

$|S_n - S_m| < \varepsilon$ สำหรับ $n, m > N$ หรือ สามารถเขียนได้ว่า

$\lim\limits_{m,n\to\infty} |S_n - S_m| = 0$ หมายความว่า ถ้า n และ m มีค่ามาก ๆ แล้ว

ระยะทางระหว่าง S_n และ S_m จะย่างเข้าสู่ 0

ทฤษฎีบท 2.5.4 ทุก ๆ ลำดับที่ลู่เข้า เป็นโคชีซีเควนซ์

พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$

จากนิยาม กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

เพราะว่า $n + 1 > n \geqslant N$

เพราะฉะนั้น $n + 1 > N$ และเราจะได้ว่า

$$|S_{n+1} - s| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ด้วย}$$

สำหรับ $n + 1$, และ n ที่มีค่ามากกว่า N เราจะพิจารณา

$$\begin{aligned}
|S_n - S_{n+1}| &= |S_n - s + s - S_{n+1}| \\
&= |(S_n - s) + (s - S_{n+1})| \\
&\leqslant |S_n - s| + |s - S_{n+1}| \\
&= |S_n - s| + |S_{n+1} - s| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ถ้าให้ $n + 1 = m$ เราจะได้ว่า

$|S_n - S_m| < \varepsilon$ สำหรับ n และ m มีมากกว่า N นี้แสดงว่าทุก ๆ ลำดับที่ลู่เข้าเป็นโคชีซีเควนซ์ #

ทฤษฎีบท 2.5.5 ถ้า $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์แล้ว ลำดับ $\{S_n\}$ ย่อมเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

พิสูจน์ เพราะว่าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์ จะได้ว่า

สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$|S_n - S_m| < 1$ สำหรับ $n, m > N$

$|S_n| - |S_m| \leqslant |S_n - S_m| < 1$

หรือ $|S_n| < 1 + |S_m|$

ถ้าเลือก $m > N$ เป็นตัวคงที่แล้ว สำหรับ $n > N$

จะได้ว่า $|S_n| < 1 + |S_m| = M_1$ ....(1)

จากสมการ (1) $|S_n| < M_1$ แสดงว่า ซีเควนซ์ $\{S_n\}$ มีขอบเขต นั่นคือ สำหรับ $n > N$ นั้น

$|S_n| < M_1$

ซึ่งจะมีจำนวนจำกัดของพจน์ที่ n ของลำดับ $\{S_n\}$

นั่นคือพจน์ที่ $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ ซึ่ง

$S_k \nless M_1$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

ดังนั้นถ้าเพิ่ม M_1 ขึ้นไปเรื่อยจะได้จำนวนจริง M ซึ่ง

$|S_n| < M$ สำหรับทุก ๆ n

จากนิยาม 2.3.3 แสดงว่า

โคชีซีเควนซ์ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

ทฤษฎีบท 2.5.6 ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์แล้ว ลำดับ $\{S_n\}$ ย่อมลู่เข้า (convergent)

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.5.5 ทราบว่า โคชีซีเควนซ์ $\{S_n\}$ มีขอบเขต นั่นคือ สำหรับจำนวนจริงบวก M

$|S_n| < M$ สำหรับทุก ๆ n

และจากทฤษฎีบท 2.5.3 ถ้า ลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตแล้ว จะมีจุดเกาะกลุ่ม A นั่นคือ

จะมีลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่จุด A

หรือ $\lim\limits_{k \to \infty} S_{n_k} = A$

จากนิยามของลิมิต สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$|S_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับ $n_k \geqslant N_1$ ....(1)

เพราะว่าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n, m > N_2 \qquad \text{.........}(2)$$

เพราะว่า ลำดับ $\{n_k\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น และไม่มีขอบเขต

นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง N_2 จะมี n_k ซึ่ง $n_k > N_2$

จากสมการ (2) สำหรับ $n, n_k > N_2$

$$|S_n - S_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

สำหรับ N ที่มากกว่า N_1 และ N_2 ถ้าให้ n_k คงที่สำหรับ $n \geqslant N$

$$\begin{aligned} |S_n - A| &= |S_n - S_{n_k} + S_{n_k} - A| \\ &\leqslant |S_n - S_{n_k}| + |S_{n_k} - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ จากสมการ (1) และ (3)} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|S_n - A| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งเป็นโคชีซีเควนซ์ย่อมลู่เข้าสู่ A #

ตัวอย่าง 2.5.4 กำหนด ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = \frac{1}{n}$$

จงแสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็น โคชีซีเควนซ์

วิธีทำ สำหรับ $n > N$

แต่ $n + 1 > N$ แล้ว

$$n, n + 1 > N$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} S_n - S_{n+1} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n + 1 - n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n^2 + n} \end{aligned}$$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} |S_n - S_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^2 + n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$= 0$$

จากนิยาม 2.5.4 แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นโคชีซีเควนซ์ #

แบบฝึกหัด 2.5

จงพิจารณา ลำดับต่อไปนี้ ลู่เข้า หรือลู่ออก

1. ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับซึ่งกำหนดให้

$$s_1 = 1 \,, \; s_{n+1} = s_n + \frac{1}{s_n} \text{ สำหรับ } n > 1$$

2. ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งกำหนดให้

$$s_1 = 1, \; s_{n+1} = s_n + \sqrt{s_n} \text{ สำหรับ } n > 1$$

3. ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งกำหนดให้

$$s_1 = 1, \; s_2 = 3$$

$$s_n = (s_{n-1} + s_{n-2})/2 \text{ สำหรับ } n > 2$$

4. ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งกำหนดให้

$$s_1 = 1, \; s_2 = 2$$

$$s_{n+2} = (4s_{n+1} - s_n)/3$$

แบบฝึกหัด 2.6

จงหาขอบเขตข้างบนต่ำสุด และขอบเขตข้างล่างสูงสุดของลำดับต่อไป

1. $2, 1.9, 1.8, 1.7, \ldots 2 - \frac{(n-1)}{10}$

1. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$

3. $.6, .66, .666, \ldots \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

4. $-1, +2, -3, +4, -5, \ldots (-1)^n n$

5. $\left\{\frac{(-1)^{2n}}{n}\right\}$

6. $\left\{1 - 2n\right\}$

7. $\left\{\frac{n^2}{n^2 + n}\right\}$

8. $\left\{\frac{n^2}{n + 1}\right\}$

2.7 "จุดเกาะกลุ่ม" (Cluster Points **หรือ** limit point)

จากการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องลิมิตของลำดับนั้น พบว่า ถ้าลิมิตหาค่าได้ และเท่ากับ s แล้วนั้น หมายความว่า ลำดับ $\{S_n\}$ พจน์ที่ n ของลำดับจะเข้าใกล้จำนวน s เข้าไปเรื่อย ๆ ในขณะที่ n มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ ปรากฏการณ์เช่นนี้ก็จะไม่เกิดขึ้น

เช่น กำหนดพจน์ที่ n ของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = (-1)^n$$

จะพบว่า ลำดับ $\{S_n\}$ หาค่าลิมิตไม่ได้

แต่พจน์ต่าง ๆ ของลำดับ $\{S_n\}$ จะอยู่ใกล้ ๆ รอบ ๆ จุดสองจุด คือ $+1$, กับ -1

นั้นคือ สำหรับจำนวน $\varepsilon > 0$ จะมีพจน์ต่าง ๆ บางพจน์ของ $\{S_n\}$ เป็นจำนวนไม่จำกัดอยู่ในย่านจุด $+1$ รัศมี ε และพจน์อื่น ๆ นอกจากนี้จะอยู่ในย่านจุด -1 รัศมี ε

ณ. จุดทั้งสองนี้ เรียกว่า จุดเกาะกลุ่ม ของลำดับ $\{S_n\}$

นิยาม 2.7.1 จุด A เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้ามีลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่จุด A

หมายเหตุ ณ.ที่นี้ คำ Cluster point กับ limit point ถือว่าเป็นจุดเดียวกัน

นิยาม 2.7.2 จุด A เป็น limit point (cluster point) ของลำดับ $\{S_n\}$ ถ้า กำหนดย่านจุด A, $N(A,\varepsilon)$ จะมีเซตไม่จำกัด (Infinite) ของจำนวนเต็มบวก B ซึ่ง

$$S_n \in N(A,\varepsilon) \text{ สำหรับทุก ๆ } n \in B$$

ตัวอย่าง 2.7.1 กำหนด ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = (-1)^n$$

จงหา limit point ของลำดับ $\{S_n\}$

วิธีทำ กำหนดให้ $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง $S_{2n} = (-1)^{2n}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1$ นั่นคือ $\{S_{2n}\}$ ย่างเข้าสู่ 1 เพราะ

ฉะนั้น 1 เป็น limit point ของลำดับ $\{S_n\}$ หรือที่ 1 ถ้าสร้างย่านจุด 1, $N(1,0.5)$ แล้วเราสามารถหาเซต B ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกคู่ $B = \{2n | n \in N\}$ ซึ่ง

$$S_n \in N(1,0.5) \text{ สำหรับทุก ๆ } N \in B$$

ดังรูป 2.7.1

และถ้าให้ $\{S_{2n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$

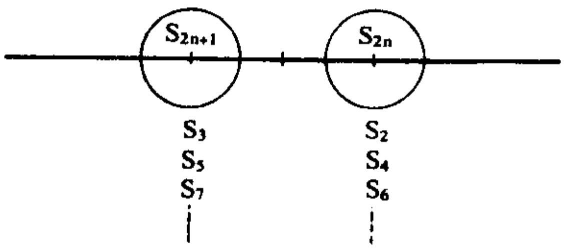
ซึ่ง $S_{2n+1} = (-1)^{2n+1}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} = -1$

เพราะฉะนั้น -1 เป็น limit point ของลำดับ $\{S_n\}$ หรือที่ -1 ถ้าสร้างย่านจุด -1, $N(-1,0.5)$ แล้วเราสามารถทำเซต B' ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกคี่, $B' = \{2n + 1 \mid n \in N\}$

ซึ่ง $S_n \in N(-1,0.5)$ สำหรับทุก ๆ $n \in B$

ดังรูป 2.7.1



รูป 2.7.1

ตัวอย่าง 2.7.2 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = n + 1 + (-1)^n (n + \frac{1}{n})$$

จงหา limit point ของ $\{S_n\}$

วิธีทำ ให้ $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{2n} = 2n + 1 + (-1)^{2n} (2n + \frac{1}{2n})$$

$$= 2n + 1 + 2n + \frac{1}{2n}$$

$$= 4n + 1 + \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (4n + 1 + \frac{1}{2n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4n + 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4n + (1) + 0)$$

$$= 1 + \lim_{n\to\infty} 4n = \infty$$

ให้ $\{S_{2n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{2n+1} = (2n + 1) + 1 + (-1)^{2n+1} \left((2n + 1) + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 2n + 1 + 1 + (-1) \left(2n + 1 + \frac{1}{2n + 1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n + 1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n + 1}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น limit point ของลำดับ $\{S_n\}$ คือ 1 และ ∞ #

ตัวอย่าง 2.7.8 กำหนดลำดับ $\{S_n\}$

$$S_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

จงหา limit point ของลำดับ $\{S_n\}$

วิธีทำ ให้ $\{S_{4n}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{4n} = \sin(2n\pi)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n} = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi)$$

$$= 0$$

$(\because \ \sin 2\pi = \sin 4\pi = \sin 6\pi = \ldots = 0)$

ให้ $\{S_{4n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{4n+1} = \sin \frac{(4n+1)\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{(4n+1)\pi}{2}$$

$$= 1$$

$(\because \ \sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{9\pi}{2} = \sin \frac{13\pi}{2} = \ldots = 1)$

ให้ $\{S_{4n+2}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{4n+2} = \sin \frac{(4n+2)\pi}{2}$$

$$= \sin(2n+1)\pi$$

$$= \sin(\pi + 2n\pi)$$

$$= -\sin(2n\pi) \qquad \because \ \sin(\pi + A) = -\sin A$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n+2} = -\lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi)$$

$$= -0$$

$$= 0$$

$(\because \ \sin 2\pi = \sin 4\pi = \sin 6\pi = \ldots = 0)$

ให้ $\{S_{4n+3}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{4n+3} = \sin \frac{(4n+3)\pi}{2}$$

$$= \sin\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi$$

$$= \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)$$

$$= -\cos(2n\pi) \quad \because \sin\left(\frac{3\pi}{2} + A\right) = -\cos A$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{4n+3} = -\lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi)$$

$$= -(1)$$

$$= -1$$

$(\because \cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi = \ldots = 1)$

เพราะฉะนั้น limit point **ของลำดับ** $\{S_n\}$ **คือ** 1, 0, -1 #

แบบฝึกหัด 2.7

จงหา limit point ของลำดับ $\{S_n\}$ ต่อไปนี้ ถ้า

1. $S_n = (-1)^n n$
2. $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{n\pi}{2}$
3. $S_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin \frac{n\pi}{2}$
4. $S_n = \frac{1}{n}$
5. $S_n = [(-1)^n + 1]\, n^2$
6. $S_n = \frac{(-1)^n n}{1 + n}$
7. $S_n = \tan \frac{n\pi}{2}$

2.8 ลิมิตซุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์

(Limit Superior and Limit Inferior)

จากการศึกษาเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ พบว่า ทุก ๆ ลำดับไม่จำเป็นว่าจะต้องหาค่าของลิมิตได้เสมอแต่สำหรับลำดับที่หาค่าลิมิตไม่ได้นั้น บางทีอาจมี **"จุดเกาะกลุ่ม"** ได้หลายจุด

ให้ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก นั่นคือ ลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ จะมีจุดเกาะกลุ่มหลายจุด และให้ C เป็นเซตของจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$

จะพิจารณาเซต C ว่ามีขอบเขต (bounded) หรือไม่ โดยที่จริงแล้ว เซต C ไม่จำเป็นจะต้องมีขอบเขต แต่เซต C อาจจะมีขอบเขตข้างบน หรือขอบเขตข้างล่างอย่างใดอย่างหนึ่ง

สมมุติให้ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตข้างบน และมีจุดเกาะกลุ่ม ถ้าเซต C เป็นเซตของจุดเกาะกลุ่ม แล้วเซต C ก็จะมีขอบเขตข้างบนด้วย แล้วจะต้องมีขอบเขตข้างบนต่ำสุด ซึ่งกำหนดโดย $\bar{\ell}$ และจำนวน $\bar{\ell}$ เรียกว่า *"ลิมิตซุพีเรียร์"* ของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$\bar{\ell} = \lim_{n\to\infty} \sup S_n \quad \text{หรือ}$$

$$\bar{\ell} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \; S_n$$

สัญลักษณ์ $n\to\infty$ อาจตัดทิ้งได้ ดังนั้นจึงได้

$$\bar{\ell} = \lim \sup S_n \quad \text{หรือ}$$

$$\bar{\ell} = \overline{\lim} \; S_n$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\{S_n\}$ มีขอบเขตข้างล่าง และมีจุดเกาะกลุ่ม แล้วเซตของจุดเกาะกลุ่ม C ก็จะมีขอบเขตข้างล่าง แล้วจะต้องมีขอบเขตข้างล่างสูงสุด กำหนดโดย $\underline{\ell}$ และจำนวน $\underline{\ell}$ เรียกว่า **"ลิมิตอินฟีเรียร์"** ของ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$\underline{\ell} = \lim \inf S_n \quad \text{หรือ}$$

$$\underline{\ell} = \underline{\lim} \; S_n$$

เกี่ยวกับเซตต่าง ๆ ที่มีขอบเขตข้างบนบางเซตอาจมีค่าสูงสุด บางเซตอาจไม่มีค่าสูงสุดก็ได้

ในกรณีเช่นนี้ ค่า $\bar{\ell}$ ก็อาจจะเป็นสมาชิกของเซต C หรือ อาจจะไม่เป็นสมาชิกของเซต C นั้นคือ $\bar{\ell}$ อาจจะไม่เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$

ในทำนองเดียวกัน $\underline{\ell}$ ก็อาจจะเป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$ หรือไม่เป็นก็ได้

แต่ $\bar{\ell}$ และ $\underline{\ell}$ เป็นจุดเกาะกลุ่มก็ต่อเมื่อค่าทั้งสองหาค่าได้ หรือในกรณีพิเศษ ดังนี้

ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขต นั้นคือ พจน์ที่ n ของลำดับมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ หรือมีค่าลดลงเรื่อย

จะหาลิมิตซุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ ได้ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 2.8.1
1) ถ้า $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขตข้างบน, แล้วลิมิตซุพีเรียร์ $\bar{\ell} = +\infty$
2) ถ้า $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขตข้างล่าง, แล้วลิมิตอินฟีเรียร์ $\underline{\ell} = -\infty$
3) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ แล้ว $\bar{\ell} = \underline{\ell} = -\infty$
4) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ แล้ว $\bar{\ell} = \underline{\ell} = +\infty$

โดยปกติเมื่อกล่าวว่า ลิมิตซุพีเรียร์ หรือลิมิตอินฟีเรียร์หาค่าได้ นั้นหมายความตามนิยามที่กล่าวไว้แล้ว หรือบางทีอาจกล่าวว่า ลิมิตซุพีเรียร์ หาค่าได้ และเป็นจำนวนจำกัด (finite)

เมื่อมีคุณสมบัติเหมือนกับข้อหนึ่งข้อใดในสี่ข้อนั้น ในนิยาม 2.8.1 เป็นกรณีพิเศษที่ลำดับไม่มีขอบเขต

ทฤษฎีบท 2.8.1 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $\bar{\ell}$ เป็นจำนวนจำกัด (finite) แล้วสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวน N_1 ซึ่ง

$$S_n < \bar{\ell} + \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N_1$$

และถ้า $\underline{\ell}$ เป็นจำนวนจำกัดแล้ว จะมีจำนวน N_2 ซึ่ง

$$S_n > \underline{\ell} - \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N_2$$

พิสูจน์ ในกรณีที่ $\bar{\ell}$ เป็นจำนวนจำกัด (finite) แล้ว
สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวน N_1 ซึ่ง

$$S_n < \bar{\ell} + \varepsilon \text{ สำหรับ } n > N_1$$

สมมุติให้ข้อความข้างบนไม่เป็นจริงนั้นคือ

สมมุติให้มี $\varepsilon_0 > 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ที่มีค่ามาก ๆ ซึ่งสำหรับ $n > N$ ซึ่ง

$$S_n \geqslant \bar{\ell} + \varepsilon_0$$

ดังนั้น จะมีลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ ที่ย่างเข้าสู่จุดต่าง ๆ ซึ่งมีค่ามากกว่า $\bar{\ell} + \varepsilon_0$ แต่ลำดับย่อยนี้มีขอบเขตข้างบน ดังนั้นจะต้องมีจุดเกาะกลุ่ม β ซึ่ง

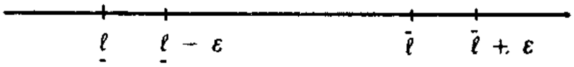
$$\beta \geqslant \bar{\ell} + \varepsilon_0$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานที่ว่า $\bar{\ell}$ เป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของเซตของจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$

เพราะฉะนั้นที่สมมุติให้ก็ไม่เป็นจริง

นั้นคือ ข้อความข้างบนนี้ก็เป็นจริง

ให้นักศึกษาดูรูป 2.8.1 ประกอบ



รูป 2.8.1

สำหรับกรณีที่สองให้นักศึกษาลองพิสูจน์ดู

ทฤษฎีบท 2.8.2 ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้แล้ว มันจะต้อง necessary และ sufficient ว่า

$$\lim \sup S_n = \lim \inf S_n$$

พิสูจน์ Necessity : ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = A$ แล้วเซตของจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\{S_n\}$ จะมีสมาชิกตัวเดียว คือ A เพราะว่าทุก ๆ ลำดับย่อย $\{S_{n_k}\}$ จะย่างเข้าสู่ A ด้วย

เพราะฉะนั้น $\lim \sup S_n = \lim \inf S_n = A$

Sufficiency : สมมุติให้ $\bar{\ell} = \underline{\ell}$

แล้วจากทฤษฎีบท 2.8.1 สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก (N = moss $\{N_1, N_2\}$) ซึ่ง

$$\underline{\ell} - \varepsilon < S_n < \bar{\ell} + \varepsilon$$

เนื่องด้วย $\bar{\ell} = \underline{\ell}$ จึงได้ว่า

$$\underline{\ell} - \varepsilon < S_n < \underline{\ell} + \varepsilon \quad \text{หรือ}$$

$$-\varepsilon < S_n - \underline{\ell} < \varepsilon \quad \text{หรือ}$$

$$|S_n - \underline{\ell}| < \varepsilon \quad \text{สำหรับ } n > N$$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้ #

นิยาม 2.8.2 ลิมิตซุพีเรียร์ คือ limit point ตัวที่ใหญ่ที่สุดของลำดับ $\{S_n\}$ และลิมิตอินฟีเรียร์ คือ limit point ตัวที่เล็กที่สุดของลำดับ $\{S_n\}$

ตัวอย่าง 2.8.1 จงหาลิมิตซุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ$\left\{\frac{(-1)^n}{2n-1}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = 0$

จากทฤษฎีบท 2.8.2 จะได้ว่า

ลิมิตซุพีเรียร์ = ลิมิตอินฟีเรียร์ = 0 #

ตัวอย่าง 2.8.2 จงหาลิมิตสุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = 2^n$$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

จากนิยาม 2.8.1

ลิมิตสุพีเรียร์ = ลิมิตอินฟีเรียร์ = ∞ #

ตัวอย่าง 2.8.3 จงหาลิมิตสุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ ของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_n = n^{1+(-1)^n}$$

วิธีทำ เลือก $\{S_{2n+1}\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{2n+1} = (2n+1)^{1+(-1)^{2n+1}}$$
$$= (2n+1)^{1+(-1)} \quad \because\ 2n+1 \text{ เป็นคี่}$$
$$= (2n+1)^0$$
$$= 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 1$$
$$= 1$$

ซึ่ง 1 เป็น limit point ของ $\{S_n\}$

เลือก $\{S_{2n}\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง

$$S_{2n} = (2n)^{1+(-1)^{2n}}$$
$$= (2n)^{1+1} \quad \because\ 2n \text{ เป็นคู่}$$
$$= (2n)^2$$
$$= 4n^2$$

$$\because \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} 4n^2$$
$$= \infty$$

ซึ่ง ∞ เป็น limit point ของ $\{S_n\}$

จากนิยาม 2.8.2

ลิมิตสุพีเรียร์ $= \infty$

ลิมิตอินฟีเรียร์ $= 1$ #

ตัวอย่าง 2.8.4 จงหาลิมิตสุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{(-1)^n(2n-1)\}$

วิธีทำ เลือก $\{(-1)^{2n}(4n^2-1)\}$ เมื่อ n เป็นคู่ เป็นลำดับย่อยของ $\{(-1)^n(2n-1)\}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n}(4n^2-1) = \lim_{n\to\infty} 4n^2 - 1 = \infty$

$$= \infty$$

เพราะฉะนั้น ∞ เป็น limit point ของ $\{(-1)^n (2n - 1)\}$

เลือก $\{(-1)^{2n+1} (2(2n + 1) - 1)\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{(-1)^n (2n - 1)\}$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} (4n + 1) = \lim\limits_{n\to\infty} -(4n + 1)$

$$= -\infty$$

เพราะฉะนั้น $-\infty$ เป็น limit point ของ $\{(-1)^n (2n - 1)\}$

จากนิยาม 2.8.2

ลิมิตสุพีเรียร์ $= \infty$

ลิมิตอินฟีเรียร์ $= -\infty$ #

แบบฝึกหัด 2.8

จงหาลิมิตสุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{S_n\}$ ต่อไปนี้ซึ่ง

1. $S_n = \dfrac{(-1)^n n}{1+n}$
2. $S_n = \sin\left(\dfrac{n^{(-1)^{n+1}}\pi}{4}\right)$
3. $S_n = (-1)^n\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$
4. $S_n = 2 - \dfrac{(n-1)}{10}$
5. $S_n = (-1)^{n-1}$
6. $S_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$
7. $S_n = (-1)^n n$
8. $S_n = (-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)}{(n+2)}$
9. $S_n = [(-1)^n + 1]n^2$
10. $S_n = \dfrac{2^n}{2}$

2.9 ลำดับในปริภูมิ n มิติ (Sequence in n Space)

ต่อไปจะศึกษาลำดับในปริภูมิ n มิติ

ให้ $\{p_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิ 2 มิติ ซึ่งพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$p_n = (X_n , Y_n)$$

หรือ $\{p_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$p_n = (X_n , Y_n , Z_n)$$

ซึ่ง X_n , Y_n และ Z_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับในปริภูมิ 1 มิติ ที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น

นิยาม 2.9.1 ลำดับ $\{p_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิ n มิติลู่เข้าสู่จุด p_0 ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|p_n - p_0| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

จากนิยาม 2.9.1 ค่า $|p_n - p_0| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$ หมายถึง สำหรับ $n \geqslant N$ ทุก ๆ ตัวแล้ว p_n จะเป็นสมาชิกของย่านจุด p_0 รัศมี ε $(p_n \in N(p_0 , \varepsilon))$

โดยปกติจุด p_0 เรียกว่า ลิมิตของ ลำดับ $\{p_n\}$

และเขียนว่า $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ หรือ

$p_n \to p_0$ เมื่อ $n \to \infty$

อ่านว่า p_n ย่างเข้าใกล้ p_0 เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น

ถ้า $p_n = (X_n , Y_n)$ และ $p_0 = (X_0 , Y_0)$

$$\begin{aligned} |p_n - p_0| &= |(X_n , Y_n) - (X_0 , Y_0)| \\ &= |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0)| \end{aligned}$$

แต่ $|X_n - X_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0)| = |p_n - p_0|$

หรือ $|Y_n - Y_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0)| = |p_n - p_0|$

เพราะว่า $(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2 = (X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2$

$$\leqslant (X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2 + 2(X_n - X_0)(Y_n - Y_0)$$

$$\sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2} = \sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2 + 2(X_n - X_0)(Y_n - Y_0)}$$

$$= \sqrt{\left((X_n - X_0) + (Y_n - Y_0)\right)^2}$$

$$= (X_n - X_0) + (Y_n - Y_0)$$

$$\leq |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0|$$

เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2} \leq |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0|$$

$$|p_n - p_0| \leq |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0|$$

หมายเหตุ ถ้า $p_n = (X_n , Y_n , Z_n)$ และ $p_0 = (X_0 , Y_0 , Z_0)$

1. $|X_n - X_0| \leqslant |p_n - p_0|$
2. $|Y_n - Y_0| \leqslant |p_n - p_0|$
3. $|Z_n - Z_0| \leqslant |p_n - p_0|$
4. $|p_n - p_0| \leqslant |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0| + |Z_n - Z_0|$

ต่อไปจะศึกษาลำดับในปริภูมิ n มิติ โดยให้ $\{p_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิ n มิติ จะศึกษาดูว่าถ้า n มีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ $(n \to \infty)$ แล้วพจน์ p_n จะลู่เข้าใกล้จุดใด การหาจุดที่ p_n จะเข้าใกล้จุดใดนั้นจะอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.๑.1 ลำดับในปริภูมิ n มิติลู่เข้า (Converge) ก็ต่อเมื่อลำดับของจำนวนจริง ซึ่งเป็นโคออร์ดิเนตของมันลู่เข้า (Converge)

พิสูจน์ ในปริภูมิ 3 มิติ

ให้ $p_n = (X_n , Y_n , Z_n)$ ลู่เข้าสู่ $p_0 (X_0 , Y_0 , Z_0)$

ก็ต่อเมื่อ $X_n \to X_0$, $Y_n \to Y_0$, $Z_n \to Z_0$ เมื่อ $n \to \infty$

($\Rightarrow$) ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z_0$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ จะได้ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N-

ซึ่ง $|p_n - p_0| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

เพราะว่า $|p_n - p_0| = |(X_n , Y_n Z_n) - (X_0 , Y_0 , Z_0)|$

$= |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0 , Z_n - Z_0)|$

และ $|X_n - X_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0 , Z_n - Z_0)|$ ....(1)

$|Y_n - Y_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0 , Z_n - Z_0)|$ ....(2)

$|Z_n - Z_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0 , Z_n - Z_0)|$ ....(3)

จากสมการ (1)

$|X_n - X_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0 , Z_n - Z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

ดังนั้น $|X_n - X_0| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X_0$ #

จากสมการ (2)

$|Y_n - Y_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0 , Z_n - Z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

ดังนั้น $|Y_n - Y_0| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} Y_n = Y_0$ #

จากสมการ (3)

$|Z_n - Z_0| \leqslant |(X_n - X_0 , Y_n - Y_0 , Z_n - Z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

ดังนั้น $|Z_n - Z_0| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n = Z_0$ #

($\Leftarrow$) ให้ $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} Y_n = Y_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n = Z_0$

แล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p_0$

จาก $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X_0$ จะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง

$|X_n - X_0| < \frac{\varepsilon}{3}$ สำหรับ $n \geqslant N_1$ ....(4)

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y_0$ จะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|Y_n - Y_0| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ สำหรับ } n \geqslant N_2 \qquad \text{..........(5)}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z_0$ จะได้ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_3 ซึ่ง

$$|Z_n - Z_0| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ สำหรับ } n \geqslant N_3 \qquad \text{..........(6)}$$

สำหรับ N มากกว่า $\{N_1, N_2, N_3\}$

เพราะว่า $|(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)| \leqslant |X_n - X_0| + |Y_n - Y_0| + |Z_n - Z_0|$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \text{ จากสมการ (4), (5), (6)}$$

เพราะฉะนั้น $|(X_n - X_0, Y_n - Y_0, Z_n - Z_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant N$

หรือ $|p_n - p_0| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ #

ตัวอย่าง 2.9.1 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบท 2.9.1

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^2, \frac{1}{n}\right) = (1,0) \qquad \#$$

ตัวอย่าง 2.9.2 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) = (0, 1)$ #

ตัวอย่าง 2.9.3 จงหา $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{(-1)^n}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

และ $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{(-1)^n}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = (1, 0, 1)$ #

ตัวอย่าง 2.9.4 จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) = (0, 1)$

วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0,1)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

นั่นคือ เราจะต้องหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งจะทำให้

$$\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0, 1)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N \qquad ....(1)$$

พิจารณา $\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0, 1)\right| = \left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1} - 1\right)\right|$

$$= \left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n - n - 1}{n+1}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n+1}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \text{ จากนิยามนอร์ม}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} < \varepsilon \text{ จากสมการ (1)}$$

จาก $\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} < \varepsilon$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon^2$$

สำหรับ n ที่มีค่ามากกว่าบางจำนวน N $(n \geqslant N)$

แล้ว N จะมีขนาดเท่าไร

เนื่องด้วย

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}$$

ซึ่งถ้าเลือก N ที่ทำให้ $\frac{2}{N^2} < \varepsilon^2$ แล้ว $\frac{2}{\varepsilon^2} < N^2$

ก็จะทำให้ ได้ว่า $N \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ เป็นขนาดที่ต้องการ

นั่นคือ สำหรับ $n \geqslant N$ $(N \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon})$ จะได้ว่า

$$\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0, 1)\right| < \varepsilon$$

นั่นแสดงว่า $\ell\text{im}\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) = (0, 1)$ #

ตัวอย่าง 2.9.5 จงแสดงว่า

$$\lim_{n \to \infty} \left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) = (1, 0)$$

วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|\left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N$$

นั่นคือ เราจะต้องหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งจะทำให้

$$\left|\left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับ } n \geqslant N \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา $\left|\left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0)\right|$

$$= \left|\left((-1)^{2n} - 1, \frac{1}{n}\right)\right|$$
$$= \left|\left(0, \frac{1}{n}\right)\right|$$
$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}} \quad \text{จากนิยามนอร์ม}$$
$$= \frac{1}{n}$$
$$< \varepsilon \quad \text{จากสมการ (1)}$$

จาก $\frac{1}{n} < \varepsilon$ สำหรับ n ที่มีค่าบวกกว่าบางจำนวน N แล้ว N จะมีขนาดเท่าไร

จาก $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ซึ่งถ้าเลือก N ที่ทำให้ $\frac{1}{N} < \varepsilon$

แล้ว $\frac{1}{\varepsilon} < N$ เป็นขนาดที่ต้องการ

นั่นคือ สำหรับ $n \geqslant N \left(N > \frac{1}{\varepsilon}\right)$ จะได้ว่า

$$\left|\left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0)\right| < \varepsilon$$

นั่นแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} \left((-1)^{2n}, \frac{1}{n}\right) = (1, 0)$ #

ทฤษฎีบท 2.9.2 ถ้าลำดับ $\{p_n\}$ ลู่เข้า (converge) จุด p และ p′ แล้ว p = p′

พิสูจน์ ให้ $\lim_{n \to \infty} p_n = p$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก-

N_1 ซึ่ง

$$|p_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับ } n \geqslant N_1 \qquad \text{..........(1)}$$

และ $\lim_{n \to \infty} p_n = p'$ ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง

$$|p_n - p'| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับ } n \geqslant N_2 \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} |p - p'| &= |p - p_n + p_n - p'| \\ &= |(p - p_n) + (p_n - p')| \\ &= |(-1)(p_n - p) + (p_n - p')| \end{aligned}$$

$$\leqslant \ |(-1)(p_n - p)| + |p_n - p'|$$
$$= \ |-1|\,|p_n - p| + |p_n - p'|$$
$$= \ |p_n - p| + |p_n - p'|$$
$$< \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ จากสมการ (1) และ (2)}$$

เพราะฉะนั้น $|p - p'| < \varepsilon$

หรือ $-\varepsilon < p - p' < \varepsilon$

แสดงว่า $p - p'$ มีค่าน้อยกว่าจำนวนจริงบวก $(\varepsilon > 0)$

และ $p - p'$ มีค่ามากกว่าจำนวนจริงลบ $(-\varepsilon < 0)$

ดังนั้น สรุปว่า $p - p' = 0$

หรือ $p = p'$ #

จากทฤษฎีบท 2.9.2 นี้ สรุปว่า ลำดับใด ๆ ที่ลู่เข้า จะลู่เข้าสู่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

หรืออาจสรุปได้ว่า ถ้าลำดับลู่เข้าสู่จุดมากกว่าหนึ่งจุดแล้ว ลำดับจะไม่ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 2.9.6 จงพิจารณา ลำดับ $\{p_n\}$ ซึ่ง

$$p_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$$

ลู่เข้า (converge) หรือลู่ออก (diverge)

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right) = (1, 0)$ ถ้า n เป็นคู่

และ $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right) = (-1, 0)$ ถ้า n เป็นคี่

จึงได้ว่า ลำดับ $\{p_n\}$ ลู่เข้าจุด $(1, 0)$ และ $(-1, 0)$

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{p_n\}$ ลู่ออก #

ตัวอย่าง 2.9.7 จงพิจารณา ลำดับ $\{p_n\}$ ซึ่ง

$$p_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n}, \frac{n}{n + 1}\right)$$

ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 1}{n} = \infty$ (หาค่าไม่ได้)

และ $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n + 1} = 1$

จากทฤษฎีบท 2.9.1 จะได้ว่า

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n} , \frac{n}{n + 1} \right)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น ลำดับ $\{p_n\}$ ลู่ออก #

แบบฝึกหัด 2.9

จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้ แล้วพิจารณาว่าลำดับลู่เข้า หรือ ลู่ออก

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n^2}{n^3+1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{n^2+n}{n^3}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n, \frac{n^2+2n+1}{n+1}\right)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n+1}, \frac{(-1)^{2n}}{2}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{2n^2+n+1}, \frac{(n-1)^3}{n^4}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^3+1}, \frac{n^2+1}{(n+1)^2}\right)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^4+n^3}{(n+1)^5}, \frac{(-1)^n}{(-3)^{n+1}}\right)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^3}{5n^3}, \frac{2n^2}{(n+1)^4}\right)$