บทที่ 4
อนุพันธ์ย่อย
(Partial differentiation)

4.1 **ฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัวขึ้นไป** (Function of more than one variable)

ฟังก์ชันที่เคยศึกษามาแล้ว เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเพียงตัวเดียว ในที่นี้จะพิจารณาฟังก์ชันที่มีตัวแปร 2 ตัว ขึ้นไป

ให้ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y ที่จุด (x,y) ซึ่งเขียนได้ว่า

$$z = f(x,y)$$

เรียก z ว่า ตัวแปรตาม (dependent variable) และ เรียก x,y ว่า ตัวแปรอิสระ (independent variables) เซตของจุด (x,y) เรียกว่า โดเมน (domain) ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 4.1.1 ถ้า $f(x,y) = x^2 + 2y^3$ จงหา $f(-3, -1)$

วิธีทำ $f(-3, '-1) = (-3)" + 2(-1)^3$

$= 7$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงหาโดเมนของ $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

วิธีทำ โดเมนของ z คือ จุด (x,y) ซึ่ง $x^2 + y^2 \le 1$
นั่นคือ เซตของจุดซึ่งอยู่ในและอยู่บนวงกลมในระนาบ XY ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) รัศมี = 1 **ตอบ**

นิยาม 4.1.1 ให้ $z = f(x,y)$ กล่าวว่า z มีความต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

เมื่อ $|x \quad x_0| < 6$ และ $|y \quad y_0| < 6$

นิยาม 4.1.2 อนุพันธ์ย่อยของ $z = f(x,y)$ เทียบกับ x และ y แทนด้วย $\frac{\partial f}{\partial x}$ หรือ [fx, $f_x(x,y)$] และ $\frac{a f}{\partial y}$ [หรือ fy, $f_y(x,y)$] ตามลำดับ

อนุพันธ์ย่อยของ $z = f(x,y)$ ที่จุด (x_0, y_0) แทนด้วย

$$\left.\frac{\partial f}{a x}\right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)$$

และ $\left.\frac{a f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = f_y(x_0, y_0)$ ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 4.1.3 จุด (x,y) ต้องอยู่ใกล้จุด (0,0) เท่าไรจึงจะทำให้ $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ เมื่อ $f(x,y) = x^2 + y^2$ และ $\varepsilon = 0.01$

94

วิธีทำ

$$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

$$|(x^2 + y^2) - (0 + 0)| < 0.01$$

$$|(x - 0)^2 + (y - 0)^2| < (0.1)^2$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < 0.1$$

ดังนั้น ระยะทางจากจุด (0,0) ไปยังจุด (x,y) ต้องน้อยกว่า 0.1 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.1.4 ให้ $f(x,y) = 2x3 + 3xy^2$ จงหา f_x, f_y, $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$

วิธีทำ

$f_x = 6x2 + 3y^2$

$f_y = 6xy$

$f_x(1,2) = 6(1)^2 + 3(2)^2$

$= 18$

$f_y(1,2) = 6(1)(2)$

$= 12$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.1.5 ให้ $f(x,y) = e^{xy}$ y sin x จงหา fx, f_y, $f_x(0,1)$, $f_y(0,1)$

94
วิธีทำ

$fx = y\ e^{xy} - y \cos x$

$f_y = x\ e^{xy} - \sin x$

$f_x(0,1) = 1 - 1 = 0$

$f_y(0,1) = 0 - 0 = 0$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 4.1

1. ให้ $f(x,y) = 2x^2y - x^4$ จงหา f_x, f_y
2. ให้ $g(x,y) = x^2\cos y$ จงหา g_x, g_y
3. ให้ $h(x,y) = \cos xy - 3xy - 2x^2$ จงหา h_x, h_y
4. ให้ $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2$ จงหา

   n. $f(-2, 3)$

   ข. $f(\frac{1}{x}, \frac{2}{y})$

5. จงหาโดเมนของ $f(x,y) = \ln\{(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 \quad 4)\}$
6. จงแสดงว่า $z = xy \tan(y/x)$ คล้องตาม $x(\frac{\partial z}{\partial x}) + y(\frac{\partial z}{\partial y}) = 22$ ถ้า $(x,y) \neq (0.0)$

4.2 ระนาบสัมผัสและเส้นปกติ (Tangent plane and normal line)

ให้ $z = f(x,y)$ เป็นสมการผิว จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดที่อยู่บนผิวนี้

ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบสัมผัส

เวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบสัมผัสกับผิวที่จุด P_0 คือ

$$(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = \vec{P_0P}$$

$\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวที่จุด P_0 และ

$$\vec{N} = f_x(x_0,y_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0)\vec{j} - \vec{k}$$

เนื่องจาก $\vec{N}$ ตั้งฉาก กับ $\vec{P_0P}$ ดังนั้น

$$\vec{N}.\vec{P_0P} = 0$$

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

ซึ่งคือสมการของระนาบสัมผัสกับผิวที่จุด P_0 ส่วนสมการเส้นปกติ คือ

$$\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = \frac{z-z_0}{-1}$$

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงหาสมการระนาบสัมผัสและเส้นปกติของ $z = x^2 - xy - y^2$ ที่จุด $(1,1,-2)$

วิธีทำ

$$f_x = 2x - y$$
$$f_x(1,1) = 2 - 1 = 1$$
$$f_y = -x \quad 2y$$
$$f_y(1,1) = -1 - 2 = -3$$

ระนาบสัมผัส คือ

$$1(x-1) - 3(y-1) - 1(z+2) = 0$$

$$x - 1 - 3y + 3 - z - 2 = 0$$

$$x - 3y - z = 0$$ **ตอบ**

สมการเส้นปกติ do

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{-1}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงหาสมการระนาบสัมผัสของผิว $5x^2 - yz + 1 = 0$ ที่จุด (1,1,1)

วิธีทำ จาก $5x^2 - yz + 1 = 0$

ดังนั้น $z = \frac{-5x^2 - 1}{-Y}$

$$= \frac{5x^2 + 1}{Y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{10x}{y}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 10$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(5x2 + 1)}{y^2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -6$$

สมการระนาบสัมผัส คือ

$$10(x-1) - 6(y-1) - (z-1) = 0$$

$$10x - 10 - 6y + 6 - z + 1 = 0$$

$$10x - 6y - z - 3 = 0$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 4.2

จงหาสมการระนาบสัมผัส และเส้นปกติของผิวที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

1. $z = 3x^2 + 4y^2$, $(1,1,1)$
2. $42 = x^2 - y^2$, $(3,1,2)$
3. $x^2 + y^2 \quad z - 1 = 0$, $(-2, 0, -5)$
4. $3z = 2x2 - 5y^2$, $(1, 2, 3)$
5. $z = 8y^2 - 2x^2$, $(-I, 4, 6)$

4.3 **อนุพันธ์มีทิศทาง และเกรเดียนท์** (Directional derivative and gradient)

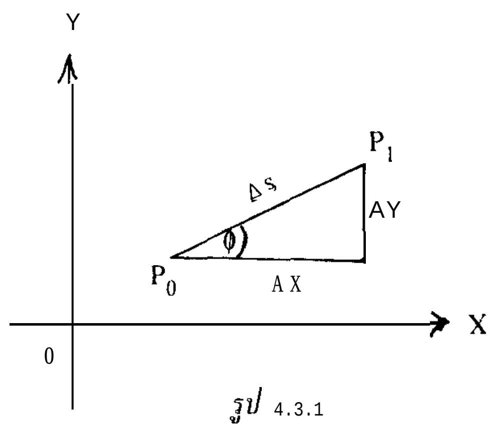
ให้ $z = f(x,y)$

$$\frac{dz}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

$$= \lim_{P_1 \to P_0} \frac{f(x_1,y_1) - f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$$= f_x(x_0,y_0) \cos \phi + f_y(x_0,y_0) \sin \phi$$

$\frac{dz}{ds}$ คือ อนุพันธ์มีทิศทางของ z ที่จุด $P_0(x_0,y_0)$ ดังรูป 4.3.1



รูป 4.3.1

ตัวอย่างที่ 4.3.1 ให้ $z = 100 - x^2 - y^2$ ถ้าเริ่มต้นจากจุด $P_0(3,4)$ ไปทางใด จึงจะทำให้ z มีอัตราการเพิ่มขึ้นเร็วที่สุด

วิธีทำ การหาทิศทางที่ทำให้ z มีอัตราการเพิ่มขึ้นเร็วที่สุด คือ การหามุม ϕ ที่ทำให้ $\frac{dz}{ds}$ มีค่ามากที่สุด

$$\frac{dz}{ds} = f_x \cos\phi + f_y \sin\phi$$

$$z = 100 - x^2 - y^2 = f(x,y)$$

$$f_x = -2x$$

$$f_y = -2y$$

$$\left.\frac{dz}{ds}\right|_{(3,4)} = -6\cos\phi - 8\sin\phi = F(\phi)$$

จากสิ่งที่ได้ศึกษามาแล้ว การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันทำได้โดย

$F'(\phi) = 0$

และ $F''(\phi) < 0$

จาก $F'(\phi) = 6\sin\phi - 8\cos\phi = 0$

$$6\sin\phi = 8\cos\phi$$

$$36\sin^2\phi = 64\cos^2\phi$$

$$= 64(1 - \sin^2\phi)$$

$$= 64 - 64\sin^2\phi$$

$$100\sin^2\phi = 64$$

$$\sin^2\phi = \frac{64}{100}$$

$$\sin\phi = \pm\frac{8}{10} = \pm\frac{4}{5}$$

$$\cos\phi = \pm\frac{3}{5}$$

$$F''(\phi) = 6\cos\phi + 8\sin\phi$$

$F''(\phi)$ มีค่าเป็นลบหรือน้อยกว่าศูนย์ เมื่อ $\sin\phi = -\frac{4}{5}$ และ $\cos\phi = -\frac{3}{5}$

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)_{(3,4)} = -6\left(-\frac{3}{5}\right) - 8\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{18}{5} + \frac{32}{5}$$

$$= 10$$ **ตอบ**

ให้ $w = f(x,y,z)$

$$\frac{dw}{ds} = f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

$\frac{dw}{ds}$ คือ อนุพันธ์มีทิศทางของ w ที่จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$

$\frac{dw}{ds}$ ได้จากผลคูณสกาลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่

$$u = \cos a\ i + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ k$$

$$v = f_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j} + f_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}$$

และเรียก $\vec{v}$ ว่า แกรเดียนท์ของ f ที่จุด P_0

แกรเดียนท์ของ f ที่จุด P ใด ๆ แทนด้วย

$$\textbf{grad } f = \nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$$

∇ อ่านว่า เดล (del) โดยที่

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{dw}{ds} = \vec{u} \cdot \nabla f$$

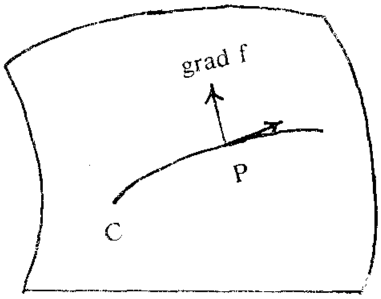
$$= |\nabla f| \cos \theta$$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ ∇f อนุพันธ์มีทิศทาง จะมีค่ามากที่สุด เมื่อ $\theta = 0$ และ $\left(\frac{dw}{ds}\right)_{max} = |\text{grad } f|$

กล่าวคือ $\frac{dw}{ds}$ มีค่ามากที่สุด เมื่อ $\vec{u}$ ชี้ไปในทิศทางของ grad f

คุณสมบัติทางเรขาคณิตที่สำคัญอีกประการหนึ่งของ grad f คือ grad f เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวโค้งระดับ (level surface) ที่ผ่านจุด P ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ให้ $f(x,y,z) = c$ เป็นผิวโค้งระดับ ซึ่งผ่านจุด P และให้ C เป็นเส้นโค้งใด ๆ ที่ผ่านจุด P และอยู่บนผิวโค้งระดับทั้งเส้น ดังรูป 4.3.2



รูป 4.3.2

สมการเส้นโค้ง C คือ

$$R(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

เป็นเวกเตอร์ที่สัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด P

เงื่อนไขที่ C อยู่บนผิวโค้งระดับนี้ คือ

$$f\,[\,x(t),\, y(t),\, z(t)\,] = c$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ t จะได้

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

นั่นคือ $\nabla f.\frac{d\vec{R}}{dt} = 0$ แสดงว่า ∇f ตั้งฉากกับ $\frac{d\vec{R}}{dt}$ และ ∇f ก็ต้องตั้งฉากกับผิวโค้งระดับที่ผ่านจุด P ด้วย

ถ้าหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ s จะได้

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

$$= \nabla f.\frac{dR}{ds}$$

$$= \nabla f.\vec{T}$$

ตัวอย่างที่ 4.9.2 ให้ $f(x,y,z) = x^2y^3 + 3yz + xz$ จงหา grad f ที่จุด (2,1,3)

วิธีทำ $\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$

$= (2xy^3 + z)\vec{i} + (3x^2y^2 + 3z)\vec{j} + (3y + x)\vec{k}$

ที่จุด (2,1,3), $\nabla f = 7\vec{i} + 21\vec{j} + 5\vec{k}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.3.3 จงหาอนุพันธ์มีทิศทางของ $f = x^2 + y^2 + z^2$ ในทิศทางจากจุด P(1,1,0) ไปยัง Q(2,1,1)

วิธีทำ ให้ $\vec{R}_1 = \vec{i}+\vec{j}$

$$\vec{R}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|}$$

$$= \frac{\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 22\vec{k}$$

ที่จุด P(1,1,0), $\nabla f = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$$\frac{df}{ds} = \nabla f . T$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 0 + 0 = \sqrt{2}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.3.4 จงหาอนุพันธ์มีทิศทางของ $F = x^2yz^3$ ตามเส้นโค้ง $x = e^{-t}$, $y = 2 \sin t + 1$, $z = t - \cos t$ ที่จุด ซึ่ง $t = 0$

วิธีทำ จุดซึ่ง $t = 0$ คือจุด $(1,1,-1)$

$$\nabla F = 2xyz^3i + x^2y^3j + 3x^2yz^2k$$

ที่จุด $(1,1,-1)$, $\nabla F = -2\vec{i} \quad \vec{j} + 3\vec{k}$

$$R = e^{-t}i + (2\sin t+1)j + (t-\cos t)k$$

$$\frac{dR}{dt} = -e^{-t}i + 2\cos t j + (I + \sin t)k$$

ที่จุด $(1,1,-1), \frac{d\vec{R}}{dt} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$$T = \frac{-i + 2j + k}{\sqrt{6}}$$

อนุพันธ์มีทิศทาง $= \nabla F.T$

$$= (-2)(-\frac{1}{\sqrt{6}}) + (-1)(\frac{2}{\sqrt{6}}) + 3(\frac{1}{\sqrt{6}})$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.3.5 จงหาระนาบสัมผัสผิว $z^2 = x^2 + y^2$ ที่จุด $(1,1,1)$

วิธีทำ จาก $z^2 = x^2 + y^2$

$$x^2+y^2-z^2 = 0$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

ที่จุด $(1,1,1)$, $\nabla f = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

สมการระนาบสัมผัส คือ

$$2(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$$

$$2x - 2 + 2y - 2 - 2z + 2 = 0$$

$$x + y - z - 1 = 0$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาอนุพันธ์มีทิศทางของ $u = 2x^3y - 3y^2z$ ในทิศทางจากจุด $P(1,2,-1)$ ไปยัง $Q(3,-1,5)$
2. จงหาอนุพันธ์มีทิศทางของ $u = 2xy - z^2$ ในทิศทาง จากจุด $P(2,-1,1)$ ไปยัง $Q(3,1,-1)$
3. จากข้อ 1 ในทิศทางใดที่อนุพันธ์มีทิศทางจากจุด P มีค่ามากที่สุด และหาขนาดของอนุพันธ์มีทิศทางที่มีค่ามากที่สุด
4. จงหาอนุพันธ์มีทิศทางของ $f = x^2yz + 4xz^2$ ในทิศทาง $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ที่จุด $(1,-2,-1)$
5. จงหาอนุพันธ์มีทิศทางของ $\phi = z^2y + y^2z + z^2x$ ที่จุด $(1,1,1)$ ในทิศทางของ C ซึ่งแทนด้วย $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$
6. ให้ $\phi = xy + yz + zx$ จงหา

   ก. $\nabla \phi$ ที่จุด $(1,1,3)$

   ข. $\dfrac{d\phi}{ds}$ ที่จุด $(1,1,3)$ ในทิศทางของ $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
7. จงหาสมการของระนาบสัมผัส และเส้นปกติของผิว

   $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ ที่จุด $(1,-1,2)$
8. จงหาสมการระนาบสัมผัส และเส้นปกติของผิว $z = x^2 + y^2$ ที่จุด $(2,-1,5)$
9. ให้ $\phi = 3x^2 - yz$ จงหา $\nabla\phi$ ที่จุด $(1,-1,1)$
10. อุณหภูมิที่จุด (x,y) ในระนาบ XY กำหนดโดย $T = 100xy/(x^2 + y^2)$

    จงหาอนุพันธ์มีทิศทางที่จุด $(2,1)$ ในทิศทางที่ทำมุม 60° กับแกน X ทางบวก
11. จงหาสมการระนาบสัมผัส และเส้นปกติของผิว $x + y + z + e^{xyz} = 0$ ที่จุด $(0,2,1)$
12. จงหาสมการระนาบสัมผัส และเส้นปกติของผิว

    $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$ ที่จุด $(1,-1,1)$

4.4 กฎลูกโซ่สำหรับอนุพันธ์ย่อย (The chain rule for partial derivatives)

ให้ $z = f(x,y)$ และ $x = f(t)$, $y = g(t)$ แล้ว

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ถ้า $w = f(x,y,z)$ และ $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ แล้ว

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ให้ $z = f(x,y)$ และ $x = x(r,s)$, $y = y(r,s)$ ดังนั้น z เป็นฟังก์ชันของ r และ s แล้ว

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

ถ้า $w = f(x,y,z)$ และ $x = x(r,s)$, $y = y(r,s)$, $z = z(r,s)$ แล้ว

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

โดยทั่วไป ถ้า $u = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $x_1 = f_1(r_1, \ldots, r_p), \ldots, x_n = f_n(r_1, \ldots, r_p)$ แล้ว

$$\frac{\partial u}{\partial r_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r_k} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial r_k} \quad ; k = 1,2,\ldots,p$$

ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นฟังก์ชันของ s เพียงตัวเดียวแล้ว

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{ds}$$

ตัวอย่างที่ 4.4.1. ถ้า $T = x^3 \cdot xy + y^3$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ **จงหา**

n. $\frac{\partial T}{\partial r}$

ข. $\frac{\partial T}{ae}$

วิธีทำ

$$\text{n. } \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{ax}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= (3x^2 \quad y)(\cos\theta) + (3y^2 - x)(\sin\theta)$$

$$\text{ข. } \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{ax}\frac{ax+}{\partial\theta} \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= (3x^2 - y)(-r\sin\theta) \text{ t } (3y^2 - x)(r\cos\theta)$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4.4.2 ให้ $u = z \sin \frac{y}{x}$, $x = 3r^2 + 2s$, $y = 4r - 2s^3$, $z = 2r^2 - 3s^2$ จงหา

ก. $\frac{\partial u}{\partial r}$

ข. $\frac{\partial u}{\partial s}$

วิธีทำ

ก. $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= (z \cos \frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})(6r) + (z \cos \frac{y}{x})(\frac{1}{x})(4) + (\sin \frac{y}{x})(4r)$$

$$= -\frac{6ryz}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{4z}{x} \cos \frac{y}{x} + 4r \sin \frac{y}{x}$$

ข. $$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (z \cos \frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})(2) + (z \cos \frac{y}{x})(\frac{1}{x})(-6s^2) + (\sin \frac{y}{x})(-6s)$$

$$= -\frac{2yz}{x^2} \cos \frac{y}{x} - \frac{6s^2 z}{x} \cos \frac{y}{x} - 6s \sin \frac{y}{x}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4.4.3 ถ้า $z = e^{xy^2}$, $x = t \cos t$, $y = t \sin t$

จงหา $\frac{dz}{dt}$ ที่ $t = \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= y^2e^{xy^2}(-t\sin t + \cos t) + (2xye^{xy^2})(t\cos t + \sin t)$$

ที่ $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \left(\frac{\pi^2}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right) + (0)(1)$$

$$= -\frac{\pi^3}{8}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4.4.4 ถ้า $G = x^2F(y/x)$ แล้ว จงแสดงว่า

$$x\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = 2G$$

วิธีทำ

$$\frac{\partial G}{\partial x} = x^2F'(y/x)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F(y/x)\{2x\}$$

$$x\frac{\partial G}{\partial x} = -xyF'(y/x) + 2x^2F(y/x)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x^2F'(y/x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y\frac{\partial G}{\partial y} = xyF'(y/x)$$

$$x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y} = 2x^2F(y/x)$$

$$= 2G$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4.4.5 ถ้า $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{ae}\right)^2$$

วิธีทำ

$$\frac{av}{\partial r} = \frac{av}{\partial x}\frac{ax+}{\partial r}\ \frac{av}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\text{หรือ } V_r = V_x x_r + V_y y_r$$

$$V_\theta = V_x x_\theta + V_y y_\theta$$

$$V_r = V_x \cos\theta + V_y \sin\theta$$

$$V_\theta = V_x(-r\sin\theta) + V_y(r\cos\theta)$$

$$\frac{1}{r}V_\theta = -V_x\sin\theta + V_y\cos\theta$$

$$\begin{aligned} V_r^2 + \frac{1}{r^2}V_\theta^2 &= (V_x\cos\theta + V_y\sin\theta)^2 + \\ &\quad (-V_x\sin\theta + V_y\cos\theta)^2 \\ &= V_x^2\cos^2\theta + 2V_xV_y\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + V_y^2\sin^2\theta + V_x^2\sin^2\theta - 2V_xV_y\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + V_y^2\cos^2\theta \\ &= V_x^2 + V_y^2 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 4.4

1. $F = \dfrac{2x + y}{y - 2x}$, $x = 2u - 3v$, $y = u + 2v$

   จงหา ก. $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ เมื่อ $u = 2, v = 1$

   ข. $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ เมื่อ $u = 2, v = 1$

2. $z = x^3 - xy + y^3$, $x = 2r - s$, $y = r + 2s$

   จงหา ก. $\dfrac{\partial z}{\partial r}$

   ข. $\dfrac{\partial z}{\partial s}$

3. $H = x^2 y \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

   จงหา ก. $\dfrac{\partial H}{\partial r}$

   ข. $\dfrac{\partial H}{\partial \theta}$

4. $w = x^3 y - 4xy^2 + 8y^3$, $x = 3r^2 + 2s$, $y = 4r - 2s^3$

   จงหา ก. $\dfrac{\partial w}{\partial r}$

   ข. $\dfrac{\partial w}{\partial s}$

4.5 The total differential

Total differential หรือ differential ของ ฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ คือ

$$dz \quad \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5.1)$$

เรียก dx และ dy ว่า differentials ของ x และ y ตามลำดับ

Total differential ของฟังก์ชัน $w = f(x,y,z)$ คือ

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5.2)$$

โดยทั่วไป Total differential ของฟังก์ชัน $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ คือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.5.3)$$

ถ้า x, y, z ต่างเป็นฟังก์ชันของ t แล้ว

$$dx = \frac{dx}{dt}dt,\ dy = \frac{dy}{dt}dt,\ dz = \frac{dz}{dt}dt$$

จากสมการ (4.5.2) จะได้ว่า

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}dt + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}dt$$

ถ้า x, y, z ต่างเป็นฟังก์ชันของ r และ s แล้ว

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial s}ds$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial s}ds$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial s}ds$$

และ $dw = \frac{\partial w}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial s}ds) + \frac{\partial w}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial s}ds)$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial s}ds)$$

$$= (\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r})dr$$

$$+ (\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s})ds$$

ตัวอย่างที่ 4.5.1 ถ้า $z = f(x,y) = x^2y - 3y$ จงหา dz

วิธีทำ $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$$= 2xy\ dx + (x^2\ \ 3)dy$$

ตัวอย่างที่ 4.5.2 จงแสดงว่า $z = f(x^2y)$ เมื่อ f หาอนุพันธ์ได้ จะคล้องตาม

$$x(\frac{\partial z}{\partial x}) = 2y(\frac{\partial z}{\partial y})$$

วิธีทำ $dz = f'(x^2y)\ d\ (x^2y)$

$$= f'(x^2y)(2xy\ d\ x + x^2dy)$$

และ $dz = \frac{\partial z}{ax}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

ดังนั้น $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\ f'(x^2y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\ f'(x^2y)$$

$$x\ \frac{\partial z}{\partial x} = 2x^2y\ \ f'(x^2y)$$

$$2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y\ f'(x^2y)$$

นั่นคือ $x\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial y}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 4.5

1. ให้ $U = x^2e^{y/x}$ จงหา dU
2. ให้ $\phi = x^3y - 2xy^2 + 2y^3$ จงหา $d\phi$
3. ให้ $z = \dfrac{x - y}{x + y}$ จงหา dz
4. ให้ $z = x^3 - xy + 3y^2$ จงหา dz
5. ให้ $F = x^3y - 4xy^2 + 8y^3$ จงหา dF
6. ให้ $G = 8xy^2z^3 - 3x^2yz$ จงหา dG
7. ให้ $H = xy^2 \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ จงหา dH
8. ให้ $R = x^2y^2 + y \sin 3x$ จงหา dR
9. ให้ $S = xz^3 + 4y^3 - 3xy$ จงหา dS
10. ให้ $u = 2x^2 - yz + xz^2$, $x = 2 \sin t$, $y = t^2 \quad t + 1$, $z = 3e^{-t}$ จงหา du
11. ให้ $H = \sin (3x - y)$, $x^3 + 2y = 2t^3$, $x \quad y^2 = t^2 + 3t$ จงหา dH

4.6 **อนุพันธ์ย่อยอันดับสูงขึ้นไป** (Higher order partial derivatives)

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ของ f(x,y) แทนด้วย

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

ถ้า f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่อง แล้ว $f_{xy} = f_{yx}$

ตัวอย่างที่ 4.6.1 ถ้า $f(x,y) = 2x^3 + 3xy^2$ แล้ว จงหา

$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{yx}$

วิธีทำ

$f_x = 6x^2 + 3y^2$

$f_{xx} = 12x$

$f_{xy} = 6y$

$f_y = 6xy$

$f_{yy} = 6x$

$f_{yx} = 6y$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูงขึ้นไปอีก เช่น

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \ldots$$

ตัวอย่างที่ 4.6.2 ให้ $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-½}$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 u}{a\, x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

วิธีทำ สมมติว่า $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$$\frac{au}{\partial x} = -½(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2x)$$

$$= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-x)\left[-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2x)\right] +$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(-1)$$

$$= \frac{3x2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{2x2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2 \quad z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{a\, z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

ดังนั้น $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.6.3 ถ้า $z = x^2\tan^{-1}\frac{y}{x}$ จงหา $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ที่จุด (1.1)

วิธีทำ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= x^2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(3x^2) - (x^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

ที่จุด (1,1), $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(2)(3) - (1)(2)}{2^2}$

1 **ตอบ**

แบบฝึกหัด 4.6

1. ถ้า $z = x^3y + e^{xy^2}$ จงหา

   ก. z_x

   ข. z_y

   ค. z_{xx}

   ง. z_{yy}

   จ. z_{xy}

   ฉ. z_{yx}

2. ให้ $f = 2x^2y - x^4$ จงหา f_{xx}, f_{yy}

3. ให้ $g = e^{xy} - y \sin x$ จงหา g_{xy}, g_{xxy}

4. ให้ $h = x^2 \cos y$ จงหา h_{yxx}, h_{xyy}

5. ถ้า $f = (x - y) \sin (3x + 2y)$ จงหา

   ก. f_x ที่จุด $(0, \frac{\pi}{3})$

   ข. f_y ที่จุด $(0, \frac{\pi}{3})$

   ค. f_{xx} ที่จุด $(0, \frac{\pi}{3})$

   ง. f_{yy} ที่จุด $(0, \frac{\pi}{3})$

   จ. f_{xy} ที่จุด $(0, \frac{\pi}{3})$

   ฉ. f_{yx} ที่จุด $(0, \frac{\pi}{3})$

6. จงแสดงว่า $f_{xy} = f_{yx}$ สำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้

   ก. $(2x - y)/(x + y)$

   ข. $x \tan xy$

   ค. $\cosh (y + \cos x)$

7. จงแสดงว่า $z = \ln \{(x-a)^2 + (y-b)^2\}$ คล้องตาม

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$ ยกเว้นจุด (a,b)

8. จงแสดงว่า $z = x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ คล้องตาม

$x^2 z_{xx} + 2xy\, x_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$ ยกเว้นที่จุดซึ่ง $x \neq 0$

4.7 ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัวขึ้นไป

(Maxima and minima of functions of more than one independent variable)

ในการหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่มีตัวแปรตัวเดียว เช่น $y = f(x)$ ซึ่งเป็นเส้นโค้ง มีหลักการดังนี้ คือ

ให้ c เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในช่วง (a,b) และ $f'(c) = 0$ โดย $c \in (a,b)$ ถ้า $f''(c)$ หาค่าได้แล้ว

ก. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c

ข. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c

ถ้า $z = f(x,y)$ ซึ่งแทนผิว และ

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \leq f(x_0, y_0)$$

แล้วจุด (x_0, y_0) เรียกว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ ของ $f(x,y)$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \geq f(x_0, y_0)$$

แล้วจุด (x_0, y_0) เรียกวา จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x,y)$ สำหรับ h และ k ซึ่ง $0 < |h| < \delta$, $0 < |k| < \delta$ เมื่อ δ เป็นจำนวนบวก

เงื่อนไขที่ $f(x,y)$ มีค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุด คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.7.1)$$

ถ้า (x_0, y_0) เป็นจุดวิกฤต ซึ่งคล้องตามสมการ (4.7.1) และถ้า Δ ถูกกำหนดโดย

$$\Delta = \left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

1. (x_0, y_0) เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ถ้า $\Delta > 0$ และ

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} < 0 \qquad \left(\text{หรือ } \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} < 0\right)$$

2. (x_0, y_0) เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้า $\Delta > 0$ และ

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0 \qquad \left(\text{หรือ } \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0\right)$$

3. (x_0, y_0) ไม่เป็นทั้งจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้า $\Delta < 0$
   ถ้า $\Delta < 0$, (x_0, y_0) เรียกว่า saddle point

4. ถ้า $\Delta = 0$ แล้ว สรุปไม่ได้

ในการทดสอบว่าจุด (x_0, y_0) เป็นจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด อาจใช้วิธีการต่อไปนี้

ถ้า $\quad D = f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0$

แล้ว (x_0, y_0) เป็นจุดสูงสุด

ถ้า $\quad D = f(x_0 + h,\ y_0 + k) \quad f(x_0, y_0) > 0$

แล้ว (x_0, y_0) เป็นจุดต่ำสุด

ตัวอย่างที่ 4.7.1 จงหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

วิธีทำ

$$I_x = 3x^2 \quad 3 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$f = 3y^2 - 12 = 0$$

$$y = \pm 2$$

ดังนั้น จุดวิกฤต คือ A(1,2), B(− 1,2), C(1, − 2), D(− 1, − 2)

$$f_{xx} = 6x$$

$$f_{yy} = 6y$$

$$f_{xy} = 0$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36\,xy$$

ที่จุด A(1,2), $\Delta > 0$ และ f_{xx}(หรือ f_{yy}) > 0 ดังนั้น A เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ที่จุด B(−1,2), $\Delta < 0$ และ B ไม่เป็นทั้งจุดสูงสุด หรือ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ที่จุด C(1, −2), $\Delta < 0$ และ C ไม่เป็นทั้งจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ที่จุด D(−1, −2), $\Delta > 0$ และ f_{xx} (หรือ f_{yy}) < 0 ดังนั้น D เป็นจุดสูงสุด
สัมพัทธ์

ดังนั้น ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f(x,y) คือ 2
และ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f(x,y) คือ 38

จุด B และจุด C เป็น saddle points **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.7.2 จงหาจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุดของผิว

$$z = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$$

วิธีทำ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 6y + 3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(I) \times 2,\ 4x + 6y - 12 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$(3) - (2),\ x - 15 = 0$$

$$x = 15$$

แทนค่า x ใน (I),

$$Y = -8$$

$$f(15, -8) = 15^2 + 3(15)(-8) + 3(-8)^2 - 6(15) + 3(-8) - 6$$
$$= -63$$

ทดสอบว่าเป็นจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุดจาก

$$D = f(15+h, -8+k) - f(15, -8)$$
$$= (15+h)^2 + 3(15+h)(-8+k) + 3(-8+k)^2$$
$$- 6(15+h) + 3(-8+k) - 6 \quad (-63)$$
$$= 225 + 30h + h^2 - 360 + 45k - 24h + 3hk$$
$$+ 192 - 48k + 3k^2 - 90 - 6h - 24 + 3k - 6 + 63$$
$$= h^2 + 3hk + 3k^2$$
$$= h^2 + 3hk + \left(\frac{3}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2$$
$$= \left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 > 0$$

ดังนั้น ผิวนี้มีจุดต่ำสุดที่ (15, −8, −63) **ตอบ**

ถ้า $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ แล้ว การหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุดของฟังก์ชัน w ทำได้โดยใช้เงื่อนไขต่อไปนี้

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

ตัวคูณของลากรานจ์ (lagrange multipliers)

การหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุดของฟังก์ชัน $F(x,y,z)$ ภายใต้เงื่อนไข (constraint) $G(x,y,z) = 0$ ทำได้โดยให้

$$H(x,y,z,\lambda) = F(x,y,z) + \lambda G(x,y,z)$$

เรียก λ ว่า ตัวคูณของลากรานจ์ แล้วหาค่า x,y,z, λ จาก

$$H_x = 0, \; H_y = 0, \; H_z = 0, \; H_\lambda = 0$$

หรือจะหาได้โดยให้

$$H(x,y,z,\lambda) = \lambda F(x,y,z) + G(x,y,z)$$

และหาค่า x,y,z,λ จาก

$$H_x = 0, \; H_y = 0, \; H_z = 0, \; H_\lambda = 0$$

ตัวอย่างที่ 4.7.3 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดกำเนิดไปยังไฮเปอร์โบลาซึ่งมีสมการว่า $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$

วิธีทำ

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

$$G(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$$

$$H(x,y,\lambda) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 + \lambda(x^2 + y^2)$$

$$H_x \quad = \quad 2x + 8y + 2\lambda x \quad = \quad 0$$

$$(1 + \lambda)x + 4y \quad = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$H_y \quad = \quad 8x + 14y + 2\lambda y = \quad 0$$

$$4x + (\lambda + 7)y \quad = \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

จาก (1) และ (2) เนื่องจาก $(x,y) \neq (0,0)$

ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda & 4 \\ 4 & A + 7 \end{vmatrix} \quad 0$$

นั่นคือ $\lambda^2 + 8\lambda - 9 \quad = \quad 0$

$$A \quad = \quad I, \; -9$$

$A = 1$, $X = -2y$ แทนค่า x ใน $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$

จะได้ว่า

$$-5y^2 \quad = \quad 225$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้

$A = -9$, $y = 2x$ แทนค่า y ใน $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$

จะได้ว่า

$$45x^2 \quad = \quad 225$$

$$x^2 \quad = \quad 5$$

$$y^2 \quad = \quad 4x^2 = 20$$

ดังนั้น

$$x^2 + y^2 = 5 + 20$$

$$= 25$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดที่ต้องการคือ 5 **ตอบ**

แบบฝึกหัด 4.7

1. จงหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของผิว

$$z = -x^2 - y^2 - xy - 3x + 3y - 4$$

2. กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า ด้านบนเปิดจุได้ 32 ลูกบาศก์ฟุต จงหาขนาดของกล่องที่จะทำให้พื้นที่ผิวทั้งหมดต่ำสุด
3. จงหาปริมาตรที่ใหญ่ที่สุดของพาราเลลเลไพพด์ผืนผ้า ซึ่งบรรลุภายในเอลลิพซอยด์ซึ่งมีสมการ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$
4. จงหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของ $f(x,y,z) = xy^2z^3$ ภายใต้เงื่อนไข $x + y + z = 6$, $x > 0, y > 0, z > 0$
5. จงหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของ $x^2 + y^2$ ภายใต้เงื่อนไข $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$
6. กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าใบหนึ่งจุได้ 216 ลูกบาศก์นิ้ว จงหาขนาดของกล่องที่ทำให้พื้นที่ผิวทั้งหมดต่ำสุด
7. จงหาจุดที่อยู่บนผิว $x^2 - y^2 = 1$ และอยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

4.8 The method of least squares

ในหัวข้อนี้ จะนำวิธีการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่มีตัวแปร 2 ตัว มาหาสมการเส้นตรง $y = mx + b$ ที่เหมาะสมที่สุด สำหรับจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ซึ่งเป็นจุดต่าง ๆ ที่มีอยู่ (obsereved points) วิธีการนี้ เรียกว่า method of least squares

ค่า x แต่ละค่า เรียกว่า x_{obs} จะมีค่า y 2 ค่าคือ ค่า y ที่มีอยู่แล้ว เรียกว่า y_{obs} กับค่า y ที่หาได้จากสมการ $y = mx + b = mx_{obs} + b$

ผลต่างของ y_{obs} กับ $y = mx_{obs} + b$ เรียกว่า ความบ่ายเบน (deviation) แทนด้วย dev

$$\text{dev} = y_{obs} - (mx_{obs} + b)$$

จากจุดต่าง ๆ ที่มีอยู่ สามารถหาความบ่ายเบนได้ดังนี้

$$\text{dev}_1 = y_1 - (mx_1 + b)$$
$$\text{dev}_2 = y_2 - (mx_2 + b)$$

$$\text{dev}_n = y_n \quad (mx_n + b)$$

ความบ่ายเบนนี้ อาจเป็นบวกหรือลบ เมื่อยกกำลังสองจะเป็นบวกเสมอ และนำความบ่ายเบนที่ยกกำลังสองแล้วมาบวกกัน จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \text{dev}_i^2 &= \text{dev}_1^2 + \text{dev}_2^2 + \quad + \ \text{dev}_n^2 \\ &= (y_1 - mx_1 - b)^2 + (y, \quad mx_2 - b)^2 + \\ &\quad + (y_n - mx_n \quad b_n)^2 \\ &= f(m,b)\end{aligned}$$

เส้นตรงที่ใกล้และเหมาะสมที่สุดกับจุดที่มีอยู่ หาได้โดยการทำให้ความบ่ายเบนมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ หาค่าต่ำสุดของ f(m,b)

ตัวอย่างที่ 4.8.1 จงหาสมการเส้นตรงที่เหมาะสมที่สุดสำหรับจุด (0,0), (1,2), (2,3), (3,4)

วิธีทำ

x_{obs}	y_{obs}	dev	dev^2
0	0	$-b$	b^2
1	2	$2-m-b$	$4 + m^2 + b^2 \quad 4m \quad 4h + 2mb$
2	3	$3-2m-b$	$9 + 4m^2 + b^2 - 12m - 6b + 4mb$
3	4	$4-3m-b$	$16 + 9m^2 + b^2 - 24m \quad 8b + 6mb$

$$f(m,b) = 29 + 14m^2 + 4b^2 - 40m - 18b + 12mb$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 28m + 12b - 40 = 0 \quad \text{\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_} (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 8b - 18 + 12m = 0$$

$$6m + 4b - 9 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(2) × 3, $\quad 18m + 12b - 27 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$

(1) − (3), $\quad 10m - 13 = 0$

$$m = \frac{13}{10}$$

$$4b = 9 - \frac{6 \times 13}{10}$$

$$= \frac{6}{5}$$

$$b = \frac{3}{10}$$

∴ สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ

$$y = \frac{13}{10}x + \frac{3}{10}$$

$$10y = 13x + 3$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 4.8

จงหาสมการเส้นตรงที่เหมาะสมที่สุด สำหรับจุดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $(0,1), (2,0), (3,-2)$
2. $(0,2), (1,4), (-1,1)$
3. $(0,0), (1,3), (-1,-2)$