บทที่ 3
เวกเตอร์ฟังก์ชัน และอนุพันธ์
(Vector function and derivative)

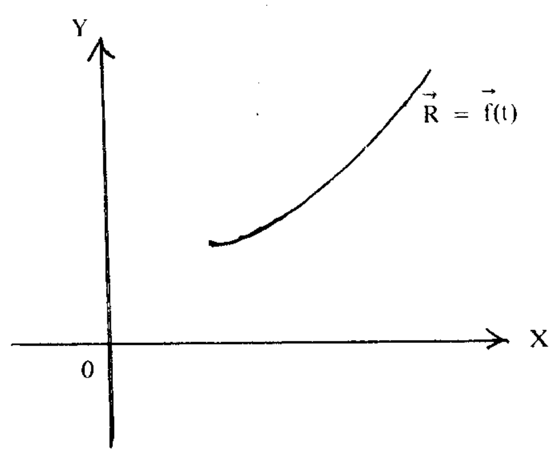
3.1 ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน (Continuity and derivative of a vector function)

ในบทนี้ จะศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคใน 2 มิติ และ 3 มิติ ก่อนอื่นขอกล่าวถึงนิยามต่าง ๆ ดังนี้

นิยาม 3.1.1 ให้ $\vec{f}(t)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันของตัวแปร t โดยที่ t อยู่ในเซต S เรียกเซต S ว่า โดเมน (domain) ของ $\vec{f}$ และเรียก $\vec{f}(S)$ ว่า ภาพ (image) ของ $\vec{f}$

ใน 2 มิติ $\vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

ให้ $\vec{R} = \vec{f}(t)$ เมื่อ t แปรค่าไปก็จะได้ค่า $\vec{R}$ ต่าง ๆ ทำให้เขียนเส้นโค้งได้ดังรูป 3.1.1



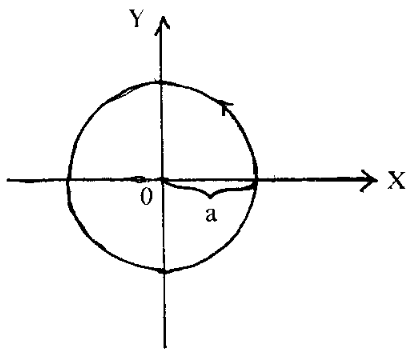
รูป 3.1.1

ใน 3 มิติ $\vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

ในทำนองเดียวกับ 2 มิติ เมื่อ t แปรค่า ก็เขียนเส้นโค้งได้

ตัวอย่างที่ 3.1.1 $\vec{R} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ จงเขียนกราฟของเส้นโค้งนี้

วิธีทำ $\vec{R} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$ แทนวงกลมซึ่งมีรัศมี = a จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ในขณะที่ t เพิ่มขึ้นในช่วง $[0, 2\pi]$ วงกลมถูกลากให้ทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป 3.1.2



รูป 3.1.2

นิยาม 3.1.2 $\vec{f}(t)$ มีลิมิตเท่ากับ $\vec{L}$ ในขณะที่ t เข้าใกล้ t_0 แทนด้วย

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$$

ถ้า $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ และ $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = L_i,\ i = 1,2,3$ แล้ว

$$\lim_{t \to t_0} [f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}] = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 3.1.2 จงหาลิมิตของ $\vec{f}(t) = \frac{\sin t}{t}\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$ เมื่อ t เข้าใกล้ 0

วิธีทำ

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\vec{i} + \lim_{t\to 0} \cos t\,\vec{j}$$

$$= \vec{i} + \vec{j}$$

ตอบ

นิยาม 3.1.3 $\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ t_0 ถ้า

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$$

$\vec{f}(t)$ กล่าวได้ว่า มีความต่อเนื่องบนช่วง I ถ้า $\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่า $t = t_0$ ในช่อง I

ตัวอย่างที่ 3.1.3 จงพิจารณาว่า $\vec{f}(t) = a\vec{i} + (b+ct)\vec{j}$ มีความต่อเนื่องที่ $t = 0$ หรือไม่

วิธีทำ

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = \lim_{t\to 0} (a\,\vec{i} + (b+ct)\vec{j})$$

$$= \lim_{t\to 0} a\,\vec{i} + \lim_{t\to 0} (b+ct)\vec{j}$$

$$= a\vec{i} + b\vec{j}$$

$$\vec{f}(0) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$\therefore \lim_{t \to 0} \vec{f}(t) = \vec{f}(0)$

ดังนั้น $\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ $t = 0$ **ตอบ**

นิยาม 3.1.4 $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$
อนุพันธ์ของ $\vec{f}(t)$ แทนด้วย

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$$

ทฤษฎีบทที่ 3.1.1 $\vec{f}(t)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t_0 ก็ต่อเมื่อ ส่วนประกอบแต่ละตัวของ $\vec{f}(t)$ คือ $f_i(t)$, $i = 1,2,3$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t_0 นั่นคือ

$$\vec{f}'(t_0) = f_1'(t_0)\vec{i} + f_2'(t_0)\vec{j} + f_3'(t_0)\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 จงหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ และหาโดเมนของอนุพันธ์ด้วย

ก. $\vec{f}(x) = e^{2x}\vec{i} + xe^{-x}\vec{j}$

ข. $\vec{f}(t) = \sec^{-1}2t\,\vec{i} + \cosh 3t\,\vec{j} + \tanh 4t\,\vec{k}$

ค. $\vec{f}(t) = \sin^{-1}t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j}$

วิธีทำ ก. $\vec{f}(x) = e^{2x}\vec{i} + xe^{-x}\vec{j}$

$$\vec{f}'(x) = 2e^{2x}\vec{i} + (-xe^{-x} + e^{-x})\vec{j}$$
$$= 2e^{2x}\vec{i} + e^{-x}(1-x)\vec{j}, \quad -\infty < x < \infty$$
ตอบ

ข. $\vec{f}(t) = \sec^{-1}2t\,\vec{i} + \cosh 3t\,\vec{j} + \tanh 4t\,\vec{k}$

$$\frac{d}{dt}\sec^{-1}2t = \frac{1}{|2t|\sqrt{(2t)^2-1}}\frac{d(2t)}{dt}$$

$$= \frac{2}{|2t|\sqrt{4t^2-1}}$$

$$= \frac{1}{|t|\sqrt{4t^2-1}} \quad ,|t| > ½$$

$$\frac{d}{dt}\cosh 3t = 3\sinh 3t, \; -\infty < t < \infty$$

$$\frac{d}{dt}\tanh 4t = 4\,\text{sech}^2 4t, \; -\infty < t < \infty$$

$$\vec{f}'(t) = \frac{1}{|t|\sqrt{4t^2-1}}\vec{i} + 3\sinh 3t\,\vec{j} + 4\,\text{sech}^2 4t\,\vec{k}, \; |t| > ½$$

ค. $\vec{f}(t) = \sin^{-1}t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j}$

$$\frac{d}{dt}\sin^{-1}t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad , -1 < t < 1$$

$$\frac{d}{dt}\cos 2t = -2\sin 2t \quad , -\infty < t < \infty$$

$$\therefore \vec{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\vec{i} - 2\sin 2t\,\vec{j}, \; -1 < t < 1$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.1

จงหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ และหาโดเมนของอนุพันธ์

1. $f(t) = \sin^{-1}t\, i + \cos^{-1}t\, j$
2. $f(t) = (t^3 + 2t)\vec{i} + \sin t\, \vec{j} + e^t\, \vec{k}$
3. $f(t) = (t^2 + 1)\, i + te^t j + \ln t\, k,\ t > 0$
4. $f(t) = t^4\, i + \sinh t\, j + \tanh t\, k$
5. $f(t) = e^{-1/t^2}\vec{i} + (t^3 + t^2)j,\ t \neq 0$

3.2 **ความเร็ว และอัตราเร่ง** (Velocity and acceleration)

จากหัวข้อ 3.1 $\vec{R} = \vec{f}(t)$ เมื่อ t แปรค่า จะได้ว่า $\vec{R}$ แทนเส้นโค้ง เรียก $\vec{R}$ ว่า เวกเตอร์ตำแหน่ง

ใน 2 มิติ $\vec{R} = x(t)\vec{i} + y(t)j$

ความเร็ว (V) $= \dfrac{d\vec{R}}{dt}$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}j$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

เมื่อ s แทนความยาวโค้ง (arc length)

$\dfrac{d\vec{R}}{dt}$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด P มีความชันเท่ากับ $\dfrac{dy}{dx}$

อัตราเร่ง $(\vec{a}) = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}$$

จากกฎข้อ 2 ในการเคลื่อนที่ของนิวตัน จะได้ว่า

$$F = m\vec{a}$$

เมื่อ m เป็นมวลคงที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรง $\vec{F}$

ตัวอย่างที่ 3.2.1 ให้ P(x,y) เคลื่อนที่บนไฮเปอร์โบลา ซึ่งมีสมการว่า

$$\vec{R} = a \cosh wt\, \vec{i} + a \sinh wt\, \vec{j}$$

เมื่อ a,w เป็นค่าคงที่ที่มากกว่าศูนย์ จงพิจารณาว่า $\vec{F}$ ที่จุดใด ๆ มีทิศทางไปทางไหน

วิธีทำ

$$\vec{R} = a \cosh wt\, \vec{i} + a \sinh wt\, j$$

$$\vec{V} = aw \sinh wt\, \vec{i} + aw \cosh wt\, j$$

$$a = aw^2 \cosh wt\, i + aw^2 \sinh wt\, \vec{j}$$

$$= w^2 R$$

$$\vec{F} = ma$$

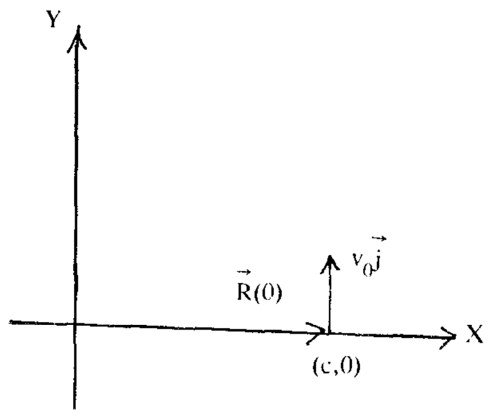
$$= mw^2 \vec{R}$$

ดังนั้น $\vec{F}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{R}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.2.2 ให้ F = cos t i + sin t j

ถ้าอนุภาคเริ่มที่จุด (c,0) ด้วยความเร็วต้น $v_0\vec{j}$ ตั้งฉากกับแกน X จงหาเส้นทางนี้

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 3.2.1 กำหนดให้ $\vec{R}$ ให้ และต้องการหา $\vec{F}$ ซึ่งหาได้โดยการหาอนุพันธ์ ส่วนโจทย์ข้อนี้กำหนด $\vec{F}$ ให้ ต้องการหา $\vec{R}$ ทำได้โดยการอินทิเกรต ดังนี้

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} = m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

$$= m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$t = 0$, ความเร็วต้น $= v_0\vec{j}$

$\therefore\ \vec{V}(0) \quad v_0\vec{j}$

$$\vec{R}(0) = c\vec{i}$$

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$$

$$m\vec{V} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{C}_1$$

หา $\vec{C}_1$ จากเงื่อนไข ที่ $t = 0$

$$mv_0\vec{j} = -\vec{j} + \vec{C}_1$$

$$\vec{C}_1 = (mv_0 + 1)\vec{j}$$

แทนค่า $\vec{C}_1$ จะได้ว่า

$$m\vec{V} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + (mv_0 + 1)\vec{j}$$

$m\vec{V} = m\dfrac{d\vec{R}}{dt}$ ดังนั้นอินทิเกรตอีกครั้งหนึ่ง จะได้

$$m\vec{R} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + (mv_0+1)\,t\,\vec{j} + \vec{C}_2$$

$$= -\cos t\,\vec{i} + (mv_0t + t - \sin t)\,\vec{j} + \vec{C}_2$$

หา $\vec{C}_2$ ได้จากเงื่อนไขที่ $t = 0$

$$mc\vec{i} = -\vec{i} + \vec{C}_2$$

$$\vec{C}_2 = (mc + 1)\,\vec{i}$$

แทนค่า $\vec{C}_2$ จะได้ว่า

$$m\vec{R} = -\cos t\ i + (mv_0 t + t \quad \sin\ t)\vec{j} + (mc + 1)\ i$$

$$= (mc + 1 \quad \cos\ t)\ i + (mv_0 t + t \quad \sin\ t)j$$

$$\vec{R} = \frac{1}{m}\{(mc + 1 - \cos\ t)\ i + (mv_0 t + t - \sin\ t)\ j\}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.2.3 ถ้าแรงที่กระทำกับอนุภาค P ซึ่งมีมวล = m คือ $\vec{F} = -mg\vec{j}$ ซึ่ง m และ g เป็นตัวคงที่ และอนุภาคเริ่มต้น จากจุดกำเนิดด้วยความเร็ว

$$\vec{V}_0 = V_0 \cos\alpha\ \vec{i} + V_0 \sin\alpha\ \vec{j}$$

ที่เวลา $t = 0$ จงหาเวกเตอร์ $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j}$ จากจุดกำเนิดไปยังจุด P ที่เวลา t

วิธีทำ $\because F = ma$

$$-mg\vec{j} = m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

$$= m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\therefore \frac{d\vec{V}}{dt} = -g\vec{j}$$

$$\vec{V} = -gt\ \vec{j} + \vec{C}_1$$

ที่ $t = 0,\ V = V_0 \cos\alpha\ i + V_0 \sin\alpha\ \vec{j}$

$$V_0 \cos\alpha\ i + V_0 \sin\alpha\ \vec{j} = \vec{C}_1$$

$$\vec{V} = -gt\ j + V_0 \cos\alpha\ i + V_0 \sin\alpha\ \vec{j}$$

$$= V_0 \cos a \vec{i} + (V_0 \sin \alpha - gt)j$$

จาก $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ ดังนั้น อินทิเกรตอีกครั้งหนึ่ง จะได้ $\vec{R}$ ซึ่ง

$$\vec{R} = V_0 t \cos \alpha\, i + (V_0 t \sin \alpha - g\frac{t^2}{2})\vec{j} + \vec{C}_2$$

ที่ $t = 0$, $\vec{R} = \vec{0}$ เนื่องจากเริ่มที่จุดกำเนิด

$$\therefore \vec{C}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{R} = V_0 t \cos \alpha\, i + (V_0 t \text{ tin } \alpha - g\frac{t^2}{2})\, j$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.2.4 จงหาความเร็ว และอัตราเร่งของ

$\vec{R} = \cosh 3t\, \vec{i} + 2 \sinh t\, \vec{j}$ ที่ $t = 0$

วิธีทำ

$$\vec{R} = \cosh 3t\, i + 2 \sinh t\, j$$

$$\vec{V} = 3 \sinh 3t\, i + 2 \cosh t\, j$$

$$\vec{a} = 9 \cosh 3t\, i + 2 \sinh t\, j$$

$$t = 0,\ v = 2\vec{j}$$

$$a = 9\vec{i}$$ **ตอบ**

ใน 3 มิติ $R(t) = x(t)i + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$$V(t) = \frac{dR(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.5 $\vec{R} = e^t\vec{i} + e^t \sin t\,\vec{j} + e^t \cos t\,\vec{k}$

จงหาความเร็ว และอัตราเร่ง ที่ $t = 0$

วิธีทำ

$$\vec{v} = e^t\vec{i} + (e^t\cos t + e^t\sin t)\vec{j} + (e^t\cos t - e^t\sin t)\vec{k}$$

$$\vec{a} = e^t\vec{i} + (-e^t\sin t + e^t\cos t + e^t\cos t + e^t\sin t)\vec{j}$$
$$+ [-e^t\sin t + e^t\cos t - (e^t\cos t + e^t\sin t)]\vec{k}$$
$$= e^t\vec{i} + 2e^t\cos t\,\vec{j} - 2e^t\sin t\,\vec{k}$$

$t = 0,\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.2

จงหาความเร็ว และอัตราเร่งของเส้นโค้งต่อไปนี้

1. $\vec{R} = t\,\vec{i} + t'j + (1+t^2)\vec{k}$
2. $\vec{R} = t\,\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\vec{j} + \frac{3}{2}t^3\vec{k}$
3. $R = \sin t\ i + \cos t\ \vec{j} + 3t^4\vec{k}$
4. $R = e^t \sin t\ i + e^{2t}\cos t\ j + e^{-}\vec{k}$
5. $R = (e^t + e^{-t})i + (e^t - e^{-t})\vec{j} + I\,\vec{k}$

3 3 ความยาวโค้ง (Arc length)

นิยาม 3.3.1 ความยาว (length) ของ $\vec{R} = \vec{R}(t)$ คือ

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

s เรียกว่า ความยาวโค้ง

ตัวอย่างที่ 3.3.1 ให้ $R = 2\cos t\, i + 2\sin t\, \vec{j}$

จงหาความยาวโค้งในช่วง $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -2\sin t\, i + 2\cos t\, j$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}$$

$$= 2$$

$$s = \int_0^{2\pi} 2\, dt$$

$$= 2t \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.3.2 ให้ $R = e^t\cos t\, i + e^t\sin t\, \vec{j} + e^t\vec{k}$

จงหาความยาวโค้งในช่วง $0 \leqslant t \leqslant \pi$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)\, i + e^t(\sin t + \cos t)\vec{j} + e^t\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \{ e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t) + e^{2t} \}^{1/2}$$

$$= \sqrt{3e^{2t}}$$

$$= e^t\sqrt{3}$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{3}\, e^t dt$$

$$= \sqrt{3}\, e^t \Big|_0^{\pi}$$

$$= \sqrt{3}\,(e^{\pi} - e^0)$$

$$= \sqrt{3}\,(e^{\pi} - 1)$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.3

จงหาความยาวโค้งของ $\vec{R}$ ในช่วงที่กำหนดให้

1. $\vec{R} = t\,\vec{i} + \frac{t^2}{A}\,j + \frac{t^3}{3}\,k,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

2. $\vec{R} = t\,\vec{i} + \ln(\sec t + \tan t)\,\vec{j} + \ln \sec t\ k,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{7}$

3. $R = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k},\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

4. $R = \cosh t\,\vec{i} + \sinh t\,\vec{j} + t\,\vec{k},\ 0 \leqslant t \leqslant 3$

5. $R = 2\cosh 3t\ i\quad 2\sinh 3t\,\vec{j} + 6t\,\vec{k},\ 0 \leqslant t \leqslant 5$

3.4 เวกเตอร์หน่วยสัมผัส (Unit tangent vector)

ให้ $\vec{R}$ เป็นฟังก์ชันของ s แล้ว

$\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{T}$ คือ เวกเตอร์หน่วยสัมผัส

ถ้า $\vec{R}$ เป็นฟังก์ชันของ t แล้ว

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{d\vec{R}}{ds} \\ &= \frac{d\vec{R}}{dt}\frac{dt}{ds} \\ &= \frac{d\vec{R}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d\vec{R}}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.4.1 ให้ $R(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j,\ a > 0$

จงหาเวกเตอร์หน่วยสัมผัส

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,j$$

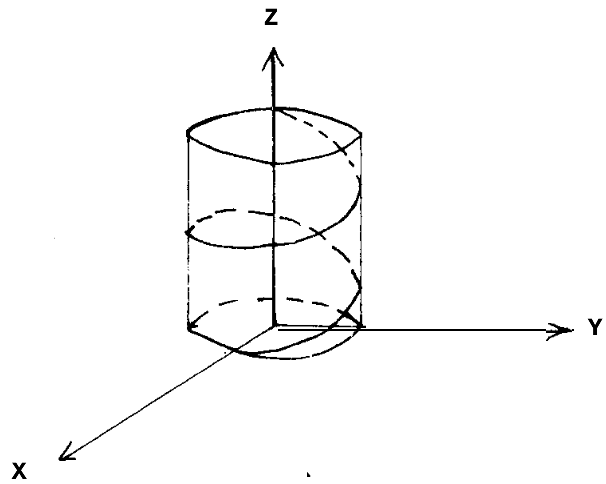
$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = a$$

$$\vec{T} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

ตอบ

helix คือ เส้นโค้งที่พันอยู่บนทรงกระบอก ดังรูป 3.4.1 และมีสมการว่า

$$\vec{R} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k},\ a, b \neq 0$$



รูป 3.4.1

ตัวอย่างที่ 3.4.2 จงหาเวกเตอร์หน่วยสัมผัสของ helix ซึ่งมีสมการว่า

$$\vec{R} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k},\ a,b \neq 0$$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\,\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\vec{T} = (-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\vec{k})\Big/\sqrt{a^2 + b^2}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.4.3 จงหาเวกเตอร์หน่วยสัมผัส ของ

$\vec{R} = \cos^3 t\,\vec{i} + \sin^3 t\,\vec{j}$ ที่ $t = 0$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -3\cos^2 t \sin t\, i + 3\sin^2 t \cos t\, j$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}$$

$$= 3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}$$

$$= 3\cos t \sin t$$

$$\vec{T} = \frac{-3\cos^2 t \sin t\,\vec{i} + 3\sin^2 t \cos t\, j}{3\cos t \sin t}$$

$$= -\cos t\, i + \sin t\, j$$

$t = 0, T = -i$ ตอบ

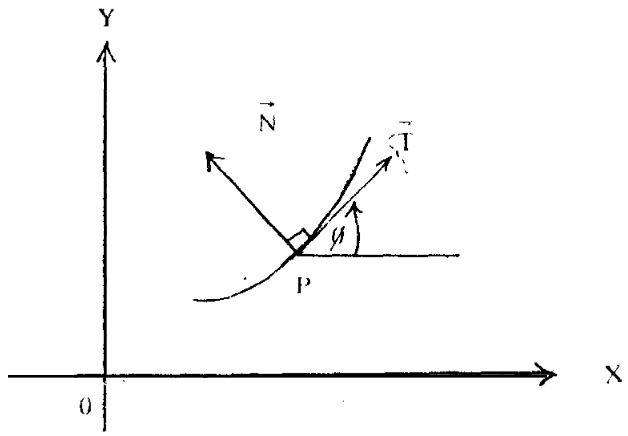
แบบฝึกหัด 3.4

จงหาเวกเตอร์หน่วยสัมผัส ของเส้นโค้ง ที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

1. $\vec{R} = t^3\vec{i} + (1 - t)\vec{j} + (2t + 1)\vec{k},\ t = 1$
2. $\vec{R} = e^{-2t}\vec{i} + e^{2t}\vec{j} + (1 + t^2)\vec{k},\ t = 0$
3. $\vec{R} = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k},\ t = \pi$
4. $\vec{R} = \frac{t^3}{3}\vec{i} + 2t\,\vec{j} + \frac{2}{1}\vec{k},\ t = 1$
5. $\vec{R} = (e^{t/2} + e^{-t/2})\vec{i} + (e^{t/2} - e^{-t/2})\vec{j} + 2t\,\vec{k},\ t = 0$

3.5 ความโค้ง และ เวกเตอร์หน่วยปกติ (Curvature and unit normal vector)

การเคลื่อนที่ในระนาบ ถ้า $\vec{T}$ ทำมุม ϕ กับแกน X ดังรูป 3.5.1



รูป 3.5.1

ความโค้งแทนด้วย κ (kappa)

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| \text{ คือ ความโค้งที่จุด P}$$

$$= \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

ถ้า x และ y ต่างเป็นฟังก์ชันของ t นั่นคือ $x = f(t)$, $y = g(t)$ แล้ว

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[x'^2 + y'^2]^{3/2}}$$

โดยที่ $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$

$y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$

รัศมีความโค้ง(radius of curvature) แทนด้วย ρ ซึ่ง $\rho = \frac{1}{\kappa}$

ตัวอย่างที่ 3.5.1 จงหาความโค้งของเส้น $y = a\cosh\frac{x}{a}$

วิธีทำ จาก $\kappa = \dfrac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$

$$\frac{dy}{dx} = a\sinh\frac{x}{a}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \sinh\frac{x}{a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}$$

$$\kappa = \frac{\left|\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}\right|}{\left[1 + \sinh^2\frac{x}{a}\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}\right|}{\left(\cosh^2\frac{x}{a}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}\right|}{\cosh^3\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{1}{a\cosh^2\frac{x}{a}}$$ **ตอบ**

เวกเตอร์หน่วยปกติ

จากรูป 3.5.1 จะเห็นว่า

$$\vec{T} = \cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{T}}{d\phi} = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}$$

และ $\left|\frac{d\vec{T}}{d\phi}\right| = \sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi} = 1$

แสดงว่า $\frac{d\vec{T}}{d\phi}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย

เมื่อหาผลคูณสกาลาร์ของ $\vec{T}$ และ $\frac{d\vec{T}}{d\phi}$ จะได้ว่า

$$\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{d\phi} = 0$$

แสดงว่า $\vec{T}$ ตั้งฉากกับ $\frac{d\vec{T}}{d\phi}$

ให้ $\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\phi}$ เรียก $\vec{N}$ ว่า เวกเตอร์หน่วยปกติ

สำหรับเส้นใน 3 มิติ ทิศทางของเวกเตอร์หน่วยสัมผัสไม่ได้ขึ้นกับมุม ϕ จึงใช้ s เป็นตัวพารามิเตอร์

จาก 2 มิติ และกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\phi}\,\frac{d\phi}{ds}$$

$$= \vec{N}K$$

$\because \vec{N}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย

$$\therefore \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| \qquad \text{เมื่อ } \frac{d\vec{T}}{ds} \neq \vec{0}$$

ดังนั้น $\quad K \quad = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$

ตัวอย่างที่ 3.5 2 จงหาเวกเตอร์หน่วยสัมผัส และความโค้งของ helix ซึ่งมีสมการว่า

$$\vec{R} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + b\,t\,\vec{k},\ a, b \neq 0$$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.4.2

$$\vec{T} = (-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\,\vec{k}) \Big/ \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\,\frac{dt}{ds}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = (-a\cos t\,\vec{i} - a\sin t\,\vec{j}) \Big/ \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = (-a\cos t\,\vec{i} - a\sin t\,\vec{j}) \Big/ (a^2 + b^2)$$

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{1}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\vec{N} \quad \frac{d\vec{T}}{ds}\Big/\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

$$= \left(\frac{-a\cos t\,\vec{i} - a\sin t\,\vec{j}}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)$$

$$= -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$K = \frac{a}{a^2+b^2}$$ **ตอบ**

ที่จุดใด ๆ บนเส้นโค้ง $\vec{R}$ จะมีเวกเตอร์หน่วย 2 เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน คือ เวกเตอร์หน่วยสัมผัส ($\vec{T}$) และ เวกเตอร์หน่วยปกติ ($\vec{N}$) พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{B}$ ซึ่ง

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

เรียก $\vec{B}$ ว่า ยูนิท ไบนอร์แมล เวกเตอร์ (unit binormal vector)

ตัวอย่างที่ 3.5.3 ให้ $\vec{R} = 6\sin 2t\,\vec{i} + 6\cos 2t\,\vec{j} + 5t\,\vec{k}$

จงหาเวกเตอร์หน่วยปกติ, ความโค้ง และยูนิท ไบนอร์แมล เวกเตอร์

วิธีทำ

$$\vec{R} = 6\sin 2t\,\vec{i} + 6\cos 2t\,\vec{j} + 5t\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = 12\cos 2t\,\vec{i} - 12\sin 2t\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{144\cos^2 2t + 144\sin^2 2t + 25}$$

$$= \sqrt{144 + 25}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

$$\vec{T} = \frac{12\cos 2t\,\vec{i} - 12\sin 2t\,\vec{j} + 5\vec{k}}{13}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{13}(-24\sin 2t\,\vec{i} - 24\cos 2t\,\vec{j})$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{-24}{13}(\sin 2t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j})\frac{1}{13}$$

$$= \frac{-24}{169}(\sin 2t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j})$$

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{-24}{169}\right)^2(\sin^2 2t + \cos^2 2t)}$$

$$= \frac{24}{169}$$

$$\vec{N} = -\sin 2t\,\vec{i} - \cos 2t\,\vec{j}$$ ตอบ

$$K = \frac{24}{169}$$

ตอบ

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{12}{13}\cos 2t & -\frac{12}{13}\sin 2t & \frac{5}{13} \\ -\sin 2t & -\cos 2t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{5}{13}\cos 2t\right) - \vec{j}\left(\frac{5}{13}\sin 2t\right) + \vec{k}\left(-\frac{12}{13}\cos^2 2t - \frac{12}{13}\sin^2 2t\right)$$

$$= \frac{5}{13}\cos 2t\,\vec{i} - \frac{5}{13}\sin 2t\,\vec{j} - \frac{12}{13}\vec{k}$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.5

จากข้อ 1 และข้อ 2 จงหาเวกเตอร์หน่วยปกติ และความโค้ง

1. $\vec{R} = t\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j}$

2. $\vec{R} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$

จากข้อ 3 ถึงข้อ 5 จงหาเวกเตอร์หน่วยปกติ และความโค้ง ณ จุดที่ $t = 0$

3. $\vec{R} = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j} + t\,\vec{k}$

4. $\vec{R} = e^t\cos t\,\vec{i} + e^t\sin t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$

5. $\vec{R} = (e^{t/2} + e^{-t/2})\vec{i} + (e^{t/2} - e^{-t/2})\vec{j} + 2t\,\vec{k}$

6. $\vec{R} = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$ จงหายูนิทไบนอร์แมล เวกเตอร์ ที่ $t = \frac{\pi}{2}$

3.6 **อนุพันธ์ของผลคูณของเวกเตอร์** (Differentiation of products of vectors)

ให้

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

$$\vec{g}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}$$

$$\vec{h}(t) = h_1(t)\vec{i} + h_2(t)\vec{j} + h_3(t)\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}.\vec{g}) = \frac{d\vec{f}}{dt}.\vec{g} + \vec{f}.\frac{d\vec{g}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}\times\vec{g}) = \frac{d\vec{f}}{dt}\times\vec{g} + \vec{f}\times\frac{d\vec{g}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}.\vec{g}\times\vec{h}) = \frac{d\vec{f}}{dt}.\vec{g}\times\vec{h} + \vec{f}.\frac{d\vec{g}}{dt}\times\vec{h} + \vec{f}.\vec{g}\times\frac{d\vec{h}}{dt}$$

ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีขนาดเท่ากับค่าคงที่ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือ $|\vec{u}|$ = ค่าคงที่ แล้ว $\vec{u}.\vec{u}$ = ค่าคงที่ และเมื่อหาอนุพันธ์จะได้

$$\frac{d\vec{u}}{dt}.\vec{u} + \vec{u}.\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

$$2\vec{u}.\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

$$\vec{u}.\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

$\therefore$ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\frac{d\vec{u}}{dt}$

เช่น $\vec{T}.\vec{T} = 1$

หาอนุพันธ์เทียบกับ s จะได้ว่า

$$\frac{d\vec{T}}{ds}.\vec{T} + \vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

$$2\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

$$\vec{T}\cdot\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

$\therefore$ $\vec{T}$ ตั้งฉากกับ $\frac{d\vec{T}}{ds}$

พิจารณาส่วนประกอบของเวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์ปกติของเวกเตอร์ความเร็ว

จาก
$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$
$$= \frac{dR}{ds}\frac{ds}{dt}$$
$$= \vec{T}\frac{ds}{dt}$$

จะเห็นว่า เวกเตอร์ความเร็วขนานกับเวกเตอร์หน่วยสัมผัสและมีขนาด

$$= \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

พิจารณาส่วนประกอบของเวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์ปกติของเวกเตอร์อัตราเร่ง

จาก $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ และ $\vec{V} = \vec{T}\frac{ds}{dt}$

$$\therefore\ a = \vec{T}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{ds}{dt}$$

แต่ $\frac{dT}{x}$ $= \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}$

$$= \kappa\vec{N}\frac{ds}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}$$

แสดงว่า เวกเตอร์อัตราเร่ง สามารถเขียนในรูปส่วนประกอบของเวกเตอร์หน่วยสัมผัส และเวกเตอร์หน่วยปกติ

ให้ $a_{\vec{N}} = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

$a_{\vec{T}} = \frac{d^2s}{dt^2}$

ดังนั้น $|\vec{a}|^2 = a^2_{\vec{T}} + a^2_{\vec{N}}$

ตัวอย่างที่ 3.6.1 ให้ $\vec{R} = e^t \cos t\,\vec{i} + e^t \sin t\,\vec{j}$

จงหาส่วนประกอบของเวกเตอร์หน่วนสัมผัส และเวกเตอร์หน่วยปกติของอัตราเร่ง

วิธีทำ

$$\vec{V} = \frac{dR}{dt}$$

$$= (-e^t\sin t + e^t\cos t)i + (e^t\cos t + e^t\sin t)j$$

$$= e^t(\cos t - \sin t)i + e^t(\cos t + \sin t)j$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$= (-e^t\cos t - e^t\sin t - e^t\sin t + e^t\cos t)\ i$$

$$+(-e^t\sin t + e^t\cos t + e^t\cos t + e^t\sin t)\vec{j}$$

$$= -2e^t\sin t\ i + 2e^t\cos t\ j$$

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{V}|$$

$$= e^t(\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t$$

$$+ 2\sin t\cos t + \sin^2 t)^{1/2}$$

$$= e^t\sqrt{2}$$

$$a_{\vec{T}} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= e^t\sqrt{2}$$

$$a_{\vec{N}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_{\vec{T}}^2}$$

$$|\vec{a}|^2 = 4e^{2t}\sin^2 t + 4e^{2t}\cos^2 t$$

$$= 4e^{2t}$$

$$a_{\vec{N}} = \sqrt{4e^{2t} - 2e^{2t}}$$

$$= \sqrt{2}\,e^t$$

ตอบ

κ สามารถหาได้จากความเร็ว และอัตราเร่ง ดังนี้

$$\kappa = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$$

ตัวอย่างที่ 3.6.2 จงหาความโค้งของเส้นในตัวอย่างที่ 3.6.1

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.6.1 จะได้ว่า

$$V = e^t(\cos t - \sin t)\, i + e^t(\cos t + \sin t)\, j$$

$$a = 2e^t\sin t\,\vec{i} + 2e^t\cos t\, j$$

$$Vxa = \begin{vmatrix} i & j & \vec{k} \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & 0 \\ -2e^t\sin t & 2e^t\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \{ 2e^{2t}(\cos^2 t - \sin t\cos t) + 2e^{2t}(\sin t\cos t + \sin^2 t) \}\, \vec{k}$$

$$= 2e^{2t}\vec{k}$$

$$|\vec{V} \times \vec{a}| = 2e^{2t}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{2}e^t$$

$$\kappa = \frac{2e^{2t}}{(\sqrt{2}\,e^t)^3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,e^t}$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.6

จงหาส่วนประกอบของเวกเตอร์หน่วยสัมผัส แ ติของอัตราเร่ง

1. $\vec{R} = \sin wt\,\vec{i} + \cos wt\,\vec{j}$, w = ค่าคงที่
2. $\vec{R} = \cosh 5t\,\vec{i} + \sinh 5t\,\vec{j}$
3. $\vec{R} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$, $a \neq 0$
4. $\vec{R} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$, $a, b \neq 0$
5. $\vec{R} = e^t\vec{i} + e^t\sin t\,\vec{j} + e^t\cos t\,\vec{k}$

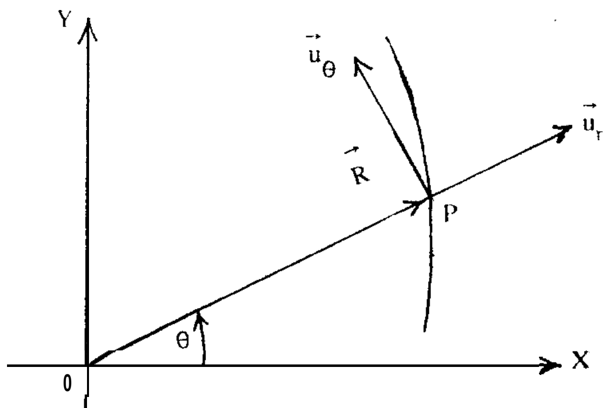
3.7 พิกัด โพลาร์ และพิกัดทรงกระบอก (Polar and cylindrical coordinates)

ถ้าสมการของเส้นอยู่ในรูปพิกัดโพลาร์ แล้วให้ $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ เป็นเวกเตอร์หน่วย โดยที่

$$u_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$u_\theta = -\sin\theta\,i + \cos\theta\,j$$

และมีทิศทางดังรูป 3.7.1



รูป 3.7.1

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,i + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{du_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,i - \sin\theta\,j$$

$$= -(\cos\theta\,i + \sin\theta\,j) = -u_r$$

จากรูป 3.7.1

$$\vec{R} = OP$$

$$= r\,u_r$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= u_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta +$$

$$r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}.$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r$$

$$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta$$

ใน 3 มิติ แทนที่จะเรียกว่า พิกัดโพลาร์ ก็เรียกว่า พิกัด ทรงกระบอก

$$\vec{R} = r\vec{u}_r + zk$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}k$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + 2\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ทำให้เกิดระบบมือขวา

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta = \vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{u}_r = \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta \times \vec{k} = \vec{u}_r$$

ตัวอย่างที่ 3.7.1 จงหาเวกเตอร์ความเร็ว และอัตราเร่งในเทอมของ $\vec{u}_r$ และ $\vec{u}_\theta$ เมื่อ $r = 4\cos 2t,\ \theta = t^2$

วิธีทำ

$$\frac{dr}{dt} = -8\sin 2t$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -16\cos 2t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2t$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$= -8\sin 2t\,\vec{u}_r + (4\cos 2t)(2t)\,\vec{u}_\theta$$

$$= 8\sin 2t\,\vec{u}_r + 8t\cos 2t\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta$$

$$= (-16\cos 2t - 4\cos 2t(4t^2))\ \vec{u}_r +$$

$$(2(2)(-8\sin 2t)(2t) + 4\cos 2t\,(2))\ \vec{u}_\theta$$

$$= (-16\cos 2t - 16t^2\cos 2t)\vec{u}_r + (-64t\sin 2t + 8\cos 2t)\ \vec{u}_\theta$$ ตอบ

แบบฝึกหัด 3.7

จงหาเวกเตอร์ความเร็ว และอัตราเร่งในเทอมของ $\vec{u}_r$ และ $\vec{u}_\theta$

1. $r = 5(1 + \sin\theta), \theta = 2t$
2. $r = 1 + \sin t, \theta = -e^{-t}$