บทที่ 2
สมการพาราเมตริก และเวกเตอร์
(Parametric equations and vectors)

2.1 สมการพาราเมตริก

2.1.1 สมการพาราเมตริกในจลนคณิตศาสตร์ (Parametric equation in kinematics)

การเคลื่อนที่ของวัตถุในระนาบ มีกฎที่สำคัญกฎหนึ่งคือ กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ซึ่งกล่าวว่า

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} \\ &= m\frac{d\vec{V}}{dt} \\ &= m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \text{-----------------} \qquad (2.1.1) \end{aligned}$$

ส่วนประกอบของแรง $\vec{F}$ ตาม แกน X และ แกน Y คือ $F_x = m\frac{dV_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$ และ $F_y = m\frac{dV_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$ ตามลำดับ

$\vec{F}$ คือ แรงที่กระทำกับวัตถุ ซึ่งมีมวล $= m$ ณ เวลา t

$\vec{a}$ คือ อัตราเร่ง

$\vec{V}$ คือ ความเร็ว

$\vec{R}$ คือ เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ

อินทิเกรต สมการ (2.1.1) 2 ครั้ง จะได้ $\vec{R}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ t โดยที่

$$\vec{R} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \qquad \text{-----------------}(2.1.2)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{-------------------}(2.1.3)$$

เรียก $\vec{R}(t)$ ว่าสมการพาราเมตริกของเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ และ t เป็นพารามิเตอร์

จากสมการ (2.1.2) สามารถทราบว่า วัตถุเคลื่อนที่ไปในทิศทางใด และเวลาใดวัตถุอยู่ที่ไหน

ส่วนสมการ $y = F(x)$ เป็นสมการคาร์ทีเซียน ซึ่งได้จากการกำจัดค่า t ในสมการ (2.1.3) บอกให้ทราบถึงเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2.1.1 การเคลื่อนที่แบบ โปรเจกไทล์ (projectile) ให้ความเร็วต้น คือ v_0 และทำมุม α กับแกน X ให้แรง g (แรงดึงดูดของโลก) เป็นแรงเดียวเท่านั้นที่ทำกับวัตถุ คือไม่มีแรงเสียดทาน

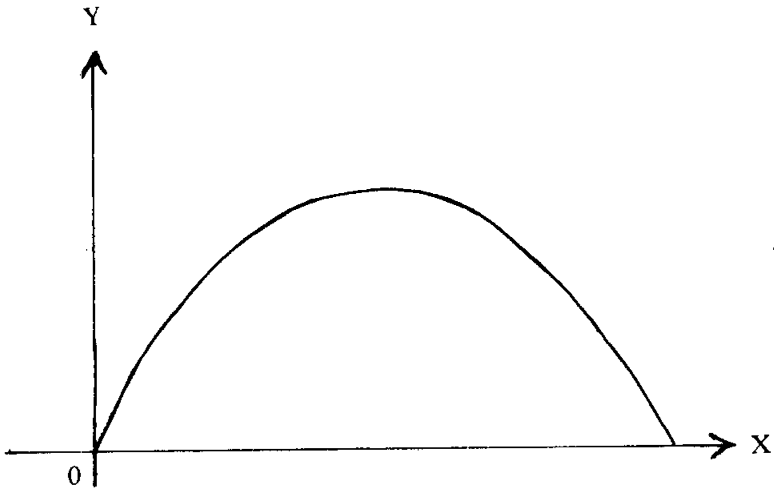
จงหา

ก. เส้นทางการเคลื่อนที่

ข. วัตถุขึ้นสูงสุดเท่าไร

ค. วัตถุไปในแนวระดับได้ไกลเท่าไร

ง. α เท่ากับเท่าไร จึงจะทำให้วัตถุไปได้ไกลที่สุด



วิธีทำ ก. ส่วนประกอบของแรงเมื่อเวลา t คือ

$F_x = 0$ และ $F_y = -mg$

$\therefore 0 = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$0 = \frac{d^2x}{dt^2}$ ---------------------- (1)

และ $-mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$

$-g = \frac{d^2y}{dt^2}$ ---------------------- (2)

จาก (1), $\frac{dx}{dt} = C_1$ ---------------------- (3)

$x = C_1t + C_2$ ---------------------- (4)

จาก (2), $\frac{dy}{dt} = -gt + C_3$ ---------------------- (5)

$y = \frac{-1}{2}gt^2 + C_3t + C_4$ ---------------------- (6)

หาค่าคงที่ต่าง ๆ จากเงื่อนไขเริ่มแรก คือเมื่อ $t = 0, t = 0$ จะได้ว่า $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$ และ $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha$

จาก (3), $C_1 = v_0 \cos\alpha$

จาก (4), $C_2 = 0$

จาก (5), $C_3 = v_0 \sin\alpha$

จาก (6), $C_4 = 0$

ดังนั้น

$$x = (v_0 \cos\alpha)t$$

$$y = \frac{-1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t$$

$$\vec{R} = (v_0 \cos\alpha)t\vec{i} + \{\frac{-1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t\}\vec{j}$$

ตอบ

ข. เมื่อวัตถุไปถึงจุดสูงสุดจะมีความเร็วเป็นศูนย์

นั่นคือ $\frac{dy}{dt} = 0$

จาก (5), $\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha = 0$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$y = \frac{-1}{2} g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{(v_0 \sin\alpha)}{g}$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g} + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g}$$

$$= \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

ดังนั้น วัตถุไปได้สูงสุดเป็นระยะทาง $= \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$

ตอบ

ค. ระยะทางตามแนวระดับที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ หาได้จาก

ให้ $y = 0$

ดังนั้น
$$-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t = 0$$

$$t(-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin \alpha) = 0$$

$$t = 0, \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$t = 0$ คือ เมื่อวัตถุเริ่มเคลื่อนที่

และ $t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$ คือ เวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ไปแล้วตกลงมาที่พื้นอีก

$$x = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{g}$$

ดังนั้น วัตถุไปในแนวระดับได้ไกล $= \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{g}$ **ตอบ**

ง. เนื่องจาก v_0 และ g เป็นค่าคงที่

ดังนั้น x จึงขึ้นอยู่กับมุม α เท่านั้น และจะมีค่ามากที่สุด เมื่อ $\sin 2 \alpha$ มีค่ามากที่สุด

$\sin 2\alpha$ มีค่ามากที่สุด เมื่อ $\sin 2 \alpha = 1$

$$2 \alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.1.2 จงหาสมการพาราเมตริกของ $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = -x^2$ เมื่อ $t = 0, x = 1, y = 3$

วิธีทำ

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dx}{x} = dt$$

$$\ln x = t \; t \; c \; ,$$

เมื่อ $t = 0, x = 1$

ดังนั้น $\mathrm{In}\ 1 = 0 + c_1$

$$0 = c_1$$

$$. \quad \mathrm{Inx} = t$$

$$e^t = x$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^2$$

$$dy = -x^2 \; dt$$

$$= -e^{2t} dt$$

$$Y = \frac{-1}{2} e^{2t} + C_2$$

เมื่อ $t = 0, y = 3$

ดังนั้น $3 = -\frac{1}{2} + C_2$

$$C_2 = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad Y = -\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{7}{2}$$

ดังนั้น สมการพาราเมตริก คือ

$x = e^t, y = -\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{7}{2}$ **ตอบ**

2.1.2 , สมการพาราเมตริกในเรขาคณิตวิเคราะห์ (Parametric equation in analytic geometry)

ตัวอย่างที่ 2.1.3 $x = a \cos t,\ y = a \sin t$

เป็นสมการพาราเมตริกของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมี $= a$ และมีสมการคาร์ทีเซียน เป็น

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ตัวอย่างที่ 2.1.4 $x = a \cos t,\ y = b \sin t$

เป็นสมการพาราเมตริกของวงรี ซึ่งมีสมการคาร์ทีเซียน เป็น

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ตัวอย่างที่ 2.1.5 $x = \frac{p}{t^2},\ y = \frac{2p}{t}$ เมื่อ $t = \frac{dy}{dx}$ และ $x = \frac{4p}{m^2},\ y = \frac{4p}{m}$ เมื่อ $m = \frac{y}{x}$ ต่างเป็น

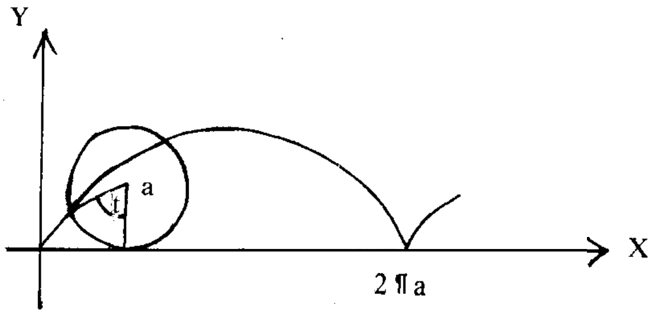
สมการพาราเมตริกของพาราโบลา ซึ่งมีสมการคาร์ทีเซียน เป็น

$$y^2 = 4\,px$$

ตัวอย่างที่ 2.1.6 $x = \cosh t,\ \ y = \sinh t$

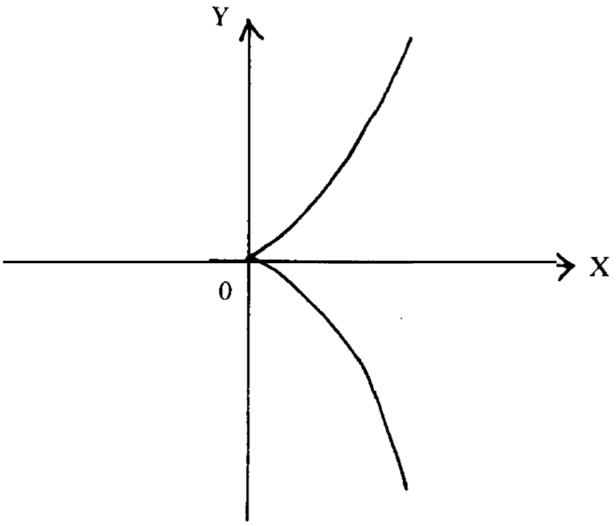
เป็นสมการพาราเมตริกของไฮเปอร์โบลาเฉพาะบริเวณทางขวามือของแกน Y เท่านั้น และสมการ $x^2 - y^2 = 1$ แทนทั้งส่วนทางซ้ายและทางขวาของไฮเปอร์โบลา

ตัวอย่างที่ 2.1.7 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$
เป็นสมการพาราเมตริกของไซคลอยด์ ดังรูป 2.1.1



รูป 2.1.1

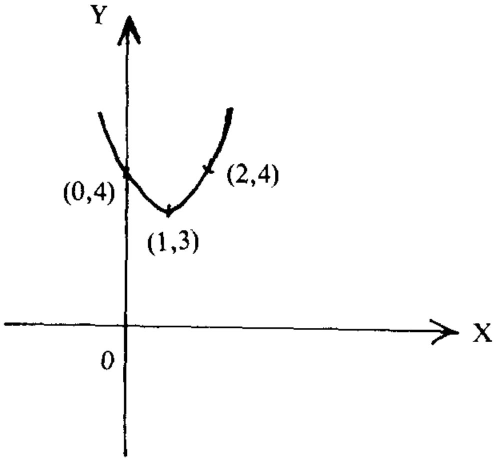
ตัวอย่างที่ 2.1.8 $x = t^2$, $y = t^3$ เป็นสมการพาราเมตริกของ semicubical parabola ดังรูป *2.1.2*



รูป 2.1.2

ตัวอย่างที่ 2.1.9 $x = t + 1, y = t^2 + 3$

เป็นสมการพาราเมตริกของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ (1,3) ดังรูป 2.1.3



รูป 2.1.3

ตัวอย่างที่ 2.1.10 $x = 2t + 3,\ y = 4t^2 - 9,\ -\infty < t < \infty$ จงหาสมการคาร์ทีเซียน

วิธีทำ

$$y - x^2 = 4t^2 - 9 -(2t + 3)^2$$

$$= 4t^2 - 9 -(4t^2 + 12t + 9)$$

$$= 4t^2 - 9 - 4t^2 - 12t - 9$$

$$= -12t - 18$$

จาก $x = 2t + 3$

$$t = \frac{x - 3}{2}$$

$$\therefore y - x^2 = -12\left(\frac{x-3}{2}\right) - 18$$

$$= -6x + 18 \quad 18$$

$$= -6x$$

. $x^2 - 6x - y = 0$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาสมการพาราเมตริกของ $\frac{dx}{dt} = x^{-2}, \frac{dy}{dt} = x^6$ เมื่อ $t = 0, x = 1, y = -1$

2. $x = 5 \cos t, y = 8 \sin t$ จงหาสมการคาร์ทีเซียน

3. จงหาสมการพาราเมตริกของ $x^2 + y^2 = 7$

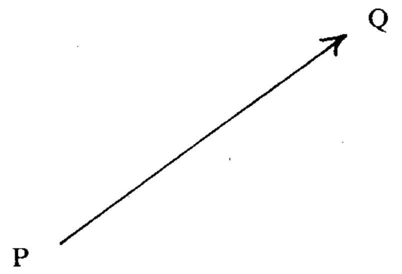
2.2 **สกาลาร์ และเวกเตอร์** (Scalar and vector)

ปริมาณทางฟิสิกส์ที่สำคัญมี 2 อย่างคือ ปริมาณสกาลาร์ (Scalar quantity) และปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity)

ปริมาณสกาลาร์ คือ ปริมาณที่มีขนาด (magnitude) เพียงอย่างเดียว เช่น มวล (mass), ความยาว (length), เวลา (time), อุณหภูมิ (temperature), ปริมาตร (volume) เป็นต้น แทนด้วย A,a,b,c,.....

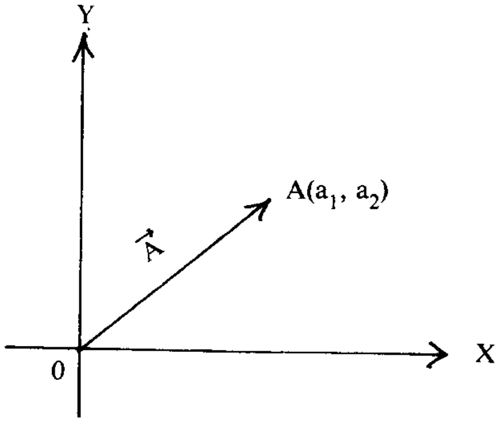
ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาด และทิศทาง (direction) เช่น ระยะขจัด (displacement), แรง (force), ความเร็ว (velocity) และความเร่ง (acceleration) เป็นต้น แทนด้วย $\vec{A}, \bar{A}, \vec{a}, \overset{\rightharpoonup}{A}$ หรือ ตัวพิมพ์หนา (bold faced type) ในที่นี้จะแทนปริมาณเวกเตอร์ด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ และมีลูกศรกำกับอยู่บนตัวอักษรนั้น

ทางเรขาคณิต เวกเตอร์แทนด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง (directed line segment) ซึ่งบอกทิศทางของเวกเตอร์ และความยาวของเส้นตรงบอกขนาดของเวกเตอร์ $\vec{PQ}$ คือเวกเตอร์ที่มีทิศทางจากจุด P ไปยังจุด Q เรียกจุด P ว่า จุดเริ่มต้น (initial point) และเรียกจุด Q ว่า จุดปลาย หรือจุดสิ้นสุด (terminal point) ดังรูป 2.2.1



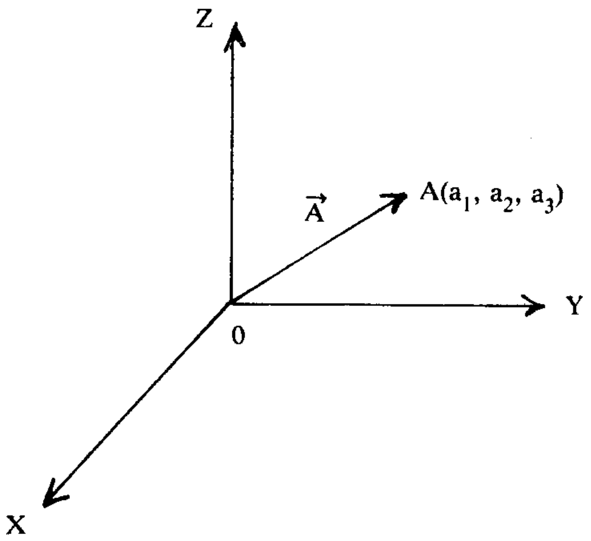
รูป 2.2.1

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ หมายถึง คู่อันดับ (ordered pair) นั่นคือ ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติแล้ว $\vec{A} = (a_1, a_2)$ โดยที่ a_1, a_2 เป็นจำนวนจริง และเรียก a_1, a_2 ว่า ส่วนประกอบ (component) ของ $\vec{A}$ เทียบกับแกนพิกัดฉากนี้ ดังรูป 2.2.2



รูป 2.2.2

ในทำนองเดียวกัน เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ หมายถึง อันดับของจำนวนจริง 3 จำนวน (ordered triple of real numbers) นั่นคือ ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ แล้ว $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ โดยที่ a_1, a_2, a_3 เป็นจำนวนจริง และเรียก a_1, a_2, a_3 แล้วว่า ส่วนประกอบของ $\vec{A}$ เทียบกับแกนพิกัดฉากนี้ ดังรูป 2.2.3



รูป 2.2.3

โดยทั่วไป เวกเตอร์ใน n มิติ หมายถึง เซตอันดับ (ordered set) ของเลขจำนวนจริง n ตัว นั่นคือ ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใน n มิติ แล้ว $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots , a_n)$ โดยที่ $a_1, a_2, \dots , a_n$ เป็นจำนวนจริง

เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector or null vector) แทนด้วย $\vec{0}$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ และมีทิศทางไม่จำกัด (arbitrary direction) เวกเตอร์ศูนย์เป็นเวกเตอร์ที่ขนานและตั้งฉากกับทุก ๆ เวกเตอร์

ใน 2 มิติ หรือ ระนาบ

$\vec{A} = (a_1, a_2) = \vec{0} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$

ใน 3 มิติ

$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{0} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

ขนาดหรือความยาว (magnitude or length) ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ แทนด้วย $|\vec{A}|$

จากรูป 2.2.2 จะเห็นว่า $|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

จากรูป 2.2.3 จะเห็นว่า $|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

ดังนั้น $|\vec{A}| \geqslant 0$ และ $|\vec{A}| = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{0}$

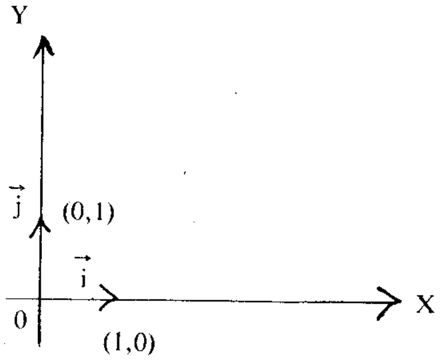
จะเห็นว่า ขนาดของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก หาได้จากพิกัด (coordinates) ของจุดปลายของเวกเตอร์นั้น หรือจากส่วนประกอบของเวกเตอร์นั้น

เวกเตอร์หน่วย (unit vector) คือเวกเตอร์ที่มีความยาว 1 หน่วย

เวกเตอร์ฐาน (base vectors)

ให้ $\vec{i}, \vec{j}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางบวกของแกน X, แกน Y ตามลำดับ โดยที่

$$\vec{i} = (1,0)$$
$$\vec{j} = (0,1)$$



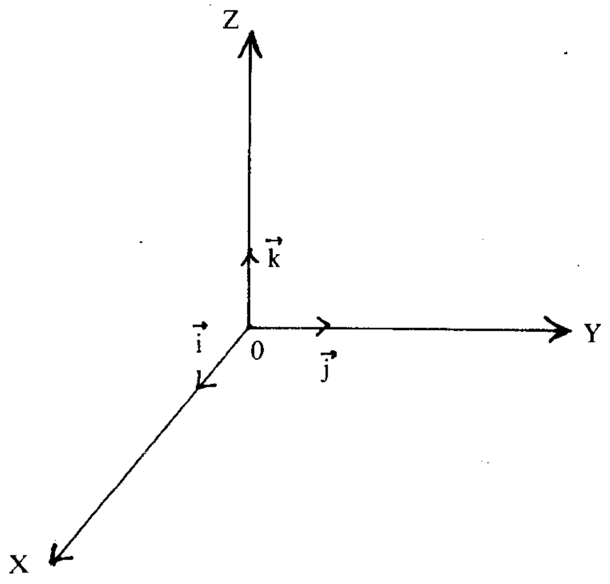
ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2)$ สามารถเขียน $\vec{A}$ ในรูปการรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ $\vec{i}, \vec{j}$ ได้ดังนี้

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

ให้ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางบวกของแกน X, แกน Y, แกน Z ตามลำดับ และเป็นเซตของเวกเตอร์หน่วยที่ประกอบกันเป็นระบบมือขวา (right handed system) หรือ dextral system เสมอ โดยที่

$$\vec{i} = (1,0,0)$$
$$\vec{j} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = (0,0,1)$$

เรียก $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ว่าเวกเตอร์ฐานของระบบพิกัดฉาก



ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ สามารถเขียน $\vec{A}$ ให้อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ได้ดังนี้

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

เวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector) หรือ เวกเตอร์รัศมี (radius vector) คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก และจุดปลายอยู่ที่จุด (x,y)

ถ้า $\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P(x,y) แล้ว

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

ใน 3 มิติ เวกเตอร์ตำแหน่ง คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก และจุดปลายอยู่ที่จุด (x,y,z)

ถ้า $\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P(x,y,z) แล้ว

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 2.2.1 จงแสดงว่า $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

วิธีทำ

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (a_1, a_2, a_3)\\ &= (a_1+0+0,\ 0+a_2+0,\ 0+0+a_3)\\ &= (a_1,0,0) + (0,a_2,0) + (0,0,a_3)\\ &= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)\\ &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{A}$ สามารถเขียนอยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้

   ก. $\overrightarrow{P_1P_2}$ โดยที่ P_1 คือจุดกำเนิด P_2 คือจุด (3,3)

   ข. เวกเตอร์หน่วยที่ทำมุม 45° ทางบวกของแกน X

   ค. เวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $-2\vec{i} - 5\vec{j}$

2. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

   ก. $2\vec{i} + 7\vec{j}$

   ข. $\vec{i} - 3\vec{j}$

   ค. $6\vec{i} + \sqrt{13}\,\vec{j}$

3. จงเขียน $\vec{A} = (1,2,3)$ ในรูปการรวมเชิงเส้นของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

2.3 พีชคณิตของเวกเตอร์ (Vector algebra)

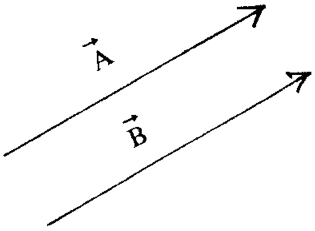
2.3.1 การเท่ากันของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ แทนด้วย

$$\vec{A} = \vec{B} \qquad \text{.........................(2.3.1)}$$

จะกล่าวว่า $\vec{A} = \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

ข. ทิศทางของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไปทางเดียวกัน ดังรูป 2.3.1



รูป 2.3.1

ในระนาบ ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2)$ แล้ว

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \text{ และ } a_2 = b_2$$

ใน 3 มิติ ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ แล้ว

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2 \text{ และ } a_3 = b_3$$

นั่นคือ เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ ส่วนประกอบที่สมนัยกันต้องเท่ากัน

จากสมการ (2.3.1) จะได้ว่า

ก. ถ้า $\vec{A} = \vec{B}$ แล้ว $\vec{B} = \vec{A}$

ข. ถ้า $\vec{A} = \vec{B}$ และ $\vec{B} = \vec{C}$ แล้ว $\vec{A} = \vec{C}$

2.3.2 **การคูณเวกเตอร์ด้วยสกาลาร์** (Multiplication of a vector by a scalar)

ถ้า m เป็นสกาลาร์

ในระนาบ $\vec{A}$ = (a,, a,) แล้ว ผลคูณของ m และ $\vec{A}$ คือ

$$mA = m(a_1,\ a_2)$$

$$= (ma,,\ ma_2)$$

$m\vec{A}$ มีขนาด $= |m\vec{A}|$

$$= \overline{(ma_1)^2 + (ma_2)^2}$$

$$= \sqrt{m^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$= |m|\ |\vec{A}|$$

$$\therefore \quad |m\vec{A}| \quad |m|\ |\vec{A}|$$

ใน 3 มิติ A = (a,, a_2, a_3) แล้วผลคูณของ m และ $\vec{A}$ คือ

$$mA = m\ (a,,\ a_2,\ a_3)$$

$$= (ma,,\ ma_2,\ ma_3)$$

$m\vec{A}$ มีขนาด $= |m\vec{A}|$

$$= \overline{(ma_1)^2 + (ma_2)^2 + (ma_3)^2}$$

$$= \sqrt{m^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= |m|\ \vec{A}|$$

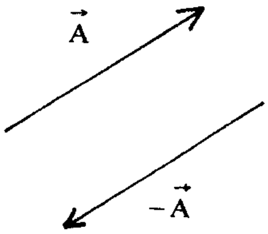
$$.\ . \quad |m\vec{A}| = |m|\ |\vec{A}|$$

ถ้า $m > 0$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ แล้ว $m\vec{A}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

ถ้า $m < 0$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ แล้ว $m\vec{A}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$

ถ้า $m = 0$ หรือ $\vec{A} = \vec{0}$ แล้ว $m\vec{A} = \vec{0}$

เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$ แต่มีขนาดเท่ากับ $\vec{A}$ แทนด้วย $-\vec{A}$ ดังรูป 2.3.2 เรียก -A ว่า นิเสธ (negative) ของ A



รูป 2.3.2

ในระนาบ ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2)$ แล้ว $-\vec{A} = (-a_1, -a_2)$

ใน 3 มิติ ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ แล้ว $-\vec{A} = (-a_1, -a_2, -a_3)$

ทฤษฎีบทที่ 2.3.1 การคูณเวกเตอร์ด้วยสกาลาร์ มีคุณสมบัติดังนี้

ให้ m, n เป็นสกาลาร์, $\vec{A}$, $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์

1. $m\vec{A} = \vec{A}m$
2. $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A} = mn\vec{A}$
3. $1\vec{A} = \vec{A}$
   $(-1)\vec{A} = -\vec{A}$
4. $0\vec{A} = \vec{0}$, $m\vec{0} = \vec{0}$

ตัวอย่างที่ 2.3.1 ให้ $\vec{A} = (-3,2)$, $\vec{B} = (0,-1)$ จงหา $2\vec{A}$ และ $-4\vec{B}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} 2\vec{A} &= 2(-3,2) \\ &= (-6, 4) \\ -4\vec{B} &= -4(0, -1) \\ &= (0,4) \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.3.2 ให้ $\vec{A} = (1,2,3)$, $\vec{B} = (1,3,5)$ จงหา $3\vec{A}$ และ $-2\vec{B}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 3\vec{A} &= 3(1,2,3) \\ &= (3,6,9) \\ -2\vec{B} &= -2(1,3,5) \\ &= (-2,-6,-10) \end{aligned}$$

ตอบ

ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $\vec{B} \neq \vec{0}$ เรียก $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ว่าขนานกัน (parallel) แทนด้วย $\vec{A} \parallel \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อมี m,n ซึ่งเป็นสกาลาร์

โดยที่ $\vec{A} = m\vec{B}$

หรือ $\vec{B} = n\vec{A}$

ถ้า $\vec{A} \parallel \vec{B}$ แล้ว $\vec{B} \parallel \vec{A}$

ถ้า $\vec{A} \parallel \vec{B}$ และ $\vec{B} \parallel \vec{C}$ แล้ว $\vec{A} \parallel \vec{C}$

ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $m = \dfrac{1}{|\vec{A}|}$ แล้วจะได้เวกเตอร์หน่วยแทนด้วย

$\vec{U}_{\vec{A}} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

ทิศทาง (direction) ของ $\vec{A} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

ตัวอย่างที่ 2.3.3 ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $\vec{B} \neq \vec{0}$ จงหาเงื่อนไขซึ่งทำให้

ก. $\vec{A} = (a_1, a_2) \parallel \vec{B} = (b_1, b_2)$

ข. $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) \parallel \vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

วิธีทำ ก. จาก $\vec{A} \parallel \vec{B}$

$\therefore \vec{A} = m\vec{B}$ เมื่อ m เป็นสกาลาร์

$(a_1, a_2) = m(b_1, b_2)$

$= (mb_1, mb_2)$

$a_1 = mb_1, a_2 = mb_2$

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = m$

$\therefore$ เงื่อนไขที่ $\vec{A} \parallel \vec{B}$ คือ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = m$

ข. ในทำนองเดียวกับข้อ ก. เงื่อนไขที่ $\vec{A} \parallel \vec{B}$ คือ

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = m$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.3.4 ให้ $\vec{A} = (1,3,7), \vec{B} = (-3,9,-21)$
จงพิจารณาว่า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ขนานกันหรือไม่

วิธีทำ

เนื่องจาก $\vec{A} = -½\vec{B}$
ดังนั้น $\vec{A} \parallel \vec{B}$ และมีทิศทางตรงข้ามกัน **ตอบ**

2.3.3 การบวกและการลบเวกเตอร์ (Addition and subtration of vectors)

การบวกเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทำได้โดยการเขียน $\vec{A}$ และเขียน $\vec{B}$ จากจุดปลายของ $\vec{A}$ ผลบวกของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือเวกเตอร์จากจุดเริ่มต้นของ $\vec{A}$ ถึงจุดปลายของ $\vec{B}$

ผลบวก (sum) หรือ ผลลัพท์ (resultant) ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ แทนด้วย $\vec{A} + \vec{B}$

ในระนาบ ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2)$, $\vec{B} = (b_1, b_2)$

$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

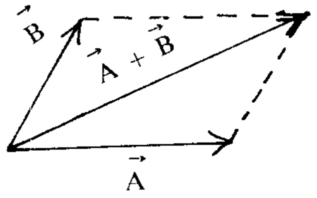
ใน 3 มิติ ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

ดังรูป 2.3.3

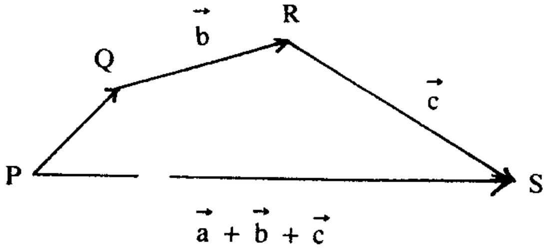
รูป 2.3.3

หรือสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $|\vec{A}|$ และ $|\vec{B}|$ เป็นด้านประชิดเส้นทแยงมุม คือ $|\vec{A}+\vec{B}|$ ดังรูป 2.3.4



รูป 2.3.4

การบวกเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ ดังรูป 2.3.5



รูป 2.3.5

การบวกเวกเตอร์ซึ่งมีมากกว่า 3 เวกเตอร์ ก็ทำในทำนองเดียวกัน

ผลต่าง (difference) ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

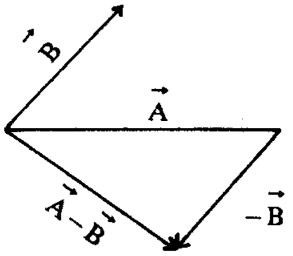
ในระนาบ

$$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

ใน 3 มิติ

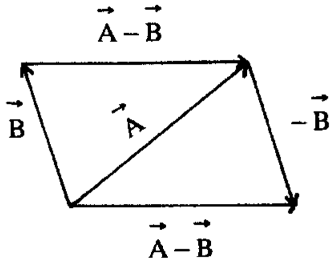
$$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

ดังรูป 2.3.6



รูป 2.3.6

ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีจุดเริ่มต้นร่วมกันแล้ว $\vec{A} - \vec{B}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดปลายของ $\vec{B}$ และมีจุดปลายที่จุดปลายของ $\vec{A}$ ดังรูป 2.3.7



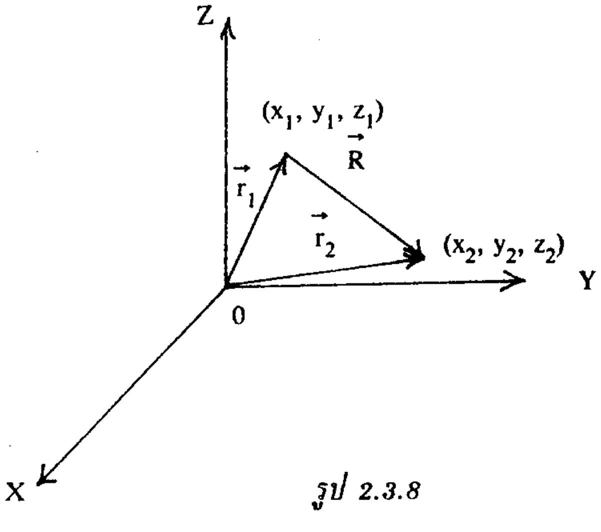
รูป 2.3.7

ตัวอย่างที่ 2.3.5 $\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น และจุดปลายอยู่ที่จุด (x_1, y_1, z_1) และ (x_2, y_2, z_2) ตามลำดับ

จงแสดงว่า

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_2 \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \end{aligned}$$

วิธีทำ



รูป 2.3.8

จากรูป 2.3.6 จะได้ว่า

$'_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$r_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$R = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ **ตอบ**

ทฤษฎีบทที่ 2.3.2 การบวกเวกเตอร์คล้องตามคุณสมบัติ ต่อไปนี้

ให้ m, n เป็น สกาลาร์

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นเวกเตอร์

1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

   กฎการสลับที่ (Commutative law)

2. $\vec{A} + (\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B}) + \vec{C}$

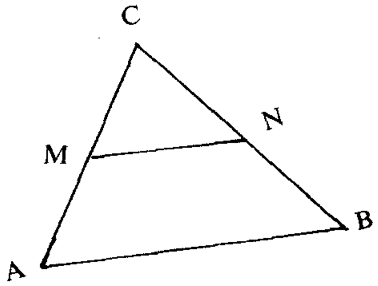
   กฎการจัดหมู่ (Associative law)

3. $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$
4. $m(\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

   $\Big\}$ กฎการกระจาย (Distributive law)

5. $\vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$ เอกลักษณ์ (Identity)
6. $A + (-A) = \vec{0}$ ตัวผกผัน (Inverse)

ตัวอย่างที่ 2.3.6 จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมขนานกับด้านที่ 3 และยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่ 3



รูป 2.3.9

วิธีทำ ให้ A,B,C เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ดูรูป 2.3.9 ให้ M,N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CA, CB ตามลำดับ

ให้ $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$

$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} \\ &= ½\overrightarrow{CB} - ½\overrightarrow{CA} \\ &= ½\vec{b} - ½\vec{a} \\ &= ½\,(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= ½\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

นั่นคือ MN ขนานกับ AB และยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ AB **ตอบ**

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาเวกเตอร์หน่วยที่ขนานกับผลบวกของ $\vec{A} = (2,4,-5)$, $\vec{B} = (1,2,3)$
2. ให้ $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ และ $\vec{B} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$ จงหา $2\vec{A} - 7\vec{B}$
3. จงหาความยาวของ $\vec{C} = 8\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
4. จงหาระยะทางระหว่างจุด (1,2,3) กับแกน X
5. จงหาระยะทางระหว่างจุด (3, −4, −8) กับระนาบ XZ

2.4 ผลคูณสกาลาร์ของเวกเตอร์ (Scalar or dot or inner product of vectors)

นิยาม 2.4.1 ผลคูณสกาลาร์ของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta \qquad \text{..........................(2.4.1)}$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$, $0 \le \theta \le \pi$

โดยมี $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

$\vec{A}.\vec{B}$ อ่านว่า $\vec{A}$ ดอท (dot) $\vec{B}$

ผลคูณสกาลาร์ระหว่าง 2 เวกเตอร์ใด ๆ เป็นสกาลาร์

ถ้า $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

แล้วไดเรคชันโคไซน์ของ $\vec{A}$ คือ

$$\frac{a_1}{|\vec{A}|}, \quad \frac{a_2}{|\vec{A}|}, \quad \frac{a_3}{|\vec{A}|}$$

และไดเรคชัน โคไซน์ ของ $\vec{B}$ คือ

$$\frac{b_1}{|\vec{B}|}, \quad \frac{b_2}{|\vec{B}|}, \quad \frac{b_3}{|\vec{B}|}$$

จากเรขาคณิตวิเคราะห์ จะได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{a_1}{|\vec{A}|}\frac{b_1}{|\vec{B}|} + \frac{a_2}{|\vec{A}|}\frac{b_2}{|\vec{B}|} + \frac{a_3}{|\vec{A}|}\frac{b_3}{|\vec{B}|}$$

แทนค่า $\cos\theta$ ในสมการ (2.4.1) จะได้ว่า

$$\vec{A}.\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ข้อสังเกต แม้ว่า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะไม่มีจุดเริ่มต้นเดียวกัน ก็ยังหา $\vec{A}.\vec{B}$ ได้

ทฤษฎีบทที่ 2.4.1 ผลคูณสกาลาร์ของเวกเตอร์ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ กฎการสลับที่
2. $(m\vec{A}.\vec{B}) = m(\vec{A}.\vec{B})$

   $= \vec{A}.(m\vec{B})$ m = สกาลาร์
3. $\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$ กฎการกระจาย
4. $\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2$

$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

$\vec{j}.\vec{i} = \vec{k}.\vec{i} = \vec{i}.\vec{k} = 0$

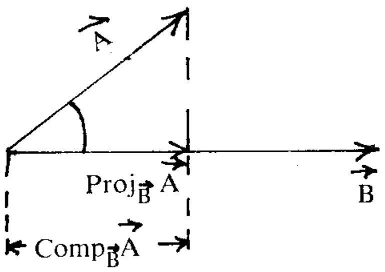
หรือจากตาราง

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

นิยาม 2.4.2 ส่วนฉาย (projection) ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ แทนด้วย

$\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = (|\vec{A}| \cos \theta)\, U_{\vec{B}}$

ดูรูป 2.4.1



รูป 2.4.1

นิยาม 2.4.3 ส่วนประกอบของ $\vec{A}$ ตาม $\vec{B}$ ($\vec{B} \neq \vec{0}$) แทนด้วย $\text{Comp}_{\vec{B}}\vec{A}$ ซึ่งเป็นสกาลาร์ ดูรูป 2.4.1

$$\begin{aligned} \text{comp}_{\vec{B}}\vec{A} &= |\vec{A}| \cos \theta \\ &= \vec{A}.\,\vec{U}_{\vec{B}} \end{aligned}$$

จากนิยาม 2.4.3 จะได้ว่า $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| \text{ comp}_{\vec{A}}\vec{B}$

$$= |\vec{B}| \text{ comp}_{\vec{B}}\vec{A}$$

นิยาม 2.4.4 $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (perpendicular or orthogonal) แทนด้วย $\vec{A} \perp \vec{B}$

ตัวอย่างที่ 2.4.1 ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $\vec{B} \neq \vec{0}$ แล้ว จงแสดงว่า $\vec{A} \perp \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}.\vec{B} = 0$

วิธีทำ ถ้า $\vec{A} \perp \vec{B}$ แล้ว

$$\begin{aligned} \vec{A}.\vec{B} &= |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos 90^\circ \\ &= 0 \end{aligned}$$

ถ้า $\vec{A}.\vec{B} = 0$ แล้ว

$$|\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos \theta = 0$$

นั่นคือ $|\vec{A}| = 0$ หรือ $|\vec{B}| = 0$ หรือ $\cos\theta = 0$

แต่ $\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $\vec{B} \neq \vec{0}$

ดังนั้น $\cos\theta = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

นั่นคือ ถ้า $\vec{A}.\vec{B} = 0$ แล้ว $\vec{A} \perp \vec{B}$

$\therefore$ $\vec{A} \perp \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}.\vec{B} = 0$ **ตอบ**

หมายเหตุ ถ้า $\vec{A} \perp \vec{B}$ แล้ว $\vec{A}.\vec{B} = 0$

แต่ถ้ากำหนด $\vec{A}.\vec{B} = 0$ ให้ จะสามารถสรุปว่า

$\vec{A} = \vec{0}$ หรือ $\vec{B} = \vec{0}$ หรือ $\vec{A} \perp \vec{B}$

และจาก $\vec{A}.\vec{B} = \vec{A}.\vec{C}$ เมื่อ $\vec{A} \neq \vec{0}$

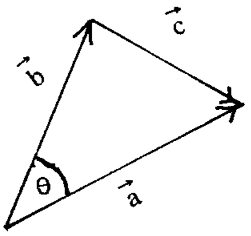
หรือ $\vec{A}.(\vec{B} - \vec{C}) = 0$

ไม่สามารถตัด (cancel) $\vec{A}$ ออกทั้งสองข้าง เพื่อให้ได้ว่า $\vec{B} = \vec{C}$

แต่สามารถสรุปว่า $\vec{A} \perp (\vec{B} - \vec{C})$ หรือ $\vec{B} - \vec{C} = \vec{0}$

ตัวอย่างที่ 2.4.2 กฎของโคไซน์ (Law of cosines)

จากรูป 2.4.2



รูป 2.4.2

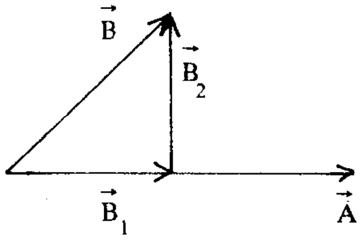
$$
\begin{aligned}
\vec{c} &= \vec{b} - \vec{a} \\
|\vec{c}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\
&= (\vec{b} - \vec{a}).(\vec{b} - \vec{a}) \\
&= \vec{b}.\vec{b} - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{a} \\
&= |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta + |\vec{a}|^2 \\
&= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta
\end{aligned}
$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.4.3 ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ ดังนั้น $\vec{B}_1 \,//\, \vec{A}$ และ $\vec{B}_2 \perp \vec{A}$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{A}.\vec{B}\,\vec{A}}{|\vec{A}|^2}$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B} - \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}$$



วิธีทำ เนื่องจาก $\vec{B}_2 \perp \vec{A}$ จะได้ว่า

$$\vec{B}_2.\vec{A} = 0$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B} - \vec{B}_1$$

$$\therefore (\vec{B} - \vec{B}_1).\vec{A} = 0$$

$$\vec{B}.\vec{A} - \vec{B}_1.\vec{A} = 0 \qquad (1)$$

จาก $\vec{B}_1 \,//\, \vec{A}$ จะได้ว่า

$$\vec{B}_1 = c\vec{A}$$

จาก (1), $\vec{B}.\vec{A} - c\vec{A}.\vec{A} = 0$

$$c = \frac{\vec{B}.\vec{A}}{|\vec{A}|^2}$$

$$\therefore \vec{B}_1 = \frac{\vec{B}.\vec{A}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}$$

และ $\vec{B}_2 = \vec{B} - \frac{\vec{B}.\vec{A}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}$ **ตอบ**

ให้ $\vec{A} = (a_1,a_2,a_3) \neq \vec{0}$, $\vec{B} = (b_1,b_2,b_3) \neq \vec{0}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ แล้ว

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \qquad \text{------------ (2.4.2)}$$

ตัวอย่างที่ 2.4.4 จงหา cos θ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A} = (2,4,6)$ และ $\vec{B} = (1,-3,2)$

วิธีทำ

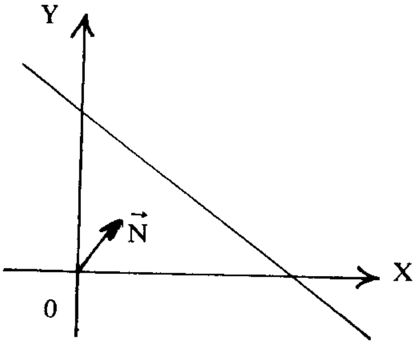
$$\cos\theta = \frac{(2)(1) + (4)(-3) + (6)(2)}{\sqrt{4+16+36}\ \sqrt{1+9+4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{56}\ \sqrt{14}}$$

$$= \frac{1}{14}$$

ตอบ

ในระนาบ สมการเส้นตรง คือ $ax + by + c = 0$ ถ้าให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $ax + by + c = 0$ แล้ว $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ดังรูป 2.4.3

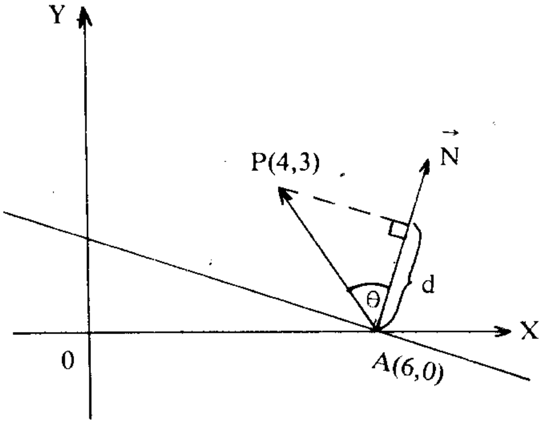


รูป 2.4.3 $ax+by+c = 0$

ตัวอย่างที่ 2.4.5 จงหา $\vec{N}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - 5y + 7 = 0$

วิธีทำ $\vec{N} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.4.6 จงใช้วิธีการของเวกเตอร์ หาระยะทางจากจุด (4,3) ไปยังเส้นตรง $x + 3y - 6 = 0$



เส้นตรงที่กำหนดให้ตัดแกน X ที่ A(6,0) ที่จุด A ลากเวกเตอร์ $\vec{N}$ ให้ตั้งฉากกับเส้นตรงนี้ และได้ว่า

$$\vec{N} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

ลากเวกเตอร์ $\vec{AP}$ และ $\vec{AP} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

ระยะทางจากเส้นไปยัง P คือ $d = |\vec{AP}| \cos\theta$

เนื่องจาก $\vec{N}.\vec{AP} = |\vec{N}|\,|\vec{AP}| \cos\theta$

$$= |\vec{N}|d$$

ดังนั้น $d = \dfrac{\vec{N}.\vec{AP}}{|\vec{N}|}$

$$= \frac{(1)(-2) + (3)(3)}{\sqrt{1+9}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{10}}$$ **ตอบ**

ให้ $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ และ α, β, γ เป็นมุมดังรูป 2.4.4 เรียก cos α, cos β, cos γ ว่า ไดเรคชัน โคโซน์ของ $\vec{A}$

เนื่องจาก $\vec{A}.\vec{i} = |\vec{A}| \cos \alpha$

$a = |\vec{A}| \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{A}|}$

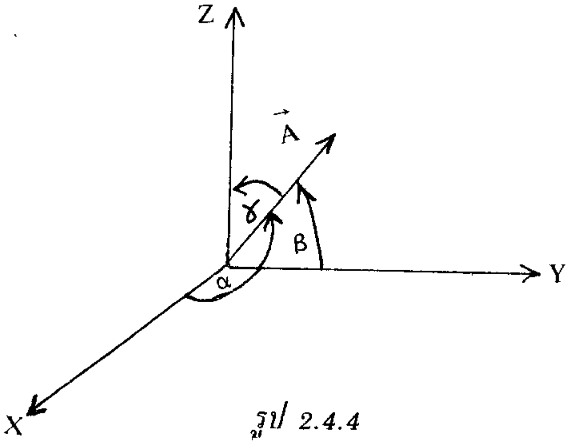
ในทำนองเดียวกัน $\cos \beta = \frac{b}{|\vec{A}|}$

$\cos \gamma = \frac{c}{|\vec{A}|}$

และจาก $\vec{U}_{\vec{A}} = \frac{a\vec{i}}{|\vec{A}|} + \frac{b\vec{j}}{|\vec{A}|} + \frac{c\vec{k}}{|\vec{A}|}$

$= \cos \alpha\ \vec{i} + \cos\ \beta\ \vec{j} + \cos \gamma\ \vec{k}$

นั่นคือ ไดเรคชัน โคไซน์ของ $\vec{A}$ เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\vec{A}$



รูป 2.4.4

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหา m ที่ทำให้ $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ตั้งฉากกัน
2. จงหามุมระหว่าง $\vec{A} = \vec{i} - \vec{j}$ และ $\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$
3. ให้ $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ และ $\vec{B} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$ จงหา $\vec{A}.\vec{B}$
4. จงหาโคไซน์ของมุมระหว่าง $\vec{A} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ และ $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
5. ให้ $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ และ $\vec{B} = \vec{j} - \vec{k}$ จงหา
   - ก. $|\vec{B}|$
   - ข. $\vec{U}_{\vec{B}}$
   - ค. $\text{comp}_{\vec{B}}\vec{A}$
   - ง. $\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A}$
   - จ. $\vec{A}.\vec{i}, \vec{A}.\vec{j}, \vec{A}.\vec{k}$
   - ฉ. ไดเรคชัน โคไซน์ ของ $\vec{A}$
6. ให้ $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{B} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ จงหา
   - ก. $\text{comp}_{\vec{A}}\vec{B}$
   - ข. $\text{proj}_{\vec{A}}\vec{B}$
   - ค. $\text{comp}_{\vec{B}}\vec{A}$
   - ง. $\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A}$
7. จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเส้น $3x - 7y + 5 = 0$
8. จงใช้วิธีการของเวกเตอร์หาระยะทางจากจุด (1,6) ไปยังเส้นตรง $3x - 2y - 9 = 0$

2.5 ผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์ (Vector or cross product of vectors)

ให้ $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

ผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n}\,|\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta\ ,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

$\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทิศทางของ $\vec{n}$ ไปตามระบบมือขวา

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 2.5.1 ให้ $\vec{A} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{B} = \vec{j} + 2\vec{k}$ จงหา $\vec{A} \times \vec{B}$

วิธีทำ

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$ **ตอบ**

ทฤษฎีบทที่ 2.5.1 1. $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta$

2. ก. $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ และ $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{B}$

ข. ถ้า $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{0}$ แล้ว $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B})$ เป็น independent ในระบบมือขวา

ข้อสังเกต $|\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta = 0$ ก็ต่อเมื่อ $|\vec{A}| = 0, |\vec{B}| = 0, \theta = 0^\circ$ หรือ ¶

ทฤษฎีบทที่ 2.5.2 $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็น dependent

เนื่องจาก $\sin 0^\circ = 0$

ถ้า $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ แล้ว $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$

และถ้า $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$ แล้ว

$\vec{A} = \vec{0}$ หรือ $\vec{B} = \vec{0}$ หรือ $\vec{A} \,//\, \vec{B}$

ตัวอย่างที่ 2.5.2 จงหา $\vec{U}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

วิธีทำ

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(2+1) - \vec{j}(4-1) + \vec{k}(-2-1)$$

$$= 3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{9+9+9}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$\vec{U} = \frac{3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}}$$

$-\vec{U} = \dfrac{-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ ก็เป็นเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ **ตอบ**

ทฤษฎีบทที่ 2.5.3 ผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

   Anticommutative law หรือ Shew-symmetry law

2. $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$ กฎการกระจาย

3. $(m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A}\times(m\vec{B})$

   $= m(\vec{A}\times\vec{B})$

   $= (\vec{A}\times\vec{B})m$

4. $\vec{A}\times\vec{A} = \vec{0}$

หมายเหตุ ผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์ ไม่เพียงแต่ไม่คล้องตามกฎการสลับที่เท่านั้น ยังไม่คล้องตามกฎการจัดหมู่ด้วย นั่นคือ

$$\vec{A} \times (\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B}) \times\vec{C}$$

$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

หรือจากตาราง

×	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

ตัวอย่างที่ 2.5.3 ให้ $\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

$\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

จงหา $\vec{A}.\vec{B}$ และ $\vec{A}\times\vec{B}$

วิธีทำ $\vec{A}.\vec{B} = (2)(1) + (4)(-3) + (6)(2)$

$= 2$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \vec{i}(8+18) - \vec{j}(4-6) + \vec{k}(-6-4)$

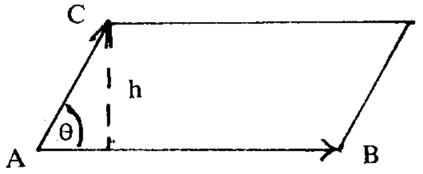
$= 26\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k}$ **ตอบ**

ทฤษฎีบทที่ 2.5.4 สี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมี AB และ AC เป็นด้านประชิด จะมีพื้นที่ $= |\vec{AB}\times\vec{AC}|$ และพื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$

พิสูจน์ จากรูป 2.5.1 จะเห็นว่า พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ

$|\vec{AB}|h = |\vec{AB}|\ |\vec{AC}| \sin\theta$

$= |\vec{AB}\times\vec{AC}|$



รูป 2.5.1

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = ครึ่งหนึ่งของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

$= \frac{1}{2}\ |\vec{AB}\times\vec{AC}|$

ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 2.5.4 จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC โดยมี $A(-2,1,3)$, $B(1,-1,1)$, $C(3,-2,4)$

วิธีทำ

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

จากทฤษฎีบทที่ 2.5.4 จะได้ว่า

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2-6) - \vec{j}(3+10) + \vec{k}(-9+10)$$

$$= -8\vec{i} - 13\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{64 + 169 + 1}$$

$$= \sqrt{234}$$

$$= 3\sqrt{26}$$

$\therefore$ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \dfrac{3\sqrt{26}}{2}$ **ตอบ**

เอกลักษณ์ลากรานจ์ (Lagrange's identity)

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 \, |\vec{B}|^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2$$

หมายเหตุ ถ้า $\vec{a} \neq \vec{0}$ ในสมการ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$$

แล้ว $\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$

$$\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$

สามารถสรุปว่า $\vec{a} \,/\!/\, (\vec{b} - \vec{c})$ หรือ $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

ไม่สามารถตัด $\vec{a}$ ทิ้งไป เพื่อให้ได้ว่า

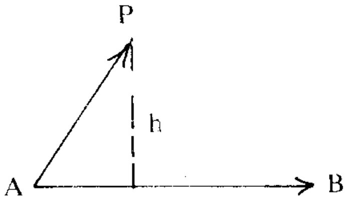
$$\vec{b} = \vec{c}$$

ตัวอย่างที่ 2.5.5 จงหาระยะทางระหว่างจุด P(2, −1,3) กับเส้นที่เชื่อมจุด A(−7, −2,7) และ B(1,2,5)

วิธีทำ จากทฤษฎีบทที่ 2.5.4 จะได้ว่า

$$= \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|}$$

ในที่นี้ เขียนรูปคร่าว ๆ ดังนี้



$$\vec{AP} = 9\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{AB} = 8\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{64 + 16 + 4}$$

$$= \sqrt{84}$$

$$= 2\sqrt{21}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด P และเส้นที่เชื่อมจุด A และจุด B คือ

$$h = \frac{|\vec{AP} \times \vec{AB}|}{|\vec{AB}|}$$

$$\vec{AP} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 1 & -4 \\ 8 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2+16) - \vec{j}(-18+32) + \vec{k}(36-8)$$

$$= 14\vec{i} - 14\vec{j} + 28\vec{k}$$

$$= 14(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$|\vec{AP} \times \vec{AB}| = 14\sqrt{1 + 1 + 4}$$

$$= 14\sqrt{6}$$

$$h = \frac{14\sqrt{6}}{2\sqrt{21}}$$

$$= \sqrt{14}$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 2.5

1. ให้ $\vec{A} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{C} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ จงหา
   - ก. $\vec{A} \times \vec{B}$
   - ข. $\vec{B} \times \vec{A}$
   - ค. $\vec{A} \times \vec{C}$
   - ง. $\vec{C} \times \vec{B}$
2. จงหาเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$
3. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC โดยมี $A(1,-2,3)$, $B(3,1,2)$, $C(2,3,-1)$
4. จงหาระยะทางระหว่างจุด $P(1,2,3)$ กับเส้นที่เชื่อมจุด $A(3,2,-2)$ และ $B(4,1,2)$
5. จงหาระยะทางระหว่างจุด $Q(4,2,-1)$ กับเส้นที่เชื่อมจุด $P(1,-2,3)$ และ $R(2,-1,1)$
6. จงใช้วิธีการของเวกเตอร์ แสดงว่า

$$\frac{\sin\alpha}{|a|} = \frac{\sin\beta}{|b|} = \frac{\sin\gamma}{|c|}$$

   (กฎของไซน์ (law of sines))

7. ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$ แล้ว จงแสดงว่า
   $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$
8. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$
9. จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุด $A(1,-1,0)$ $B(2,1,-1)$ และ $C(-1,1,2)$

2.6 การคูณเวกเตอร์สามเวกเตอร์ หรือมากกว่าสามเวกเตอร์

(Products of three or more vectors)

การคูณเวกเตอร์สามเวกเตอร์ สามารถทำได้ดังนี้
$(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$ หรือ $\vec{A}.\ \vec{B}\times\vec{C}$ หรือ $\vec{A}\ \times(\vec{B}\times\vec{C})$ โดยทั่วไป

$$(\vec{A}.\vec{B})\vec{C} \neq \vec{A}(\vec{B}.\vec{C})$$

Triple scalar productหรือ mixed product หรือ box product ของ $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ แทนด้วย

$$\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$$

ให้
$$\begin{aligned}\vec{A} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\\ \vec{B} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\\ \vec{C} &= c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}).\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2) - a_2(c_3b_1-c_1b_3) + a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

จากคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ จะได้ว่า

$$\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C} = \vec{C}.\vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}.\vec{C}\times\vec{A} = -(\vec{B}.\vec{A}\times\vec{C}) = -(\vec{C}.\vec{B}\times\vec{A}) = -(\vec{A}.\vec{C}\times\vec{B})$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}.\vec{C}$$

และใช้สัญลักษณ์ $\left[\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}\right]$ แทน triple scalar product นั่นคือ

$$\left[\vec{A}\vec{B}\vec{C}\right] = \vec{A}.\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}.\vec{C}$$

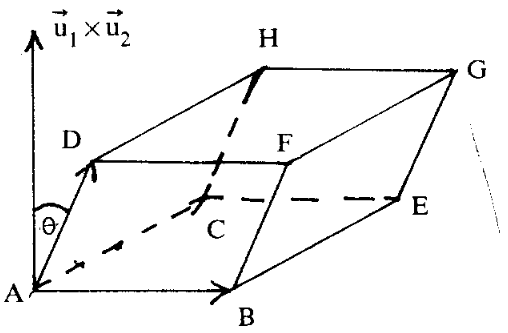
ทฤษฎีบทที่ 2.6.1 $\left[\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}\right] = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ เป็น dependent

ทฤษฎีบทที่ 2.6.2 ให้ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ และ $\vec{u}_3$ เป็นเวกเตอร์ และจุด A,B,C,D เป็นจุดที่กำหนดให้ โดยที่

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}_1,\ \overrightarrow{AC} = \vec{u}_2,\ \overrightarrow{AD} = \vec{u}_3$$

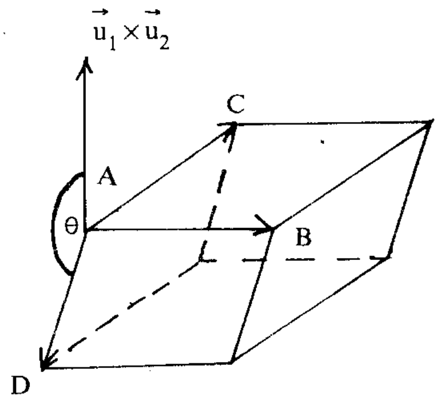
แล้ว

$|\vec{u}_1\times\vec{u}_2.\vec{u}_3|$ คือ ปริมาตรของ parallelepiped (รูปทรงหลายเหลี่ยมซึ่งมี 6 หน้า และหน้าตรงข้ามกันเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เท่ากัน) ที่มีจุดมุมจุดหนึ่งอยู่ที่จุด A ดูรูป 2.6.1 และรูป 2.6.2



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

รูป 2.6.1



$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

รูป 2.6.2

ปริมาตรนี้ = 0 ก็ต่อเมื่อ จุด A,B,C,D อยู่บนระนาบเดียวกัน (coplanar)

จากรูป 2.6.1 เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 . \vec{u}_3 > 0$ และเมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ดังรูป 2.6.2 จะได้ว่า $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 . \vec{u}_3 < 0$

นั่นคือ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ทำให้เกิด positive triple ก็ต่อเมื่อ $u_1 \times \vec{u}_2 . \vec{u}_3 > 0$

Triple vector product ของ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ แทนด้วย

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}, \ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

1. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} . \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} . \vec{B})\vec{C}$
2. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} . \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} . \vec{C})\vec{A}$

การคูณเวกเตอร์มากกว่าสามเวกเตอร์

1. $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$
2. $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = \left[\vec{A}\vec{B}\vec{D}\right]\vec{C} - \left[\vec{A}\vec{B}\vec{C}\right]\vec{D}$

   $= \left[\vec{C}\vec{D}\vec{A}\right]\vec{B} - \left[\vec{C}\vec{D}\vec{B}\right]\vec{A}$

ต่อไปนี้ ไม่มีคำจำกัดความ

$\vec{A}\vec{B}$, $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$, $\vec{A}\times(\vec{B}.\vec{C})$

ตัวอย่างที่ 2.6.1 จงพิสูจน์ว่า

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{B}.\vec{C})(\vec{A}.\vec{D})$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D}) &= \vec{A}.\left[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})\right]\\ &= \vec{A}.\left[(\vec{B}.\vec{D})\vec{C}-(\vec{B}.\vec{C})\vec{D}\right]\\ &= (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{B}.\vec{C})(\vec{A}.\vec{D})\end{aligned}$$

ซ.ต.พ.

จาก $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{B}.\vec{C})(\vec{A}.\vec{D})$ ถ้าให้ $\vec{C} = \vec{A}$ และ $\vec{D} = \vec{B}$ แล้ว จะได้ว่า

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{A}.\vec{A})(\vec{B}.\vec{B}) - (\vec{A}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{B})$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2\,|\vec{B}|^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2$$

ตัวอย่างที่ 2.6.2 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ยาโคบี้ (Jacobi identity)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{0}$$

พิสูจน์ $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$ ---------------------------- (1)

$\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) = (\vec{B}.\vec{A})\vec{C} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$ ---------------------------- (2)

$\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{C}.\vec{B})\vec{A} - (\vec{C}.\vec{A})\vec{B}$ ---------------------------- (3)

(1) + (2) + (3),

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{0}$

ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 2.6.3

ให้ $\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{C} = -3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

ก. จงหา $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

ข. จงหา $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

ค. จงแสดงว่า $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$

วิธีทำ

ก.

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-1-1) - \vec{j}(-2+3) + \vec{k}(2+3)$$

$$= -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(10-3) - \vec{j}(10-6) + \vec{k}(-2+4)$$

$$= 7\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

ข.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(2+3) - \vec{j}(2+6) + \vec{k}(2-4)$$

$$= 5\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -8 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(8+2) - \vec{j}(-5-6) + \vec{k}(5-24)$$

$$= 10\vec{i} + 11\vec{j} - 19\vec{k}$$

ค.

$$\vec{A}.\vec{C} = -6 + 2 + 3$$

$$= -1$$

$$(\vec{A}.\vec{C})\vec{B} = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B}.\vec{C} = -6 + 1 - 1$$

$$= -6$$

$$(\vec{B}.\vec{C})\vec{A} = -6(2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k})$$

$$= -12\vec{i} - 12\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$(\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A} = (-2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) - (-12\vec{i} - 12\vec{j} + 18\vec{k})$$

$$= 10\vec{i} + 11\vec{j} - 19\vec{k}$$

$$\therefore (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.6.4 จงหาปริมาตรของ parallelepiped ซึ่งมีด้าน $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ และ $|\vec{c}|$ โดยที่

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

วิธีทำ

ปริมาตรที่ต้องการคือ $|\vec{a} \times \vec{b}.\vec{c}|$

$$\vec{a} \times \vec{b}.\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1) + 3(2+3) + 4(-1-6)$$

$$= 6 + 15 - 28$$

$$= -7$$

$\therefore$ ปริมาณที่ต้องการคือ $|\vec{a} \times \vec{b}.\vec{c}|$

$$= |-7|$$

$$= 7$$

แบบฝึกหัด 2.6

1. ให้ $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ จงหา

ก. $(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$

ข. $\vec{A}(\vec{B}.\vec{C})$

ค. $\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C}$

ง. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

จ. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

ฉ. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$

2. จงหาปริมาตรของ parallelepiped ซึ่งมีด้าน $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $|\vec{C}|$ เป็นขอบโดยที่

$$A = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$B = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{C} = \vec{i}\ t\ \vec{k}$$

3. จงหาปริมาตรของ parallelepiped ซึ่งมี AB, AC และ AD เป็นขอบ โดยที่ A(3,1,−2), B(1,2,1), C(2,−1,3), D(4,3,−7)

2.7 สมการของเส้นตรงและระนาบ (Equations of lines and planes)

เส้นตรง สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ คือ

$$\overrightarrow{P_1P} = t\vec{V}$$

$$(x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} + (z-z_1)\vec{k} = t(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= ta \\ y - y_1 &= tb \\ z - z_1 &= tc \end{aligned}\right\} \text{-------------------}(2.7.1)$$

สมการ (2.7.1) เรียกว่า สมการพาราเมตริกของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{V}$

เมื่อกำจัด t จะได้ว่า

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

ซึ่งคือสมการคาร์ทีเซียนของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{V}$

ถ้ากำหนดสมการเส้นตรงให้ ก็สามารถทราบว่า เส้นตรงนั้นขนานกับเวกเตอร์ใด โดยพิจารณาจากไดเรคชัน นัมเบอร์ของเส้นตรงนั้น

ตัวอย่างที่ 2.7.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1,2,3) และขนานกับ $\vec{A} = -5\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$

วิธีทำ สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-7}$$ **ตอบ**

ระนาบ (1) สมการระนาบที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ คือ

$$\vec{P_1P}.\vec{N} = 0$$

$$\{(x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} + (z-z_1)\vec{k}\}.(A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}) = 0$$

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

ถ้ากำหนดสมการระนาบให้ ก็สามารถทราบว่า ระนาบนั้นตั้งฉากกับเวกเตอร์ใด โดยพิจารณาจาก แอตติจูด นัมเบอร์ของระนาบนั้น

ตัวอย่างที่ 2.7.2 จงหาสมการที่ผ่านจุด (2,-1,3) และตั้งฉากกับ $\vec{N} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

วิธีทำ สมการระนาบที่ต้องการคือ

$$3(x-2) - (y+1) + (z-3) = 0$$

$$3x - 6 - y - 1 + z - 3 = 0$$

$$3x - y + z - 10 = 0$$

ตอบ

ระยะทางระหว่างจุด P_0 กับระนาบที่มีสมการเป็น $\vec{P_1P}.\vec{N} = 0$ คือ

$$d = \frac{|\vec{P_1P_0}.\vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

ตัวอย่างที่ 2.7.3 จงหาระยะทางจากจุด (-1,3,5) ไปยังระนาบ $3x - y + z - 10 = 0$

วิธีทำ จากสมการระนาบ $3x - y + z - 10 = 0$ จะเห็นจุด (0, 0, 10) อยู่บนระนาบ

ดังนั้น $\vec{P_1P_o} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$

$$\vec{N} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$d = \frac{|-3 - 3 - 5|}{\sqrt{9 + 1 + 1}}$$

$$= \frac{|-11|}{\sqrt{11}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$$ **ตอบ**

(2) สมการระนาบที่จุด A, B, C คือ

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$$

ตัวอย่างที่ **2.7.4** จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด A(2, −3,4), B(1,2, −1) และ C(−3,2,2)

วิธีทำ ให้ P(x,y,z) เป็นจุดใด ๆ บนระนาบที่ต้องการ

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

ดังนั้น สมการระนาบ คือ

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = (x-2)\vec{i} + (y+3)\vec{j} + (z-4)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = -5\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-4 \\ -1 & 5 & -5 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)(-10+25) - (y+3)(2-25) + (z-4)(-5+25)$$

$$= 15x - 30 + 23y + 69 + 20z - 80$$

$$= 15x + 23y + 20z - 41$$

.·. สมการระนาบคือ

$$15x + 23y + 20z - 41 = 0$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.7.5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,1,2)$ และขนานกับระนาบ $2x - y + 3z = 1$ และ $x + 3y - z = 3$

วิธีทำ ให้ $\vec{N}_1$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบ $2x - y + 3z = 1$

ให้ $\vec{N}_2$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบ $x + 3y - z = 3$

ดังนั้น $\vec{N}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

และ $\vec{N}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ คือเวกเตอร์ที่ขนานกับระนาบทั้งสอง และเส้นตรงที่ต้องการจะขนานกับ $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ ด้วย

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(1-9) - \vec{j}(-2-3) + \vec{k}(6+1)$$

$$= -8\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ

$$\frac{x+1}{-8} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{7}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.7.6 จงหาสมการระนาบที่มีเส้นตรง $l_1 : \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{4}$ อยู่บนระนาบ

และระนาบนี้ขนานกับ l_2:

$$x-2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$$

วิธีทำ l_1 ขนานกับ $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

l_2 ขนานกับ $\vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

ระนาบที่ต้องการขนานกับ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$

ระนาบที่ต้องการตั้งฉากกับ $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ และผ่านจุดที่อยู่บน l_1 คือ (4,3,1)

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i(-2-12) - j(-3-4) + \vec{k}(9-2)$$

$$= -14\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}$$

สมการระนาบคือ

$$-14(x-4) + 7(y-3) + 7(z-1) = 0$$

$$2(x-4) - (y-3) - (z-1) = 0$$

$$2x - 8 - y + 3 - z + 1 = 0$$

$$2x-y-z-4 = 0$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.7.7 จงหามุมระหว่างระนาบ $3x - 2y + z - 4 = 0$ และ $x + 4y - 3z - 2 = 0$

วิธีทำ มุมระหว่างระนาบ คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ตั้งฉากของระนาบทั้งสอง

$\vec{N}_1$ ตั้งฉากกับระนาบ $3x - 2y + z - 4 = 0$

$\vec{N}_2$ ตั้งฉากกับระนาบ $x + 4y - 3z - 2 = 0$

$$\therefore \vec{N}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{N}_2 = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 . \vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}$$

$$= \frac{3-8-3}{\sqrt{9+4+1}\,\sqrt{1+16+9}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{91}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{91}}\right)$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.7.8 จงหาเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นที่เกิดจากการตัดกันของระนาบทั้งสองในตัวอย่างที่ 2.7.7

วิธีทำ **เวกเตอร์ที่ต้องการคือ** $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(6-4) - \vec{j}(-9-1) + \vec{k}(12+2)$$

$$= 2\vec{i} + 10\vec{j} + 14\vec{k}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.7.9 จงแสดงว่า เส้น $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ ขนานกับระนาบ $x - 2y + z = 6$

วิธีทำ เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบ $x - 2y + z = 6$ คือ $\vec{N} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

เวกเตอร์ที่ขนานกับเส้น $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ คือ $\vec{V} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{N}.\vec{V} = (1)(2) + (-2)(3) + (1)(4)$$

$$= 2 - 6 + 4 = 0$$

แสดงว่า เวกเตอร์ $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{V}$

ดังนั้น เส้น $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ ขนานกับระนาบ $x - 2y + z = 6$ **ตอบ**

ข้อสังเกต 1. สมการกำลัง 1 ใน 3 มิติ แทน ระนาบ

2. สมการกำลัง 1 ที่มีตัวแปรเพียง 2 ตัว จะแทนระนาบที่ขนานกับแกนพิกัด เช่น

$2x + 3y = 6$ คือระนาบที่ขนานกับแกน Z

แบบฝึกหัด 2.7

1. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2,-1,3) และขนานกับ $\vec{V} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}$
2. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (-5,0,7) และขนานกับเส้นตรง $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{8}$
3. จงหาสมการพาราเมตริกของเส้นตรงที่ผ่านจุด A(2,1,-3) และ ขนานกับ $\overrightarrow{CD}$ โดยที่ C(2,1,0), D(-4,5,9)
4. ให้ A(1,2,2) B(3,1,2), C(-1,3,2), D(2,-1,0) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (0,0,0) และตั้งฉากกับเส้น AB และ CD
5. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด (2,1,6) และตั้งฉากกับ $\vec{N} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
6. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด A(0,0,1), B(0,1,0), C(1,1,1)
7. จงหาระยะทางจากจุด (3,2,-1) ไปยังระนาบ $5x + 7y + 10z - 8 = 0$ โดยวิธีเวกเตอร์
8. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด A(1,-2,0) และตั้งฉากกับเส้นตรง $x = 2+t$, $y = 3-2t$, $z = 4+7t$
9. จงหามุมระหว่างระนาบ $3x - 2y + z - 5 = 0$ และ $2x + 3y - z + 1 = 0$
10. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งเกิดจากการตัดกันของระนาบทั้ง 2 ในข้อ 9
11. จงหาสมการระนาบที่ผ่าน AB และ CD โดยที่ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{j} - \vec{k}$, A(7,-2,3), C(5,-1,1)
12. จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นขนาน AB และ CD โดยที่ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, A คือ (1,2,2) และ C คือ (3,0,3)