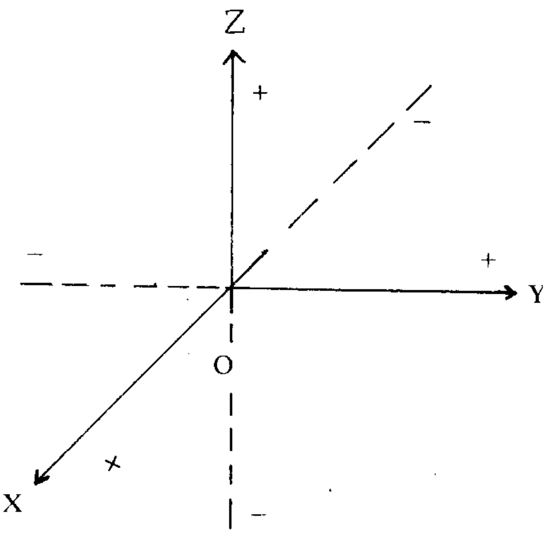
บทที่ 1
เรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ
(Solid analytic geometry)

1.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular coordinate system)

ในสามมิติ ให้เส้นที่มีทิศทาง 3 เส้น คือ แกน X แกน Y และแกน Z ต่างตัดตั้งฉากกันที่จุด ๆ หนึ่ง ให้ชื่อว่าจุดกำเนิด (origin) แทนด้วย O เรียกเส้นทั้ง 3 นี้ว่า แกนพิกัด (coordinate axes) ดังรูป 1.1.1



รูป 1.1.1

จากความจริงที่ว่าเส้นตรง 2 เส้นตัดกันย่อมเกิดเป็นระนาบ 1 ระนาบ ดังนั้น แกนพิกัดทั้ง 3 ตัดกัน จึงทำให้ได้ระนาบ 3 ระนาบ แต่ละระนาบเรียกว่า ระนาบพิกัด (coordinate plane) และเรียกชื่อตามแกน 2 แกนที่ทำให้เกิดระนาบนั้น คือ

ระนาบที่เกิดจากแกน X และแกน Y ตัดกัน เรียกว่า ระนาบ XY
ระนาบที่เกิดจากแกน X และแกน Z ตัดกัน เรียกว่า ระนาบ XZ
ระนาบที่เกิดจากแกน Y และแกน Z ตัดกัน เรียกว่า ระนาบ YZ

บนแกน X มีระบบพิกัด 1 มิติ (one dimensional coordinate system) ที่มี O เป็นจุดกำเนิด สำหรับแกน Y และแกน Z ก็เช่นเดียวกัน

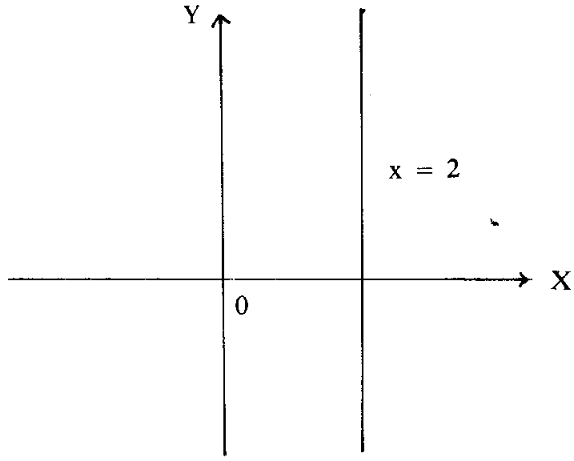
ระนาบพิกัดทั้ง 3 แบ่งสามมิติออกเป็น 8 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า อัฐม-ภาค (octant)

เส้นทั้งหลายที่ขนานกับแกน X จะตั้งฉากกับระนาบ YZ
เส้นทั้งหลายที่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกับระนาบ XZ
เส้นทั้งหลายที่ขนานกับแกน Z จะตั้งฉากกับระนาบ XY

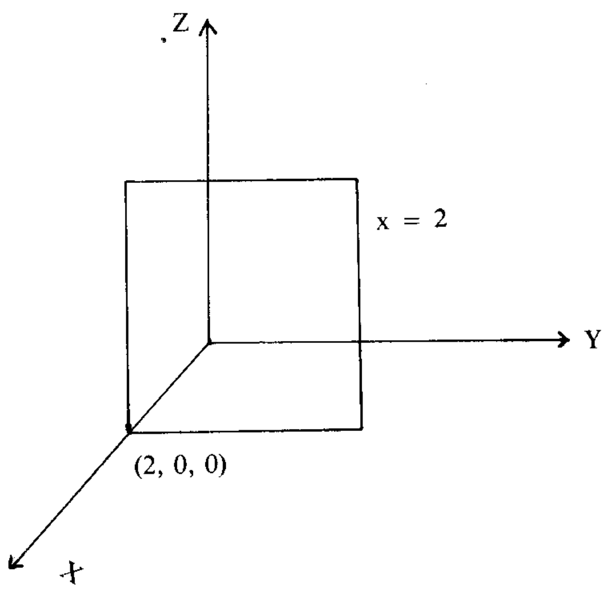
ระนาบทั้งหลายที่ขนานกับระนาบ YZ จะตั้งฉากกับแกน X
ระนาบทั้งหลายที่ขนานกับระนาบ XZ จะตั้งฉากกับแกน Y
ระนาบทั้งหลายที่ขนานกับระนาบ XY จะตั้งฉากกับแกน Z

จากสิ่งที่ได้ศึกษามาแล้ว จะได้ว่า แต่ละจุดบนเส้นตรงจะสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one correspondence) กับจำนวนจริง และแต่ละจุดในระนาบจะสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับคู่อันดับ (ordered pair) ของจำนวนจริง ในทำนองเดียวกัน แต่ละจุดในสามมิติจะสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับอันดับของจำนวนจริง 3 จำนวน เรียกสิ่งที่กล่าวมาข้างต้นว่าระบบพิกัดฉากหรือระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system)

ในระนาบ สมการ $x = 2$ คือเส้นตรงที่ขนานกับ แกน Y และอยู่ทางขวามือของแกน Y โดยห่างจากแกน Y 2 หน่วย ดังรูป 1.1.2 แต่ในสามมิติ สมการ $x = 2$ คือระนาบที่ขนานกับระนาบ YZ ตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่ (2, 0, 0) ดังรูป 1.1.3



รูป 1.1.2



รูป 1.1.3

ในทำนองเดียวกัน สมการ $x = a,$

$y = b$

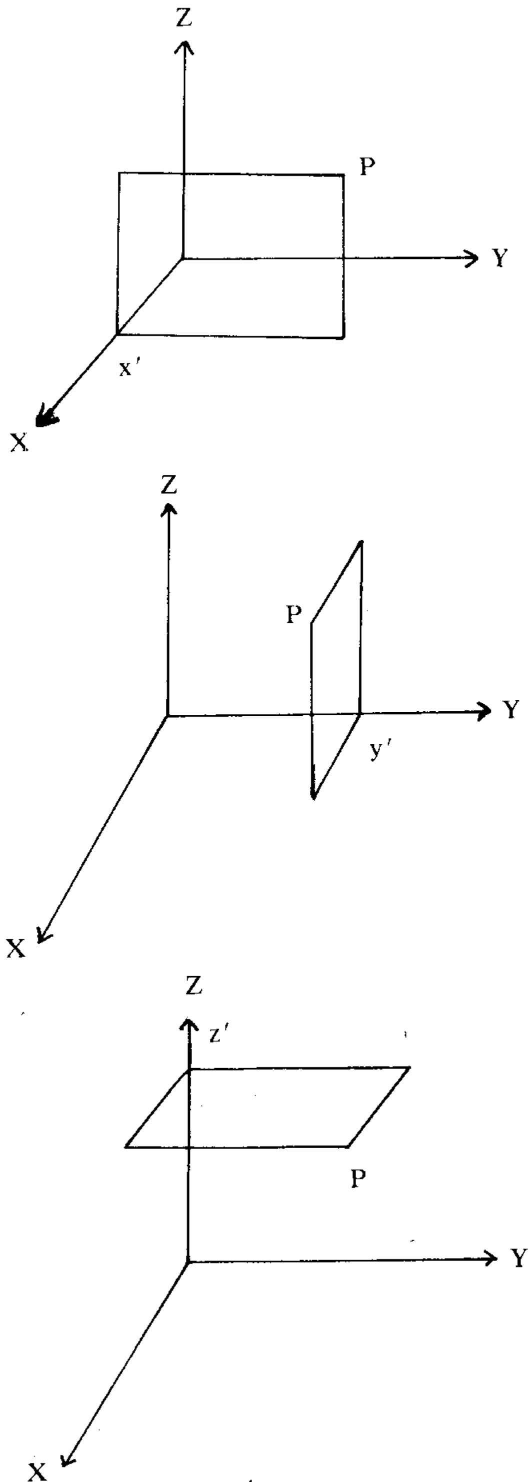
หรือ $z = c$

ก็แทนระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด (a, b, c เป็นจำนวนจริง)

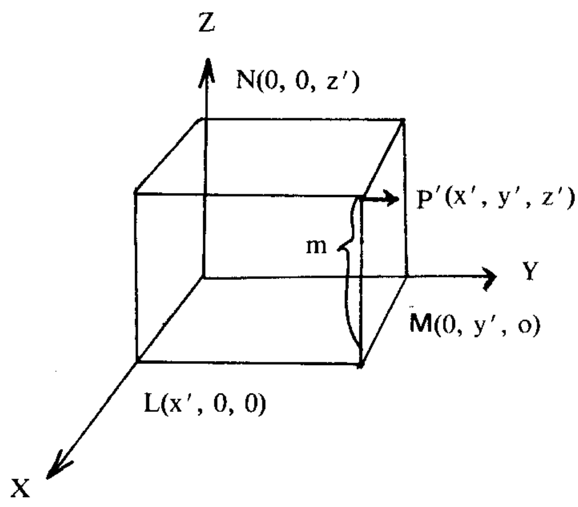
วิธีเขียนจุด P ซึ่งเป็นจุดใด ๆ ในสามมิติ

จากกฎของเรขาคณิต เรื่องระนาบมีว่า เมื่อกำหนดจุดและเส้นตรงให้ จะได้ว่ามีระนาบเพียงระนาบเดียวที่ผ่านจุด และตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้

เมื่อกำหนดจุด P ขึ้นมาก็จะมีระนาบเพียงระนาบเดียวซึ่งผ่านจุด P และตั้งฉากกับแกน X,มีระนาบเพียงระนาบเดียวซึ่งผ่านจุด P และตั้งฉากกับแกน Y และมีระนาบเดียวที่ผ่านจุด P และตั้งฉากกับแกน Z ดังรูป 1.1.4



รูป 1.1.4



รูป 1.1.5

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดจุด (x', y', z') จะมีจุด P' เพียงจุดเดียวเท่านั้นที่มี (x', y', z') เป็นจุดร่วม ความจริงแล้ว

มีระนาบเพียงระนาบเดียวที่ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด L
มีระนาบเพียงระนาบเดียวที่ตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด M
มีระนาบเพียงระนาบเดียวที่ตั้งฉากกับแกน Z ที่จุด N

ระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X กับระนาบที่ตั้งฉากกับแกน Y ไม่ขนานกัน ถ้าขนานกันแล้วแสดงว่า แกน X และแกน Y เป็นแกนเดียวกันหรือระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X และผ่านจุด P ย่อมมีเพียงระนาบเดียว

ดังนั้น เมื่อไม่ขนานกันแล้ว ระนาบทั้งสองต้องตัดกันเป็นเส้นตรง m เส้น เส้นตรง m นี้ ตั้งฉากกับระนาบ XY ดังรูป 1.1.5 และเนื่องจากเส้นตรง m ตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุด P' และขนานกับแกน Z ดังนั้นเส้นตรง m ต้องตัดระนาบนี้ที่จุด P' ซึ่งจุดร่วมคือ (x', y', z') นั่นเอง

เซตของจุด	แบบของพิกัดของจุดใด ๆ ในเซต	สมการที่คล้องตามพิกัดของจุดใด ๆ ในเซต
กำเนิด	(0, 0, 0)	$x = y = z = 0$
บนแกน X	(x, 0, 0)	$y = z = 0$
บนแกน Y	(0, y, 0)	$x = z = 0$
บนแกน Z	(0, 0, z)	$x = y = 0$
บนระนาบ XY	(x, y, 0)	$z = 0$
บนระนาบ YZ	(0, y, z)	$x = 0$
บนระนาบ XZ	(x, 0, z)	$y = 0$

จากคำจำกัดความของพิกัดที่ 1 (x-coordinate) ของจุด P จะเห็นว่า จุดทั้งหลายที่อยู่บนระนาบที่ผ่านจุด P และตั้งฉากกับแกน X จะมีค่า x เหมือนกัน โดยให้ $x = x_1$ และในทางกลับกันจุดใด ๆ ที่พิกัดที่ 1 เป็น x_1 แล้ว จุดนั้นย่อมอยู่บนระนาบ $x = x_1$

อนึ่ง พิกัดของทุก ๆ จุดบนระนาบหนึ่งที่ตั้งฉากกับแกน X จะคล้องตามสมการ $x = x_1$ และในทางกลับกันจุดใด ๆ ที่คล้องตามสมการ $x = x_1$ จุดนั้นจะอยู่บนระนาบนี้

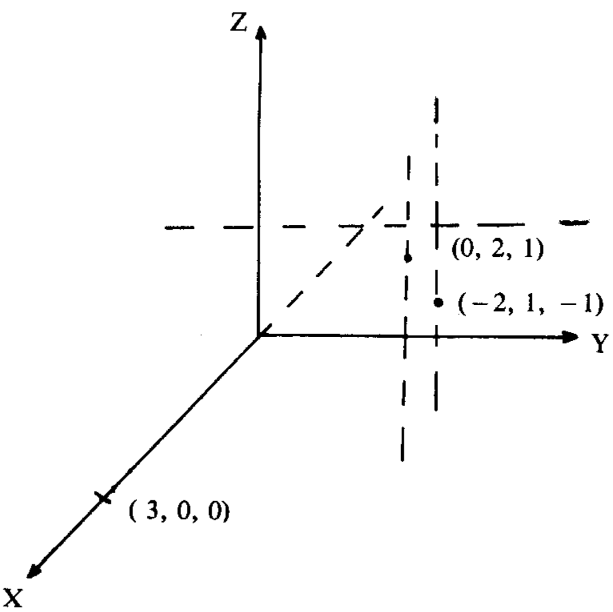
ในทำนองเดียวกัน สมการ $y = y_1$ คือสมการระนาบที่ตั้งฉากกับแกน Y ที่ $y = y_1$ และสมการ $z = z_1$ คือสมการระนาบที่ตั้งฉากกับแกน Z ที่ $z = z_1$

จากเรขาคณิตสามมิติแบบยูคลิดพบว่า ระนาบสองระนาบที่ไม่ขนานกันย่อมตัดกันเป็นเส้นตรง ดังนั้น โลกัสของจุดซึ่งคล้องตามสมการ $x = x_1$ และ $y = y_1$ เป็นเส้นตรงที่ขนาน (หรือทับ) กับแกน Z ในทางกลับกัน เส้นตรงใด ๆ ก็คือ โลกัสของสมการคู่หนึ่งในรูปข้างบนนี้

เนื่องจาก ระนาบ $x = x_1$ ขนานกับแกน Z และระนาบ $y = y_1$ ขนานกับแกน Z ดังนั้น เส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบทั้งสองนี้ย่อมขนานกับแกน Z ด้วย

เซตของจุดบน	แบบของพิกัดของจุดใด ๆ ในเซต	สมการที่คล้องตามพิกัดของจุดใด ๆ ในเซต
ระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X	(x_1, y, z)	$x = x_1$ (y และ z แปรค่า)
ระนาบที่ตั้งฉากกับแกน Y	(x, y_1, z)	$y = y_1$ (x และ z แปรค่า)
ระนาบที่ตั้งฉากกับแกน Z	(x, y, z_1)	$z = z_1$ (x และ y แปรค่า)
เส้นที่ตั้งฉากกับระนาบ XY	(x_1, y_1, z)	$x = x_1, y = y_1$ (z แปรค่า)
เส้นที่ตั้งฉากกับระนาบ XZ	(x_1, y, z_1)	$x = x_1, z = z_1$ (y แปรค่า)
เส้นที่ตั้งฉากกับระนาบ YZ	(x, y_1, z_1)	$y = y_1, z = z_1$ (x แปรค่า)

ตัวอย่างที่ 1.1.1 จงเขียนจุดต่อไปนี้ (3, 0, 0), (0, 2, 1), (-2, 1, -1)



ตัวอย่างที่ 1.1.2 โลกัสของจุดซึ่ง $x = 0$ คืออะไร

วิธีทำ โลกัสของจุดซึ่ง $x = 0$ คือ ระนาบ YZ

ตัวอย่างที่ 1.1.3 โลกัสของจุดซึ่ง $y = 0$ และ $z = 0$ คืออะไร

วิธีทำ โลกัสของจุดซึ่ง $y = 0$ และ $z = 0$ คือแกน X

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงเขียนจุดต่อไปนี้

   (5, 0, 0), (2, 2, 0), (0, 1, 1), (6, -3, 2), (-4, 2, 7) (8, -2, -5), (-2, -4, -6), (-3, 0, -7), (3, -2, -1), (1, -5, -4)

2. จากรูป 1.1.5 จงหาความยาวของเซกเมนต์ LP', MP' และ NP' ในเทอมของพิกัดของ P'

3. โลกัสของจุดซึ่ง $y = 0$ คืออะไร

4. โลกัสของจุดซึ่ง $z = 0$ คืออะไร

5. โลกัสของจุดซึ่ง $x = 0, y = 0$ คืออะไร

6. โลกัสของจุดซึ่ง $y = -2$ คืออะไร

7. โลกัสของจุดซึ่ง $x = 5, z = -3$ คืออะไร

8. โลกัสของจุดซึ่ง $y = 1, z = 7$ คืออะไร

9. แต่ละด้านของลูกบาศก์ลูกหนึ่งยาวเท่ากับ a มีจุดมุมจุดหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด และมีขอบ 3 ขอบอยู่บนแกนพิกัด โดยมีทิศทางไปทางบวกของแกนพิกัด จงหาพิกัดของจุดมุมทั้งหมด

10. จากข้อ 9 เมื่อจุดศูนย์กลางของลูกบาศก์อยู่ที่จุดกำเนิด และขอบขนานกับแกนพิกัด จงหาพิกัดของจุดมุมทั้งหมด

1.2 ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด (Distance between two points)

ให้ d เป็นระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ แล้ว

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 1.2.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด (0, 5, 0) และจุด (-1, 3, 7)

วิธีทำ

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-1-0)^2 + (3-5)^2 + (7-0)^2} \\ &= \sqrt{1+4+49} \\ &= \sqrt{54} \end{aligned}$$

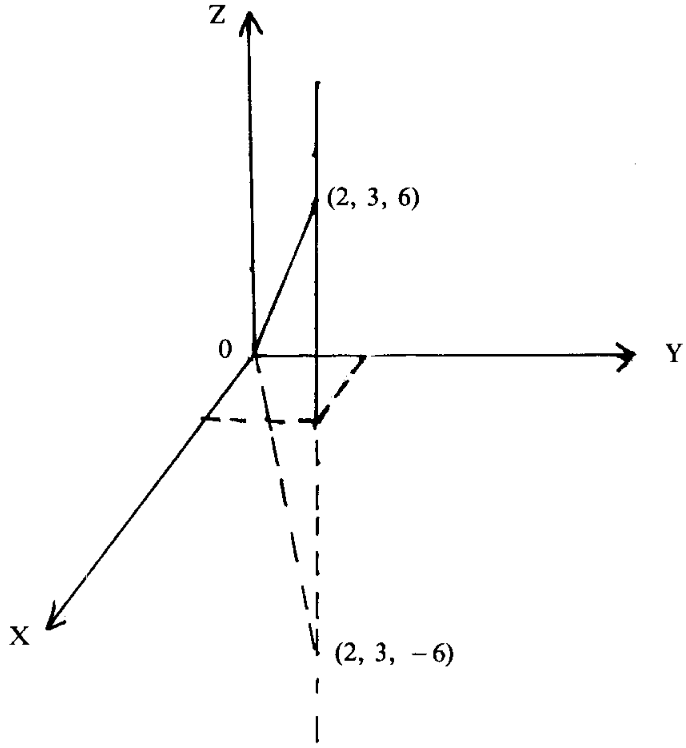
ตัวอย่างที่ 1.2.2 ให้หาจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ XY ที่จุด (2, 3) และอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทาง 7 หน่วย

วิธีทำ จุดที่อยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ XY ที่จุด (2, 3) จะมีพิกัดที่ 1 คือ 2 และพิกัดที่ 2 คือ 3

จะต้องหาค่า z ที่ทำให้ระยะทางระหว่างจุด (0, 0, 0) กับจุด P(2, 3, z) เท่ากับ 7 ดูรูป 1.2.1

$$\begin{aligned} |PO| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (z-0)^2} &= 7 \\ \sqrt{z^2 + 13} &= 7 \\ z^2 + 13 &= 49 \\ z^2 &= 36 \\ z &= \pm 6 \end{aligned}$$

$\therefore$ จุดที่ต้องการคือ (2, 3, 6) และ (2, 3, -6) **ตอบ**



รูป 1.2.1

จุดกึ่งกลาง P ของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ มีพิกัด $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ และ

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2},\ \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

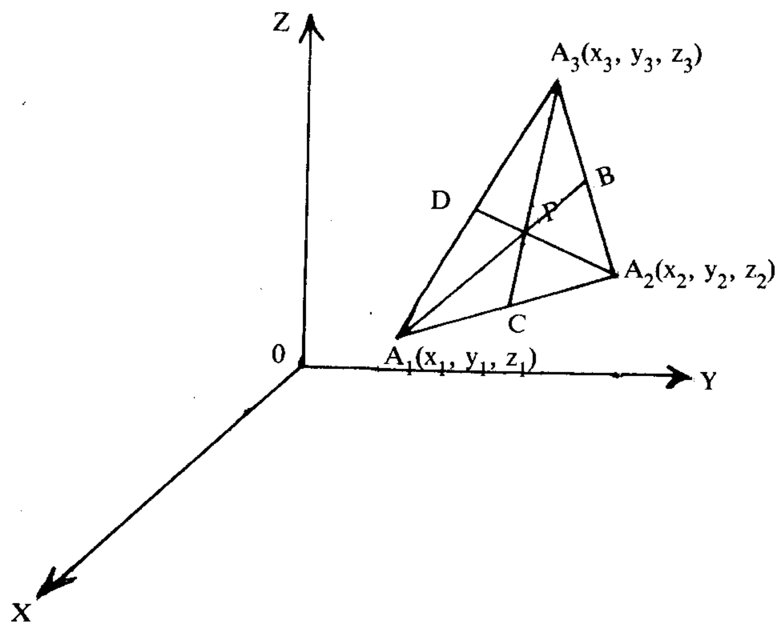
ตัวอย่างที่ 1.2.3 จงหาพิกัดของจุด Q ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงจากจุด $P_1(1, 3, 7)$ และ $P_2(0, 5, -3)$ ในอัตราส่วน 1 ต่อ 3

วิธีทำ จุดกึ่งกลาง P ของเส้นตรง P_1P_2 มีพิกัด $P(\frac{1}{2}, 4, 2)$ จุดกึ่งกลางของ P_1P มีพิกัด $Q(\frac{3}{4}, 7/2, 9/2)$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.2.4 จงพิสูจน์ว่า จุดตัดของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมใด ๆ ที่มีจุดมุมอยู่ที่ $A_1(x_1, y_1, z_1)$ $A_2(x_2, y_2, z_2)$ และ $A_3(x_3, y_3, z_3)$ มีพิกัด คือ

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

วิธีทำ



ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐานทั้งสาม

B มีพิกัดคือ $\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right)$

C มีพิกัดคือ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

D มีพิกัดคือ $\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2}\right)$

จุดตัดของเส้นมัธยฐานแบ่งเส้นมัธยฐานในอัตราส่วน 2 : 1 ($r = 2$) จะได้ว่า

$$\frac{A_1P}{PB} = \frac{A_2P}{PD} = \frac{A_3P}{PC} = \frac{2}{1}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{x_1 + r[(x_2 + x_3)/2]}{1 + r}$$

$$= \frac{x_1 + 2\ (x_2 + x_3)/2}{1 + 2}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + r\ [(y_2 + y_3)/2]}{1 + r}$$

$$= \frac{y_1 + 2\ (y_2 + y_3)/2}{1 + 2}$$

$$= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$z = \frac{z_1 + r\ [(z_2 + z_3)/2]}{1 + r}$$

$$= \frac{z_1 + 2(z_2 + z_3)/2}{1 + 2}$$

$$= \frac{z_1 + z_3 + z_3}{3}$$

ดังนั้น จุดตัดของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมใด ๆ คือ

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 1.2

จงหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้

1. (0, 0, 0), (12, 4, 3)
2. (0, 0, 0), (1, 5, 7)
3. (5, -3, 2), (7, 3, -1)
4. (1, -4, -1), (2, 4, 3)
5. (5, 1, -4), (-1, -6, 2)
6. (4, 1, 9), (2, -3, 5)
7. (5, 7, 4), (4, 2, 1)
8. (-1, 2, 3); (2, 1, 5)
9. จงแสดงว่าจุด (5, 2, 4), (7, 3, 1) และ (4, 5, 2) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่า
10. จงแสดงว่าจุด (7, -4, -6), (5, 1, -3) และ (8, 2, -5) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และหาความยาวของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมนี้ด้วย
11. จงแสดงว่าจุด (1, 6, 2), (7, 9, 4) และ (5, -6, 8) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉากและหาพื้นที่ด้วย
12. จงหาสมการของโลกัสของจุดซึ่งมีระยะทางจากจุด (-2, 1, 5) เท่ากับ 3 และพิจารณาว่าโลกัสของสมการเป็นอะไร
13. โลกัสของสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ คืออะไร
14. โลกัสของสมการ $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z + 6)^2 = 49$ คืออะไร
15. จงหาสมการของโลกัสของจุดซึ่งมีระยะทางระหว่างจุด (3, 1, -4) และจุด (7, 3, -2) เท่ากัน และโลกัสของสมการนี้คืออะไร

จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่จุดปลายเป็น A, B ดังต่อไปนี้

16. A(0, 0, 0), B(4, 9, 12)
17. A(3, 1, 2), B(7, −1, 4)

18. A(3, 7, 5), B(−3, 4, 6)

19. A(2, 8, −10), B(0, 7, 3)

20. A(6, 3, 2), B(−2, 0, −1)

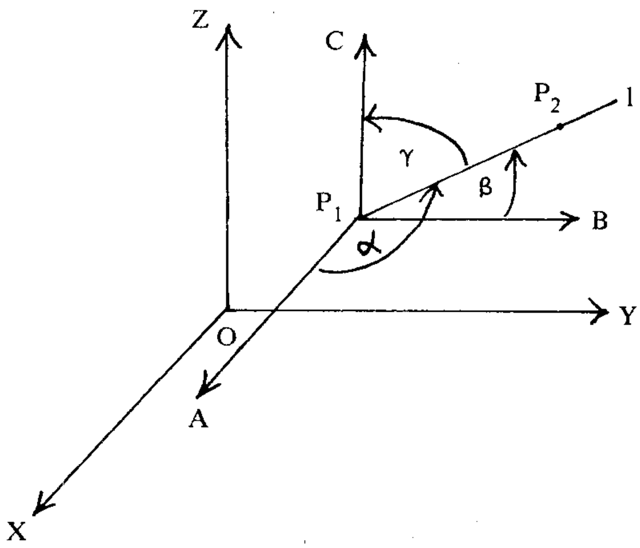
21. จงหาความยาวของเส้นมัธยฐานทั้ง 3 ของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น A(1, 2, 3), B(4, 3, 1) และ C(0, −2, −4)

1.3 ไดเรคชันโคไซน์ของเส้นที่กำหนดทิศทาง

(Direction cosines of a directed line)

ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นที่กำหนดทิศทาง l ในสามมิติ จากจุด P_1 ลากเส้น P_1A, P_1B และ P_1C ให้ขนานกับแกน X, แกน Y และแกน Z ตามลำดับ ให้ α, β และ γ เป็นมุมที่เส้นตรง l ทำกับเส้น P_1A, P_1B และ P_1C ตามลำดับ α, β และ γ เรียกว่า ไดเรคชัน แองเกิล (direction angles) ของ l

โคไซน์ของมุม α, β และ γ คือ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ เรียกว่า ไดเรคชัน โคไซน์ ของ l



รูป 1.3.1

ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง l จากรูป 1.3.1 จะได้ว่า

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d},\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d},\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d} \quad \text{......................} (1.3.1)$$

เมื่อ $d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{(x_2 - x_1)^2}{d^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{d^2} + \frac{(z_2 - z_1)}{d^2}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 \quad y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{d^2}$$

$$= \frac{d^2}{d^2} = 1$$

นั่นคือ ผลบวกของกำลังสองของไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นตรงใด ๆ มีค่าเท่ากับ 1

จากสมการ (1.3.1) ให้ P_1 เป็นจุดกำเนิด และ P_2 เป็นจุดใด ๆ คือ $P(x, y, z)$ ระยะทาง OP แทนด้วย ρ จะได้ว่า

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho},\ \cos\beta = \frac{y}{\rho},\ \cos\gamma = \frac{z}{\rho} \quad \text{..} (1.3.2)$$

เป็นไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นที่ผ่านจุดกำเนิด และจุด P โดยมีทิศทางจาก O ไปยัง P

ถ้า k เป็นเส้นที่ไม่กำหนดทิศทาง จะมีมุม 2 มุมที่ k ทำกับแกน X คือ α และ $180^\circ - \alpha$ ในทำนองเดียวกัน จะมีมุม 2 มุมที่ k ทำกับแกน Y คือ β และ $180^\circ - \beta$ และมีมุม 2 มุมที่ k ทำกับแกน Z คือ γ และ $180^\circ - \gamma$

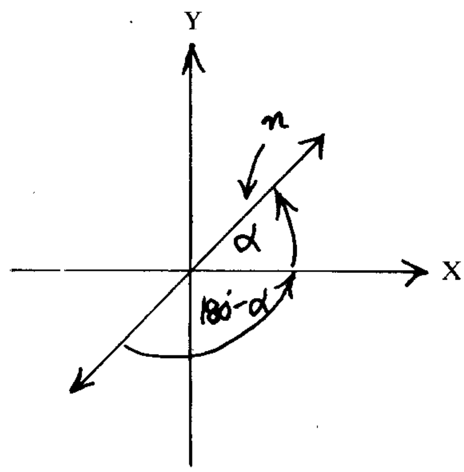
ดังนั้น สำหรับเส้นที่ไม่กำหนดทิศทางจะมีไดเรคชันโคไซน์ 2 ชุด คือ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ และ $\cos(180^\circ-\alpha)$, $\cos(180^\circ-\beta)$, $\cos(180^\circ-\gamma)$

และ $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(180^\circ-\beta) = -\cos\beta$

$\cos(180^\circ-\gamma) = -\cos\gamma$

พิจารณาจากรูปใน 2 มิติ เส้นตรง n ไม่กำหนดทิศทาง



ให้ λ แทน $\cos\alpha$ (λ อ่านว่า แลมด้า)

μ แทน $\cos\beta$ (μ อ่านว่า มิว)

ν แทน $\cos\gamma$ (ν อ่านว่า นิว)

ตัวอย่างที่ 1.3.1 จงหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นที่ผ่านจุด $P_1(1, 3, 5)$ และ $P_2(3, 5, 4)$ และเส้นนี้มีทิศทางจาก P_1 ไปยัง P_2

วิธีทำ

$$|P_1P_2| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-3)^2 + (4-5)^2}$$
$$= 3$$

ไดเรคชัน โคไซน์ที่ต้องการคือ

$\cos\alpha = 2/3, \cos\beta = 2/3, \cos\gamma = -1/3$ **ตอบ**

ข้อควรจำ เส้นตรงที่ขนานกัน จะมีไดเรคชัน โคไซน์เหมือนกัน

1.4 ไดเรคชันนัมเบอร์ของเส้นตรง (Direction numbers of a line)

ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง 3 จำนวนที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมดเรียก $\{a, b, c\}$ ว่าเซตของไดเรคชันนัมเบอร์ของเส้น ถ้าจำนวนเหล่านี้เป็นสัดส่วนกับไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นที่กำหนดทิศทาง

นั่นคือ ถ้า $\{a, b, c\}$ เป็นเซตของไดเรคชันนัมเบอร์ของเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งมีไดเรคชัน โคไซน์ คือ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ แล้ว จะต้องมี k ซึ่งเป็นตัวคงที่ โดยที่ $k \neq 0$ ซึ่ง

$$a = k\cos\alpha,\ b = k\cos\beta,\ c = k\cos\gamma \qquad \text{(1.4.1)}$$

ในการหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้น เมื่อกำหนดเซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ $\{a, b, c\}$ ให้ ต้องหา k โดยการยกกำลังสองสมการ (1.4.1) แล้วนำมาบวกกัน จะได้ว่า

$$a + b^2 + c^2 = k^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$
$$= k^2$$
$$k = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\therefore \cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ใช้เครื่องหมายบวกหรือลบตามทิศทางของเส้นตรงที่กำหนดให้

เส้นที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ จะมีเซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ คือ $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$

เซตของตัวเลข 3 จำนวนใด ๆ ที่เป็นสัดส่วนกับ เซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ ก็เป็นเซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ด้วย

เส้นตรง l_1 ขนานกับ เส้นตรง l_2 ก็ต่อเมื่อ เซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ของ l_1 เป็นสัดส่วนกับเซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ของ l_2

ตัวอย่างที่ 1.4.1 จงหาเซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ของเส้นที่ผ่านจุด $P_1(4, -1, -4)$ และ $P_2(2, 5, -8)$

วิธีทำ

$x_2 - x_1 = -2$

$y_2 - y_1 = 6$

$z_2 - z_1 = -4$

$\therefore \{-2, 6, -4\}$ เป็นเซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.4.2 เซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ ของเส้นตรง l คือ $\{6, 2, -3\}$ และทิศทางที่เป็นบวกมีมุม γ เป็นมุมแหลม จงหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นตรง l

วิธีทำ

$$\cos\alpha = \frac{6}{\pm\sqrt{36+4+9}}$$

$$= \frac{6}{\pm 7}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\pm 7}$$

$$\cos\gamma = \frac{-3}{\pm 7}$$

เนื่องจาก มุม γ เป็นมุมแหลม $\cos\gamma$ ต้องเป็นบวก

ดังนั้น เครื่องหมายของตัวส่วนต้องเป็นลบและได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= -\frac{6}{7} \\ \cos\beta &= -\frac{2}{7} \\ \cos\gamma &= \frac{3}{7} \end{aligned}\right\} \text{ ตอบ}$$

นิยาม 1.4.1 เส้นตรง l_1 และเส้นตรง l_2 ไม่ตัดกัน และไม่ขนานกัน เรียกเส้นตรงคู่นี้ว่า เส้นสกิว (skew)

ตัวอย่างที่ 1.4.3 เส้นสกิว 2 เส้น ทำให้เกิดระนาบไหม

วิธีทำ เส้นสกิว 2 เส้น ไม่ทำให้เกิดระนาบ เนื่องจากหาจุดตัดกันไม่ได้

ทฤษฎีบทที่ 1.4.1 ถ้าเส้นตรง l_1 และเส้นตรง l_2 มีไดเรคชัน โคไซน์เป็น λ_1, μ_1, ν_1 และ λ_2, μ_2, ν_2 ตามลำดับ และถ้า θ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง l_1 และ l_2 แล้ว $\cos\theta = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2$ ....(1.4.2)

หมายเหตุ ถ้า l_1 และl_2 ตั้งฉากกันแล้ว $\theta = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\cos\theta = 0$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$$

ถ้าไดเรคชัน นัมเบอร์ของ l_1 และ l_2 คือ a_1, b_1, c_1 และ a_2, b_2, c_2 ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{\pm\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

เนื่องจาก l_1 ตั้งฉากกับ l_2 ก็ต่อเมื่อ $\cos\theta = 0$

ดังนั้น $\quad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

ตัวอย่างที่ 1.4.4 จงหามุมระหว่างเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(1, -2, 4)$, $P_2(3, 8, -7)$ และเส้นตรงที่ผ่านจุด $Q_1(1, 5, -2)$ $Q_2(7, -2, 4)$ โดยกำหนดว่า เส้นแรกคิดทิศทางจาก P_1 ไปยัง P_2 และเส้นที่สองคิดทิศทางจาก Q_1 ไปยัง Q_2

วิธีทำ ไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นแรก คือ $\frac{2}{15}, \frac{10}{15}, \frac{-11}{15}$

ไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นที่สอง คือ $\frac{6}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{6}{11}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{(2)(6) + (10)(-7) + (-11)(6)}{(15)(11)}$$

$$= \frac{-124}{165}$$

$$= -0.7515$$

จากตารางจะได้ว่า θ มีค่าประมาณ 139° **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.4.5 จงหาไดเรคชัน นัมเบอร์ของเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นตรง 2 เส้น โดยที่แต่ละเส้นมีไดเรคชัน นัมเบอร์ คือ 4, 1, 3 และ 6, 3, 5

วิธีทำ ให้ไดเรคชัน นัมเบอร์ที่ต้องการ คือ a, b, c

ดังนั้น

$4a + b + 3c = 0$ ....(1)

และ $6a + 3b + 5c = 0$ ....(2)

แก้สมการหาค่า a และ b ในเทอมของ c

จาก (1) $4a + b = -3c$ ....(3)

จาก (2) $6a + 3b = -5c$ ....(4)

(3) × 3, $12a + 3b = -9c$ ....(5)

(5) - (4), $6a = -4c$

$$a = \frac{-4c}{6}$$

$$= \frac{-2c}{3}$$

แทนค่า a ใน (3),

$$4(-\tfrac{2}{3}c) + b = -3c$$

$$-\frac{8c}{3} + b = -3c$$

$$b = -3c + \frac{8c}{3}$$

$$= -\frac{c}{3}$$

c จะเป็นค่าอะไรก็ได้ ยกเว้นศูนย์ ถ้าให้ c = −3 จะได้ 2, 1, -3 เป็นไดเรคชัน นัมเบอร์ที่ต้องการ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 1.3

จงหาเซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ และไดเรคชัน โคไซน์ สำหรับแต่ละเส้นต่อไปนี้ โดยกำหนดว่าคิดทิศทางจากจุดแรกไปยังจุดที่สอง

1. $(0, 0, 0), (1, -8, 4)$
2. $(2, 9, 6), (6, 2, 2)$
3. $(5, 7, -1), (-7, 3, 2)$
4. $(-1, 4, 7), (5, 2, 4)$
5. $(4, -2, 3), (7, 2, 4)$
6. $(2, 9, -3), (3, 4, 5)$

จงหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นที่กำหนด ไดเรคชัน นัมเบอร์ให้และมุม γ เป็นมุมแหลม

7. $6, -7, 6$
8. $9, 6, -2$
9. $2, -1, 2$
10. $-3, -18, -14$
11. $-5, -3, -6$
12. $4, 1, 3$

จงหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นต่อไปนี้

13. $\alpha = 45°, \beta = 60”$
14. $\alpha = 90°, \gamma = 120”$
15. $\beta = \frac{2\pi}{3}, \gamma = \frac{11}{3}$
16. $\alpha = \frac{211}{3}, \beta = \frac{3\pi}{4}$

17. จงหาไดเรคชัน โคไซน์ของแต่ละแกนพิกัด

18. เส้นตรง l ผ่านจุดกำเนิด และมีทิศทางอยู่ในอัฐภาคที่ 1 และทำมุมกับแต่ละแกนพิกัดเท่ากัน จงหาไดเรคชัน โคไซน์ของ l

19. พิกัดของจุด P_1 คือ $(1, 17, -9)$ จงหาพิกัดของ P_2 โดยกำหนดว่าความยาวของ $\overline{P_1P_2} = 28$ และไดเรคชัน โคไซน์คือ $\frac{2}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{3}{7}$

20. จงใช้ไดเรคชัน นัมเบอร์ แสดงว่าจุด $(2, 1, -1), (-1, 2, 1)$ และ $(-10, 5, 7)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

21. จงหาโคไซน์ของมุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งมีไดเรคชัน โคไซน์ ดังนี้

    ก. $\frac{7}{11}, -\frac{6}{11}, \frac{6}{11}; -\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$

    ข. $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{14}{23}, -\frac{3}{23}, -\frac{18}{23}$

22. จงหามุมแหลมระหว่างเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งมีไดเรคชัน นัมเบอร์ดังนี้

    ก. 7, 4, 4; 6, 10, 15

    ข. 5, −2, −14; 1, 2, −2

23. จงแสดงว่า $(-2, 4, 3), (2, 8, 1), (4, 1, 9)$ และ $(8, 5, 7)$ เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมมุมฉาก และหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมนี้ด้วย

24. จงใช้ไดเรคชัน นัมเบอร์ แสดงว่า จุด $(5, 4, 1), (4, 1, -1)$ และ $(1, -2, 5)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

25. จุด $(3, -6, -7), (7, -1, 3)$ และ $(-5, 5, 9)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

26. จงหาค่า x โดยกำหนดว่า เส้นที่เชื่อมจุด $(2, 3, 5)$ และจุด $(x, 7, 3)$ ตั้งฉากกับเส้นที่เชื่อมจุด $(2, 3, 5)$ และจุด $(5, 9, 11)$

1.6 สมการเส้นตรง (Equation of a line)

1.5.1 The Symmetric form

ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุด ๆ หนึ่ง และให้ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ เป็นไดเรคชันโคไซน์ของเส้นที่กำหนดทิศทางที่ผ่าน P_1

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงนี้ และให้ $d = \overline{P_1P}$ เป็นความยาวของเซกเมนต์คิดจาก P_1 ไปยัง P จากสมการ (1.3.1) มีว่า

$$\frac{x - x_1}{d} = \cos\alpha$$

$$\frac{y - y_1}{d} = \cos\beta$$

$$\frac{z - z_1}{d} = \cos\gamma$$

เมื่อหาค่า d ก็ได้ว่า

$$d = \frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$$

หรือ

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1.5.1)$$

สมการ (1.5.1) เรียกว่า symmetric form ของสมการเส้นตรง

นอกจากนี้ ยังสามารถเขียนสมการเส้นตรงให้อยู่ในแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta}$$

$$\frac{Y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z \quad z_1}{\cos \gamma}$$

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}$$

ถ้าคูณตัวส่วนของสมการ (1.5.1) ด้วยตัวคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์แล้ว สมการก็ยังเป็นสมการเส้นตรง เมื่อตัวส่วนถูกคูณด้วยตัวคงที่จะเป็นไดเรคชันนัมเบอร์ ถ้าให้ไดเรคชันนัมเบอร์ แทนด้วย a, b, c ดังนั้น สมการเส้นตรงก็สามารถเขียนในรูป

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{Y - Y,}{b} = \frac{z \quad z_1}{c} \qquad \text{.......................... (1.54}$$

สมการ (1.5.2) ก็เรียกว่า symmetric form ของสมการเส้นตรง

ถ้าเส้นตรงตั้งฉากกับแกนพิกัด 1 แกน เช่น เส้นตรงตั้งฉากกับแกน X, $\cos \alpha = 0$ จะได้ว่า

$$x - x_1 = 0, \quad \frac{Y - Y}{\cos \beta}, \quad = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}$$

ถ้าเส้นตรงตั้งฉากกับแกน X และแกน Y แล้ว $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0$ จะได้ว่า $x - x_1 = 0, y - y_1 = 0$

ถ้าเส้นตรงตั้งฉากกับแกนพิกัดใดแกนหนึ่ง สมการเส้นตรงมีรูปเป็น

$x = x_1, \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ (เส้นตรงตั้งฉากกับแกน x)

$y = y_1, \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c}$ (เส้นตรงตั้งฉากกับแกน y)

$z = z_1, \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$ (เส้นตรงตั้งฉากกับแกน z)

ถ้าเส้นตรงตั้งฉากกับระนาบใดระนาบหนึ่ง สมการเส้นตรงมีรูปเป็น

$x = x_1, y = y_1$ (เส้นตรงตั้งฉากกับระนาบ XY)

$x = x_1, z = z_1$ (เส้นตรงตั้งฉากกับระนาบ XZ)

$y = y_1, z = z_1$ (เส้นตรงตั้งฉากกับระนาบ YZ)

1.5.2 The two-point form

ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรง จากหัวข้อ 1.4 จะได้ว่า ไดเรคชัน นัมเบอร์ของเส้นตรงนี้ คือ $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ จากสมการ (1.5.2) เมื่อแทนค่า a, b, c ด้วย $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ แล้วจะได้

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad \text{.........................(1.5.3)}$$

สมการนี้เรียกว่า two-point form ของสมการเส้นตรง

1.5.3 The Parametric form

ให้สมการ (1.5.2) เท่ากับ t จะได้ว่า

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t$$

หาค่า x, y, z จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + at \\ y &= y_1 + bt \\ z &= z_1 + ct \end{aligned}\right\} \qquad \text{..............................(1.5.4)}$$

ให้สมการ (1.5.3) เท่ากับ t จะได้ว่า

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$$

หาค่า x, y, z จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\,t \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)\,t \end{aligned}\right\} \qquad \text{..............................(1.5.5)}$$

สมการ (1.5.4) และ (1.5.5) เรียกว่า สมการพาราเมตริก (parametric equations) ของเส้นตรงในเทอมของ t ซึ่งเป็นตัวพารามิเตอร์ (parameter)

1.5.4 The General form

เมื่อเส้นตรงถูกกำหนดโดยสมการคู่หนึ่งต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.5.6)$$

เรียกเส้นตรงนี้ว่า general form

ตัวอย่างที่ 1.5.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (5, 1, -3) และมีไดเรคชัน นัมเบอร์ คือ 6, -9, 2

วิธีทำ จากสมการ 1.5.2 สมการที่ต้องการคือ

$$\frac{x-5}{6} = \frac{y-1}{-9} = \frac{z+3}{2}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.5.2 จงหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นตรงในตัวอย่างที่ 1.5.1 โดยกำหนดว่า γ เป็นมุมแหลม

วิธีทำ

$$\cos\alpha = \frac{6}{\pm\sqrt{36+81+4}}$$

$$= \frac{\pm 6}{11}$$

$$\cos\beta = \frac{-9}{\pm 11}$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\pm 11}$$

$\because \gamma$ เป็นมุมแหลม

$\therefore \cos\gamma$ ต้องเป็นบวก

ดังนั้น ไดเรคชัน โคไซน์ ของเส้นตรง คือ

$\cos\alpha = \frac{6}{11}, \cos\beta = -\frac{9}{11}, \cos\gamma = \frac{2}{11}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.5.3 จงหาจุดตัดกันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 7, 2) และจุด(1, 1, -2) กับระนาบ XY

วิธีทำ ให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดตัดที่ต้องการ

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 7, 2) และจุด (1, 1, -2) คือ

$$x = 3 + (1-3)t$$
$$= 3 - 2t$$
$$y = 7 + (1-7)t$$
$$= 7 - 6t$$
$$z = 2 + (-2-2)t$$
$$= 2 - 4t$$

บนระนาบ XY มี $z = 0$

$\therefore 2 - 4t = 0$

$t = \frac{1}{2}$

$x_1 = 3 - 1$

$= 2$

$y_1 = 7 - 3$

$= 4$

นั่นคือ จุด (2, 4, 0) เป็นจุดตัดที่ต้องการ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 1.4

จงเขียนสมการเส้นตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้ และหาไดเรคชัน โคไซน์ เมื่อกำหนดว่า γ เป็นมุมแหลม

1. ผ่านจุด (3, 1, 0) ไดเรคชัน นัมเบอร์ 1, 5, 2
2. ผ่านจุด (-3, 7, -2) ไดเรคชัน นัมเบอร์ -4, 7, 4
3. ผ่านจุด (-6, 1, 4) และจุด (8, 3, -1)
4. ผ่านจุด (2, -7, 6) และจุด (12, 4, 4)
5. ผ่านจุด (4, -1, 3) และขนานกับเส้นที่ผ่านจุด (6, 4, 2) และ (3, -2, 8)
6. ผ่านจุด (4, 1, 3) และตั้งฉากกับเส้น 2 เส้น ซึ่งมีไดเรคชัน นัมเบอร์ คือ 2, 2, 3 และ 1, 4, -3
7. จงเขียนสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (5, -1, -3) และ (3, -4, 2) ในรูปพาราเมตริก
8. จงเขียนสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 7, 3) และ (3, 1, -1) ในรูปพาราเมตริก
9. จงแสดงว่าเส้นตรงต่อไปนี้ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

   $$l_1 : \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

   $$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{3}$$

   $$l_3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-6}$$

10. จงหาสมการของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดที่ A(1, 6, 2), B(7, 9, 4) และ C(5, −6, 8)

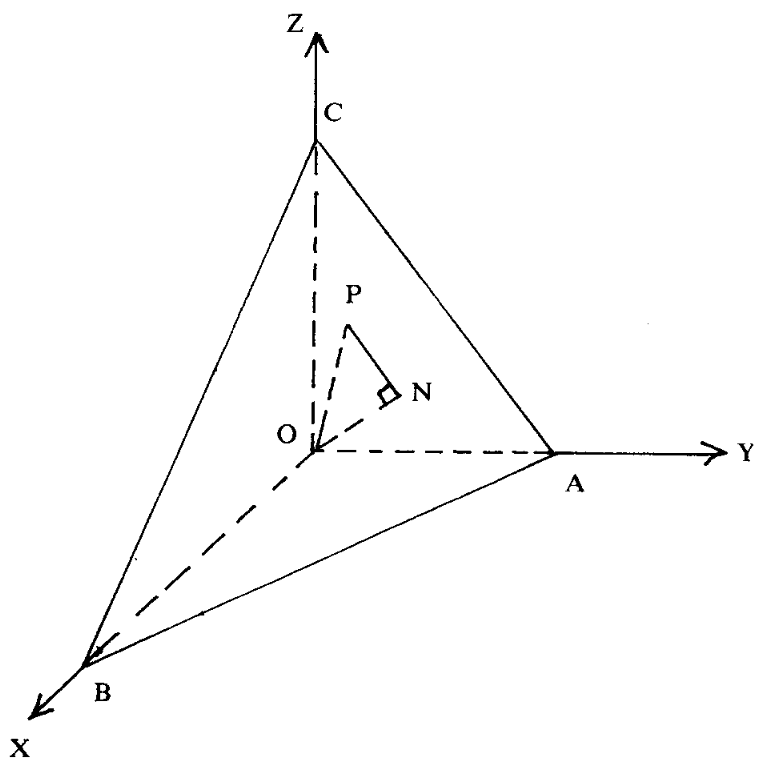
1.6 สมการระนาบ (Plane equation)

นิยาม 1.6.1 ถ้าให้ P เป็นระนาบแล้ว สมการ P มีคุณสมบัติดังนี้

1. จุด (x, y, z) ทุกจุดบนระนาบ P จะต้องคล้องตามสมการ P
2. จุด (x, y, z) ซึ่งสอดคล้องกับสมการ P จะต้องอยู่บนระนาบ P

1.6.1 สมการของระนาบแบบนอร์แมล (Normal equation of a plane)

ให้ A B C เป็นระนาบที่กำหนดให้ ดังรูป 1.6.1 และให้จุด N อยู่บนระนาบ โดยที่ $\overline{ON}$ ตั้งฉากกับระนาบ A B C ความยาวของ $\overline{ON}$ คือ p และไดเรคชัน โคไซน์ คือ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$



รูป 1.6.1

ให้ P(x, y, z) เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ ลาก $\overline{OP}$ ความยาวของ $\overline{OP}$ แทนด้วย ρ และไดเรคชัน โคไซน์ของ $\overline{OP}$ คือ $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$ และ $\cos\gamma'$ มุม NOP แทนด้วย ϕ

เนื่องจาก ON ตั้งฉากกับระนาบ และ N, P อยู่บนระนาบ ดังนั้น มุม ONP เป็นมุมฉาก และ

$$\cos\phi = \frac{p}{\rho}$$

หรือ $p = \rho\cos\phi$ .... (1.6.1)

จากสมการ (1.4.1) จะได้ว่า

$$\cos\phi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma$$

แทนค่า $\cos\phi$ ในสมการ (1.6.1) จะได้ว่า

$p = \rho\cos\alpha\cos\alpha' + \rho\cos\beta\cos\beta' + \rho\cos\gamma\cos\gamma'$ .... (1.6.2)

จากสมการ (1.3.2) จะได้ว่า

$\rho\cos\alpha' = x,\ \rho\cos\beta' = y, \rho\cos\gamma' = z$

แทนค่าเหล่านี้ในสมการ (1.6.2) ได้ว่า

$p = x\cos a + y\cos\beta + z\cos y$

$\therefore x\cos a + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ .... **(1.6.3)**

สมการ (1.6.3) เรียกว่า สมการระนาบแบบนอร์แมล

1.6.2 สมการทั่วไปของระนาบ *(General form of the equation of a plane)*

สมการระนาบแบบนอร์แมล เป็นสมการที่มีตัวแปรกำลังหนึ่ง โดยมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

โลกัสของสมการ

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{...(1.6.4)}$$

เมื่อ A, B, C เป็นจำนวนจริง คือระนาบ

สมการ (1.6.4) ไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าหารด้วย $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z$$

$$+ \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \quad \text{...(1.6.5)}$$

จากหัวข้อ 1.4 จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} &= \cos\alpha \\ \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} &= \cos\beta \\ \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} &= \cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{...........................(1.6.6)}$$

$$p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{...........................(1.6.7)}$$

จะเห็นว่า สมการ (1.6.3) และ (1.6.4) มีโลกัสเหมือนกัน ดังนั้น สมการ (1.6.4) จึงเป็นสมการระนาบ และเป็นสมการทั่วไปของระนาบ

ในการเปลี่ยนสมการทั่วไปของระนาบให้เป็นสมการแบบนอร์แมลทำได้โดยหารสมการ (1.6.4) ด้วย $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ ใช้เครื่องหมายบวกหรือลบ ตามเครื่องหมายของ C ถ้า $C \neq 0$

ใช้เครื่องหมายตามเครื่องหมายของ B ถ้า C = 0

และใช้เครื่องหมายตามเครื่องหมายของ A ถ้า B = 0 และ C = 0

1.6.3 สมการระนาบที่ผ่านจุดๆ หนึ่ง และตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง

(Plane through a given paint perpendicular to a given tine)

ทฤษฎีบทที่ 1.6.1 ระนาบที่ผ่านจุด $P_o(x_o, y_o, z_o)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง L ซึ่งมีไดเรคชัน นัมเบอร์ A, B, C จะมีสมการดังนี้

$$A(x \quad x_o) + B(y - y,) + C(7 \quad z_o) = 0 \quad \text{. . ... (1.6.8)}$$

ข้อสังเกต สัมประสิทธิ์ของ x, y, z คือไดเรคชัน นัมเบอร์ของเส้นตั้งฉากกับระนาบ

นิยาม 1.6.2 เซตของแอตติจูด นัมเบอร์ (Attitude numbers) ของระนาบ คือ เซตของไดเรคชัน นัมเบอร์ของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ

1.6.4 Intercept equation of a plane

ระยะที่กำหนดทิศทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดตัดของระนาบกับแกนพิกัด เรียกว่า ระยะตัด (*intercepts*) ของระนาบบนแกนพิกัดนั้น

ให้ a, b, c (a, b, c ไม่เท่ากับศูนย์ทุกจำนวน) เป็นระยะตัดของระนาบ

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{.. (1.6.9)}$$

บนแกน X, แกน Y และแกน Z ตามลำดับ

การหาสมการระนาบในเทอมของ a, b และ c จะเห็นว่าระนาบผ่านจุด P(a,0, 0), Q(0, b, 0) และ R(0, 0, c) ดังนั้น จุด P, Q, R ต้องคล้องตามสมการระนาบ จึงได้ว่า

$$Aa + D = 0$$

$$Bb + D = 0$$

$$Cc + D = 0$$

หาค่า A, B และ C ในเทอมของ D และให้ D = −1 จะได้ว่า

$$A = \frac{1}{a},\ B = \frac{1}{b},\ C = \frac{1}{c},\ D = -1$$

แทนค่า A, B, C และ D ในสมการ (1.6.9) จะได้ว่า

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{.......................}(1.6.10)$$

สมการ (1.6.10) คือ intercept form ของสมการระนาบ

ตัวอย่างที่ 1.6.1 จงเปลี่ยนสมการระนาบ $x - 2y + 2z - 6 = 0$ ให้เป็นแบบนอร์แมล และหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นตั้งฉากกับระนาบ

วิธีทำ เนื่องจาก $C \neq 0$ และมีค่าบวก

ดังนั้น $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{1 + 4 + 4}$

$= 3$

สมการระนาบแบบนอร์แมล คือ

$$\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z - 2 = 0$$

ไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นตั้งฉากกับระนาบคือ $\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.6.2 ระนาบ P มีแอตติจูด นัมเบอร์ A, B, C และเส้นตรง Q มีไดเรคชัน นัมเบอร์ a, b, c มีเงื่อนไขอะไรบ้าง ที่ทำให้ระนาบ P และเส้นตรง Q ขนานกัน

วิธีทำ ให้ l เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ

ดังนั้น l มีไดเรคชัน นัมเบอร์ A, B, C และ l จะตั้งฉากกับเส้นตรง Q

$\therefore$ เงื่อนไขที่ระนาบ P และเส้นตรง Q ขนานกัน คือ

$$aA + bB + cC = 0$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.6.3 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด (3, 2, -3), (-1, 3, 5) และ (5, 4, -2)

วิธีทำ เนื่องจากจุดทั้ง 3 อยู่บนระนาบ

ดังนั้น แต่ละจุดต้องคล้องตามสมการ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

แทนค่าจุดทั้ง 3 ในสมการระนาบ จะได้

$(3, 2, -3)$, $3A + 2B - 3C + D = 0$ ....(1)

$(-1, 3, 5)$, $-A + 3B + 5C + D = 0$ ....(2)

$(5, 4, -2)$, $5A + 4B - 2C + D = 0$ ....(3)

แก้สมการทั้งสามเพื่อหาค่า B,C และ D ในเทอมของ A

จาก (1), $2B - 3C + D = -3A$ ....(4)

จาก (2), $3B + 5C + D = A$ ....(5)

จาก (3), $4B - 2C + D = -5A$ ....(6)

ในที่นี้จะแก้สมการ โดยใช้วิธีการของดีเทอร์มิแนนท์ ดังนี้

$$B = \frac{\begin{vmatrix} -3A & -3 & 1 \\ A & 5 & 1 \\ -5A & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(-3A)((5)(1) - (-2)(1)) - (-3)(A - (-5A)) + (-2A + 25A)}{2(5 - (-2)) - (-3)(3 - 4) + (-6 - 20)}$$

$$= \frac{-21A + 18A + 23A}{14 - 3 - 26}$$

$$= \frac{20A}{-15}$$

$$= \frac{-4A}{3}$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3A & 1 \\ 3 & A & 1 \\ 4 & -5A & 1 \end{vmatrix}}{-15}$$

$$= \frac{2(A - (-5A)) - (-3A)(3 - 4) + (-15A - 4A)}{-15}$$

$$= \frac{12A - 3A - 19A}{-15}$$

$$= \frac{-10A}{-15}$$

$$= \tfrac{2}{3}A$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3A \\ 3 & 5 & A \\ 4 & -2 & -5A \end{vmatrix}}{-15}$$

$$= \frac{2(-25A - (-2A)) - (-3)(-15A - 4A) + (-3A)(-6 - 20)}{-15}$$

$$= \frac{-46A \; -57A \; + \; 78A}{-15}$$

$$= \frac{-25A}{-15} = \frac{5A}{3}$$

ให้ $A = 3$ จะได้ $B = -4$, $C = 2$ และ $D = 5$

ดังนั้น สมการระนาบที่ต้องการคือ

$$3x - 4y + 2z + 5 = 0$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.6.4 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $P_o(2, 1, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีไดเรคชัน นัมเบอร์ 4, 0, −2

วิธีทำ แอตติจูด นัมเบอร์ของระนาบคือ 4, 0, −2

ดังนั้น สมการระนาบที่ต้องการคือ

$4(x - 2) + 0(y \quad 1) - 2(z - 3) = 0$

$4x - 8 - 2z + 6 = 0$

$4x - 2z - 2 = 0$

$2x - z - 1 = 0$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.8.5 จงหาสมการระนาบซึ่งผ่านจุด (6, 1, 2), (3, 4, 4) และตั้งฉากกับระนาบ $x + 3y + 2z - 7 = 0$

วิธีทำ เนื่องจากจุด (6, 1, 2) และจุด (3, 4, 4) อยู่บนระนาบ

$Ax + By + Cz + D = 0$

ดังนั้น แต่ละจุดต้องคล้องตามสมการระนาบแทนค่าจุดทั้ง 2 ในสมการระนาบ จะได้

(6, 1, 2), $6A + B + 2C + D = 0$.. .... (1)

(3, 4, 4), $3A + 4B + 4C + D = 0$.. .... (2)

และระนาบที่ต้องการตั้งฉากกับระนาบ $x + 3y + 2z - 7 = 0$

ดังนั้น $A + 3B + 2C = 0$ ....(3)

แก้สมการทั้งสาม เพื่อหาค่า A, C และ D ในเทอมของ B

จาก (1), $6A + 2C + D = -B$ ....(4)

จาก (2), $3A + 4C + D = -4B$ ....(5)

จาก (3), $A + 2C = -3B$ ....(6)

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -B & 2 & 1 \\ -4B & 4 & 1 \\ -3B & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-B(0-2) - 2(0+3B) + (-8B+12B)}{6(0-2) - 2(0-1) + (6-4)}$$

$$= \frac{2B - 6B + 4B}{-12 + 2 + 2}$$

$$= \frac{0}{-8}$$

$$= 0$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -B & 1 \\ 3 & -4B & 1 \\ 1 & -3B & 0 \end{vmatrix}}{-8}$$

$$= \frac{6(0+3B) - (-B)(0-1) + (-9B+4B)}{-8}$$

$$= \frac{18B - B - 5B}{-8}$$

$$= \frac{12B}{-8}$$

$$= \frac{-3B}{2}$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & -B \\ 3 & 4 & -4B \\ 1 & 2 & -3B \end{vmatrix}}{-8}$$

$$= \frac{6(-12B + 8B) - 2(-9B + 4B) - B(6 - 4)}{-8}$$

$$= \frac{-24B + 10B - 2B}{-8}$$

$$= \frac{-16B}{-8}$$

$$= 2B$$

ให้ $B = 2$ จะได้ $C = -3, D = 4$

ดังนั้น สมการระนาบที่ต้องการคือ

$$2y - 3z + 4 = 0$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.6.6 จงหาสมการระนาบ แบบ intercept ของระนาบที่มีสมการทั่วไป คือ $3x + 2y + 4z - 24 = 0$

วิธีทำ หาระยะตัดบนแกน X, ให้ $y = z = 0$

$$x = 8$$

นั่นคือ $a = 8$

หาระยะตัดบนแกน Y, ให้ $x = z = 0$

$$y = 12$$

นั่นคือ $b = 12$

หาระยะตัดบนแกน Z, ให้ $x = y = 0$

$$z = 6$$

นั่นคือ $c = 6$

$\therefore$ สมการระนาบ แบบ intercept คือ

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{12} + \frac{z}{6} = 1$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.6.7 จงหาเซตของแอตติจูด นัมเบอร์ของระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด

วิธีทำ ระนาบพิกัดมี 3 ระนาบ คือ ระนาบ XY, ระนาบ XZ และระนาบ YZ

สมการระนาบที่ขนานกับระนาบ XY คือ $z = k$ หรือ $z - k = 0$

สมการทั่วไปของระนาบ คือ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ดังนั้น $A = 0, B = 0, C = 1$

$\therefore$ เซตของแอตติจูด นัมเบอร์ของระนาบที่ขนานกับระนาบ XY คือ $\{0, 0, 1\}$

ในทำนองเดียวกัน เซตของแอตติจูด นัมเบอร์ของระนาบที่ขนานกับระนาบ YZ คือ $\{1, 0, 0\}$

และเซตของแอตติจูด นัมเบอร์ของระนาบที่ขนานกับระนาบ XZ คือ $\{0, 1, 0\}$

ตอบ

แบบฝึกหัด 1.5

จงหาสมการแบบนอร์แมลของระนาบซึ่งมี α , β , γ และ p ดังต่อไปนี้

1. $60°, 60°, 45°; 3$
2. $90°, 45°, 135°; 5$
3. $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; -2$
4. $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}; -7$

จงหาสมการแบบนอร์แมลของระนาบ และหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นตั้งฉากกับระนาบ

5. $2x - y + 2z - 12 = 0$
6. $8x - 9y + 12z - 34 = 0$
7. $6x - 10y - 15z + 57 = 0$
8. $2x - y - z - 12 = 0$
9. จงแสดงว่า โลกัสของจุด P ซึ่งมีระยะทางระหว่างจุด P และจุด (2, 1, −4) เท่ากับระยะทางระหว่างจุด P และจุด (5, 3, 1) คือระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นที่เชื่อมจุด (2, 1, −4) และจุด (5, 3, 1)

จงหาสมการระนาบแบบ intercept

10. $7x - 2y - 3z + 42 = 0$
11. $4x + 3y - 5z - 7 = 0$

จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด 3 จุด ที่กำหนดให้

12. $(4, 0, 0), (0, -3, 0), (0, 0, 2)$
13. $(4, -1, 3), (-1, -2, 7), (3, 2, -4)$
14. $(2, 4, 2), (3, 1, 1), (5, 3, 2)$
15. $(1, 4, 4,), (6, 3, 2), (4, -1, 6)$
16. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(4, 3, 8)$ และจุด $(-7, -4, -2)$ และระยะตัดบนแกน Z เท่ากับ 4

จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด 2 จุดที่กำหนดให้ และตั้งฉากกับระนาบที่กำหนดให้

17. $(8, 3, 2), (4, -1, 4), 7x - 3y + 4z - 5 = 0$
18. $(1, 4, 3), (2, -5, 6), 2x + 3y - 3z + 7 = 0$
19. $(2, -3, 1), (7, -1, 4), 2x - y + 6z + 8 = 0$
20. $(5, -1, -2), (3, 3, -6), 2x - y + 6z + 8 = 0$

จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ และตั้งฉากกับระนาบ 2 ระนาบที่กำหนดให้

21. $(7, 5, -2), 6x + 5y - 2z - 9 = 0, 2x + 4y - z - 3 = 0$
22. $(3, 5, 1), 2x - y - 4z + 6 = 0, 2x + 3y + 2z - 5 = 0$
23. $(3, -9, 2), 6x + y - 2z + 1 = 0, 2x - 5y + 2z + 7 = 0$
24. $(4, 1, 3), x - 2y - 3z + 4 = 0, 3x + 4y + 5z - 6 = 0$

1.7 มุมและระยะทางจากจุดไปยังระนาบ (Angle, Distance from a point to a plane)

1.7.1 มุมระหว่างระนาบ 2 ระนาบ (Angle between two planes)

ให้ θ เป็นมุมระหว่างระนาบ $\phi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ และระนาบ $\phi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

ถ้าระนาบ ϕ_1 ตั้งฉากกับระนาบ ϕ_2 จะได้ว่า $\cos\theta = 0$ ดังนั้น

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

ถ้าระนาบ ϕ_1 ขนานกับระนาบ ϕ_2 จะได้ว่า แอตติจูด นัมเบอร์เป็นสัดส่วนกัน นั่นคือ

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

1.7.2 ระยะทางจากจุดไปยังระนาบ

ระยะทางจากจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ไปยังระนาบ $Ax + By + Cz + D = 0$ คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ตัวอย่างที่ 1.7.1 จงหา $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างระนาบ

$$2x + 3y - 4z - 6 = 0$$

และ $3x - y + 2z + 4 = 0$

วิธีทำ

$$\cos\theta = \frac{|(2)(3) + (3)(-1) + (-4)(2)|}{\sqrt{4+9+16}\ \sqrt{9+1+4}}$$

$$= \frac{|6 - 3 - 8|}{\sqrt{29}\ \sqrt{14}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{406}}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.7.2 จงหาสมการพาราเมตริกของเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $3x + 2y - z + 5 = 0$ และ $2x + y + 2z - 3 = 0$

วิธีทำ

$3x + 2y - z + 5 = 0$ ....(1)

$2x + y + 2z - 3 = 0$ ....(2)

$(2)\times 2,\quad 4x + 2y + 4z - 6 = 0$ ....(3)

$(3) - (1),\quad x + 5z - 11 = 0$

$$x = 11 - 5z$$

$(1)\times 2,\quad 6x + 4y - 2z + 10 = 0$ ....(4)

$(2)\times 3,\quad 6x + 3y + 6z - 9 = 0$ ....(5)

$(4) - (5),\quad y - 8z + 19 = 0$

$$y = -19 + 8z$$

ให้ $z = t$,
$$\left.\begin{aligned} x &= 11 - 5t \\ y &= -19 + 8t \end{aligned}\right\}$$ **ตอบ**