ตัวอย่างที่ 1.7.3 จงหาจุดตัดของระนาบ $3x - y + 2z - 5 = 0$ และเส้น

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

วิธีทำ เขียนสมการเส้นตรงในรูปพาราเมตริก ดังนี้

$x = 1 + 2t$

$y = -1 + 3t$

$z = 1 - 2t$

ให้ $P_o(x_o, y_o, z_o)$ เป็นจุดตัดที่ต้องการ

$$x_o = 1 + 2t_o,\ y_o = -1 + 3t_o,\ z_o = 1 - 2t_o$$

จุด P_o อยู่บนระนาบ $3x - y + 2z - 5 = 0$ ด้วย ดังนั้น

$$3(1 + 2t_o) - (-1 + 3t_o) + 2(1 - 2t_o) - 5 = 0$$

$$3 + 6t_o + 1 - 3t_o + 2 - 4t_o - 5 = 0$$

$$-t_o + 1 = 0$$

$$t_o = 1$$

$x_o = 3,\ y_o = 2,\ z_o = -1$

$\therefore$ จุดตัด คือ $P_o(3, 2, -1)$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.7.4 จงหาสมการพาราเมตริกของเส้นที่ผ่านจุด $P_1(3, -1, 2)$ ซึ่งตัด และตั้งฉากกับเส้น

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

วิธีทำ ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(3, -1, 2)$ และตัดตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ที่จุด $P_o(x_o, y_o, z_o)$

ไดเรคชัน นัมเบอร์ ของเส้นตรงที่กำหนดให้คือ 2, −1, 3

ไดเรคชัน นัมเบอร์ ของ l คือ $x_o - 3, y_o + 1, z_o - 2$

$$\therefore 2(x_o - 3) + (-1)(y_o + 1) + 3(z_o - 2) = 0 \qquad \text{........................(1)}$$

สมการพาราเมตริกของเส้นที่กำหนดให้ คือ

$$x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$$

$$x_o = 1 + 2t_o,\ y_o = -1 - t_o,\ z_o = 3t_o$$

แทนค่า x_o, y_o, z_o ใน (1)

$$2(1 + 2t_o - 3) - (-1 - t_o + 1) + 3(3t_o - 2) = 0$$

$$-4 + 4t_o + t_o + 9t_o - 6 = 0$$

$$14t_o = 10$$

$$t_o = \frac{5}{7}$$

$$x_o = 1 + \frac{10}{7} = \frac{17}{7}$$

$$y_o = -1 - \frac{5}{7} = -\frac{12}{7}$$

$$z_o = \frac{15}{7}$$

$\therefore$ จุดตัด คือ $P_o\left(\frac{17}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ

$$x - 3 = \left(\frac{17}{7} - 3\right)t$$

$$= -\frac{4t}{7}$$

$$x = 3 - \frac{4t}{7}$$

$$y + 1 = \left(-\frac{12}{7} + 1\right)t$$

$$= -\frac{5t}{7}$$

$$y = -1 - \frac{5t}{7}$$

$$z - 2 = \left(\frac{15}{7} - 2\right)t$$

$$= t$$

$$z = 2 + t$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= 3 - \frac{4t}{7} \\ y &= -1 - \frac{5t}{7} \\ z &= 2 + t \end{aligned}\right\}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.7.5 จงหาระยะทางจากจุด (4, −2, 5) ไปยังระนาบ

$9x - 2y - 6z - 4 = 0$

วิธีทำ

$$d = \frac{|(9)(4) + (-2)(-2) + (-6)(5) - 4|}{\sqrt{81 + 4 + 36}}$$

$$= \frac{|36 + 4 - 30 - 4|}{\sqrt{121}}$$

$$= \frac{6}{11}$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 1.6

จงหามุมแหลมระหว่างระนาบ 2 ระนาบที่กำหนดให้

1. $2x - 2y - z - 8 = 0$

   $x - 8y + 4z + 10 = 0$

2. $7x - 6y + 6z - 2 = 0$

   $5x - 2y - 14z + 8 = 0$

3. $6x + 3y - 6z + 7 = 0$

   $7x + 4y - 4z + 9 = 0$

4. $2x - 9y - 6z - 5 = 0$

   $12x - 4y + 3z - 8 = 0$

5. จงหาค่า k โดยกำหนดว่า ระนาบ $(k + 6)x + (2k - 3)y - (k + 4)z + 3k - 5 = 0$ ตั้งฉากกับระนาบ $4x - 5y + 3z + 9 = 0$
6. จงหาระยะทางจากจุด (0, 2, 3) ไปยังระนาบ $5x + 2y + 3z + 7 = 0$
7. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -1, 4)$ และตั้งฉากกับระนาบ $8x - 9y - 12z + 4 = 0$
8. จากสมการเส้นตรงในข้อ 7 แบบฝึกหัด 1.4 จงแสดงว่า เส้นตรงดังกล่าวอยู่บนระนาบ $6x + y + 3z - 20 = 0$
9. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $4x + y - z - 9 = 0$ และ $6x + 4y + z - 26 = 0$
10. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรงในข้อ 9 และผ่านจุด $(1, 3, -12)$

1.8 ผิวทรงกลม (The sphere)

ผิวทรงกลม คือ โลกัสของจุดใน 3 มิติ ที่มีระยะทางจากจุดตรึงจุดหนึ่งเท่ากับค่าคงที่

จุดตรึง เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center)

ระยะทางคงที่ เรียกว่า รัศมี (radius)

ในการหาสมการของผิวทรงกลม

ให้ $C(h, k, l)$ เป็นจุดศูนย์กลาง ให้ r เป็นรัศมี ถ้า $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนผิวทรงกลม จากสูตรระยะทาง จะได้ว่า

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots(1.8.1)$$

สมการ (1.8.1) เป็นสมการของผิวทรงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k, l)$ และรัศมี $= r$

ถ้าจุดศูนย์กลางของผิวทรงกลมอยู่ที่จุดกำเนิด สมการ (1.8.1) จะกลายเป็น

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots\ldots(1.8.2)$$

จากสมการ (1.8.1) กระจายออกมาได้

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - 2lz + h^2 + k^2 + l^2 - r^2 = 0$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0 \quad \ldots\ldots(1.8.3)$$

สมการ (1.8.3) เรียกว่า สมการแบบทั่วไปของผิวทรงกลม

การหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของผิวทรงกลมจากสมการ (1.8.3) ทำได้โดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ นั่นคือ

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{F}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}{4}$$

ซึ่งเป็นสมการของผิวทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right)$ และรัศมี $= r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$

จากสมการ (1.8.3) ผิวทรงกลม เรียกว่า ผิวทรงกลมจริง (real sphere) ถ้า $D^2 + E^2 + F^2 - 4G > 0$

ผิวทรงกลม เรียกว่า ผิวทรงกลมจุด (point sphere) ถ้า $D^2 + E^2 + F^2 - 4G = 0$

ผิวทรงกลม เรียกว่า ผิวทรงกลมจินตภาพ (imaginary sphere) ถ้า $D^2 + E^2 + F^2 - 4G < 0$

ตัวอย่างที่ 1.8.1 จงหาสมการของผิวทรงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (14, −2, 5) และรัศมี = 16

วิธีทำ

สมการของผิวทรงกลมที่ต้องการ คือ

$(x - 14)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16^2$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.8.2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของผิวทรงกลม ซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 1 = 0$

วิธีทำ

วิธีที่1 โดยใช้สูตร จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่

$$\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{6}{2}, -\frac{-8}{2}\right) = (1, -3, 4)$$

และรัศมี $= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 + 64 - 4}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{100}$

$= 5$

ตอบ

วิธีที่ 2 โดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) + (z^2 - 8z + 16) = 25$

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 5^2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, -3, 4)$ และรัศมี $= 5$

ตอบ

แบบฝึกหัด 1.7

จงหาสมการของผิวทรงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง และรัศมีที่กำหนดให้

1. $(2, 3, 6), r = 7$
2. $(-5, 7, 1), r = 8$
3. $(5, -6, 4), r = 6$
4. $(0, 0, 0), r = 9$

จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลาง และรัศมีของผิวทรงกลมที่กำหนดให้

5. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y + 8z + 1 = 0$
6. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$
7. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y - 6z + 30 = 0$
8. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 11 = 0$

จงหาสมการของผิวทรงกลมตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

9. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, -1, -5)$ และสัมผัสกับระนาบ XY
10. สัมผัสกับระนาบพิกัดทั้ง 3 อยู่ในอัฐมภาคที่ 1 จุดศูนย์กลางอยู่บนระนาบ $3x + 2y - z - 8 = 0$
11. มีจุด $(4, 3, -5)$ และจุด $(10, 1, -1)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลาง
12. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 4, 3)$ และผ่านจุด $(2, 1, 7)$
13. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4, 7, 2)$ และสัมผัสกับระนาบ $2x - y + 2z + 4 = 0$
14. ผ่านจุด $(3, 2, -1)$, $(0, 1, -1)$, $(2, 5, 3)$ และ $(3, 5, 2)$
15. จงแสดงว่า สำหรับทุก ๆ ค่าของ θ และ ϕ จุดที่ $x = r \sin\phi \cos\theta$, $y = r \sin\phi \sin\theta$, $z = r\cos\phi$ อยู่บนผิวทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

ข้อสังเกต สมการทั้ง 3 เรียกว่า สมการพาราเมตริกของผิวทรงกลมที่กำหนดให้ ในเทอมของ θ และ ϕ โดยมี θ และ ϕ เป็นตัวพารามิเตอร์

1.9 ผิวไซลินเดอร์ (Cylinders)

ผิวไซลินเดอร์ คือ ผิวที่ประกอบด้วยเส้นตรงที่ขนานกัน เส้นขนานแต่ละเส้น เรียกว่า เยเนอเรเตอร์ (generator) ของผิวไซลินเดอร์ เช่น ผิวทรงกระบอก, ระนาบ เป็นต้น

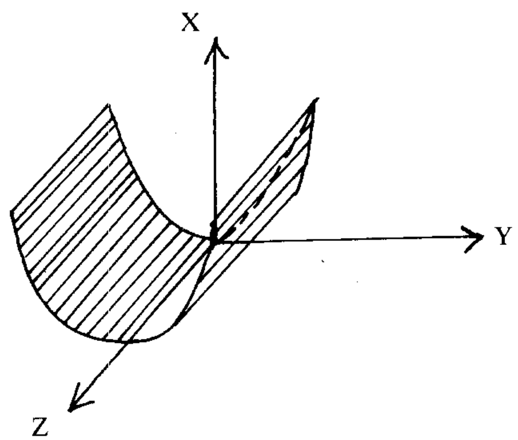
ทฤษฎีบทที่ 1.9.1 สมการในรูป $f(x, y) = 0$ เป็นผิวไซลินเดอร์ ซึ่งมีเยเนอเรเตอร์ทั้งหมด ขนานกับแกน Z และค่า z มีค่าอยู่ระหว่าง $-\infty$ กับ $+\infty$ นั่นคือ $-\infty < z < +\infty$ ผิวนี้ตัดกับระนาบ XY เป็นเส้น $f(x, y) = 0, z = 0$

ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงเมื่อเปลี่ยนเป็นแกนพิกัดอื่นด้วย

ตัวอย่างที่ 1.9.1 จงอธิบายและเขียนรูปโลกัสของสมการ

$$y^2 = 6x$$

วิธีทำ ตามทฤษฎีบทที่ 1.9.1 โลกัสนี้เป็นผิวไซลินเดอร์ ซึ่งมีเยเนอเรเตอร์ ขนานกับแกน Z โดยตัดระนาบ XY เป็นรูป พาราโบลา โลกัสนี้ เรียกว่า พาราโบลิค ไซลินเดอร์ (parabolic cylinder) ดังรูป 1.9.1



รูป 1.9.1

แบบฝึกหัด 1.8

จงเขียนภาพและอธิบายโลกัสของผิวต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $4x^2 + 25y^2 = 100$
3. $3x + 7y = 21$
4. $x^2 = 6y$
5. $16x^2 - 49z^2 = 784$
6. $y^2 + z^2 + 6y = 0$
7. $x^2 - 5x + 6 = 0$
8. $5x^2 + 6y^2 = 25$

1.10 ผิวควอดริค (Quadric surfaces)

โลกัสของสมการกำลังสองซึ่งอยู่ในรูป

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + k = 0$$

เมื่อ a, b, c, d, e และ f ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด เรียกว่า ผิวควอดริค จะเห็นว่า ผิวทรงกลม และผิวไซลินเดอร์ ก็เป็นผิวควอดริค ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึง แบบมาตรฐาน (standard form) ของสมการของผิวควอดริคที่สำคัญ และคุณสมบัติต่าง ๆ

นิยาม 1.10.1 จุดตัดของผิวกับแกนพิกัด

จุดตัดของผิวกับแกน X หาได้โดยให้ $y = z = 0$

จุดตัดของผิวกับแกน Y หาได้โดยให้ $x = z = 0$

จุดตัดของผิวกับแกน Z หาได้โดยให้ $x = y = 0$

รอยตัดของผิวกับระนาบพิกัด

เส้นที่เกิดจากการตัดกันของผิวกับระนาบ XY หาได้โดยให้ $z = 0$

เส้นที่เกิดจากการตัดกันของผิวกับระนาบ YZ หาได้โดยให้ $x = 0$

เส้นที่เกิดจากการตัดกันของผิวกับระนาบ XZ หาได้โดยให้ $y = 0$

นิยาม 1.10.2 ผิวสมมาตร (symmetry) เมื่อเทียบกับระนาบ XY ก็ต่อเมื่อจุด $(x, y, -z)$ อยู่บนผิวนั้นด้วย เมื่อจุด (x, y, z) อยู่บนผิวนั้น

นั่นคือ ผิวสมมาตร เมื่อเทียบกับระนาบ XY ก็ต่อเมื่อแทนค่า z ด้วย $-z$ ในสมการของผิวแล้ว สมการไม่เปลี่ยนแปลง

ในทำนองเดียวกัน ผิวสมมาตร เมื่อเทียบกับระนาบ YZ ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ด้วย $-x$ ในสมการของผิวแล้ว สมการไม่เปลี่ยนแปลง

และผิวสมมาตรเมื่อเทียบกับระนาบ XZ ก็ต่อเมื่อแทนค่า y ด้วย $-y$ ในสมการของผิวแล้ว สมการไม่เปลี่ยนแปลง

ผิวสมมาตรเทียบกับแกน X ก็ต่อเมื่อแทนค่า y ด้วย $-y$ และแทนค่า z ด้วย $-z$ ในสมการของผิวแล้ว สมการไม่เปลี่ยนแปลง

ผิวสมมาตรเทียบกับแกน Y ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ด้วย $-x$ และแทนค่า z ด้วย $-z$ ในสมการของผิว แล้วสมการไม่เปลี่ยนแปลง

ผิวสมมาตรเทียบกับแกน Z ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ด้วย $-x$ และแทนค่า y ด้วย $-y$ ในสมการของผิว แล้วสมการไม่เปลี่ยนแปลง

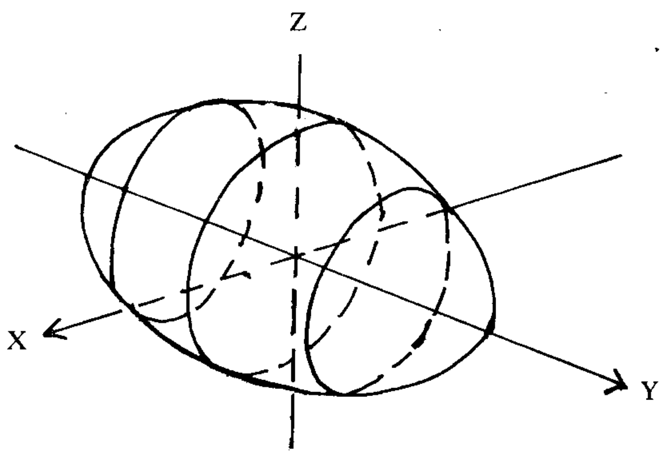
ผิวควอดริค มี 6 แบบ ดังนี้

1. **เอลลิพซอยด์ (The ellipsoid)** มีสมการ คือ

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \quad \text{.........(1.10.1)}$$

ผิวนี้สมมาตรเทียบกับระนาบ XY, สมมาตรเทียบกับระนาบ XZ และสมมาตรเทียบกับระนาบ YZ

ระนาบพิกัด เรียกว่า ระนาบหลัก (principal planes) ของเอลลิพซอยด์ และจุดกำเนิด เรียกว่า จุดศูนย์กลางของเอลลิพซอยด์



เซกเมนต์ของแกนพิกัดที่อยู่ในผิว เรียกว่า แกน (axes) ของเอลลิพซอยด์

จุดตัดของผิวนี้กับแกน X, แกน Y และแกน Z คือ $(\pm A, 0, 0)$, $(0, \pm B, 0)$ และ $(0, 0, \pm C)$ ตามลำดับ ถ้า $A > B > C > 0$ แล้ว เรียกจำนวนเหล่านี้ว่า ความยาวของแกน Semi-major, แกน semi-mean และแกน semi-minor ตามลำดับ

เส้นที่เกิดจากการตัดของเอลลิพซอยด์กับระนาบ XY, ระนาบ XZ และระนาบ YZ เป็นวงรี (ellipse) ดังนี้

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \quad \text{และ} \quad \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

ภาคตัดที่เกิดจากเอลลิพซอยด์กับระนาบ $z = k$ คือ

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 - \frac{k^2}{C^2}$$

ถ้า $k \neq \pm C$

$$\frac{x^2}{\frac{A^2(C^2 - k^2)}{C^2}} + \frac{y^2}{\frac{B^2(C^2 - k^2)}{C^2}} = 1$$

ถ้า $k^2 < C^2$ ภาคตัดจะเป็นวงรี

ถ้า $k^2 > C^2$ เอลลิพซอยด์ ไม่ตัดกับระนาบ $z = k$

ถ้า $A = B = C$ แล้วสมการ (1.10.1) แทนผิวทรงกลม

ถ้า $A = B > C$ เอลลิพซอยด์นี้เรียกว่า ออบเลต สเฟียรอยด์ (oblate spheroid) และถ้า $A > B = C$ เอลลิพซอยด์นี้ เรียกว่า โปรเลต สเฟียรอยด์ (prolate spheroid)

2. เอลลิพติค ไฮเปอร์โบลอยด์ รูปเดี่ยว (Elliptic hyperboloid of one sheet) มีสมการ คือ

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$$

ผิวนี้สมมาตรเทียบกับระนาบพิกัด และเรียกระนาบพิกัดว่าระนาบหลัก มีจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลาง ผิวนี้ตัดแกน X ที่ $(\pm A, 0, 0)$ และตัดแกน Y ที่ $(0, \pm B, 0)$ แต่ไม่ตัดแกน Z เพราะว่าเมื่อแทนค่า $x = y = 0$ จะได้

$$\frac{-z^2}{C^2} = 1$$

ซึ่งไม่สามารถหาค่า z ได้

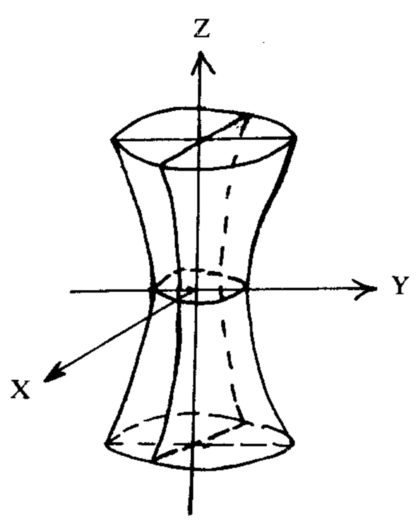
ภาคตัดของผิวนี้กับระนาบ XY เป็น วงรี

ภาคตัดของผิวนี้กับระนาบ YZ เป็น ไฮเปอร์โบลา

ภาคตัดของผิวนี้กับระนาบ XZ เป็น ไฮเปอร์โบลา

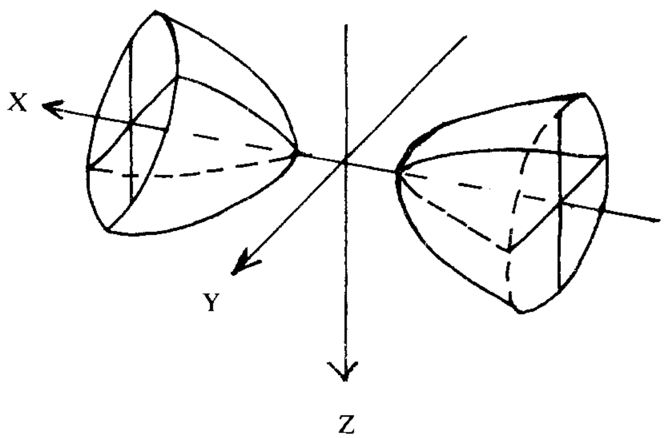
ภาคตัดของผิวนี้กับระนาบ $z = k$ คือ วงรี ซึ่งมีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 + \frac{k^2}{C^2}$$



3. **เอลลิพติค ไฮเปอร์โบลอยด์คู่ (Elliptic hyperboloid of two sheets)** มีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$$



ผิวนี้มีระนาบพิกัดเป็น ระนาบหลัก มีจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลาง จุดตัดบนแกน X คือ $(\pm A, 0, 0)$ แต่ไม่ตัดกับแกน Y และแกน Z

ภาคตัดของผิวนี้กับระนาบ $x = k$ คือ

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = \frac{k^2}{A^2} - 1$$

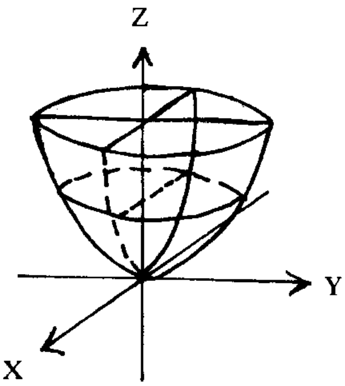
ถ้า $k^2 < A^2$ แล้วสมการนี้เป็นสมการของวงรีจินตภาพ (imaginary ellipse) และไม่มีจุดบนเส้นโค้งนี้

ถ้า $k^2 = A^2$ แล้ว สมการนี้เป็นวงรีจุด (point ellipse)

ถ้า $k^2 > A^2$ แล้ว สมการนี้เป็นวงรีจริง (real ellipse)

4. เอลลิพติค พาราโบลอยด์ (Elliptic paraboloid) มีสมการ คือ

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = z$$



ผิวนี้สมมาตรเทียบกับระนาบ XZ และระนาบ YZ แต่ไม่สมมาตรเทียบกับระนาบ XY

ผิวนี้ไม่มีจุดศูนย์กลาง สัมผัสกับระนาบ XY ที่จุดกำเนิด

ภาคตัดของผิวนี้กับระนาบ $z = k$ เมื่อ $k > 0$ คือ วงรี

ภาคตัดของผิวนี้กับระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X หรือระนาบที่ตั้งฉากกับแกน Y คือพาราโบลา

5. ไฮเปอร์โบลิค พาราโบลอยด์ (Hyperbolic paraboloid) มีสมการ คือ

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = z$$

ผิวนี้มีระนาบ XZ และระนาบ YZ เป็นระนาบหลัก ผ่านจุดกำเนิด ไม่มีจุดศูนย์กลาง

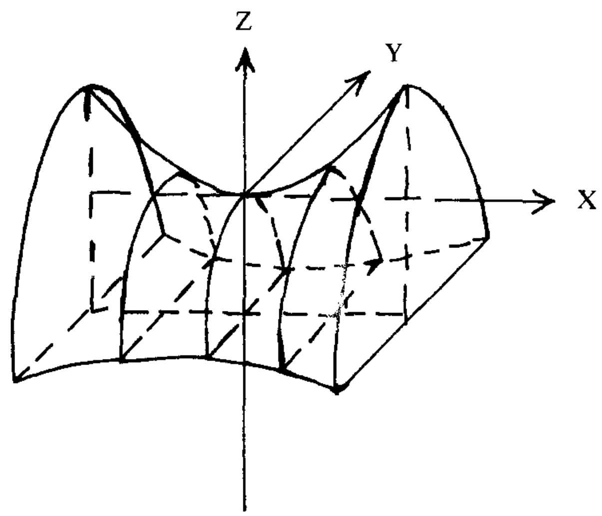
ผิวนี้ตัดกับระนาบ XY เป็นเส้นตรง 2 เส้น คือ $y = \pm \frac{b}{a}x, z = 0$

ระนาบ $z = k$ ซึ่งขนานกับระนาบ XY ตัดกับผิวนี้เป็นรูปไฮเปอร์โบลา ซึ่งมีแกนขวาง (transverse axes) ขนานกับแกน X ถ้า $k > 0$ และขนานกับแกน Y ถ้า $k < 0$

ระนาบ $y = k$ ตัดกับผิวนี้เป็นรูปพาราโบลา ซึ่งหงายขึ้น
ระนาบ $x = k$ ตัดกับผิวนี้เป็นรูปพาราโบลา ซึ่งเว้าคว่ำ

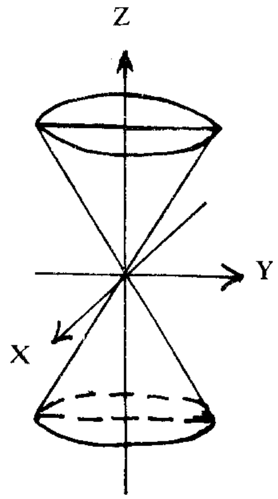
ถ้า $A = B$ แล้วเรียกผิวนี้ว่า rectangular hyperbolic paraboloid ในกรณีนี้ สมการของผิว คือ

$$x^2 - y^2 = A^2z$$



6. **กรวยเอลลิพติค (Elliptic cone)** มีสมการคือ

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{z^2}{C^2}$$



ผิวนี้สมมาตรเทียบกับระนาบพิกัด

ผิวนี้ตัดกับระนาบ YZ เป็นเส้นตรง 2 เส้นคือ $y = \pm\frac{b}{c}z$, $x = 0$ และตัดกับระนาบ XZ เป็นเส้นตรง 2 เส้น คือ $x = \pm\frac{a}{c}z$, $y = 0$ ตัดกับระนาบ XY เป็นจุด ๆ เดียว คือจุดกำเนิด

ผิวนี้ตัดกับระนาบ $z = k$ เป็นรูปวงรี

ถ้า $A = B$ แล้ว เรียกผิวนี้ว่า กรวยกลม (right circular cone)

ตัวอย่างที่ 1.10.1 จงบอกชื่อและเขียนภาพของผิว $6x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 20 = 0$ และแสดงจุดตัดของผิวนี้กับแกนพิกัดภาคตัดของผิวนี้กับระนาบพิกัด ภาคตัดของผิวนี้กับระนาบ $x = 4$ และระนาบ $y = 1$

วิธีทำ โลกัสของสมการที่กำหนดให้ คือ เอลลิพซอยด์

ผิวนี้ตัดแกน X ที่ $(\pm 2, 0, 0)$

ผิวนี้ตัดแกน Y ที่ $(0, \pm\sqrt{5}, 0)$

ผิวนี้ตัดแกน Z ที่ $(0, 0, \pm\sqrt{10})$

ผิวนี้ตัดระนาบ XY เป็นวงรี ซึ่งมีสมการเป็น

$$6x^2 + 4y^2 = 20$$

ผิวนี้ตัดระนาบ YZ เป็นวงรี ซึ่งมีสมการเป็น

$$4y^2 + 2z^2 = 20$$

ผิวนี้ตัดระนาบ XZ เป็นวงรี ซึ่งมีสมการเป็น

$$6x^2 + 2z^2 = 20$$

ผิวนี้ตัดระนาบ $x = 4$ คือ

$$\begin{aligned} 6\times4^2 + 4y^2 + 2z^2 - 20 &= 0 \\ 96 + 4y^2 + 2z^2 - 20 &= 0 \\ 4y^2 + 2z^2 + 76 &= 0 \end{aligned}$$

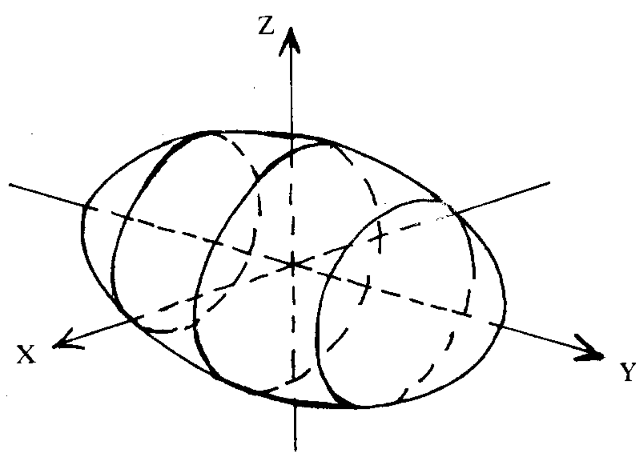
ซึ่งไม่เป็นจริงที่ผลบวกของจำนวนบวก 3 จำนวนเป็นศูนย์

ดังนั้น ระนาบ $x = 4$ ไม่ตัดกับผิวนี้

ผิวนี้ตัดกับระนาบ $y = 1$ คือ

$$\begin{aligned} 6x^2 + 4 + 2z^2 - 20 &= 0 \\ 6x^2 + 2z^2 - 16 &= 0 \\ 6x^2 + 2z^2 &= 16 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผิวนี้ตัดระนาบ $y = 1$ เป็นวงรี **ตอบ**



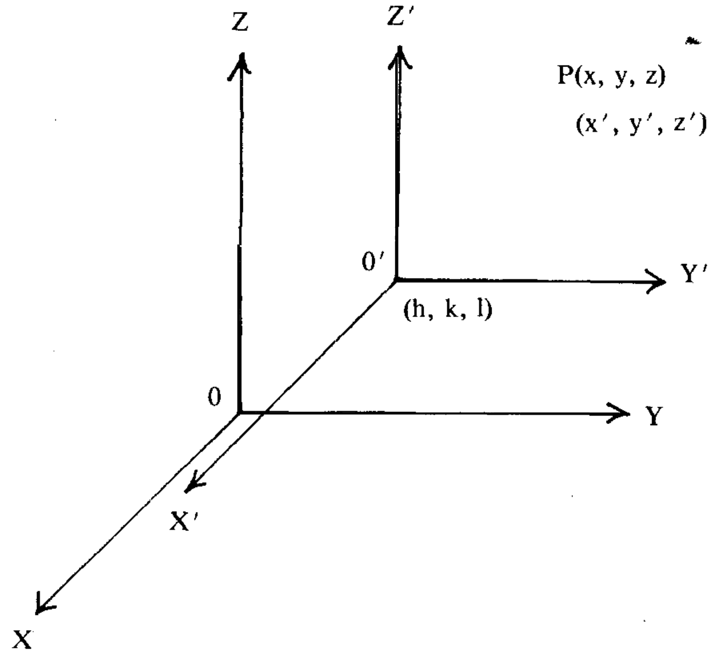
แบบฝึกหัด 1.9

จงเขียนภาพและบอกชื่อผิวต่อไปนี้

1. 9x” $+ 4y^2 + 3622 = 36$
2. $4x2 + 25y^2 - z^2 =$ loo
3. $16x^2 + 9y^2 = 1442$
4. $2x2 - 5y^2 - 3z^2 = 30$
5. $3x2 + 4y^2 + 6z^2 = 12$
6. $x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 10 = 0$
7. $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$
8. $4x^2 + 9y^2 = z^2$
9. $4x^2 - 9y^2 = 62$
10. $y^2 + 4z^2 = 2x$
11. $4x^2 + 25z^2 = 25 + x^2$
12. $9x2 - z^2 = 4y^2$
13. $25y^2 - 16z^2 = 400 - x^2$
14. $16x^2 + 4y^2 = 9z^2$
15. $3y^2 + z^2 = 6x$
16. $4z^2 - 2x - 9x^2 = 0$
17. $25 - 4x2 - 4y^2 = 4z^2$
18. $9x^2 - 4z^2 - 4y^2 + 16 = 0$
19. $25 - 9x^2 + 4z^2 + y^2 = 0$
20. $y^2 \quad x^2 + z^2 = 20$

1.11 การย้ายแกนพิกัด (Translation of axes)

ให้พิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกน X, แกน Y และแกน Z คือ (x, y, z) และจุด P มีพิกัด (x′, y′, z′) เมื่อเทียบกับแกน 0′X′, แกน 0′Y′ และแกน 0′Z′ ซึ่งมีทิศทางเดียวกับแกนชุดแรกตามลำดับ ให้พิกัดของ 0′ เทียบกับแกนพิกัดชุดแรกคือ (h, k, l)



รูป 1.11.1

จากรูป 1.11.1 จะเห็นว่า

$$x = h + x'$$
$$y = k + y'$$
$$z = l + z'$$

ดังนั้น สมการสำหรับการย้ายแกนไปยังจุดกำเนิดใหม่ 0′(h, k, l) คือ

$x = x' + h$		$x' = x - h$
$y = y' + k$	หรือ	$y' = y - k$
$z = z' - l$		$z' = z - l$

ตัวอย่างที่ 1.11.1 โดยวิธีการย้ายแกน จงพิจารณาว่า สมการ

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 10z + 26 = 0$$

เป็นผิวอะไร มีจุดศูนย์กลางที่ไหน

วิธีทำ

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 10z + 25 = 1 + 9 + 25 - 26$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 9$$

ให้ $x' = x - 1$

$y' = y + 3$

$z' = z - 5$

$$\therefore x'^2 + y'^2 + z'^2 = 9$$

สมการที่กำหนดให้เป็นผิวทรงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, -3, 5)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.11.2 โดยวิธีการย้ายแกน จงพิจารณาว่า สมการ

$$2x^2 - 3y^2 - 5z^2 - 20x - 12y + 40z - 72 = 0$$

เป็นผิวอะไร มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ไหน

วิธีทำ

$$2x^2 - 3y^2 - 5z^2 - 20x - 12y + 40z - 72 = 0$$

$$2(x^2 - 10 + 25) - 3(y^2 + 4y + 4) - 5(z^2 - 8z + 16)$$

$$= 72 + 50 - 12 - 80$$

$$2(x - 5)^2 - 3(y + 2)^2 - 5(z - 4)^2 = 30$$

ให้ $x' = x - 5$

$y' = y + 2$

$z' = z - 4$

$$\therefore 2x'^2 - 3y'^2 - 5z'^2 = 30$$

สมการที่กำหนดให้เป็นแอลลิพติค ไฮเปอร์โบลอยด์คู่ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(5, -2, 4)$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 1.10

จงหาสมการของผิวที่กำหนดให้เมื่อจุดกำเนิดเปลี่ยนไปอยู่ที่จุด (5, −2, 4)

1. $2x + y - 5z + 12 = 0$
2. $7x - 3y - 8z - 9 = 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 8z + 11 = 0$

จงหาจุดศูนย์กลางของผิวต่อไปนี้ และบอกชื่อผิวด้วย

4. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = (z + 3)^2$
5. $(x + 3)^2 + 4(y - 2)^2 + 9(z + 1)^2 = 36$
6. $x^2 + 4y^2 = z - 4$
7. $(y - 4)^2 - (z + 2)^2 = (x - 1)^2 + 4$
8. $9(z - 1)^2 + 4(x + 2)^2 = 4(y - 3)^2 + 36$
9. $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y = 8z$
10. $(x + 1)^2 - 3(y + 2)^2 + 4(z + 4)^2 = 0$

1.12 ระบบพิกัดอื่น ๆ (Other coordinate systems)

1.12.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate system)

จุด P ในระบบนี้มีพิกัด (r, θ, z) การแปลงจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก ทำได้โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

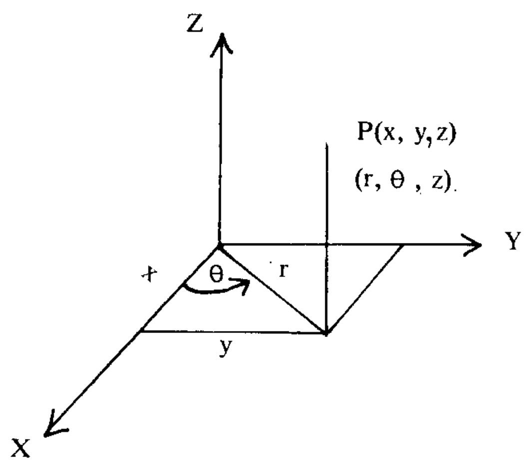
$$z = z$$

และมีสมการแปลงกลับดังนี้

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$



1.12.2 **ระบบพิกัดทรงกลม** (Spherical coordinate system)

จุด P ในระบบนี้มีพิกัด (ρ, ϕ, θ) การแปลงจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดทรงกลม ทำได้โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

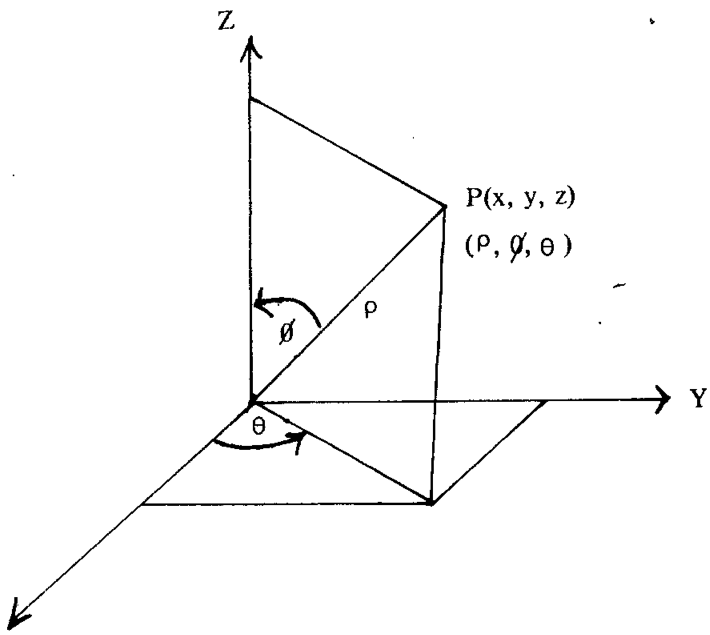
$$\phi = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

และมีสมการแปลงกลับ ดังนี้

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$



ตัวอย่างที่ 1.12.1 จงหาพิกัดในระบบพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดทรงกระบอกเป็น

$(16, 120°, 5), (12, 315°, -2)$

วิธีทำ จุด $(16, 120°, 5)$

$x = r\cos\theta$

$= 16\cos 120°$

$= 16(-\cos 60°)$

$= 16(-\tfrac{1}{2})$

$= -8$

$y = r\sin\theta$

$= 16\sin 120°$

$= 16\sin 60°$

$= 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 8\sqrt{3}$

นั่นคือ พิกัดในระบบพิกัดฉากของจุด $(16, 120°, 5)$ คือ $(-8, 8\sqrt{3}, 5)$

ตอบ

จุด $(12, 315°, -2)$

$x = r\cos\theta$

$= 12\cos 315°$

$= 12\cos(360° - 45°)$

$= 12\cos 45°$

$= 12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 6\sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
y &= r \sin\theta \\
&= 12 \sin 315^\circ \\
&= 12 \sin (360^\circ - 45^\circ) \\
&= 12(-\sin 45^\circ) \\
&= 12\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ พิกัดในระนาบพิกัดฉากของจุด $(12, 315^\circ, -2)$ คือ $(6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -2)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.12.2 จงหาพิกัดทรงกระบอกของจุด ซึ่งมีพิกัดในระบบพิกัดฉากเป็น $(-2\sqrt{3}, 2, 5)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} \\
&= \sqrt{12 + 4} \\
&= 4 \\
\tan\theta &= \frac{2}{-2\sqrt{3}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= -\tan 30^\circ \\
&= \tan (180^\circ - 30^\circ) \\
&= \tan 150^\circ \\
\theta &= 150^\circ
\end{aligned}
$$

นั่นคือ พิกัดทรงกระบอกของจุด $(-2\sqrt{3}, 2, 5)$ คือ $(4, 150^\circ, 5)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.12.3 จงหาพิกัดในระบบพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดทรงกลมเป็น(12, 30°, 30°)

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\
&= 12 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \\
&= 12(\tfrac{1}{2})(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= 3\sqrt{3} \\
y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\
&= 12 \sin 30^\circ \sin 30^\circ \\
&= 12(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) \\
&= 3 \\
z &= \rho \cos \phi \\
&= 12 \cos 30^\circ \\
&= 12(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= 6\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ พิกัดในระบบพิกัดฉากของจุด (12, 30°, 30°) คือ $(3\sqrt{3}, 3, 6\sqrt{3})$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.12.4 จงหาพิกัดทรงกลมของจุด ซึ่งพิกัดในระบบพิกัดฉากเป็น $(0, 3\sqrt{3}, 3)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
&= \sqrt{0 + (3\sqrt{3})^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{27 + 9} \\
&= 6 \\
\theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\
&= \tan^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{0} \\
&= 90^\circ \\
\phi &= \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
&= \cos^{-1}\frac{3}{6} \\
&= \cos^{-1}\tfrac{1}{2} \\
&= 60^\circ
\end{aligned}$$

นั่นคือ พิกัดทรงกลมของจุด $(0, 3\sqrt{3}, 3)$ คือ $(6, 60^\circ, 90^\circ)$

ตอบ

แบบฝึกหัด 1.11

จงหาพิกัดในระบบพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดทรงกระบอกเป็น

1. $(4, \frac{\pi}{3}, 3)$
2. $(16, \frac{\pi}{6}, 11)$
3. $(2, \frac{\pi}{4}, 7)$

จงหาพิกัดทรงกระบอกของจุดซึ่งมีพิกัดในระบบพิกัดฉากเป็น

4. $(3, 3, -2)$
5. $(-3, -\sqrt{3}, -8)$
6. $(0, 7, 2)$

จงหาพิกัดในระบบพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดทรงกลมเป็น

7. $(24, \frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3})$
8. $(16, 120°, 30°)$
9. $(14, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

จงหาพิกัดทรงกลมของจุดซึ่งมีพิกัดในระบบพิกัดฉากเป็น

10. $(-5\sqrt{3}, 5, 0)$
11. $(4, 4, 4\sqrt{6})$
12. $(-1, -1, -1)$

จงเปลี่ยนสมการที่กำหนดให้จากพิกัดทรงกระบอกเป็นระบบพิกัดฉาก

13. $r = 9$
14. $\theta = 135°$
15. $r = 4\cos\theta$

16. $r = 2z$

จงเปลี่ยนสมการที่กำหนดให้จากพิกัดทรงกลมเป็นระบบพิกัดฉาก

17. $\rho = 5$

18. $\phi = 60°$

19. $\rho \sin \phi \sin \theta + 2 = 0$

20. $\rho = 4 \cos \phi$

จงเขียนสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลม

21. $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

22. $x^2 + y^2 = 49$

23. $9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 25$

24. $y = 6$

25. $x^2 + y^2 = 4z^2$

26. $4x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$

27. $x^2 + y^2 = 4x$

28. จงหาไดเรคชัน โคไซน์ของเส้นที่ลากจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่มีพิกัดทรงกลมเป็น (ρ, ϕ, θ)