บทที่ 6
อนุกรมอนันต์
(Infinite Series)

6.1 อนุกรมอนันต์
(infinite series)

นิพจน์ (expression) ในรูป

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots \qquad \text{..........(6.1.1)}$$

เรียกอนุกรมอนันต์ จุดสามจุดตอนท้ายแสดงว่าพจน์ (term) มีต่อไปเรื่อยอย่างไม่จำกัดเขต (indefinitely) กล่าวได้อีกทางหนึ่งว่า สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก (positive integer) k มีพจน์ a_k สามารถเขียนผลบวกของทุกพจน์ใน (6.1.1) ซึ่งมีจำนวนอนันต์สั้น ๆ ได้ดังนี้

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{..........(6.1.2)}$$

(อ่านว่า "ผลบวกจาก $k = 1$ ถึงอนันต์ของ a_k")

เมื่อพิจารณาอย่างผิวเผินแล้วจะเห็นได้ว่าเป็นการยากหรือเป็นไปไม่ได้เลยที่จะหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ และเป็นเรื่องจริงที่มนุษย์ย่อมไม่สามารถจะทำการบวกจำนวนเวลาที่เป็นอนันต์ได้ (มีเวลาไม่พอ) นับเป็นความสำเร็จอย่างจริงจังประการหนึ่งในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นความสำเร็จที่น่าพอใจและเป็นความสำเร็จที่สมบูรณ์แบบด้วย ที่สามารถศึกษาผลบวกดังสมการ (6.1.1) และ (6.1.2) ไม่ว่าจะเป็นการศึกษาเพียงแต่นิพจน์ที่มีจำนวนจำกัดของพจน์ ความจริงแล้วในหลาย ๆ กรณีก็สามารถหาจำนวนที่เป็นผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้

ทฤษฎีบทของอนุกรมอนันต์นั้น นับว่ามีประโยชน์และมีความสวยงามในเชิงคณิตศาสตร์ ส่วนเนื้อเรื่องที่กำลังจะศึกษาอยู่นี้ เป็นเรื่องไม่ยุ่งยากอะไรเพราะวัตถุประสงค์มุ่งที่จะแนะนำทฤษฎีบทของอนุกรมอนันต์ โดยให้ศึกษาจากตัวอย่างและนำทฤษฎีบทไปใช้โดยไม่มีการพิสูจน์ทฤษฎีบท นักศึกษาจะได้พบการพิสูจน์เมื่อได้ศึกษาในขั้นสูงต่อไป ด้วยวิธีการดังกล่าว จะเป็นผลดีของนักศึกษาในการศึกษาการพิสูจน์ที่ยุ่งยากภายหลัง เพราะคุ้นเคยกับเนื้อหามาแล้ว

6.2 การลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรม

(Convergence and Divergence of Series)

พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots.. \qquad \ldots\ldots\ldots.(6.2.1)$$

ให้ S_n แทน ผลบวกของ n พจน์แรก แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2} & S_5 &= \frac{31}{32} \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= \frac{3}{4} & S_6 &= \frac{63}{64} \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= \frac{7}{8} & S_7 &= \frac{127}{128} \\
S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= \frac{15}{16} & S_8 &= \frac{255}{256},
\end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots.(6.2.2)$$

และต่อ ๆ ไป จะพบว่า S_n น้อยกว่า 1 เสมอ แต่ก็เข้าใกล้ 1 เข้าไปทุกที ขณะที่ใช้จำนวนพจน์มากขึ้น เพราะแต่ละพจน์ที่จะกำหนดในพจน์ต่อไปเท่ากับพจน์ตัวสุดท้าย บวกด้วย 1/2 ของผลต่างระหว่าง 1 กับผลบวกของทุกพจน์ที่ผ่านมา เพราะฉะนั้นจึงเป็นเหตุผลที่จะอ้างได้ว่า 1 คือ ผลบวกของอนุกรมอนันต์ (6.2.1)

ในการให้ S_n แทนผลบวกของ n พจน์แรก จึงเขียน สมการ (6.1.1) เสียใหม่ได้ว่า

$$S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \qquad \ldots\ldots\ldots.(6.2.3)$$

แต่ละเทอม a_k ของอนุกรมอนันต์เป็นจำนวนเลข

ผลบวก S_n เรียก ผลบวกย่อย (partial sums) ของอนุกรม

นิยาม 6.2.1 อนุกรม 6.1.1 กล่าวได้ว่าลู่เข้า ถ้ามีจำนวน L ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \qquad \ldots\ldots\ldots.(6.2.4)$$

จำนวน L เรียกผลบวกของอนุกรมอนันต์ ถ้าไม่มีจำนวนดังกล่าวแล้ว กล่าวได้ว่าอนุกรมลู่ออก

นิยาม 6.2.2 การลู่เข้าของลำดับ (Convergence of a Sequence) กล่าวว่า ลิมิตของ S_n ขณะที่ n ย่างเข้าสู่ (approach) ค่าอนันต์ คือ L เขียนได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

ถ้าแต่ละ $\in$ ที่เป็นบวกไม่ว่าจะเล็กเท่าไร จะมีจำนวนเต็ม N ที่สมนัย ซึ่งถ้า

$$n > N$$

แล้ว

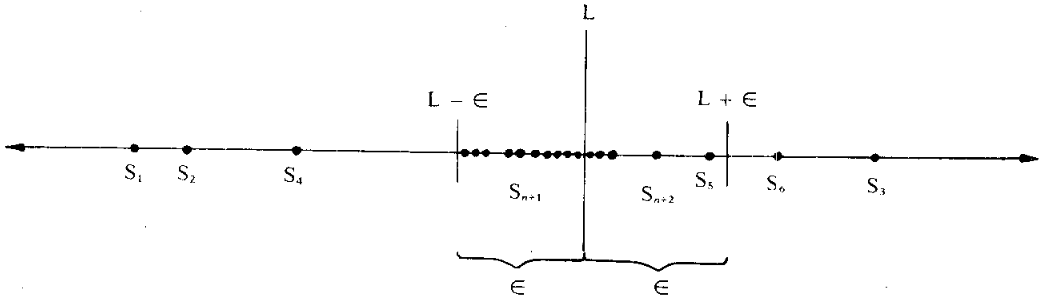
$$|L - S_n| < \in \qquad \text{..........(6.2.4)}$$

เมื่อ $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ กล่าวได้ว่าลิมิตของลำดับ คือ L ในกรณีนี้กล่าวได้ว่า ลำดับลู่เข้า และลู่เข้าสู่ลิมิต L ถ้าลำดับไม่ลู่เข้าแล้วกล่าวได้ว่าลำดับลู่ออก

อสมการ (6.2.4) สามารถเขียนในรูปแบบที่สมมูล (equivalent) กันได้ดังนี้

$$L - \in < S_n < L + \in \qquad \text{..........(6.2.5)}$$

ทั้ง (6.2.4) หรือ (6.2.5) หมายความว่า S_n อยู่ในย่าน $\in$ ($\in$-neighbor hood) ของ L เมื่อ n ใหญ่อย่างพอเพียง (sufficiently large) รูป 6.2.1 แสดงจุดบางจุดของลำดับซึ่งลู่เข้าสู่ L



รูป 6.2.1

ตัวอย่าง 6.2.1 จงกำหนด การลู่ออกหรือการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

(ก) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ (ข) $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \ldots,$

(ค) $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots,$ (ง) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$

วิธีทำ (ก) หา S_n ได้ว่า

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n}$

$= 1$

ดังนั้น (ก) ลู่เข้าและผลบวกเท่ากับ 1

(ข) แต่ละผลบวกย่อย S_n เป็นศูนย์ เพราะว่าทุกพจน์เป็นศูนย์
เมื่อ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

ดังนั้น (ข) ลู่เข้า และผลบวกเท่ากับ 0

(ค) ถ้าบวกหนึ่ง n ครั้ง ผลบวกคือ n ดังนั้น $S_n = n$
และ

$$\lim_{\nu\to\infty} S_n = \infty$$

ดังนั้น (ค) ไม่ลู่เข้าเพราะฉะนั้นต้องลู่ออก

(ง) ถ้าใช้จำนวนพจน์ที่เป็นเลขคู่ ผลบวกจะเป็นศูนย์ ถ้าใช้จำนวนคี่ ผลบวกเป็น 1 ซึ่งเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$S_{2n} = 0$ และ $S_{2n-1} = 1$

ดังนั้น จึงไม่มีจำนวน L ที่จะทำให้ผลบวกย่อยลู่เข้า ดังนั้น (ง) ลู่ออก

ตัวอย่าง 6.2.1 สำหรับอนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ จงหาค่าที่เหมาะสม N ในนิยาม 6.2.2 (ก) เมื่อ $\in = 1/10$, (ข) เมื่อ $\in = 1/100$ และ (ค) เมื่อ $\in = 1/10^k$

วิธีทำ ได้ทราบแล้วว่า $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ และ $L = 1$

อาศัย อสมการ (6.2.4) จะได้ว่า

$$|L - S_n| \equiv |1 - (1 - \frac{1}{2^n})| = \frac{1}{2^n} < \in \qquad \text{..........(6.2.6)}$$

(ก) ถ้า $\in = \frac{1}{10}$ แล้ว ตาม (6.2.6) จะได้ว่า

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10} \text{ หรือ } 10 < 2^n$$

สิ่งนี้เป็นจริง ถ้า $n \geqslant 4$ ดังนั้น จึงเลือก $N = 3$ หรือจำนวนเต็มใด ๆ ที่มากกว่านี้ได้

(ข) ถ้า $\in = 1/100$ แล้ว ตาม (6.2.6.) จะได้

$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$ หรือ $100 < 2^n$

อสมการเป็นจริง ถ้า $n \geqslant 7$ ดังนั้น จึงสามารถเลือก $N = 6$ หรือจำนวนเต็มใด ๆ ที่มากกว่าได้

(ค) ตามแบบอย่างข้างต้น จะได้ว่า

$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^k}$ หรือ $10^k < 2^n$

เพราะว่า $10 < 16 = 2^4$

ฉะนั้น $10^k < 2^{4k}$

นั่นคือ $N = 4k$ เป็นค่าที่เหมาะสม

แบบฝึกหัด 6.2

สำหรับ ข้อ 1 ถึง 10 จงหานิพจน์ทั่วไปในรูปฟังก์ชันของ k โดยในแต่ละข้อได้กำหนดพจน์ต้น ๆ ให้ดังนี้

1. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$

2. $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \cdots.$

3. $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{19} + \cdots.$

4. $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}$

5. $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \cdots.$

6. $36 + \frac{49}{4} + \frac{64}{27} + \frac{81}{256} + \cdots.$

7. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{11} + \frac{2}{9} + \frac{5}{27} + \cdots.$

8. $\frac{3}{2} + 1 + \frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \frac{7}{32} + \ldots$

9. $3 + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \frac{6}{17} + \frac{3}{13} + \cdots.$

10. $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{4}{105} + \frac{5}{168} + \cdots.$

สำหรับ ข้อ 11 ถึง 14 จงพิจารณาดูว่าอนุกรมอนันต์มีผลบวกย่อยหรือไม่ ถ้ามีจงหาผลบวกย่อยและหาผลบวกของอนุกรมนั้นด้วย

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}.$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k-1}}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$

สำหรับ ข้อ 15 ถึง 18 จงหาค่าที่เหมาะสมของ N ในนิยาม 6.2.2 เมื่อ ก) $\epsilon = 1/100$ และ ข) $\epsilon = 1/10^k$ สำหรับอนุกรมในแต่ละข้อ ดังนี้

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$, $S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$, $L = \frac{1}{4}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k-1}}$, $S_n = \frac{2}{7}\left(1 - \frac{1}{2^{3n}}\right)$, $L = \frac{2}{7}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)}$, $S_n = 2 - \frac{4}{n+2}$, $L = 2$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$, $S_n = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$, $L = \frac{1}{4}$

6.3 อนุกรมเรขาคณิต

(The Geometric Series)

อนุกรม

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + \ldots$$

ซึ่งมีอัตราส่วนของแต่ละพจน์กับพจน์ก่อนเท่ากับ r เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งเมื่อเทียบกับรูปแบบของอนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots$ แล้ว

$a_1 = a$, $a_2 = ar$, $a_3 = ar^2$ และพจน์ทั่วไป $a_k = ar^{k-1}$ จะสังเกตเห็นได้ว่า กำลังของ r นั้นน้อยกว่าดรรชนีล่าง (subscript) อยู่หนึ่งเสมอ จึงเขียนได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.1)$$

จะลดดรรชนีของพจน์ที่เริ่มต้นโดย 1 และเขียนดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^{k} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k} + \ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.2)$$

ซึ่งทั้งสองอนุกรมนี้ยังคงเป็นอนุกรมเดียวกัน แต่การเขียนแสดงพจน์ ที่ n จะต่างกัน

ทฤษฎีบท 6.3.1 ถ้า $a \neq 0$ และ $-1 < r < 1$ อนุกรมเรขาคณิต (6.3.2) ลู่เข้า และผลบวกกำหนดโดย

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^{k} = \frac{a}{1-r} \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.3)$$

ถ้า $a = 0$ อนุกรมลู่เข้าสู่ผลบวก 0 สำหรับทุก r

ในกรณีอื่น ๆ อนุกรมเรขาคณิตลู่ออก

พิสูจน์ ถ้า $a = 0$ ทุกพจน์เป็นศูนย์ ดังนั้น อนุกรมลู่เข้าสู่ผลบวกศูนย์ ถ้า $a \neq 0$ และ $r = 1$ แล้ว อนุกรมลู่ออก

สมมุติว่า $a \neq 0$ และ $r \neq 1$

ให้ S_n เป็นผลบวกของ n พจน์แรก แล้ว

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.4)$$

คูณทั้งสองข้างของ (6.3.4) ด้วย r จะได้

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^{n} \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.5)$$

นำสมการ (6.3.5) ไปลบออกจากสมการ (6.3.4) ได้

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

เมื่อ $r \neq 1$ สามารถหารทั้งสองข้างด้วย $(1 - r)$ ได้

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \text{..........(6.3.6)}$$

หาลิมิต (6.3.6) ขณะที่ $n \to \infty$ ถ้า $|r| < 1$ พจน์ $r^n \to 0$
ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

นั่นคือ เมื่อ $a \neq 0$ และ $-1 < r < 1$ อนุกรมเรขาคณิต (6.3.2) ลู่เข้าสู่ $\frac{a}{1 - r}$

พิจารณาสมการ (6.3.3)

ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $|r|^n \to \infty$ ขณะที่ $n \to \infty$

ถ้า r เป็นลบ r^n ให้ค่าลบเมื่อ n เป็นเลขคี่ และเป็นจำนวนบวก เมื่อ n เป็นเลขคู่ แต่ค่าสัมบูรณ์ของทั้งสองกรณีเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตขณะที่ n เพิ่มขึ้น ดังนั้น ปริมาณ S_n ไม่มีลิมิต

ถ้า $r = -1$ แล้ว $S_{2n} = 0$ และ $S_{2n+1} = a$

ในกรณีนี้อนุกรมก็ลู่ออกด้วย

หมายเหตุ การพิจารณา ทฤษฎี 6.3.1 พิจารณากรณีต่าง ๆ ดังนี้

1) $a \neq 0$ และ $|r| < 1$

2) $a = 0$

3) $a \neq 0$ และ $r = 1$

4) $a \neq 0$ และ $|r| > 1$

5) $a \neq 0$ และ $r = -1$

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาผลบวกของแต่ละอนุกรมดังต่อไปนี้

(ก) $\sum_{k=0}^{\infty} 15\left(\frac{2}{7}\right)^k$ (ข) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^{k+2}}$

(ค) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^k$ (ง) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{11}\right)^k$

วิธีทำ เมื่อแต่ละอนุกรมที่ต้องการให้หาผลบวกเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ $-1 < r < 1$ ดังนั้น จึงสามารถนำสูตรในสมการ (6.3.3) มาใช้ได้

(ก) เมื่อ $a = 15$ และ $r = \frac{2}{7}$ ดังนั้น

$$L = \frac{15}{1 - \frac{2}{7}} = 15 \cdot \frac{7}{5} = 21$$

(ข) เพราะว่า $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^{k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^2} \left(\frac{3}{5}\right)^k$

นั่นคือ $a = \frac{1}{5^2}$ และ $r = \frac{3}{5}$ ดังนั้น

$$l = \frac{1/5^2}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{10}$$

(ค) เพราะว่า ผลบวกเริ่มต้นด้วย $k = 2$ ดังนั้น เทอมแรกจึงเป็น $(4/7)^2$ เมื่อ $a = 1$ และ $r = 4/7$ จึงได้

$$L = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{16}{49} \cdot \frac{7}{3} = \frac{16}{21}$$

หรือจะพิจารณา L ในรูปนี้ก็ได้

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^k - \sum_{k=0}^{1} \left(\frac{4}{7}\right)^k$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{4}{7}} - \left(\frac{4}{7}\right)^0 - \left(\frac{4}{7}\right)^1$$

$$= \frac{7}{3} - 1 - \frac{4}{7}$$

$$= \frac{49 - 21 - 12}{21}$$

$$= \frac{16}{21}$$

(ง) เมื่อ $a = 1$ และ $r = -7/11$

ดังนั้น $L = \dfrac{1}{1 + \frac{7}{11}} = \dfrac{11}{18}$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาเศษส่วนตรรกยะในพจน์ต่ำสุดที่สมนัยกับจำนวนเศษส่วนในรูปทศนิยมไม่รู้จบ 0.31555...

วิธีทำ ความหมายของเศษส่วนในรูปทศนิยมไม่รู้จบ คือ

$$0.31555\ldots = \frac{31}{100} + 5\left(\frac{1}{1,000} + \frac{1}{10,000} + \frac{1}{100,000} + \ldots\right)$$

$$= \frac{31}{100} + \frac{5}{1,000} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

ดังนั้น

$$0.31555\ldots = \frac{31}{100} + \frac{5}{1,000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{31}{100} + \frac{5}{1,000} \cdot \frac{10}{9}$$

$$= \frac{9.31 + 5}{900} = \frac{279 + 5}{900} = \frac{284}{900}$$

$$= \frac{71}{225}$$

แบบฝึกหัด 6.3

อนุกรมอนันต์ในข้อ 1 ถึง 12 นั้น อนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมด้วย

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{2}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$

6. $\sum_{k=}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^k$

8. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)^k$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)^k$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{2}{9}\right)^k$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{100.4^k}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4 - \sqrt{10})^k}$

ในปัญหาข้อ 13 ถึง 16 จงหาเศษส่วนตรรกยะในพจน์ต่ำที่สุดให้มีค่าเท่ากับ ทศนิยมไม่รู้จบเวียนซ้ำ (ขีดข้างบนแสดงส่วนที่เวียนซ้ำ)

13. $0.13\overline{33}\ldots$

14. $0.61\overline{11}\ldots$

15. $0.8484\overline{84}\ldots$

16. $0.9189189\overline{18}\ldots$

17. ลูกบอลถูกทิ้งจากจุดสูง a ฟุต เหนือพื้นผิวแบนราบ แต่ละครั้งที่ลูกบอลกระทบพื้น หลังจากตกลงมาเป็นระยะทาง h จะกระเด้งขึ้น rh เมื่อ r เป็นเศษส่วนที่น้อยกว่าหนึ่ง จงหาระยะทางรวมที่ลูกบอลเดินทางจนกระทั่งหยุดนิ่ง

18. ลูกบอลถูกทิ้งจากที่สูง 10 ฟุต ลงบนถนนคอนกรีต แต่ละครั้งที่ลูกบอลกระทบพื้นจนกระเด้งสูง $\frac{3}{4}h$ เมื่อ h เป็นความสูงก่อนที่ลูกบอลจะกระทบพื้นแต่ละครั้ง จงหาระยะทางรวมที่ลูกบอลเดินทางจนกระทั่งหยุดนิ่ง

6.4 พหุนาม

(Polynomials)

โดยทั่ว ๆ ไปจะเขียนพหุนามในรูป

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n \qquad \ldots\ldots(6.4.1)$$

นั่นก็คือในพจน์ของกำลังของ x แต่ก็สามารถเขียนพหุนามในกำลังของ $(x - a)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวได้ในกรณีนี้ P (x) จะอยู่ในรูป

$$P(x) = b_0 + b_1(x - a)^2 + \ldots\ldots + b_n(x - a)^n \qquad \ldots\ldots(6.4.2)$$

เรียก (6.4.2) ว่าการขยาย (expansion) ของ P(x) ในเทอมของ $x-a$ ซึ่งเป็นการขยายรอบจุด $x = a$ จุด a เรียกจุดศูนย์กลางของการขยายส่วน (6.4.1) เป็นการขยายรอบจุด $x = o$ หรือที่จุดกำเนิดนั่นเอง

ตัวอย่าง 6.4.1 จงขยายพหุนาม $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 11$ รอบจุด $x = 2$ จะต้องหาสัมประสิทธิ์ b_k

$$11 + 3x - x^2 + x^3 \equiv b_0 + b_1(x - 2) + b_2(x - 2)^2 + b_3(x - 2)^3$$

ขยายพจน์ทางด้านขวามือได้

$$\begin{aligned}
b_3(x-2)^3 &= b_3x^3 - 6b_3x^2 + 12b_3x - 8b_3, \\
b_2(x-2)^2 &= \phantom{b_3x^3 - {}} b_2x^2 - 4b_2x + 4b_2, \\
b_1(x-2) &= \phantom{b_3x^3 - 6b_3x^2 + {}} b_1x - 2b_1, \\
b_0 &= \phantom{b_3x^3 - 6b_3x^2 + 12b_3x - {}} b_0,
\end{aligned}$$

นำมาบวกกันจะได้

$$x^3 - x^2 + 3x + 11 = b_3x^3 + (b_2 - 6b_3)x^2 + (b_1 - 4b_2 + 12b_3)x + (b_0 - 2b_1 + 4b_2 - 8b_3).$$

และสัมประสิทธิ์ของ x ที่มีกำลังเท่ากันต้องเท่ากันดังนั้น

$$\begin{aligned}
1 &= b_3, \\
-1 &= b_2 - 6b_3, \\
3 &= b_1 - 4b_2 + 12b_3 \\
11 &= b_0 - 2b_1 + 4b_2 - 8b_3
\end{aligned}$$

แก้สี่สมการและตัวไม่ทราบค่าสี่ตัว จะได้ว่า

$b_3 = 1\ b_2 = 5,\ b_1 = 11,\ b_0 = 21$

เพราะฉะนั้น

$$11 + 3x - x^2 + x^3 = 21 + 11(x-2) + 5(x-2)^2 + (x-2)^3 \qquad \text{..........(6.4.3)}$$

ทฤษฎีบท 6.4.1 พหุนามใด ๆ

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

มีรูปแบบการขยายได้อย่างเดียว (unique) คือ

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots.. + b_n(x-a)^n$$

รอบจุดที่กำหนดให้ใด ๆ

การพิสูจน์จะเป็นการขยายไม่สู่รูปทั่วไปของวิธีการที่ได้ใช้พิสูจน์ในตัวอย่าง 6.4.1 ซึ่งโดยทั่วไปก็จะมี $n + 1$ สมการเชิงเส้นในตัวไม่รู้ค่า $b_0, b_1 b_2, \ldots, b_n$ และตัวรู้ค่า $a, a_0, a_1, \ldots, a_n$ และสมการเหล่านี้ก็สามารถหาค่า b_k ได้และเป็นค่าที่เป็นได้อย่างเดียว

ทฤษฎีบท 6.4.2 สัมประสิทธิ์ใน

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

กำหนดโดย

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{K!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n,$$

ให้ $x = 0$ แล้ว

$P(0) = a_0 + a_1.0 + \ldots + a_n.0 = a_0$

หาอนุพันธ์ของ $P(x)$ จะได้

$$\frac{dP}{dx} = P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}. \quad (6.4.4)$$

ให้ $x = 0$ ใน (6.4.4) จะได้ $P'(0) = a_1$

หาอนุพันธ์ของ (6.4.4) จะได้

$$\frac{d^2P}{dx^2} = P''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2},$$

ให้ $x = 0$ จะได้ $P''(0) = 2a_2$ หรือ $a_2 = P''(0)/2$ กระบวนการนี้สามารถกระทำต่อไปได้เรื่อย

ถ้า $k \leqslant n$ แล้ว อนุพันธ์ที่ k คือ

$P^k(x) = k!a_k +$ พจน์ใน x ด้วยกำลังบวกและให้ $x = 0$ จะได้ $a_k = P^k(0)/k!$

ทฤษฎีบท 6.4.3 สัมประสิทธิ์ใน

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n$$

กำหนดโดย

$$b_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \ldots (6.4.5)$$

ทฤษฎีบทนี้ทำให้การแก้ปัญหาในตัวอย่างที่ 6.4.1 สั้นเข้า เมื่อ

$$P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 11, \quad P(2) = 8 - 4 + 6 + 11 = 21,$$
$$P'(x) = 3x^2 - 2x + 3, \quad P'(2) = 12 - 4 + 3 = 11,$$

$P''(x) = 6x - 2, \quad P''(2) = 12 - 2 = 10,$

$P'''(x) = 6, \quad P'''(2) = 6 = 6,$

อาศัย (6.4.5) จึงได้

$$b_0 = P(2) = 21,$$

$$b_1 = P'(2) = 11,$$

$$b_2 = \frac{P''(2)}{2!} = \frac{10}{2} = 5,$$

$$b_3 = \frac{P'''(2)}{3!} = \frac{6}{6} = 1$$

นั่นคือ

$$11 + 3x - x^2 + x^3 = 21 + 11(x-2) + 5(x-2)^2 + (x-2)^3$$

แบบฝึกหัด 6.4

1. จงหาพหุนามในรูป $(x - a)$ สำหรับ $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ และ $a = 1$.
2. จงหาพหุนามในรูป $(x - a)$ สำหรับ $P(x) = 3 + 7 + x - 4x^2 - x^5$ และ $a = -2$.
3. จงหาพหุนามในรูป $(x - a)$ สำหรับ $P(x) = 1 - 4x - 6x^2 + 32x^3$ และ $a = 1/2$.
4. จงหาพหุนามในรูป $(x - a)$ สำหรับ $P(x) = 12x^2 + 8x^3$ และ $a = -3/2$
5. จงหาการขยายของ $(x - 1)^6 + (x + 1)^6$ รอบจุด $x = 0$
6. จงหาพหุนาม $P(x)$ ซึ่ง $P(2) = 1, P'(2) = 5, P''(2) = 8\sqrt{3}, P'''(2) = 48\pi$ และพหุนามนี้มีเพียงพหุนามเดียวใช่หรือไม่
7. จงขยายพหุนาม $(2x + 1)^2$ รอบจุด $x = -1$

6.5 อนุกรมกำลัง

(Power Series)

เป็นการสะดวกที่จะคิดว่า อนุกรมกำลังเปรียบเสมือนพหุนามลำดับขั้นอนันต์ (infinite degree) อนุกรมกำลังขยายรอบจุดกำเนิดจะมีรูปแบบดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(6.5.1)$$

ขยายรอบจุด $x = a$ มีรูปแบบเป็น

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_k(x-a)^k + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(6.5.2)$$

อนุกรมกำลังของรูปแบบ (6.5.1) เรียก อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series) รูปแบบ (6.5.2) เรียก อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ซึ่งอนุกรมแมคลอรินก็คืออนุกรมเทย์เลอร์เมื่อ $a = 0$ นั่นเอง ทั้ง (6.5.1) และ (6.5.2) จะมีความหมายสำหรับค่า x ทั้งหลายที่ทำให้อนุกรมลู่เข้าเท่านั้น

นิยาม 6.5.1 เซตการลู่เข้า (Convergence Set)

ให้

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots$$

เป็นอนุกรมที่แต่ละพจน์เป็นฟังก์ชันของ x
เซตของ x ทั้งหลายที่ทำให้อนุกรมลู่เข้าเรียก
เซตการลู่เข้าสำหรับอนุกรม

ในอนุกรมแมคลอริน $u_k(x)$ คือ $a_k x^k$ และในอนุกรมเทย์เลอร์ $u_k(x)$ คือ $a_k(x-a)^k$ เราจะได้ศึกษาต่อไปในภายหน้าว่า สำหรับอนุกรมกำลังนั้น เซตการลู่เข้าเป็นช่วงเสมอ และจุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลังอยู่ที่ $x = a$ ซึ่งเป็น จุดกึ่งกลางของช่วงของการลู่เข้า (ในกรณีพิเศษ เซตการลู่เข้าอาจจะเป็นจุดหรืออาจจะประกอบด้วยจำนวนจริงทั้งหมด (ช่วงอนันต์) ก็ได้)

ทฤษฎีบท 6.5.1 อนุกรมเรขาคณิต

$$\sum_{k=0}^{\infty} Ax^k = A + Ax + A_2x^2 + \ldots + Ax^k + \qquad \ldots\ldots\ldots(6.5.3)$$

$$= A(1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots)$$

ลู่เข้าสำหรับทุก x ในช่วง $-1 < x < 1$ และมีผลบวกเป็น

$$\sum_{k=0}^{\infty} Ax^k = \frac{A}{1-x} \qquad \ldots\ldots\ldots(6.5.4)$$

แทนค่า x ในสมการ (6,5,4) ด้วย x − a จะได้ทฤษฎีบทที่สมมูลกันสำหรับอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับการลู่เข้ามีในช่วง

$$-1 < x - a < 1$$

หรือ

$$a - 1 < x < a + 1$$

นั่นคือ ถ้า x อยู่ในช่วงด้วยจุดศูนย์กลางที่ a และความยาว 2 แล้วอนุกรมเทย์เลอร์กำหนดโดยทางซ้ายของ

$$\sum_{k=2}^{\infty} A\,(x - a)^k = \frac{A}{1 + a - x} \qquad \text{..........(6.5.5)}$$

ลู่เข้าสู่ผลบวกที่แสดงทางด้านขวาของ (6.5.5)

ทฤษฎีบท 6.5.2 ถ้ามีอนุกรมกำลังสองชุดคือ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots \qquad \text{..........(6.5.6)}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + k a_k x^k + \ldots \qquad \text{..........(6.5.7)}$$

ทั้งสองอนุกรมลู่เข้าสำหรับ $-r < x < r$ แล้วสำหรับแต่ละ x ในช่วงนั้นอนุกรมกำลัง (6.5.7) ลู่เข้าสู่ $f'(x)$

การพิสูจน์จะได้ศึกษาในขั้นต่อไปในที่นี้จะได้ศึกษาว่าจะนำทฤษฎีบทนี้ไปใช้อย่างไรให้ $x = 0$ ใน (6.5.6) จะได้ $f(0) = a_0$ ให้ $x = 0$ ใน (6.5.7) จะได้ $f'(0) = a_1$ ประยุกต์ทฤษฎีบท 6.5.2 ในสมการ (6.5.7) จะได้

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\, a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots,$$ และให้

$x = 0$ จงพบว่า $f''(0) = 2a_2$ หรือ $a_2 = f''(0)/2$ ทำโดยวิธีการนี้ต่อไปก็จะสามารถกำหนดแต่ละตัวของสัมประสิทธิ์ a_k ใน (6.5.6) ซึ่งสูตรโดยทั่วไปกำหนดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.5.3 ถ้าอนุกรม

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x \ldots + a_k x^k + \ldots \qquad \text{..........(6.5.6)}$$

และอนุกรมทั้งหมดที่ได้โดยการหาอนุพันธ์ (6.5.6) ลู่เข้าสำหรับ $-r < x < r$ (เมื่อ $r > 0$) แล้ว

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \ k = 0,1,2,\ldots \qquad \text{..........(6.5.8)}$$

โดยการพิสูจน์แบบเดียวกันจะให้ทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกันสำหรับอนุกรมเทย์เลอร์

ทฤษฎีบท 6.5.4 ถ้าอนุกรม

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots$$

และทุกอนุกรมที่ได้รับโดยการหาอนุพันธ์ ลู่เข้าสำหรับ

$a - r < x < a + r$ (เมื่อ $r > o$) แล้ว

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, k = 0,1,2,\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(6.5.9)$$

ตัวอย่าง 6.5.1 สมมุติว่า e^x มีการขยายเช่นเดียวกับอนุกำลังรอบจุดกำเนิดจงหาอนุกรมกำลังนั้น

วิธีทำ ตามสมมุติฐานที่กำหนดให้

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

เมื่ออนุกรมและอนุพันธ์ของอนุกรมทั้งหมดลู่เข้าสำหรับบางช่วงที่เหมาะสม คำนวณอนุพันธ์สำหรับ e^x อย่างต่อเนื่องเราได้

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = e^0 = 1,$$

$$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = e^0 = 1,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(k)}(x) = e^x, \qquad f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

และต่อไปเรื่อย ๆ ดังนั้นโดยสูตร (6.5.8) จะได้ว่า $a_k = 1/k!$

สำหรับ $k = 0,1,2\ldots$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรีนสำหรับ e^x คือ

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \qquad \ldots\ldots\ldots(6.5.10)$$

ตัวอย่าง 6.5.2 สมมุติว่า $1/(2-x)^2$ มีอนุกรมแมคลอรีน จงหาอนุกรมนี้

วิธีทำ คำนวณหาอนุพันธ์ต่าง ๆ ที่จุด $x = 0$ และใช้สมการ (6.5.8)

$$f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}, \quad f(0) = \frac{1}{4}, \qquad a_0 = \frac{1}{4},$$

$$f'(x) = \frac{2.1}{(2-x)^3}, \quad f'(0) = \frac{2!}{2^3}, \qquad a_1 = \frac{2}{2^3},$$

$$f''(x) = \frac{3.2.1}{(2-x)^4}, \quad f''(o) = \frac{3!}{2^4}, \quad a_2 = \frac{3}{2^4}$$

และต่อไปเรื่อย ๆ และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction)

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k+1)!}{(2-x)^{k+2}}, \quad f^{(k)}(0) = \frac{(k+1)!}{2^{k+2}}, \quad a_k = \frac{k+1}{2^{k+2}},$$

สำหรับ $k = 0,1,2,\ldots$ แล้ว

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\right]$$

เมื่อศึกษาต่อไปอีกก็จะทราบว่าอนุกรมลู่เข้าสำหรับ $-2 < x < 2$.

แบบฝึกหัด 6.5

สำหรับข้อ 1 ถึง 6 จงหาอนุกรมแมคลอรีนสำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้

1. e^{2x}. 2. $\ln(1 + x)$.

3. $\sin x$. 4. $\ln(1/1 - x)$.

5. $\cos x$. 6. $1/(1 - 3x)^3$.

สำหรับข้อ 7 ถึง 9 จงหาอนุกรมเทเลอร์ เมื่อกำหนดฟังก์ชันและจุดที่ใช้ในการขยายมาให้

7. e^x, $a = 2$. 8. $1/x$, $a = 3$

9. $\ln x$, $a = 3$.

6.6 การดำเนินการกับอนุกรมกำลัง

(Operations with Power Series)

ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม การดำเนินการทางคณิตศาสตร์มาตรฐาน สามารถประยุกต์ใช้กับอนุกรมอนันต์ได้

ตัวอย่าง 6.6.1 จงหาการขยายของแมคลอรีนสำหรับ $1/(1 + x^3)$.

วิธีทำ ถ้าจะพยายามหาสูตรทั่วไปสำหรับอนุพันธ์ครั้งที่ k สำหรับฟังก์ชันนี้ อาจจะไม่ประสบความสำเร็จ เพราะอนุพันธ์ในลำดับยิ่งสูงขึ้นเท่าไรก็ยิ่งยุ่งยากขึ้นทุกที แต่ถ้าใช้อนุกรมเรขาคณิตโดยใช้ตัวแปร u แทน x เมื่อ

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k = 1 + u + u^2 + \ldots + u^k + \ldots, \qquad \ldots\ldots(6.6.1)$$

แทนค่า u ด้วย $-x^3$ จะได้อนุกรมแมคลอรีน ตามต้องการ

$$\frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6.6.2)$$

$$= 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots + (-1)^k x^{3k} + \ldots.$$

เมื่ออนุกรมใน (6.6.1) ลู่เข้าสำหรับ $-1 < u < 1$ อนุกรมใน (6.6.2) จะลู่เข้าสำหรับ $-1 < -x^3 < 1$ นั่นคือสำหรับ $-1 < x < 1$

ตัวอย่าง 6.6.2 จงหาอนุกรมแมคลอรีนสำหรับ $x^2 \cosh x$

วิธีทำ การหาอนุพันธ์ก็ใช้ได้แต่อาจจะมีวิธีอื่นที่ดีกว่า เมื่อทราบอนุกรมสำหรับ e^x แล้วซึ่ง

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6.6.3)$$

แทนค่า x ด้วย $-x$ ใน (6.6.3) จะพบว่า

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6.6.4)$$

ถ้านำ (6.6.3) และ (6.6.4) บวกกัน x ที่มีกำลังคี่จะหมดไปนั่นคือ

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

คูณทั้งสองข้างด้วย x^2 จะได้

$$x^2\cosh x = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{2k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k-2)!}$$

(ทั้งสองรูปแบบทางขวาต่างเป็นที่ยอมรับ)

ตัวอย่าง 6.6.3 จงหาอนุกรมแมคลอรีนสำหรับ $1/(1-x)^3$.

วิธีทำ อาศัยอนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างสองครั้งโดยเทียบกับ x ดังนั้น

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + kx^{k-1} + \dots$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = 2 + 6x + 12x^2 + \dots + k(k-1)x^{k-2} + \dots$$

นำ 2 หารตลอดก็จะได้อนุกรมที่ต้องการ

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2} x^{k-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)}{2} x^k$$

อนุกรมนี้มีช่วงของการลู่เข้าเช่นเดียวกับอนุกรม $1/(1-x)$ คือ $-1 < x < 1$

ตัวอย่าง 6.6.4 จงหาอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

วิธีทำ ด้วยการอาศัยอนุกรมอนันต์ จะทำให้แก้ปัญหาได้โดยง่าย

แทน x โดย $-x^2$ ใน (6.6.3) ดังนั้น

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \quad \text{..........(6.6.5)}$$

แล้วอินทิเกรตทั้งสองข้างของ (6.6.5) จะได้

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)}\Big|_0^1 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \Big|_0^1$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0.747$$

แบบฝึกหัด 6.6

แบบฝึกหัดนี้เป็นการใช้การดำเนินการที่เหมาะสม เช่น การลบ การบวก การคูณ การหาอนุพันธ์ และการอินทิเกรต กับ อนุกรมที่ทราบค่าแล้ว

ในข้อ 1 ถึง 7 จงหาอนุกรมแมคลอรีนสำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้

1. $x \sinh x$. 2. $\sin x^2$

3. $1/(1 - x)^4$. 4. $(1 + x)/(1 - x)$.

5. $x \cos \sqrt{x}$. 6. $1 (1 + x^2)$

7. $x/ (1 - x)^2$

ในข้อ 8 ถึง 10 จงใช้สามพจน์แรกที่ไม่เป็นศูนย์ของอนุกรมกำลังประมาณค่าอินทิกรัลที่กำหนดให้ โดยให้คำตอบเป็นทศนิยมสามตำแหน่ง

8. $\int_0^1 \sin x^3 \, dx$ 9. $\int_0^1 x^2 \cos \sqrt{x} \, dx$

10. $\int_0^{1/4} e^{x^2} \, dx$

11. จงแสดงว่าอนุพันธ์ของอนุกรมแมคลอรีน สำหรับ $\sin x$ ให้อนุกรมแมคลอรีนสำหรับ $\cos x$ อยากทราบว่าเมื่อหาอนุพันธ์ต่อไปอีกครั้งหนึ่งจะได้อะไร

12. จงแสดงว่าอนุพันธ์ของอนุกรมสำหรับ e^x เป็นอนุกรมเดิม