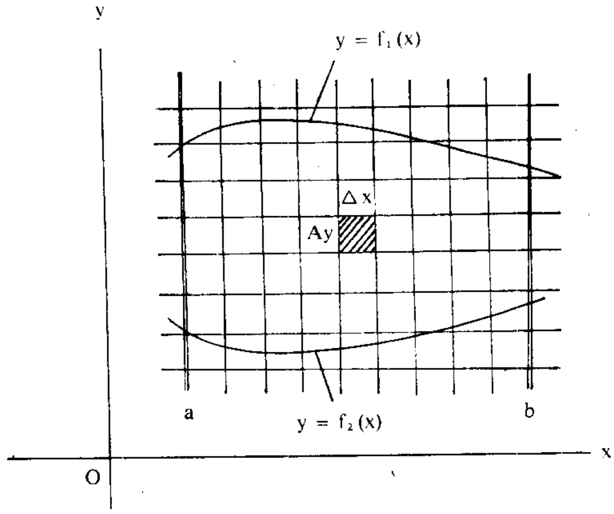
บทที่ 5
อินทิกรัลหลายชั้น
(Multiple Integrals)

5.1 อินทิกรัลสองชั้น
(Double integrals)

สัญกรณ์ (notation)

$$\int_A\int F(x, y)\, dA \qquad \text{..........(5.1.1)}$$

เป็นเครื่องหมายใช้แทนอินทิกรัลสองชั้นเหนือบริเวณ A ของฟังก์ชัน F (x, y) บริเวณ A ปกคลุมโดยตารางที่เกิดจากการตัดกันของเส้นขนานกับแกน x และแกน y ดังรูป 5.1.1



รูป 5.1.1

บริเวณ A มีขอบเขตด้านบนเป็นเส้นโค้ง $y = f_2(x)$ ด้านล่าง $y = f_1(x)$ ด้านซ้ายโดยเส้นตรง $x = a$ และด้านขวาโดย $x = b$ เส้นขนานกับแกนทั้งสองแบ่งระนาบออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ มีพื้นที่

$$\Delta A = \Delta x \Delta y = \Delta y \Delta x \qquad \text{..........(5.1.2)}$$

พื้นที่ชิ้นเล็ก ๆ เหล่านี้บ้างก็อยู่ภายนอกบ้างก็อยู่ภายในบริเวณที่กำหนดให้ และก็ยังมีบางส่วนที่ถูกตัดโดยขอบของบริเวณ จะไม่สนใจพื้นที่ชิ้นเล็ก ๆ ที่อยู่ภายนอกบริเวณ และอาจจะนับหรือไม่นับชิ้นที่มีบางส่วนอยู่ภายใน แต่จะพิจารณาเฉพาะ ΔA ที่อยู่ภายในอย่างสมบูรณ์ สมมุติว่ากำหนดสมาชิก ΔA ที่อยู่ภายในบริเวณเป็น

$$\Delta A_1,\ \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n \qquad \text{..........(5.1.3)}$$

และให้ (x_k, y_k) เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ใน ΔA_k จึงเขียนผลรวมได้ว่า

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k)\, \Delta A_k \qquad \text{..........(5.1.4)}$$

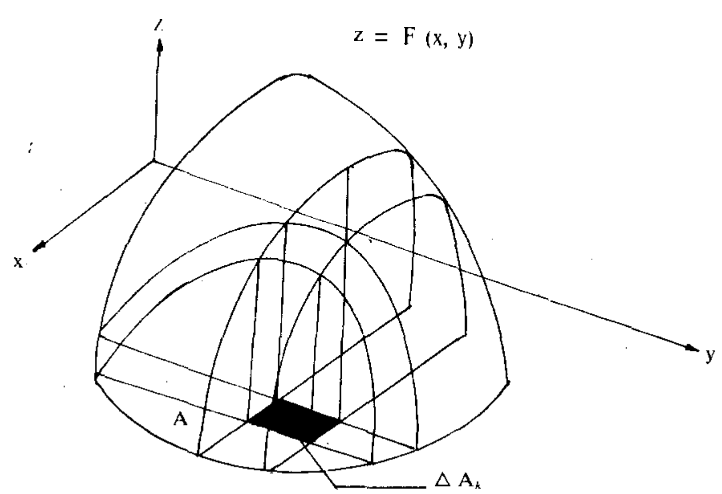
ถ้าฟังก์ชัน $F(x, y)$ ต่อเนื่องตลอด A และเส้นโค้งที่เป็นขอบของ A ต่อเนื่อง และมีความยาวรวมจำกัด แล้วเมื่อตารางที่เกิดจากการตัดกันของเส้นที่ขนานกับแกน x และแกน y ถี่ขึ้นนั่นคือ Δx และ Δy เข้าสู่ศูนย์ลิมิต

$$I = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k)\, \Delta A_k \qquad \text{..........(5.1.5)}$$

มีอยู่ (exist) และลิมิตนี้แสดงโดยสัญกรณ์ในสมการ (5.1.1)

$$\int_A\!\!\int F(x, y)\, dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k)\, \Delta A_k \qquad \text{..........(5.1.6)}$$

อินทิกรัลสองชั้น (5.1.1) สามารถแปลความหมายเสมือนปริมาตรในกรณีที่ $F(x, y)$ เป็นบวก สมมุติว่าบริเวณ A เป็นฐานของทรงสามมิติ (รูป 5.1.2)



รูป 5.1.2

ซึ่งส่วนสูงเหนือจุด (x, y) กำหนดโดย

$$z = F(x, y)$$

จะเห็นว่าพจน์

$$F(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

แทนปริมาตรโดยประมาณของทรงสามมิติบนฐาน ΔA_k ผลบวก S_n ใน (5.1.4) ให้ค่าโดยประมาณของปริมาตรรวมของทรงสามมิติ และลิมิตของสมการ (5.1.5) ให้ปริมาตรที่แน่นอน แต่ก็นับว่ายุ่งยากในการหาค่า

ในความเหมาะสมที่จะปฏิบัติจึงใช้อินทิกรัลซ้ำ (iterated integrals)

$$\int_A\int F(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{..........(5.1.7)}$$

หรือ

$$\int_A\int F(x, y)\, dy\, dx$$

หาค่าของอินทิกรัลสองชั้นใน (5.1.1) เพราะต่างก็มีค่าเท่ากันและเท่ากันกับ $\int_A\int F(x, y)\, dA$ ด้วย

การหาค่าอินทิกรัลซ้ำ

$$\int_A\int F(x, y)\, dy\, dx$$

ดำเนินการดังนี้

ก) อินทิเกรต $\int F(x,y)\, dy$ โดยเทียบกับ y ก่อน (ให้ x ตรึงกับที่) เป็นการประเมินค่าผลการอินทิกรัลระหว่างลิมิต $y = f_1(x)$ และ $y = f_2(x)$ และแล้ว

ข) อินทิเกรตผลของ ก) โดยเทียบกับ x ระหว่างลิมิต $x = a$ และ $x = b$ นั่นก็คือ เริ่มด้วยการหาอินทิกรัลชั้นในสุดก่อน แล้วจึงอินทิเกรตชั้นต่อมาดังนี้

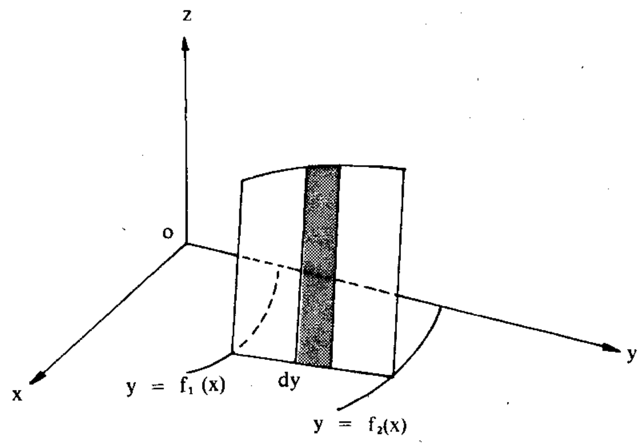
$$\int_A\int F(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y)\, dy \right) dx \qquad \text{..........(5.1.8)}$$

โดยให้ x เสมือนค่าคงตัวขณะที่ทำการอินทิเกรต y

พิจารณาสมการ (5.1.8) ในรูปเรขาคณิต โดยพิจารณาทรงสามมิติมีฐานเหนือบริเวณ A ของระนาบ xy และมีความสูง $z = F(x, y)$ ที่จุด (x, y) ของ A (F เป็นบวก) แล้วตัดทรงสามมิติโดยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x ที่ x และที่ $x + dx$ อาจจะคิดว่าสิ่งนี้ประมาณโดยเชิงอนุพันธ์ของปริมาตรกำหนดโดย

$$dV = A(x)\, dx$$

เมื่อ A (x) เป็นพื้นที่ภาคตัดขวางที่ตัดจากทรงสามมิติ โดยระนาบที่ x ดังรูป 5.1.3 พื้นที่ภาคตัดขวางกำหนดโดยอินทิกรัล



รูป 5.1.3

$$A(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} z\,dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y)\,dy \qquad \text{..........(5.1.9)}$$

โดยตรึง x อยู่กับที่ สิ่งที่น่าสังเกตต่อไปก็คือ ลิมิตของการอินทิเกรตขึ้นอยู่กับว่าระนาบตัดทรงสามมิติตรงไหน นั่นก็คือลิมิตของ y เป็นฟังก์ชันของ x ยิ่งกว่านั้นยังเป็นฟังก์ชันที่แทนขอบเส้นโค้งทั้งสองสุดท้ายจะพบว่าอินทิกรัลซ้ำในสมการ (5.1.8) มีค่าเท่ากันกับ

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y)\,dy\right) dx.$$

ซึ่งเป็นปริมาตรของทรงสามมิตินั่นเอง

ตัวอย่าง 5.1.1 จงหาค่า

$$\int_1^4 \int_{-2}^3 (x^2 - 2xy^2 + y^3)\,dx\,dy$$

วิธีทำ ตรึง y อยู่กับที่จะได้

$$\int_{-2}^3 (x^2 - 2xy^2 + y^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - yx^2 + y^3x\right]_{-2}^3$$

$$= 9 - 9y^2 + 3y^3 - \left(-\frac{8}{3} - 4y^2 - 2y^3\right)$$

$$= \frac{35}{3} - 5y^2 + 5y^3$$

เพราะฉะนั้น

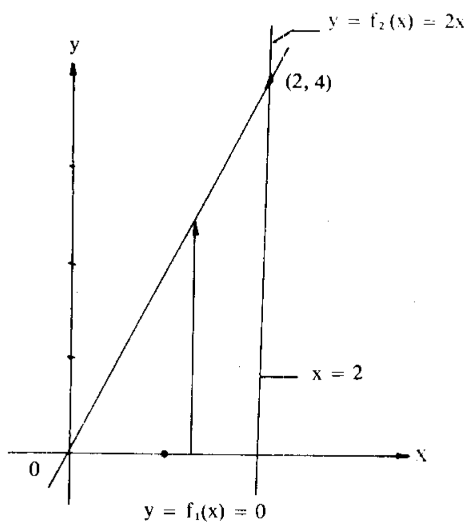
$$\int_{1}^{4}\int_{-2}^{3}(x^2 - 2xy^2 + y^3)\,dx\,dy = \int_{1}^{4}\left(\frac{35}{3} - 5y^2 + 5y^3\right)dy$$

$$= \left[\frac{35}{3}y - \frac{5}{3}y^3 + \frac{5}{4}y^4\right]_1^4$$

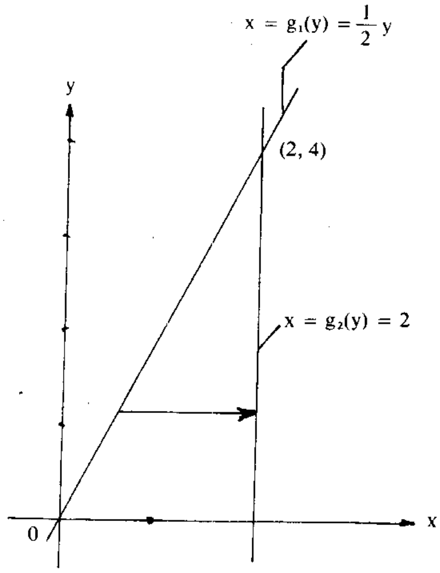
$$= \frac{995}{4}$$

ตัวอย่าง 5.1.2 รูปทรงสามมิติ $f(x,y) = xy$ ตั้งอยู่ระนาบ xy ซึ่งฐานมีขอบเขตเป็นสามเหลี่ยม ประกอบด้วย เส้นตรง $y = 0,\ y = 2x,\ x = 2$ จงหาค่าทั้งสองของอินทิกรัลซ้ำ (สลับลำดับการอินทิเกรต)

วิธีทำ พิจารณารูป 5.1.4



รูป 5.1.4



รูป 5.1.5

สำหรับ $V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (F(x, y)\,dy)\,dx$

เมื่อ $y = f_1(x) = 0,\ y = f_2(x) = 2x,\ a = 0,\ b = 2$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^2 \int_0^{2x} xy\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x y^2\right]_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 2x^3\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^4\right]_0^2$$

$$= 8$$

อินทิเกรตโดยการเทียบ x ก่อน จากรูป 5.1.5 จะได้

$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y)\,dx\,dy$$

ด้วย $x = g_1(y) = \frac{1}{2} y,\ x = g_2(y) = 2,\ c = 0,\ d = 4$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{2} xy\,dx\,dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{2} x^2 y\right]_{y/2}^{2} dy$$

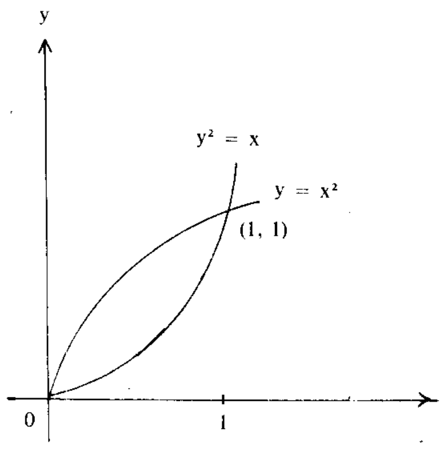
$$= \int_0^4 (2y - \frac{1}{8} y^3)\,dy$$

$$= \left[y^2 - \frac{1}{32} y^4\right]_0^4$$

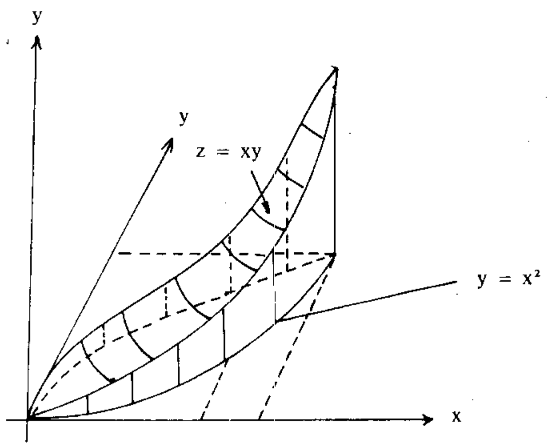
$$= 8$$

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ ซึ่งมีขอบเขตโดยพื้นผิว $z = xy$ ทรงกระบอก - $y = x^2$ และ $y^2 = x$ และระนาบ $z = 0$

วิธีทำ พิจารณารูป 5.1.3 และ 5.1.4



รูป 5.1.6



รูป 5.1.7

ปริมาตร dV ซึ่งมีส่วนสูงจากระนาบ xy เท่ากับ z และฐาน dy dx คือ

$$dV = (xy)\,dy\,dx$$

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= 1/2 \int_0^1 (x^2 - x^5)\,dx$$

$$= 1/12$$

แบบฝึกหัด 5.1

จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นสำหรับข้อ 1 ถึง 4 และเขียนบริเวณ A ซึ่งใช้ในการอินทิเกรต

1. $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin y \, dy \, dx$

2. $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \, dy$

3. $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y \, dy \, dx$

4. $\int_1^{2} \int_y^{y^2} dx dy$

จงเขียนอินทิกรัลสองชั้นด้วยการสลับลำดับของการอินทิเกรตในแต่ละข้อ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบโดยการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นทั้งสองด้วย

5. $\int_0^{2} \int_1^{e^x} dydx$

6. $\int_0^{1} \int_{\sqrt{y}}^{1} dx \, dy$

7. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y \, dx \, dy$

8. $\int_{-2}^{1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy \, dx$

9. จงหาปริมาตรของทรงสามมิติซึ่งฐานเป็นสามเหลี่ยมตั้งอยู่บนระนาบ xy มีขอบเขตประกอบด้วยแกน x เส้นตรง $y = x$ และเส้นตรง $x = 1$ และด้านบนเป็นระนาบ $z = x + y + 1$

10. จงหาปริมาตรของทรงสามมิติซึ่งฐานเป็นบริเวณในระนาบ xy มีขอบเขตประกอบด้วยพาราโบลา $y = 4 - x^2$ และเส้นตรง $y = 3x$ และด้านบนมีขอบเขตเป็นระนาบ $z = x + 4$

11. ฐานของทรงสามมิติเป็นบริเวณในระนาบ xy มีขอบเขตเป็นวงกลม $x^2 + y^2 = a^2$ ขณะที่ด้านบนของทรงสามมิติมีขอบเขตเป็นพาราโบลอยด์ $az = x^2 + y^2$ จงหาปริมาตร

12. จงหาค่าของ

$$\int_0^{2} \int_y^{2} \exp(x^2) \, dx \, dy$$

(ควรเขียนบริเวณของการอินทิเกรต และสลับลำดับการอินทิเกรต)

13. จงหาค่าของ

$$\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$$

5.2 พื้นที่โดยการอินทิเกรตสองชั้น

(Area by Double Integration)

การนำไปใช้ที่ง่ายที่สุดของการอินทิเกรตสองชั้นคือการหาพื้นที่ของบริเวณในระนาบ xy พื้นที่ถูกกำหนดโดยอินทิกรัลประการใดประการหนึ่งของ

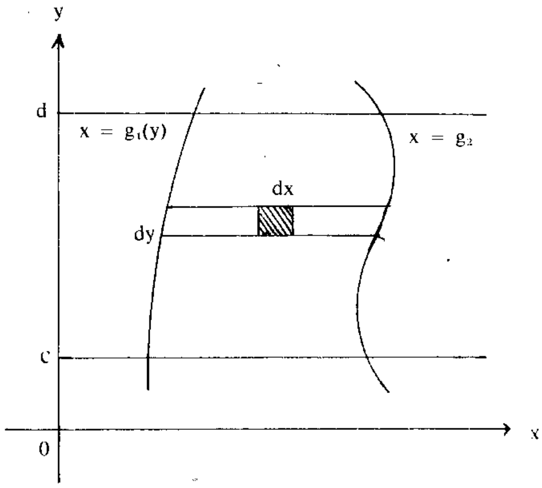
$$A = \iint dxdy = \iint dydx \qquad \text{..........(5.2.1)}$$

ในการอินทิเกรต เมื่อเลือกลำดับอินทิเกรต y ก่อน และแล้ว x จะได้

$$A = \int_{b}^{b}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\, dx \qquad \text{..........(5.2.2)}$$

ซึ่งเป็นการหาพื้นที่ดังรูป 5.1.1

ถ้าพื้นที่มีขอบเขตประกอบด้วย เส้นโค้ง $x = g_1(y)$ อยู่ทางซ้าย และทางขวา โดย $x = g_2(y)$ ทางด้านล่างโดยเส้นตรง $y = c$ และด้านบนโดยเส้นตรง $y = d$ ดังรูป 5.2.1



รูป 5.2.1

ควรจะอินทิเกรตโดยเทียบกับ x ก่อน ซึ่งจะแปรผันจาก $g_1(y)$ ไปยัง $g_2(y)$ แล้วจึงเทียบกับ y ซึ่งเป็นการเลือก

$$A = \int_{c}^{d}\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx\, dy \qquad \text{..........(5.2.3)}$$

การอินทิเกรตครั้งแรกโดยเทียบกับ x อาจจะมองว่าเป็นการบวกเข้าด้วยกันของสมาชิก dA = dx dy ทั้งหมดที่อยู่ในแนวนอน จากเส้นโค้ง $x = g_1(y)$ ทางซ้ายไปยังเส้นโค้ง $x = g_2(y)$ ทางขวา การหาค่าของอินทิกรัลใน 5.2.3 ให้

$$A = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx\,dy = \int_c^d [x]_{g_1(y)}^{g_2(y)} dy$$

$$= \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)\,dy$$

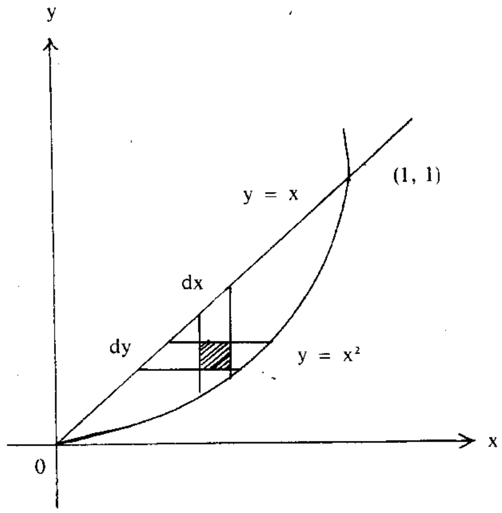
อินทิกรัลครั้งหลังเป็นลิมิตของผลบวกของพื้นที่ชิ้นเล็กทุกชิ้นในแนวนอน

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาค่า

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx$$

พร้อมทั้งเขียนขอบเขตของการอินทิเกรต และหาค่าอินทิกรัลสองชั้น เมื่อสลับลำดับการอินทิเกรตด้วย

วิธีทำ พิจารณาขอบเขตของการอินทิเกรต รูป 5.2.2



รูป 5.2.2

อินทิกรัลตัวใน y แปรผันจากเส้นโค้ง $y = x^2$ ไปยัง $y = x$ สิ่งนี้ให้พื้นที่ชิ้นเล็ก ๆ ในแนวตั้งระหว่าง $x + dx$ สำหรับค่าของ x จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$ ก็จะให้พื้นที่ที่เป็นบริเวณในการอินทิเกรตในที่สุด นั่นคือ

$$A = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \Big[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

ถ้าอินทิเกรตเทียบกับ x ก่อน แล้ว x แปรผันจากเส้นตรง $x = y$ ไปยังพาราโบลา $x = \sqrt{y}$ จะได้พื้นที่ชิ้นเล็ก ๆ ในแนวนอนระหว่าง y และ $y + dy$ ชิ้นเล็ก ๆ เหล่านี้ จะรวมกันทั้งหมดสำหรับค่าของ y จาก 0 ถึง 1 ดังนั้น

$$A = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\, dy$$

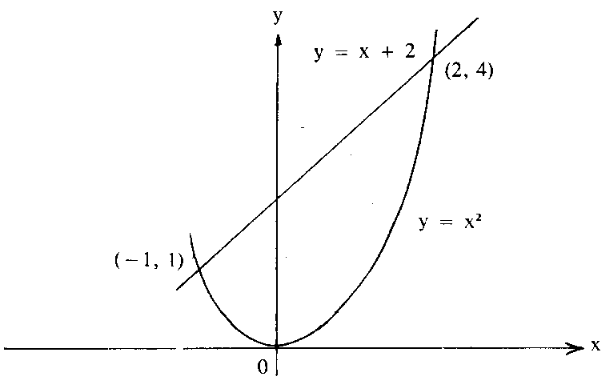
$$= \int_0^1 (\sqrt{y} - y)\, dy$$

$$= \Big[\frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2\Big]_0^1$$

$$= 1/6$$

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาพื้นที่ซึ่งมีขอบเขตประกอบด้วยพาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = x+2$

วิธีทำ พิจารณาบริเวณการอินทิเกรตดังรูป 5.2.3



รูป 5.2.3

สมาชิกของพื้นที่ชิ้นเล็ก ๆ

$$dA = dx\,dy = dy\,dx$$

จะเห็นได้ว่า อยู่ในบริเวณ พื้นที่ชิ้นเล็ก ๆ ในแนวนอนบางครั้งก็จากเส้นตรงไปยังทางขวาของพาราโบลา (ถ้า $1 \leqslant y \leqslant 4$) แต่บางครั้งก็จากทางซ้ายของพาราโบลาไปทางด้านขวา (ถ้า $0 \leqslant y \leqslant 1$) ดังนั้น การอินทิเกรตในลำดับ x ก่อน แล้ว y จึงเป็นการแบ่งพื้นที่ออกเป็นสองส่วนด้วยเหตุผลดังกล่าว

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy \\ &= \int_0^1 2\sqrt{y}\,dy + \int_1^4 (\sqrt{y} - y + 2)\,dy \\ &= \left[\frac{4}{3} y^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_1^4 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

อีกทางหนึ่งพื้นที่ชิ้นเล็ก ๆ ในแนวตั้งจากพาราโบลา ด้านล่างไปยังเส้นตรง พื้นที่จึงถูกกำหนดโดย

$$A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy\,dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \frac{9}{2}$$

จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า กรณีหลังเป็นกรณีที่ควรจะต้องเลือกใช้เพราะง่ายกว่ากรณีแรก

แบบฝึกหัด 5.2

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่มีขอบเขตตามเส้นโค้งและเส้นตรงที่กำหนดให้ โดยการอินทิเกรตสองชั้น

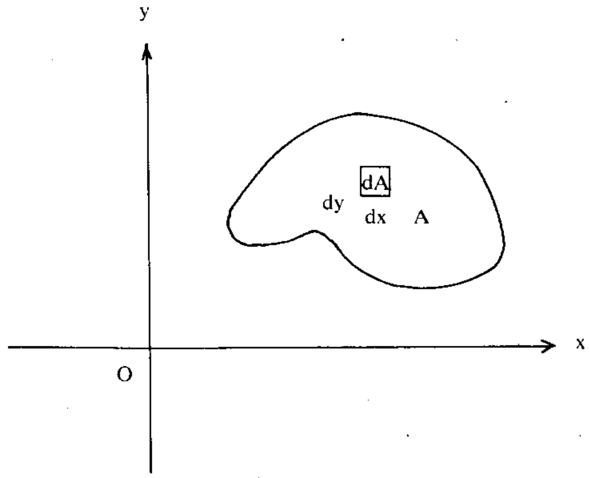
1. แกนพิกัดและเส้นตรง $x + y = 0$
2. แกน x เส้นโค้ง $y = e^x$ และเส้นตรง $x = 0$, $x = 1$
3. แกน y เส้นตรง $y = 2x$ และเส้นตรง $y = 4$
4. เส้นโค้ง $y^2 + x = 0$ และเส้นตรง $y = x + 2$
5. เส้นโค้ง $x = y^2$, $x = 2y - y^2$
6. ครึ่งวงกลม $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ เส้นตรง $x = \pm a$ และเส้นตรง $y = -a$
7. พาราโบลา $x = y - y^2$ และเส้นตรง $x + y = 0$

5.3 การประยุกต์ในทางฟิสิกส์
(Physical Applications)

ให้ dm แทนสมาชิกของมวล (mass) ซึ่งกระจายอย่างต่อเนื่องเหนือบริเวณ A ในระนาบ xy โดยที่

$$dm = \delta(x, y)\,dx\,dy = \delta(x, y)\,dA \qquad \text{..........(5.3.1)}$$

เมื่อ $\delta(x, y)$ เป็นความหนาแน่น (density) ที่จุด (x, y) ของ A ดังรูป 5.3.1



รูป 5.3.1

แล้ว การอินทิเกรตสองชั้นอาจจะใช้ในการคำนวณ

ก) มวล $M = \iint \delta(x, y)\,dA$ ....(5.3.2)

ข) โมเมนต์ที่หนึ่ง (first moment) ของมวล เทียบกับแกน x

$$M_x = \iint y\,\delta(x, y)\,dA \qquad \text{..........(5.3.3)}$$

ค) โมเมนต์ที่หนึ่งของมวลเทียบกับแกน y

$$M_y = \iint x\,\delta(x, y)\,dA \qquad \text{..........(5.3.4)}$$

จาก (5.3.3) และ (5.3.4) ทำให้ได้พิกัดของศูนย์กลางของมวล

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

โมเมนต์อื่นที่สำคัญในการประยุกต์ในทางฟิสิกส์ ก็คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยของมวล (the moment of inertia of the mass) ซึ่งเป็นโมเมนต์ที่สอง ที่ได้จากการใช้กำลังสองแทนกำลังหนึ่งของแขนคานงัด (lever arm) ระยะทาง x และ y ดังนั้น โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน x เขียนแทนได้ด้วย I_x และกำหนดโดย

$$I_x = \iint y^2 \delta(x, y)\, dA \qquad \text{..........(5.3.5)}$$

โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน y คือ

$$I_y = \iint x^2 \delta(x, y)\, dA \qquad \text{..........(5.3.6)}$$

ที่น่าสนใจอีกคือ โมเมนต์ของความเฉื่อยเชิงขั้ว (polar moment of inertia) รอบจุดกำเนิด คือ I_0 กำหนดโดย

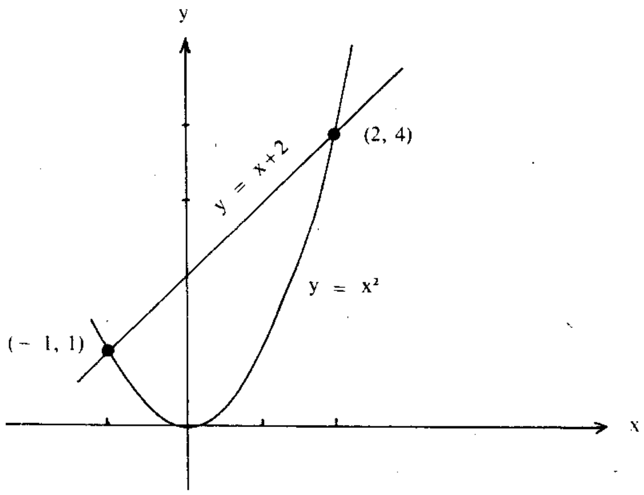
$$I_0 = \iint r^2 \delta(x, y)\, dA$$

เมื่อ $r^2 = x^2 + y^2$ เป็นกำลังสองของระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดแทนของสมาชิกของมวล dm

ทุกอินทิกรัลที่กล่าวมานี้ ใช้ลิมิตของการอินทิเกรตเดียวกันเสมือนการคำนวณหาพื้นที่ของ A เท่านั้น

ตัวอย่าง 5.3.1 แผ่นบางที่มีความหนาและความหนาแน่นสม่ำเสมอปกคลุมบริเวณในระนาบ xy ด้วย พาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = x + 2$ จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อย I_y รอบแกน y

วิธีทำ บริเวณในระนาบ xy ที่ปิดล้อมโดย พาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = x + 2$ แสดงให้เห็นดังรูป 5.3.2



รูป 5.3.2 พาราโบลา $y = x^2$ *และเส้นตรง* $y = x + 2$

โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน y คือ

$$
\begin{aligned}
I_y &= \iint x^2 \, \delta (x, y) \, dA \\
&= \int_{x_1=-1}^{x_2=2} \int_{y_1=x^2}^{y_2=x+2} x^2 \, \delta \, dy \, dx \\
&= \delta \int_{-1}^{2} x^2 y \Big]_{x^2}^{x+2} dx \\
&= \delta \int_{-1}^{2} (x^3 \; 2x^2 - x^4) \, dx \\
&= \frac{63}{20} \, \delta
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหามวล M ของแผ่นบางในตัวอย่าง 5.3.1

วิธีทำ มวล

$$
\begin{aligned}
&= \iint \delta (x, y) \, dA \\
&= \delta \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy \, dx \\
&= \delta \int_{-1}^{2} y \Big]_{x^2}^{x+2} dx
\end{aligned}
$$

$$= \delta \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx$$

$$= \delta \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{9}{2}\, \delta$$

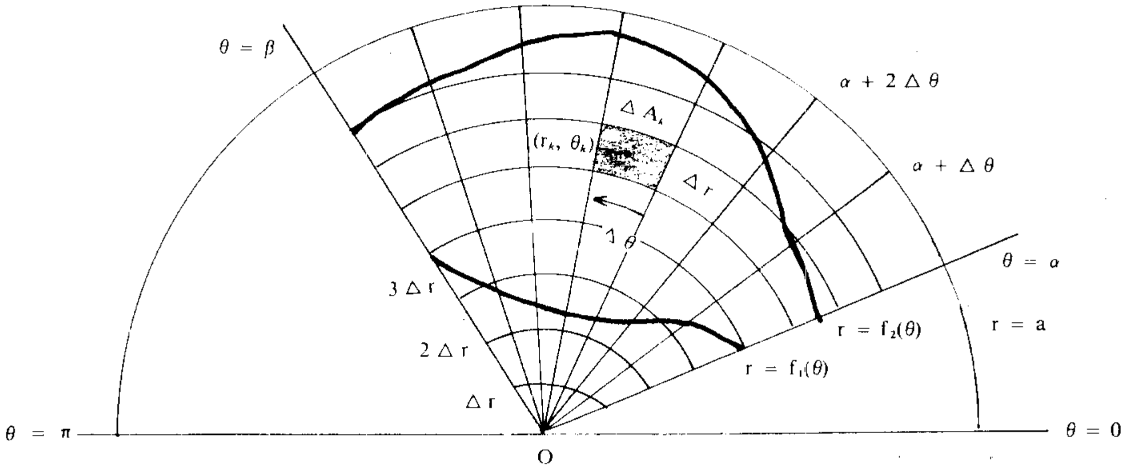
แบบฝึกหัด 5.3.1

1. จงหาจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ปิดล้อมด้วย แกนพิกัดและเส้น $x + y = a$
2. จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน x สำหรับพื้นที่ที่ปิดล้อมโดยแกน x เส้น $y = e^x$ และเส้น $x = 0, x = 1$
3. จงหาจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ปิดล้อมโดย $y^2 + x = 0$ และเส้น $y = x + 2$
4. จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน x ของพื้นที่ที่ปิดล้อมโดยเส้น $x = y^2, x = 2y - y^2$
5. จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยเชิงขั้วรอบแกนผ่านจุดกำเนิดและตั้งฉากกับระนาบ xy สำหรับพื้นที่ซึ่งประกอบด้วยแกน y เส้น $y = 2x$ และเส้น $y = 4$
6. จงหาจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ซึ่งปิดล้อมโดย ครึ่งวงกลม $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ เส้นตรง $x = \pm a$ และเส้นตรง $y = -a$ ถ้าความหนาแน่นที่ (x, y) คือ $\delta = y + a$
7. จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน x ของพื้นที่ซึ่งปิดล้อมโดยพาราโบลา $x = y - y^2$ และเส้น $x + y = 0$ ถ้าความหนาแน่นที่ (x, y) คือ $\delta = x + y$
8. สำหรับพื้นที่ใด ๆ ในระนาบ xy จงแสดงว่า โมเมนต์ของความเฉื่อยเชิงขั้ว I_0 รอบแกนผ่านจุดกำเนิด ตั้งฉากกับระนาบ xy เท่ากับ $I_x + I_y$

5.4 พิกัดเชิงขั้ว

(Polar Coordinates)

ให้ A เป็นบริเวณของระนาบปิดล้อมโดยรังสี (rays) $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ และเส้นโค้ง $r = f_1(\theta)$, $r = f_2(\theta)$ ดังรูป 5.4.1



การแบ่งบริเวณ $R : 0 \leqslant r \leqslant a$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ ในพิกัดเชิงขั้ว $\Delta A_k = r_k \Delta\theta \Delta r$

รูป 5.4.1

สมมุติว่า A บรรจุอย่างสมบูรณ์อยู่ในลิ่ม

$$R : 0 \leqslant r \leqslant a,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$$

ให้ m และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก และให้

$$\Delta r = \frac{a}{m}, \Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

บริเวณ R ถูกปกคลุมด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ต่อกันเป็นตาราง (grid of circular arcs) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 และรัศมี $\Delta r, 2\Delta r, \ldots, m\Delta r = a$ และรังสี (rays), ผ่าน 0 ตาม $\theta = \alpha, \alpha + \Delta\theta, \alpha + 2\Delta\theta, \ldots, \alpha + n\Delta\theta = \beta$ ตารางเหล่านี้จะแบ่ง R ออกเป็นบริเวณย่อย ๆ สามประเภท ก) อยู่ภายนอก A ข) อยู่ภายใน A ค) ตัดขอบ (boundary) ของ A ซึ่งจะไม่พิจารณาประเภทแรก แต่ต้องการบริเวณย่อยทั้งหมดของประเภทที่สอง และอาจจะรวมบางบริเวณหรือไม่รวมเลย หรือรวมทั้งหมด

ของประเภทที่สาม กำหนดบริเวณย่อยที่ต้องการพิจารณาด้วยเลข 1, 2, 3, ..., N ในบริเวณที่ k ซึ่งอยู่ในบริเวณที่ต้องการพิจารณา ให้ (r_k, θ_k) เป็นพิกัดของจุดศูนย์กลางของบริเวณย่อยที่ k คูณค่าของ F ที่แต่ละจุดกึ่งกลางเหล่านี้โดยพื้นที่ของบริเวณย่อยที่สมนัยกัน และบวกผลคูณเหล่านี้เข้าด้วยกัน นั่นคือ การพิจารณาผลรวม

$$S = \sum_{k=1}^{N} F(r_k, \theta_k) \cdot \Delta A_k$$

โดยที่รัศมีเส้นโค้งภายในที่เป็นขอบเขตของ ΔA_k คือ $r_k - \frac{1}{2}\Delta r$ และรัศมีภายนอกเท่ากับ $r_k + \frac{1}{2}\Delta r$ ดังนั้น

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}(r_k + \frac{1}{2}\Delta r)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}(r_k - \frac{1}{2}\Delta r)^2 \Delta\theta$$

$$= r_k \Delta\theta \Delta r \qquad ....(5.4.1)$$

เพราะฉะนั้น

$$S = \sum_{k=1}^{N} F(r_k, \theta_k) \cdot r_k \Delta\theta \Delta r \qquad ....(5.4.2)$$

ถ้าดำเนินการต่อไปด้วยกระบวนการนี้ซ้ำแล้วซ้ำอีกด้วยตารางที่ละเอียดลงไปเรื่อย ๆ และพิจารณาลิมิตของสมการ (5.4.2) ขณะที่เส้นทแยงมุมของทุก ๆ บริเวณย่อยย่างเข้าสู่ศูนย์ ถ้าฟังก์ชัน F ต่อเนื่อง และบริเวณ A มีขอบเขตโดยเส้นโค้งที่ต่อเนื่องและหาความยาวได้ ผลบวกจะย่างเข้าสู่ลิมิตของอินทิกรัลสองชั้นของ F เหนือ A นั่นคือ

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} F(r_k, \theta_k) r_k \Delta\theta \Delta r = \int_A\int F(r, \theta)\, dA \qquad ....(5.4.3)$$

โดยทั่วไปค่าลิมิตนี้อาจจะหาค่าได้จากอินทิกรัลสองชั้นทั้งในรูปพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว นั่นคือ

$$\int_A\int F(r, \theta)\, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\beta}\int_{r=f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} F(r, \theta)\, r dr d\theta \qquad ....(5.4.4)$$

ในกรณีพิกัดเชิงขั้ว สมการทั่วไปในรูป

$$x = f(u, v), y = g(u, v) \qquad ....(5.4.5)$$

อาจจะตีความว่าเสมือนการส่งบริเวณ A ของระนาบ xy ไปยังบริเวณ G ของระนาบ uv แล้วภายใต้ฟังก์ชันจำกัดที่เหมะสมของ f และ g แล้วสมการต่อไปนี้ จะให้สูตรสำหรับเปลี่ยนจากพิกัด xy ไปยัง พิกัด uv ในอินทิกรัลสองชั้น

$$\int_A\int \phi(x, y)\, dx\, dy = \int_G\int \phi[f(u, v), g(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv \quad \text{..........(5.4.6)}$$

เมื่อสัญลักษณ์ $\partial(x,y) / \partial(u, v)$ เป็นเครื่องหมายที่เรียก จาโคเบียน (Jacobian) ของการเปลี่ยนแปลง (5.4.5) และกำหนดโดยตัวกำหนด (determinant)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{..........(5.4.7)}$$

ในกรณีของพิกัดเชิงขั้ว จะใช้ r และ θ แทนที่ของ u และ v

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

และ

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

ดังนั้น สมการ (5.4.6) จะกลายเป็น

$$\int\int \phi(x, y)\, dx\, dy = \int\int \phi(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta \quad \text{..........(5.4.8)}$$

ซึ่งสมนัยกับสมการ (5.4.4)

ส่วนพื้นที่รวมของบริเวณคืออินทิกรัลสองชั้นดังต่อไปนี้

$$A = \int\int dx\, dy$$

หรือ

$$A = \int\int r\, dr\, d\theta$$

นั่นคือบริเวณที่กำหนดให้สามารถแบ่งออกเป็นชิ้น ๆ ของพื้นที่

$$dA_{xy} = dx\, dy$$

โดยเส้นขนานแกน x และแกน y หรือสามารถแบ่งออกเป็นชิ้น ๆ ของพื้นที่

$$dA_{r\theta} = r\, dr\, d\theta$$

โดยเส้นรัศมีและส่วนโค้งของวงกลม และพื้นที่รวมสามารถหาได้ด้วยการบวกทุกชิ้นของพื้นที่ในแต่ละแบบ แต่ต้องไม่คาดว่า แต่ละชิ้น dA_{xy} และ $dA_{r\theta}$ จะเท่ากัน จากการคำนวณขั้นต้น แสดงว่า

$$dA_{xy} = dx\, dy$$

$$= d\,(r \cos\theta)\, d\,(r \sin\theta)$$

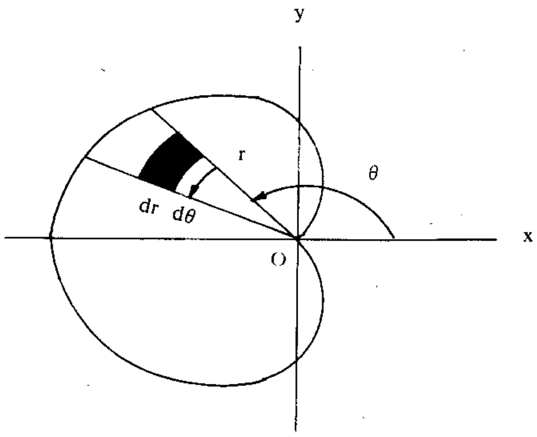
และ

$$dA_{r\theta} = rd\, rd\, \theta$$

จะเห็นได้ว่า $dA_{xy} \neq dA_{r\theta}$

การที่กล่าวว่า การอินทิเกรตใช้ได้ทั้งพิกัดฉากหรือพิกัดเชิงขั้ว ก็เหมือนกันอย่างมากกับการกล่าวว่า ผลบวก 3 + 4 = 7 และ 2 + 5 = 7 ต่างก็เท่ากัน แต่ในแต่ละพจน์ที่นำมาบวกกันไม่เท่ากัน

ตัวอย่าง 5.4.1 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน y ของพื้นที่ที่ล้อมรอบโดยเส้นโค้งรูปหัวใจ (cardioid) $r = a\,(1 - \cos\theta)$ รูป 5.4.1



รูป 5.4.1

วิธีทำ ให้ความหนาแน่นเท่ากับหนึ่ง
โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน y คือ

$$I_y = \int_A\int x^2 dA$$

ด้วย

$$x = r\cos\theta, \; dA = rd\,rd\,\theta$$

ดังนั้น

$$I_y = \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1-\cos\theta)} r^3\cos^2\theta \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left.\frac{r^4}{4}\right]_0^{a(1-\cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{4}\cos^2\theta\,(1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,(1 - 4\cos\theta + 6\cos^2\theta - 4\cos^3\theta + \cos^4\theta)$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - 4\cos^3\theta + 6\cos^4\theta - 4\cos^5\theta + \cos^6\theta)$$

เพราะว่า

$$\int_0^{2\pi} \cos^n\theta\, d\theta = \frac{n-1}{n}\int_0^{2\pi} \cos^{n-2}\theta\, d\theta$$

ดังนั้น

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\,\theta = \frac{2-1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^{2-2}\theta\, d\,\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \left.\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\,\theta = \frac{3-1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^{3-2}\theta\, d\,\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\,\theta$$

$$= \left.\frac{2}{3}\sin\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{4-1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^{4-2} \theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 \theta \, d\theta = \frac{4}{5} \int_0^{2\pi} \cos^3 d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta \, d\theta = \frac{5}{6} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{5\pi}{8}$$

$$\therefore I_y = \frac{a^4}{4} \left[\pi + \frac{9\pi}{2} + \frac{5\pi}{8} \right]$$

$$= \frac{\pi a^4}{4} \left[\frac{8 + 36 + 5}{8} \right] = \frac{49\pi a^4}{32}$$

แบบฝึกหัด 5.4.1

1. จงเปลี่ยน

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$$

ให้อยู่ในพจน์ พิกัดเชิงขั้ว พร้อมทั้งหาค่าด้วย

2. จงเปลี่ยน

$$\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

ให้อยู่ในพจน์ พิกัดเชิงขั้ว แล้วอินทิเกรตหาค่าด้วย

3. จงเปลี่ยน

$$\int_{0}^{a/\sqrt{2}}\int_{y}^{\sqrt{a^2-y^2}} x\,dx\,dy$$

ให้อยู่ในพจน์พิกัดเชิงขั้ว แล้วหาค่าด้วย

4. จงเปลี่ยน

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

ให้อยู่ในพจน์พิกัดเชิงขั้ว แล้วหาค่าด้วย

5. จงเปลี่ยน

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} y\,dy\,dx$$

ให้อยู่ในพจน์พิกัดเชิงขั้ว แล้วหาค่าด้วย

6. จงเปลี่ยน

$$\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2\,dy\,dx$$

ให้อยู่ในพจน์พิกัดเชิงขั้ว แล้วหาค่าด้วย

7. จงใช้อินทิกรัลสองชั้น หาพื้นที่ซึ่งอยู่ภายในเส้นโค้งรูปหัวใจ $r = a(1 + \cos\theta)$ แต่อยู่ภายนอกวงกลม $r = a$

8. จงหาจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ ซึ่งอยู่ภายในเส้นโค้งรูปหัวใจ $r = a(1 + \cos\theta)$ แต่อยู่ภายนอกวงกลม $r = a$

9. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว I_0 เทียบกับแกนที่ผ่าน 0 และตั้งฉากกับระนาบ xy สำหรับพื้นที่ภายในเส้นโค้งหัวใจ $r = a(1 + \cos\theta)$ แต่อยู่ภายนอกวงกลม $r = a$
10. เมื่อฐานของทรงสามมิติ เป็นพื้นที่ภายในเส้นโค้งรูปหัวใจ $r = a(1 + \cos\theta)$ แต่อยู่ภายนอกวงกลม $r = a$ และทรงสามมิตินี้มีขอบเขตด้านบนเป็น $z = x$ จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิตินี้
11. จงใช้การอินทิเกรตสองชั้น หาพื้นที่รวมซึ่งพื้นที่ดังกล่าวล้อมรอบโดยเส้นโค้งเลมนิสเกต

    $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$
12. จงหาปริมาตรของทรงสามมิติซึ่งด้านฐานล้อมรอบด้วยเส้นโค้งเลมนิสเกต $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ และมีขอบเขตด้านบนเป็นทรงกลม $z = \sqrt{2a^2 - r^2}$

5.5 การอินทิกรัลสามชั้น : ปริมาตร

Triple Integrals : Volume

พิจารณาบริเวณ V ในปริภูมิ xyz บรรจุอย่างสมบูรณ์ในกล่อง B มีขอบเขตโดยระนาบ $x = a, x = b, y = c, y = d, z = e,$ และ $z = f$ โดย $a<b, c<d$ และ $e<f$ ให้ $F(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งโดเมนทั้งหมดอยู่ใน V ให้ m, n, p เป็นจำนวนเต็มบวกและให้

$$\Delta x = \frac{b-a}{m}, \ \Delta y = \frac{d-c}{n}, \ \Delta z = \frac{f-e}{p}$$

แบ่ง B ออกเป็น $m \times n \times p$ บริเวณย่อย แต่ละบริเวณย่อยมีขนาด $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ โดยระนาบ

$$x = a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \ldots, a + m\Delta x;$$

$$y = c, c + \Delta y, c + 2\Delta y, \ldots, c + n\Delta y;$$

$$z = e, e + \Delta z, e + 2\Delta z, \ldots, e + p\Delta z.$$

บริเวณย่อยเหล่านี้มีสามชนิด (ก) อยู่ภายใน V (ข) อยู่ภายนอก V และ (ค) ตัดกับขอบของ V จะนับทั้งหมดของชนิด (ก) ไม่นับทั้งหมดของชนิด (ข) และนับบ้างไม่นับบ้างหรือไม่นับทั้งหมดของชนิด (ค) แล้วกำหนดตัวเลขบริเวณย่อยที่นับทั้งหมดเป็น 1, 2, 3, ..., N. ให้ (x_k, y_k, z_k) เป็นจุดในบริเวณย่อยที่ k คูณค่าของ F ที่จุดนั้นกับปริมาตร ΔV_k ของบริเวณย่อย จะได้ผลบวกในรูปแบบ

$$S = \sum_{k=1}^{N} F(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} F(x_k, y_k, z_k)\Delta x \Delta y \Delta z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5.5.1)$$

สมมุติว่า ฟังก์ชัน F ต่อเนื่องตลอดทั้ง V และบนขอบด้วยแล้ว ผลบวก (5.5.1) มีลิมิตขณะ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ ย่างเข้าสู่ศูนย์และลิมิตนี้เรียกว่ารีมันน์ (Riemann) อินทิกรัลสามชั้นของ F เหนือ V

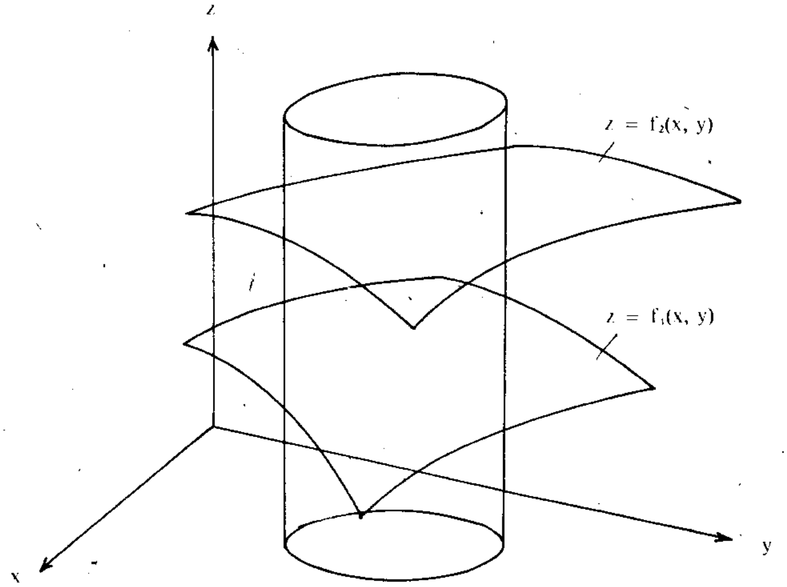
$$\iiint_V F\,dV = \lim \sum_{k=1}^{N} F(x_k, y_k, z_k)\Delta x \Delta y \Delta z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5.5.2)$$

มีข้อสังเกตอยู่สองประการ คือ

(ก) สมการ (5.5.2) มีความหมายที่เป็นไปได้อยู่หลายประการ คือ ถ้า $F(x, y, z) = 1$ สำหรับทุกจุดใน V อินทิกรัลก็คือปริมาตรของ V ถ้า $F(x, y, z) = x$ อินทิกรัลก็คือโมเมนต์ที่หนึ่ง

ของปริมาตร V โดยเทียบกับระนาบ xy ถ้า $F(x, y, z)$ เป็นความหนาแน่นที่ (x, y, z) แล้วอินทิกรัลคือมวลใน V ถ้า $F(x, y, z)$ คือผลคูณของความหนาแน่นที่ (x, y, z) กับกำลังสองของระยะทางจาก (x, y, z) ไปยังแกน L แล้วอินทิกรัลคือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลโดยเทียบกับ L

ข) การหาค่าอินทิกรัลสามชั้นโดยตรงจากนิยามเสมือนลิมิตนั้น มักจะไม่ได้ใช้นัก โดยปรกติจะหาค่าโดยอินทิกรัลซ้ำ สำหรับตัวอย่าง สมมุติว่า V มีขอบเขตด้านล่างเป็นพื้นผิว $z = f_1(x, y)$ ด้านบนโดยพื้นผิว $z = f_2(x, y)$ และด้านข้างโดยทรงกระบอก C ด้วยสมาชิกที่ขนานกับแกน z ดังรูป 5.5.1



รูป 5.5.1

ให้ A แทนบริเวณของระนาบ xy ที่ล้อมรอบโดยทรงกระบอก C (นั่นคือ A เป็นบริเวณที่ครอบคลุมโดยโปรเจกชันในแนวตั้งฉากของทรงสามมิติลงไปในระนาบ xy) แล้วปริมาตรของบริเวณ V หาได้จากอินทิกรัลสามชั้น

$$V = \int_A \int \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} dz\, dy\, dx \qquad \text{..........(5.5.3)}$$

ลิมิต z ของการอินทิเกรตแสดงว่าสำหรับทุก ๆ (x, y) ในบริเวณ A ค่า z อาจจะขยายจากพื้นผิวด้านล่าง $z = f_1(x, y)$ ไปยังพื้นผิวด้านบน $z = f_2(x, y)$ ส่วนลิมิต y และ x ของการอินทิเกรตนั้นได้มาจากบริเวณ A ในระนาบ xy นั่นเอง ซึ่งบริเวณ A นั้นอาจจะเกิดจากพื้นผิวสองพื้นผิวตัดกัน

แล้วฉายเส้นโค้งที่เกิดจากรอยตัดนี้ลงไปบนระนาบ xy ก็ได้ ซึ่งสมการที่เป็นขอบนี้ได้จากการกำจัด z ระหว่างสองสมการ $z = f_1(x, y)$ และ $z = f_2(x, y)$ จะได้สมการ

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) \qquad \text{..........(5.5.4)}$$

ซึ่งไม่มี z เช่นสมการในพื้นผิวในปริภูมิ xyz ที่แทนสมการทรงกระบอกที่สมาชิกขนานแกน z เป็นต้น

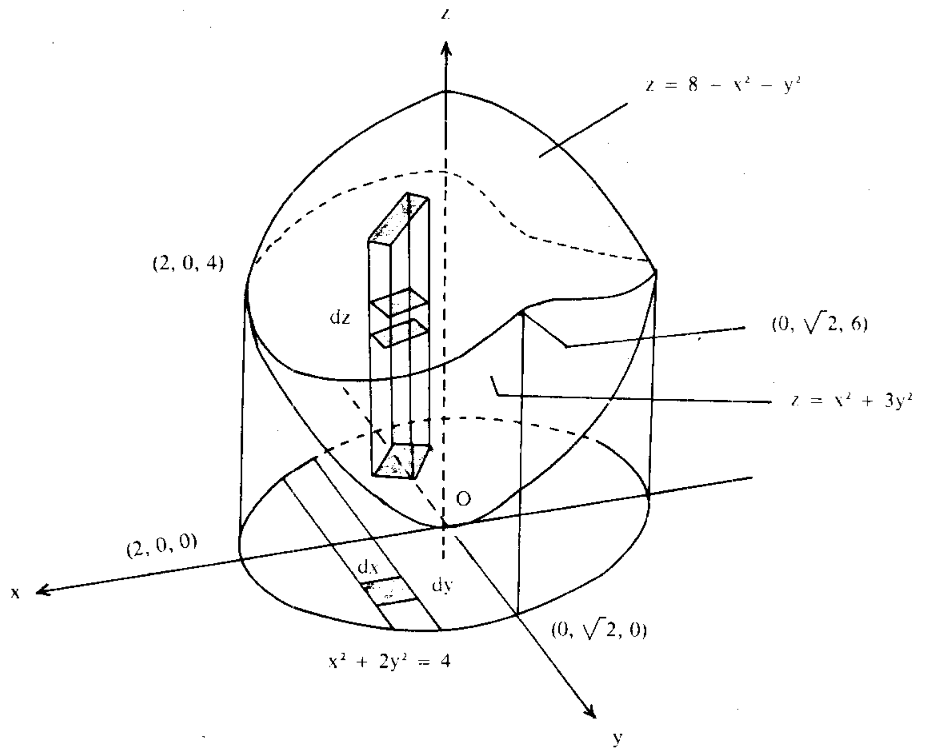
ตัวอย่าง จงหาปริมาตรที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวสองพื้นผิว

$$z = 8 - x^2 - y^2$$

และ

$$z = x^2 + 3y^2$$

วิธีทำ พิจารณารูป 5.5.2



รูป 5.5.2

เมื่อฉายปริมาตรลงไปยังบริเวณ A ในระนาบ xy จะได้วงรีดังรูป 5.5.2 ในอินทิกรัลสองชั้นโดยเทียบกับ y และ x เหนือบริเวณ A ถ้าอินทิเกรตเทียบกับ y ก่อน ตรึง x และ dx อยู่กับที่ จะเห็นได้ว่า y แปรผันจาก $-\sqrt{(4-x^2)/2}$ ไปยัง $+\sqrt{(4-x^2)/2}$ แล้ว x แปรผันจาก -2 ไปยัง $+2$ ดังนั้น จึงได้ว่า

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4\ 1\ x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8-2x^2-4y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[2(8-2x^2)\ \frac{4-x^2}{2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right]dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,dx = 8\pi\sqrt{2}$$

แบบฝึกหัด 5.5

ในแบบฝึกหัดแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาปริมาตรโดยการอินทิเกรตสามชั้น

1. ปริมาตรทรงสี่หน้า (tetrahedron) มีขอบเขตโดยระนาบ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

และระนาบพิกัด (a, b, c เป็นบวก)

2. ปริมาตรในอัฐมภาคที่หนึ่งมีขอบเขตโดยทรงกระบอก $x = 4 - y^2$ และระนาบ $z = y$, $x = 0$, $z = 0$
3. ปริมาตรที่ขอบเขตโดยพาราโบลอยด์วงรี $z = x^2 + 9y^2$ $z = 18 - x^2 - 9y^2$
4. ปริมาตรที่อยู่ภายในทรงกระบอก

$$x^2 + y^2 = a^2, \ x^2 + z^2 = a^2$$

5. ปริมาตรของทรงรี ซึ่งมีแกนครึ่งเป็น a, b, c
6. ปริมาตรมีขอบเขตด้านล่างโดยระนาบ $z = 0$ ด้านข้างโดยทรงกระบอกวงรี $x^2 + 4y^2 = 4$ และด้านบนโดย $z = x + 2$

5.6 พิกัดทรงกระบอก

(Cylindrical Coordinates)

แทนการใช้สมาชิกของปริมาตร

$$dV_{xyz} = dz\,dy\,dx \qquad \text{..........(5.6.1)}$$

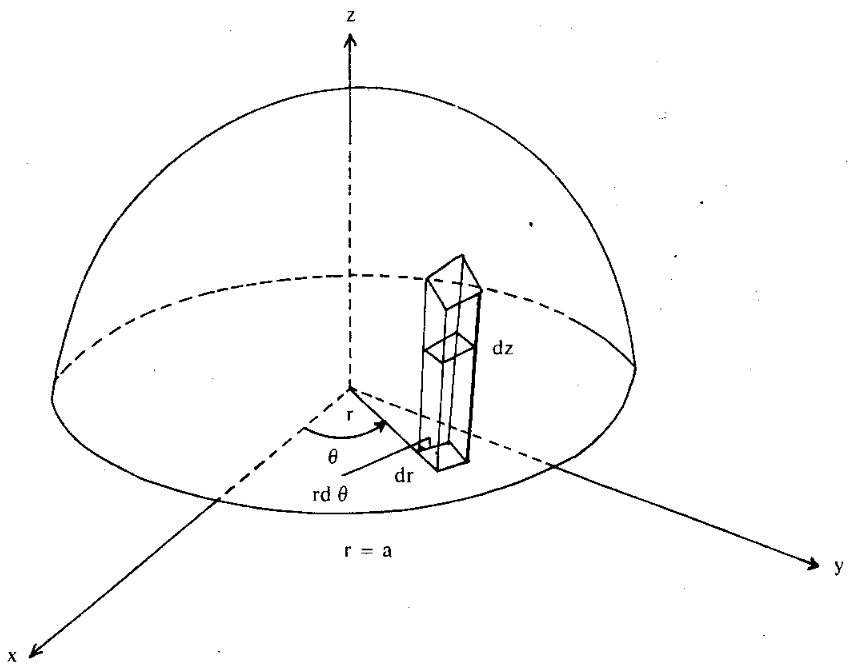
ที่เคยใช้มาก่อน อาจจะใช้สมาชิกต่อไปนี้แทน

$$dV_{r\theta z} = dz\,r\,dr\,d\theta \qquad \text{..........(5.6.2)}$$

สมการ (5.6.2) สามารถจินตนาการได้ว่า สมาชิกของปริมาตรมีพื้นที่ภาคตัดขวางเป็น $r\,dr\,d\theta$ ดังที่ใช้ในพิกัดเชิงขั้วที่ผ่านมา และใช้ส่วนสูงเป็น dz พิกัดทรงกระบอก r, θ, z โดยเฉพาะแล้วมีประโยชน์กับปัญหาทรงสามมิติที่มีแกนสมมาตร ส่วนใหญ่ก็มักจะเลือกแกน z เป็นแกนสมมาตร

ตัวอย่าง 5.6.1 จงหาจุดศูนย์ถ่วงของครึ่งทรงกลมเอกพันธ์ รัศมี a

วิธีทำ โดยเลือกศูนย์กลางที่จุดกึ่งกลางของทรงกลม และพิจารณาครึ่งทรงกลมที่อยู่เหนือระนาบ xy ดังรูป 5.6.1



รูป 5.6.1

สมการพื้นผิวของครึ่งทรงกลมคือ $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ หรือในพจน์ของพิกัดทรงกระบอก $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ โดยการสมมาตร จะได้ว่า $\bar{x} = \bar{y} = 0$ แล้ว

$$\bar{z} = \frac{\iiint z\,dV}{\iiint dV}$$

เพราะว่าพื้นผิวของทรงกลมรัศมี a เท่ากับ $\frac{4}{3}\pi a^3$

ฉะนั้น พื้นผิวของครึ่งทรงกลม คือ $\iiint dV = \frac{2}{3}\pi a^3$

และเพราะว่า $\iiint z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z\,dz\,rd\,rd\,\theta$

$$\therefore \bar{z} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{(a^2-r^2)^{1/2}} z\,dz\,rd\,rd\,\theta}{(2/3)\,\pi a^3}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(z^2/2\Big]_0^{(a^2-r^2)^{1/2}}\,r\,dr\,d\,\theta}{(2/3)\,\pi a^3}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{(a^2r - r^3)\,dr\,d\,\theta}{(4/3)\,\pi a^3}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{a} d\,\theta}{(4/3)\,\pi a^3}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi}(a^4/4)\,d\,\theta}{(4/3)\,a^4}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} a\,d\,\theta}{(16/3)\,\pi}$$

$$= \frac{a\,\theta\Big]_0^{2\pi}}{(16/3)\,\pi}$$

$$= \frac{2\,\pi a}{(16/3)\,\pi}$$

$$= \frac{3\,a}{8}$$

ดังนั้น จุดศูนย์ถ่วง คือ $(0, 0, \frac{3\,a}{8})$

แบบฝึกหัด 5.6.1

1. จงใช้อินทิกรัลสามชั้นหาปริมาตรของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ ที่ถูกตัดโดยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = a^2$
2. จงหาปริมาตรที่มีขอบเขตด้านล่างเป็น พาราโบลอยด์

   $$z = x^2 + y^2$$

   ด้านบนเป็นระนาบ $z = 2y$ โดยอาศัยอินทิกรัลสามชั้น
3. จงหาปริมาตรที่มีขอบเขตด้านบนเป็นทรงกลม

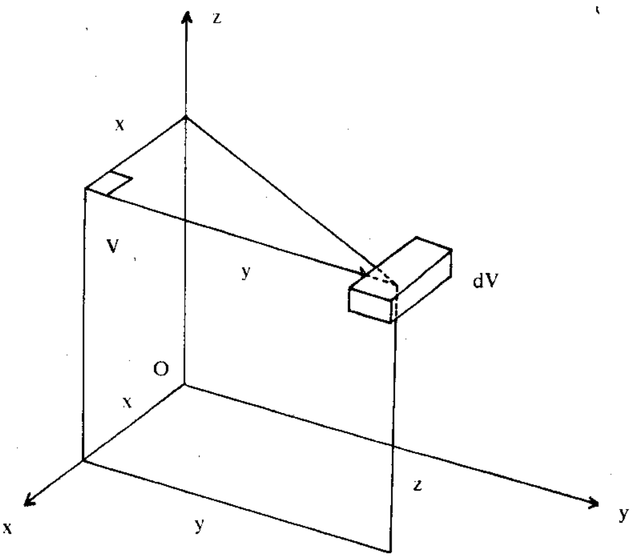
   $$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$$

   และด้านล่างเป็นพาราโบลอยด์ $az = x^2 + y^2$
   โดยอาศัยอินทิกรัลสามชั้น
4. จงหาปริมาตรในอัฐมภาคที่หนึ่ง ที่มีขอบเขตเป็นทรงกระบอก $x^2 + y^2 = a^2$ และระนาบ $x = a$, $y = a$, $z = 0$ และ $z = x + y$ โดยอาศัยอินทิกรัลสามชั้น

5.7 การประยุกต์ในทางฟิสิกส์ของการอินทิเกรตสามชั้น

(Physical Application of Tripple Integration)

มวล จุดศูนย์ถ่วง และโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล M ซึ่งแจกแจงเหนือบริเวณ V ของปริภูมิ xyz และมีความหนาแน่น $\delta = \delta(x, y, z)$ ที่จุด (x, y, z) ของ V ดังรูป 5.7.1



รูป 5.7.1

ค่าต่าง ๆ ดังกล่าวกำหนดโดยอินทิกรัลต่อไปนี้

$$M = \iiint \delta \, dV \qquad \text{..........(5.7.1)}$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint x\,\delta\,dV}{\iiint \delta\,dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint y\,\delta\,dV}{\iiint \delta\,dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint z\,\delta\,dV}{\iiint \delta\,dV}, \qquad \text{......(5.7.2)}$$

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2)\,\delta\,dv,\ I_y = \iiint (x^2 + z^2)\,\delta\,dV,\ I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\delta\,dV, \qquad \text{..........(5.7.3)}$$

อินทิกรัลในสมการ (5.7.1), (5.7.2) และ (5.7.3) อาจจะหาค่าเสมือนอินทิกรัลสามชั้นด้วย

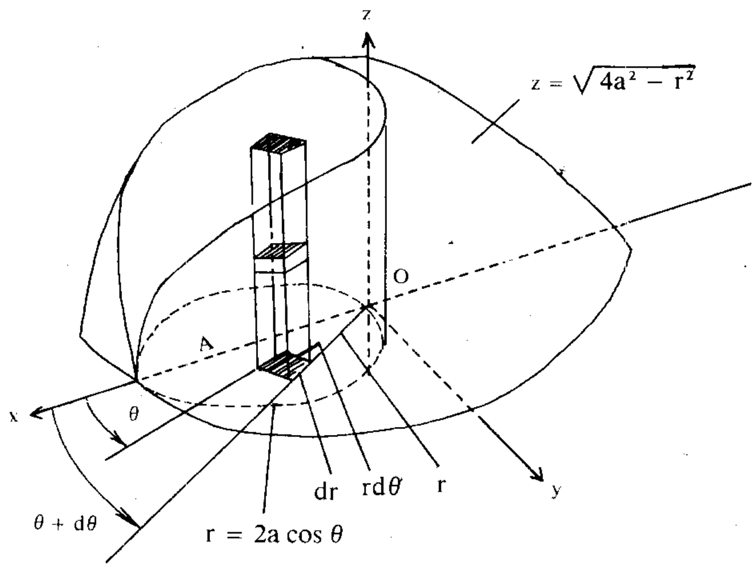
$$dV = dz\,dy\,dx$$

หรือเพื่อความสะดวกจะใช้พิกัดทรงกระบอก

$$dV = dz\,r\,dr\,d\theta$$

ตัวอย่าง 5.7.1 รูปทรงสามมิติมีขอบเขตด้านล่างโดยระนาบ xy ด้านบนโดยทรงกลม $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ และด้านข้างโดย ทรงกระบอก $r = 2a\cos\theta$ จงหาโมเมนต์ความเฉื่อย I_z

วิธีทำ รูปทรงสามมิติตั้งอยู่ด้านหน้าของระนาบ yz และเมื่อฉายในแนวตั้งฉากจะอยู่ภายในวงกลม $r = 2a\cos\theta$ ในระนาบ xy ดังรูป 5.7.2



รูป 5.7.2

ภาพฉายในแนวตั้งฉากอยู่ภายในวงกลม $r = 2a\cos\theta$ ในระนาบ xy เมื่อสมาชิกของปริมาตรเป็น $dV = dz\, r dr\, d\theta$ ล้อมรอบจุด r, θ, z จะได้

$$\begin{aligned} dI_z &= (x^2 + y^2)\, dV \\ &= r^2\, dz\, r dr\, d\theta \\ &= r^3\, dz\, dr\, d\theta \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} dz\, r^3\, dr\, d\theta \\ & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2a\cos\theta} (4a^2 - r^2)^{1/2}\, r^3\, dr\, d\theta \\ &= \frac{64}{15} a^5 \left(\pi - \frac{26}{15}\right) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 5.7.1

1. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x สำหรับปริมาตรที่ตัดจากทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ โดยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = a^2$
2. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z สำหรับปริมาตรที่มีขอบเขตด้านล่างโดยพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ และด้านบนโดยระนาบ $z = 2y$
3. จงหา x - พิกัด ของจุดศูนย์ถ่วงของปริมาตรที่มีขอบเขตด้านล่างเป็นระนาบ $z = 0$ ด้านข้างโดยทรงกระบอกเชิงวงรี (elliptic cylinder) $x^2 + 4y^2 = 4$ และด้านบนด้วย ระนาบ $z = x + 2$
4. จงหาจุดศูนย์ถ่วงของปริมาตรที่มีขอบเขตด้านบนเป็นทรงกลม

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$$

   และด้านล่างเป็น พาราโบลอยด์ $az = x^2 + y^2$
5. จงใช้พิกัดทรงกระบอกหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกลมรัศมี a และมวล M รอบเส้นผ่าศูนย์กลาง
6. จงหาปริมาตรที่ก่อกำเนิดโดยการหมุนเส้นโค้งรูปหัวใจ

$$r = a(1 - \cos\theta)$$

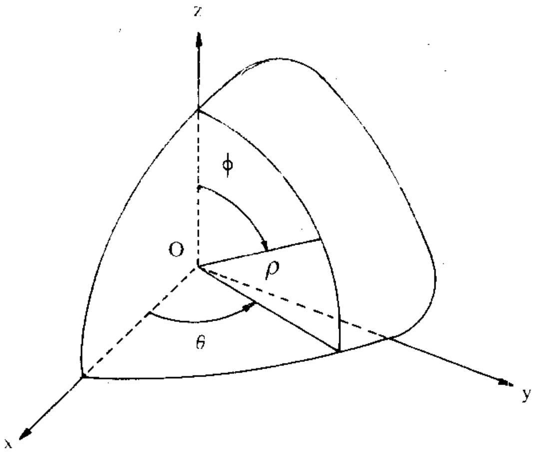
   รอบแกน x (ใช้การอินทิเกรตสองชั้น หมุนพื้นที่สมาชิก dA รอบแกน x เพื่อก่อกำเนิดปริมาตรสมาชิก dV)
7. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x สำหรับปริมาตรในข้อ 6
8. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของกรวยกลมตรง รัศมีฐาน a ส่วนสูง h มวล M รอบแกน ซึ่งผ่านจุดยอดและขนานกับฐาน
9. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกลมรัศมี a และมวล M เทียบกับเส้นสัมผัส
10. จงหาจุดศูนย์ถ่วงของปริมาตรของทรงกลม $r^2 + z^2 = a^2$ ในส่วนที่อยู่ระหว่างระนาบ

$$\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

5.8 พิกัดทรงกลม

(Spherical Coordinates)

ในการศึกษาปัญหาต่าง ๆ เมื่อมีการสมมาตรโดยเทียบกับจุดแล้วจะเป็นการสะดวกและง่ายขึ้นที่จะเลือกจุดนั้นเป็นเสมือนจุดกำเนิด และใช้พิกัดทรงกลมในการแก้ปัญหา ดังรูป 5.8.1

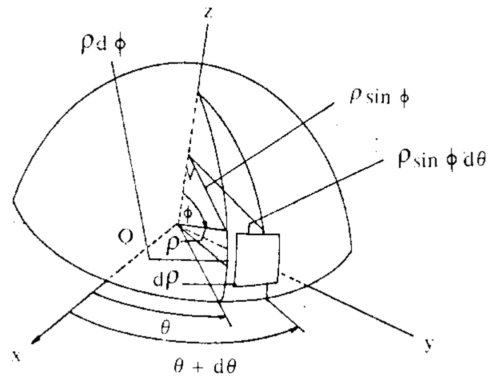


รูป 5.8.1

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกลมกำหนดได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned} \qquad \text{..........(5.8.1)}$$

ถ้ากำหนดให้ ρ, ϕ และ θ ส่วนที่เปลี่ยนแปลง $d\rho$, $d\phi$, และ $d\theta$ จะนำไปสู่การพิจารณาสมาชิก ดังรูป 5.8.2



รูป 5.8.2

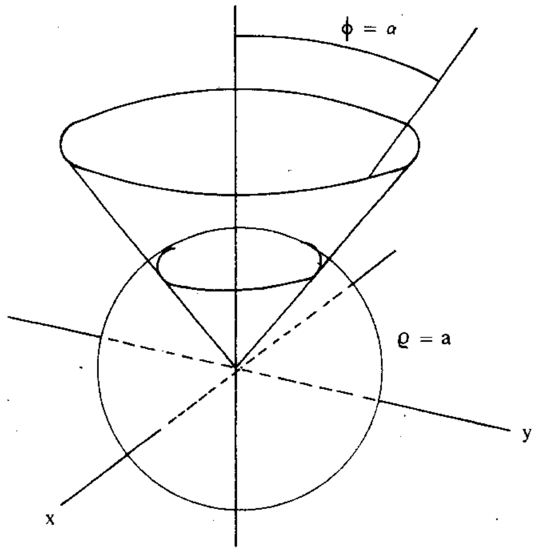
$$dV_{\rho\phi\theta} = d\rho \cdot \rho d\phi \cdot \rho \sin \phi d\theta$$
$$= \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \qquad \text{..........(5.8.2)}$$

และอินทิกรัลสามชั้นอยู่ในรูป

$$\iiint F(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi \, d\theta \qquad \text{..........(5.8.3)}$$

ตัวอย่าง 5.8.1 จงหาปริมาตรที่ตัดจากทรงกลม $P = a$ โดยกรวย $\phi = \alpha$

วิธีทำ พิจารณา รูป 5.8.3



รูป 5.8.3

ปริมาตรกำหนดโดย

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{a} P^2 \sin \phi \, d\varrho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \sin \phi \left. \frac{\varrho^3}{3} \right]_0^a d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{a^3}{3} \sin \phi \, d\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} - \frac{a^3}{3} \cos \phi \Big]_0^{\alpha} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} (1 - \cos \alpha) \, d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3} (1 - \cos \alpha) \, \theta \Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2 \pi a^3}{3} (1 - \cos \alpha)$$

5.8.1 การดึงดูดแห่งความโน้มถ่วง
(Gravitational attraction)

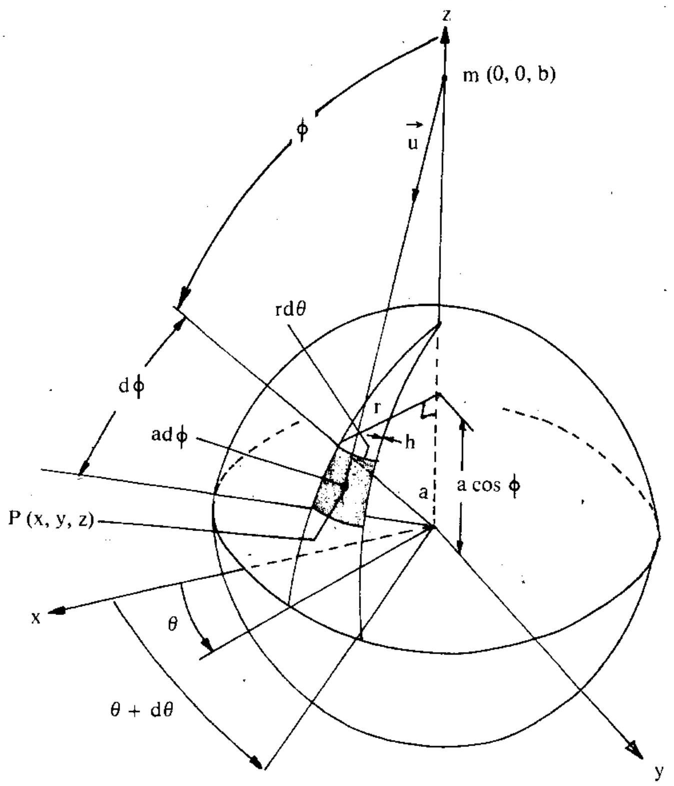
นิวตันได้ให้ความสนใจในการพิสูจน์ (หรือข้อพิสูจน์ให้เห็นว่าไม่จริง) ในความคิดที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของความจริงที่ว่า ทรงกลมตันมวล m เช่น ดวงอาทิตย์มีแรงดึงดูดแห่งความโน้มถ่วงกับอนุภาคมวล m′ กำหนดโดย

$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

ถ้าอนุภาค มีระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง r (เมื่อ G เป็นค่าคงตัว)

ตัวอย่าง 5.8.2 จงหาการดึงดูดแห่งความโน้มถ่วงของ ทรงกลมภายในกลวง รัศมีภายใน a ความหนา h ความหนาแน่นสม่ำเสมอ δ บนอนุภาค มวล m ระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง b โดยที่ $b > a$

วิธีทำ พิจารณารูป 5.8.4



รูป 5.8.4

ให้จุดศูนย์กลางของทรงกลมภายในกลวง อยู่ที่จุดกำเนิด และแกน z ทางบวกผ่านมวลของอนุภาค ดังรูป

ให้ D เป็นปริมาตรเล็ก ๆ ซึ่งตัดจากทรงกลมกลวง โดยกรวยที่มีมุมก่อกำเนิดเป็น ϕ และ $\phi + d\phi$ และโดยครึ่งระนาบทำมุมกับระนาบ xz ทำให้ได้มุมระหว่างระนาบเป็น θ และ $\theta + d\theta$

ปริมาตรของสมาชิก คือ

$$dV = r d\theta \cdot a d\phi \cdot h \qquad \text{..........(5.8.4)}$$

เมื่อ

$$r = a \sin \phi \qquad \text{..........(5.8.5)}$$

เพราะว่ามิติของ D ถูกสมมุติว่าเล็กมาก พิจารณาว่าสมาชิกของมวลใน D คือ $dm = \delta dV$ ที่จุด P (x, y, z) ด้วย

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = a \sin \phi \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta = a \sin \phi \sin \theta, \\ z &= a \cos \phi \end{aligned} \qquad \text{..........(5.8.6)}$$

แรงแห่งความโน้มถ่วงที่สมาชิกของมวล dm ที่ P (x, y, z) มีแรงบน มวล m ที่จุด (0, 0, b) คือ

$$d\vec{F} = \frac{G m \delta dV}{x^2 + y^2 + (z - b)^2} \vec{u}, \qquad \text{..........(5.8.7)}$$

เมื่อ $\vec{u}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมีทิศทางจาก (0, 0, b) ไปยัง P (x, y, z)
ดังนั้น

$$\vec{u} = \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}(z - b)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}} \qquad \text{..........(5.8.8)}$$

ในการที่จะได้การดึงดูดแห่งความโน้มถ่วงรวมก็โดยการแทนค่าของสมการ (5.8.6) และ (5.8.8) ลงในสมการที่ (5.8.7) และอินทิเกรตเทียบ θ ก่อนจาก 0 ถึง 2π และแล้วอินทิเกรตต่อมาเทียบกับ ϕ จาก 0 ถึง π

เมื่อ

$$\begin{aligned} dV &= r d\theta \cdot a d\phi \cdot h \\ &= a \sin \phi \, d\theta \cdot a d\phi \cdot h \\ &= a^2 h \sin \phi \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\vec{F} = Gm\vec{i}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\delta a^2h\, a \sin^2\phi \cos\theta}{(a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{3/2}}\, d\theta\, d\phi +$$

$$Gm\vec{j}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\delta a^2h\, a \sin^2\phi \sin\theta}{(a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{3/2}}\, d\theta\, d\phi +$$

$$Gm\vec{k}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\delta a^2h\, (a\cos\phi - b)\sin\phi}{(a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{3/2}}\, d\theta\, d\phi$$

เพราะว่า

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta = 0 \text{ และ } \int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta = 0$$

จึงทำให้ส่วนประกอบ $\vec{i}, \vec{j}$ เป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น

$$\vec{F} = Gm\vec{k}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\delta a^2h\, (a\cos\phi - b)\sin\phi}{(a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{3/2}}\, d\theta\, d\phi$$

$$= Gm\,\delta\,(2\pi a^2h)\,\vec{k}\int_0^{\pi}\frac{(a\cos\phi - b)\sin\phi}{(a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{3/2}}\, d\phi$$

ให้ $u = a^2+b^2-2ab\cos\phi,\ du = 2ab\sin\phi\, d\phi,$

$$a\cos\phi = \frac{a^2+b^2-u}{2b},\quad a\cos\phi - b = \frac{a^2+b^2-u-2b^2}{2b} = \frac{a^2-b^2-u}{2b}$$

ซึ่ง $\displaystyle\int_{\phi=0}^{\pi}\frac{(a\cos\phi - b)\sin\phi}{a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{3/2}}\, d\phi$

$$= \int_{u=(a-b)^2}^{(a+b)^2}\frac{\left(\dfrac{a^2-b^2-u}{2b}\right)\dfrac{du}{2ab}}{u^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4ab^2}\int_{(a-b)^2}^{(a+b)^2}(a^2-b^2-u)\,u^{-3/2}\, du$$

$$= \frac{1}{4\,ab^2} \int_{(a-b)^2}^{(a+b)^2} \left((a^2 - b^2)\, u^{-3/2} - u^{-1/2}\right) du$$

$$= -\frac{2}{b^2}$$

จึงได้ว่า

$$\vec{F} = -\vec{k}\, \frac{(Gm)\,(4\,\pi\, a^2\, h\, \delta)}{b^2}$$

แบบฝึกหัด 5.8.1

1. จงหาจุดศูนย์ถ่วงของปริมาตรที่ขอบเขตด้านบนโดยทรงกลม $\varrho = a$ และด้านล่างโดยกรวย $\phi = \pi/6$
2. จงหาปริมาตรที่ปิดล้อมโดยพื้นผิว

$$\varrho = a(1 - \cos\phi)$$

3. จงหารัศมีไจเรชัน (radins of gyration) เทียบกับเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกลมกลวงของมวล M มีขอบเขตโดยทรงกลม $\varrho = a$ และ $\varrho = 2a$ ถ้าความหนาแน่นเป็น $\delta = \varrho^2$
4. จงแสดงว่าการแทนค่าด้วยสมการ

$$u = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi, \quad du = 2ab\sin\phi\, d\theta,$$

$$a\cos\phi = \frac{a^2 + b^2 - u}{2b}, \quad a\cos\phi - b = \frac{a^2 - b^2 - u}{2b}$$

หรือการแทนค่าที่สมมูล

$$\phi' = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - u}{2ab}\right)$$

สำหรับ

$$\int_0^\pi \frac{(a\cos\phi - b)\sin\phi}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi)}\, d\phi$$

นำไปสู่ผลลัพธ์ดังสมการ

$$1/4\, ab^2 \int_{(a-b)^2}^{(a+b)^2} [(a^2 - b^2)\, u^{3/2} - u^{-1/2}]\, du = -2/b^2$$

ข้อสังเกต $\sqrt{(a-b)^2} = |a - b| = b - a$
เพราะว่า $b > a$

5. เมื่อแรงดึงดูดแห่งความโน้มถ่วงของทรงกลมภายในกลวงรัศมีภายใน ρ ความหนา $d\rho$ และความหนาแน่น $\delta = g(\varrho)$ เป็นฟังก์ชันของพิกัดทรงกลม ϱ สมมุติว่าการแทนค่านี้กระทำทุกหน ทุกแห่งบนขวามือของสมการ

$$\vec{F} = Gm\vec{k} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\delta a^2 h\, (a\cos\phi - b)\sin\phi}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi)^{3/2}}\, d\theta\, d\phi$$

และผลลัพธ์ก็คือการอินทิเกรตเทียบ ϱ จาก 0 ถึง a (กล่าวอีกอย่างหนึ่ง $\vec{F}$ ก็คือการดึงดูดของลูกบอลทรงกลมตัน รัศมี a ความหนาแน่น $\delta = g(\varrho)$ ขึ้นอยู่กับ ϱ) จงแสดงว่าการแทนค่าด้วย

$$u = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi, \quad du = 2ab\sin\phi \, d\phi,$$

$$a\cos\phi = \frac{a^2 + b^2 - u}{2b}, \quad a\cos\phi - b = \frac{a^2 - b^2 - u}{2b}$$

จะให้ผลลัพธ์เป็น

$$\vec{F} = -\vec{k}\,\frac{GmM}{b^2}$$

เมื่อ M คือ มวลรวมของลูกบอลทรงกลมตัน