บทที่ 4
การหาอนุพันธ์ย่อย
(Partial Differentiation)

4.1 ฟังก์ชันสองตัวแปรขึ้นไป (Functions of Two or More Variables)

มีตัวอย่างมากมายในทางวิทยาศาสตร์ ทางวิศวกรรมศาสตร์ และในชีวิตประจำวันที่ปริมาณหนึ่งถูกกำหนดด้วยจำนวนของปริมาณอื่น ๆ เช่น ปริมาตรของกรวยกลมตรง (right circular cone) คือ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \text{..........(4.1.1)}$$

เมื่อปริมาตรถูกกำหนดโดยปริมาณเชิงตัวเลข (ค่าคงตัว) คือ $\frac{1}{3}$ และ π และโดยปริมาณตัวแปร คือ รัศมี r และส่วนสูง h จะเห็นได้ว่าโดเมน (domain) ของฟังก์ชัน (4.1.1) คือ บริเวณใน E^2 ซึ่งทั้ง r และ h เป็นบวก : $r > 0$, $h > 0$ แต่จะสังเกตได้ว่าทางขวามือของสมการมีความหมายสำหรับทุกค่าจำนวนจริงของ r และ h จึงอาจใช้สมการนี้สัมพันธ์จำนวนจริง V กับ ทุก ๆ เวกเตอร์หรือจุดใน E^2 ได้ ในความหมายนี้ สมการ (4.1.1) ก่อให้เกิดการส่ง (mapping) จากทุก ๆ E^2 ไปยัง E^1 และพิสัย (range) คือ เซตของทุก ๆ จำนวนจริง $-\infty < V < \infty$ การส่งนี้ไม่เป็นเชิงเส้น (linear) จุดมุ่งหมายของบทเรียนนี้คือการศึกษาฟังก์ชันจาก E^n ไปยัง E^1 เพื่อความสะดวกก็จะศึกษาสำหรับ $n = 1$ หรือ $n = 3$

สำหรับ $n = 2$ จะได้นิยามของฟังก์ชันดังต่อไปนี้ และการขยาย $n > 2$ ก็จะกระทำได้โดยง่าย

นิยาม 4.1.1 ให้ D เป็นเซตของจุด (x,y) ใน E^2 การส่งที่กำหนดจำนวนเป็นได้อย่างเดียว (unique) w กับแต่ละจุดใน D เรียกฟังก์ชันจาก D ไปยัง E^1 โดเมนของฟังก์ชัน คือ D และพิสัย คือ เซตของจำนวน w ที่เป็นภาพ (image) ภายใต้การส่งของจุดใน D การแสดงว่า w เป็นภาพภายใต้การส่ง f ของ (x, y) เขียนได้ว่า

$$w = f(x, y) \qquad \text{..........(4.1.2)}$$

จะกล่าวว่า w เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ (x, y) ก็ได้

สัญกรณ์

$$w = f(x, y, z) \qquad \text{..........(4.1.3)}$$

มีความหมายคล้ายคลึงกันคือ เมื่อกำหนดค่าสามตัวแปร x, y และ z จะให้ ค่า w ซึ่งเป็นได้อย่างเดียว ดังตัวอย่าง ถ้า

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{..........(4.1.4)}$$

เสมือนความสัมพันธ์ระหว่าง $\varrho = |\overrightarrow{OP}|$ และพิกัดฉากของ P(x, y, z) เงื่อนไขต่อไปก็คือ

$$\varrho \geqslant 0 \qquad \text{..........(4.1.5)}$$

ค่าเป็นได้อย่างเดียวของ p ก็จะหาได้ เมื่อกำหนดค่า x, y และ z ค่าเป็นได้อย่างเดียวในกรณีนี้ก็คือ

$$\varrho = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

4.1.1 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ฟังก์ชัน w = f (x, y) กล่าวได้ว่าต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อ

$w \to w_0 = f(x_0, y_0)$ ขณะที่ $(x, y) \to (x_0, y_0)$

หรือ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

หรือจะกล่าวอีกทางหนึ่งได้ว่า

ฟังก์ชัน w = f (x, y) ต่อเนื่อง ที่จุด (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับ (x, y) ในโดเมนของ f ถ้า $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ แล้ว $|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \in$

ตัวอย่าง 4.1.1 จงแสดงว่าฟังก์ชันกำหนดโดย

$$w = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ไม่ต่อเนื่องที่ (0, 0)

วิธีทำ ให้ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \neq 0$

จะได้
$$w = \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}$$
$$= \sin\theta\cos\theta$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

ดังนั้น $\dot{w}$ มีค่าระหว่าง $-\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{2}$ ขณะที่จุด (x, y) หรือ (r, θ) เคลื่อนไปรอบจุดกำเนิด ไม่ว่า r จะเล็กเท่าไร นั่นคือไม่สามารถทำให้ค่า w เข้าใกล้ศูนย์ โดยให้ (x, y) ใกล้ $(0, 0)$ ดังนั้น ฟังก์ชันนี้จึงไม่ต่อเนื่องที่ $(0, 0)$

ตัวอย่าง 4.1.2 จงหาว่า จุด (x, y) เข้าใกล้จุด $(0, 0)$ เท่าไร จึงจะทำให้

$|f(x, y) - f(0, 0)| < \in$ เมื่อ $\in = 0.001$ และ $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}$

วิธีทำ ระยะทาง d ระหว่างจุด (x, y) กับ $(0, 0)$ คือ

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

เพราะว่า $|f(x, y) - f(0, 0)| < \in$

เพราะฉะนั้น $\left|\dfrac{y}{x^2 + 1} - 0\right| < .001$

เพราะว่า $\left| x^2 + 1 \right| \leqslant \left| y \right| \leqslant \left| \sqrt{x^2 + y^2} \right.$

ดังนั้น ให้ $\sqrt{x^2 + y^2 < 0.001}$

เพราะฉะนั้น จุด (x, y) เข้าใกล้จุด $(0, 0)$ ต้องน้อยกว่า .001 จึงจะทำให้ $|f(x, y) - f(0,0)| < \in$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาว่า จุด (x, y) เข้าใกล้จุด (0, 0) เท่าไร จึงจะทำให้ $|f(x, y) - f(0,0)| < \in$ เมื่อ $\in = 0.01$ และ $f(x, y) = x^2 + y^2$
2. จงหาว่าจุด (0, 0, 0) เข้าใกล้จุด (x, y, z) เท่าไร จึงจะทำให้ $|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \in$ ถ้า $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ และ $\in = 0.01$
3. จงหาว่าจุด (x, y, z) เข้าใกล้จุด (0, 0, 0) เท่าไร จึงจะทำให้ $|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \in$ ถ้า f 6x, y, z) = xyz และ ∈ 3 0.008
4. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{ถ้า ถ้า } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ (0, 0)
5. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ต่อเนื่องที่ (0, 0, 0)
6. ให้ $f(x, y) = (x + y)/(x^2 + y)$ เมื่อ $x^2 + y \neq 0$

   (ก) เป็นไปได้หรือไม่ที่จะกำหนด $f(1, -1)$ โดยที่ $f(x, y) \to f(1, -1)$ ขณะที่ $(x, y) \to (1, -1)$ ตามเส้น $x = 1$ และตามเส้น $y = -1$

   (ข) เป็นไปได้หรือไม่ที่จะกำหนด $f(1, -1)$ โดยที่ f ต่อเนื่องที่ $(1, -1)$

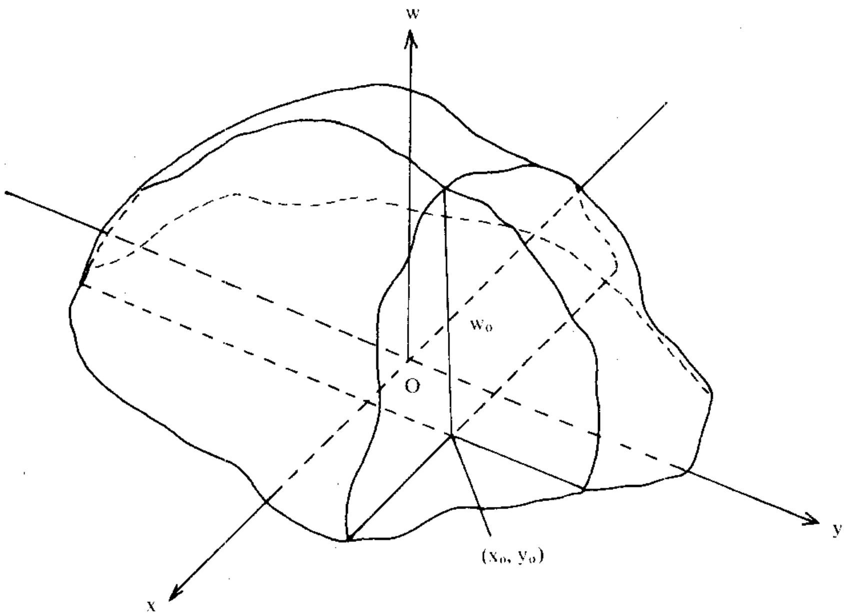
4.2 อนุพันธ์ระบุทิศทาง : กรณีพิเศษ

(The Directional Derivative : Special Cases)

พิจารณาฟังก์ชันของสองตัวแปรอิสระ x และ y และให้ w เป็นตัวแปรตาม คือ สมการ

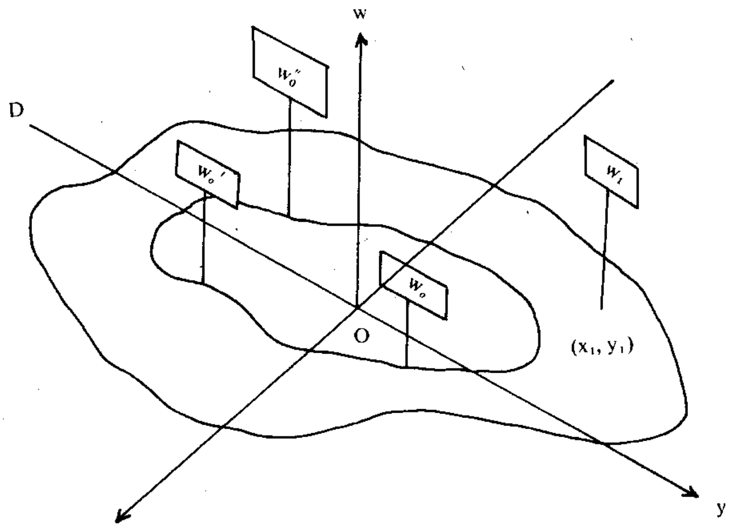
$$w = f(x, y) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.2.1)$$

แทนพื้นผิวในปริภูมิ xyw ในกรณีเฉพาะอาจจะจินตนาการว่าแทนการเลื่อนขึ้นของจุดบนภูเขาเหนือระนาบ $w = 0$ ดังรูป 4.2.1



รูป 4.2.1

สมการ $w = f(x, y)$ นั้นอาจจะจินตนาการว่ามีฐานเป็นบริเวณ D อยู่ในระนาบ xy ซึ่ง D เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f แต่ละจุดใน D มีค่า w ที่สัมพันธ์กัน คือ $w = f(x, y)$ ด้วยการส่งคอนทัวร์ (contour map) จะได้เซตของเส้นโค้งคอนทัวร์ (contour curves) ใน D แต่ละเส้นโค้งคอนทัวร์ประกอบด้วยจุด (x, y) ใน D ที่มีค่า w เท่ากัน จึงได้สมการของเส้นโค้งคอนทัวร์โดยให้ $f(x, y) = w_0$ เมื่อ w_0 เป็นจำนวนใด ๆ ในพิสัยของ f รูป 4.2.2 แสดงเส้นโค้งคอนทัวร์สัมพันธ์กับพื้นผิวที่แสดงในรูป 4.2.1 ด้วย $w_o = w_o' = w_o''$



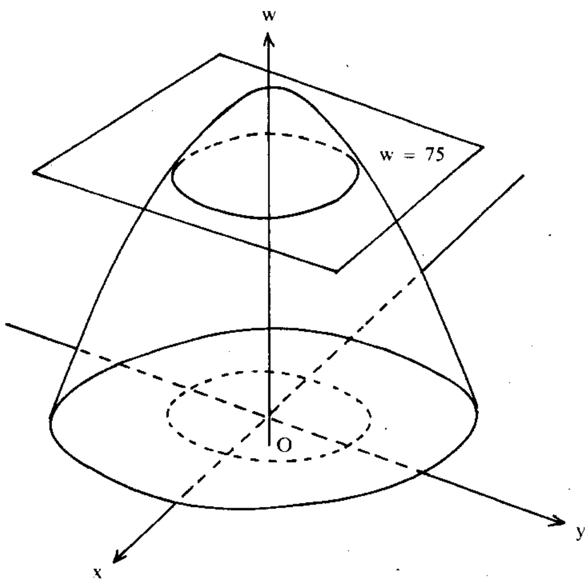
รูป 4.2.2

ตัวอย่าง 4.2.1 สำหรับ $w = 100 - x^2 - y^2$ ....(4.2.2)

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 100\}$$

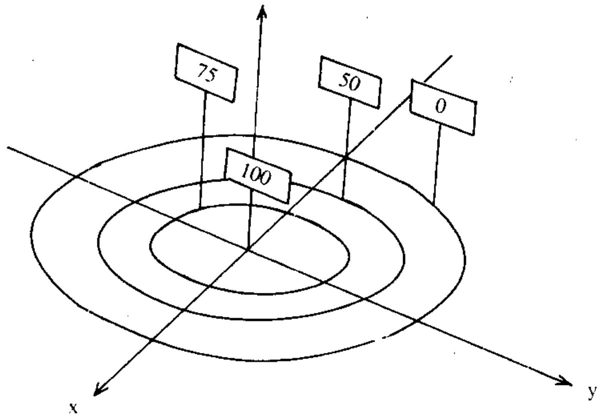
จงแปลความหมายพร้อมทั้งเขียนภาพประกอบ

วิธีทำ พิจารณารูป 4.2.3



รูป 4.2.3

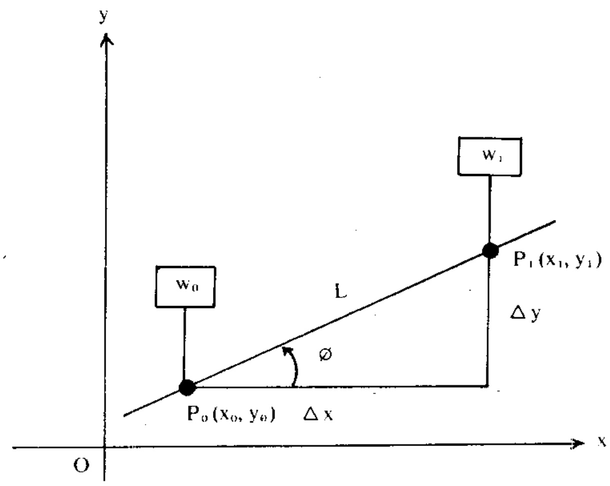
รูป 4.2.3 แสดงพื้นผิวของพาราโบลอยด์ตัดด้วยระนาบ $w = 75$ รอยตัดนี้สมนัยกับเส้นโค้งระดับ (level curve) ในระนาบ xy เป็นวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ วงกลมนี้แสดงให้เห็นดังรูป 4.2.4 นับเป็นเครื่องหมายจาก $w = 75$



รูป 4.2.4

ความหมายประการที่สอง นับว่าเป็นประโยชน์โดยตรงกับการประยุกต์ในเชิงวิศวกรรมศาสตร์ สมการ (4.2.2) อาจจะแทนอุณหภูมิ w เป็นองศาเซนติเกรดที่แต่ละจุด (x, y) ของแผ่นบางกลมที่ขณะเวลาใดเวลาหนึ่ง และถ้าให้ w เป็นอุณหภูมิภายในทรงกลม ค่าของ w ก็จะเกี่ยวพันกับแต่ละจุดภายในทรงกลม จุดที่ให้ค่า w เท่ากันก็จะให้อุณหภูมิที่พื้นผิวของปริภูมิเท่ากันด้วย

จะได้ทำการศึกษาอนุพันธ์ระบุทิศทางโดยพิจารณารูป 4.2.5



สมมุติว่า w เป็นฟังก์ชันของ x และ y นิยามได้สำหรับค่าของ (x, y) ในบางบริเวณ D ของระนาบ xy ให้ $P_0(x_0, y_0)$ เป็นจุดใด ๆ ของ D และ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดที่สองของ D แล้วการเปลี่ยนค่าไป (increment) ใน w จาก w_0 ที่P_0 ไปยัง w_1 ที่ P_1 นั่นคือ

$$\Delta w = w_1 - w_0 = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) \qquad \text{..........(4.2.3)}$$

สมนัยกับ

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta y = y_1 - y_0$$

ตรึง P_0 ให้อยู่กับที่ ให้ P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ตามเส้นโค้งเรียบเส้นหนึ่งในระนาบ xy โดยทั่วไปเส้นโค้งนี้จะไม่ใช่เส้นโค้งระดับที่ได้กล่าวถึง สมมุติว่า P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ตามเส้นตรง L ซึ่งทำมุม ø กับ

$$\frac{dw}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta s}$$

$$= \lim_{P_1 \to P_0} \frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \qquad \text{..........(4.2.4)}$$

แกน x ดังรูป 4.2.5 แล้ว ถ้าลิมิตมีค่า ก็จะเรียกค่านี้ว่า อนุพันธ์ระบุทิศทางของ w = f (x, y) ที่ (x_0, y_0) ในทิศทาง L การที่ต้องนำคำระบุทิศทางมาใช้ก็เพราะคำตอบของ (4.2.4) นั้นไม่ได้ขึ้นเพียงแต่ฟังก์ชันและจุด P_0 เท่านั้น แต่ขึ้นอยู่กับทิศทางที่ P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ด้วย ซึ่งจะได้ศึกษากรณีทั่วไปของอนุพันธ์ระบุทิศทางในหัวข้อ 4.5 ซึ่งในขั้นนี้จะได้ทำการศึกษากรณีพิเศษสองกรณี กรณีแรกเป็นกรณีที่ P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ตามเส้นตรง $y = y_0$ ซึ่งเส้นตรงนี้ขนานกับแกน x ในกรณีที่สอง P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ตามเส้นตรง $x = x_0$ ขนานกับแกน y

ถ้า P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ตามเส้นตรง $y = y_0$ จะเขียนได้ว่า

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad \text{..........(4.2.5)}$$

และเรียกผลลัพธ์ลิมิตว่าอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของ w = f (x, y) โดยเทียบกับ x ที่ $P_0(x_0, y_0)$ จากนิยาม (4.2.5) เป็นการหาอนุพันธ์ตามปกติ โดยเทียบกับ x ของฟังก์ชัน F (x) = $f(x, y_0)$ ได้จาก f (x, y) โดยถือว่าค่าของ y เป็นค่าคงตัว เป็นการวัดอัตราแปรเปลี่ยนชั่วขณะ (instantaneous rate of change) ที่ P_0 ของฟังก์ชัน w = f (x, y) ต่อการเปลี่ยนแปลงหนึ่งหน่วยใน x สัญกรณ์ notation) $\partial w / \partial x$ ใช้แทนอนุพันธ์ย่อยของ w โดยเทียบกับ x ด้วย ถ้าไม่เขียนดรรชนีล่าง ₀ ใน (4.2.5) ผลลัพธ์ก็คือ อนุพันธ์ย่อย ที่ (x, y)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad \text{..........(4.2.6)}$$

เป็นการคำนวณอนุพันธ์ย่อยจากสมการของ w โดยนำกฎของการหาอนุพันธ์ไปใช้ตามปกติ โดยให้ y เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 4.2.2 ถ้าให้ $w = 100 - x^2 - y^2$ เป็นอุณหภูมิเป็นองศาเซนติเกรดที่ (x, y) เมื่อ x และ y เป็นเซนติเมตร อยากทราบว่า ที่จุด (3, 4) มีอุณหภูมิเท่าไร และ $\frac{\partial w}{\partial x}$ มีค่าเท่าไร พร้อมทั้งอธิบายประกอบด้วย

วิธีทำ ที่จุด (3, 4) จะมีอุณหภูมิเป็น

$$w = 100 - 3^2 - 4^2$$
$$= 75^{\circ} c$$

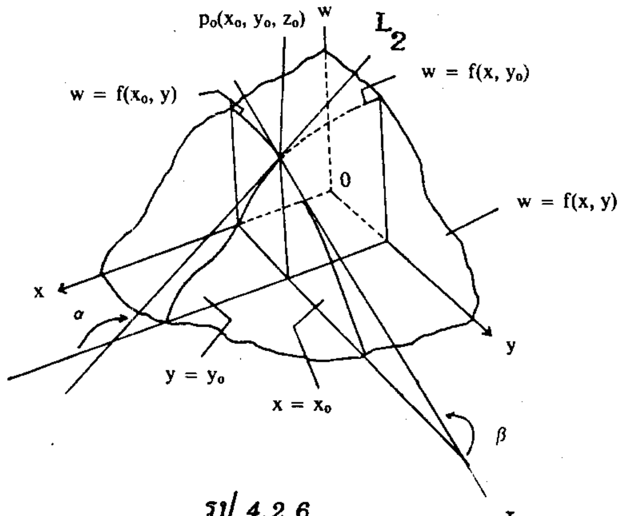
และ $$\frac{\partial w}{\partial x} = -2x$$

ฉะนั้น ที่จุด (3, 4)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(3,\ 4)} = -6\ (^{\circ}C/cm.)$$

นั่นคือ การเปลี่ยน x ไปทางบวกน้อย ๆ อุณหภูมิจะลดลงในอัตรา 6°C ต่อหนึ่งเซนติเมตร ขณะที่การเปลี่ยน x ไปทางลบ จะทำให้ w เพิ่มขึ้นในอัตราเดียวกัน

การแปลความหมายในเชิงเรขาคณิตของสมการ (4.2.5) โดยพิจารณารูป 4.2.6



รูป 4.2.6

นั่นคือ

$$f_x(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}$$

ให้ความชันที่ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ของเส้นโค้ง

$$w = f(x, y_0)$$

ซึ่งระนาบ $y = y_0$ ตัดพื้นผิว

$$w = f(x, y)$$

ดังนั้น ในรูป 4.2.6 ถ้า x, y และ w วัดในหน่วยเดียวกันแล้ว

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\tan \beta = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}, = f_y(x_0, y_0)$$

อนุพันธ์ย่อยของ $w = f(x, y)$ โดยเทียบกับ y เขียนแทนด้วย $\partial w/\partial y$ หรือ $f_y(x, y)$ จึงมีนิยาม (4.2.7)

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, - y_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y) \qquad ....(4.2.7)$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

มีนิยามในทำนองเดียวกันคือ $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial w/\partial z$, $\partial w/\partial u$ และ $\partial w/\partial v$ เมื่อ $w = f(x, y, z, u, v)$ ในแต่ละกรณีจะให้ตัวแปรทุกตัวเป็นค่าคงตัวเว้นแต่ตัวที่ต้องการหาอนุพันธ์โดยเทียบกับตัวนั้นเท่านั้น และอาจจะเขียน $f_u(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ แทนอนุพันธ์ย่อยของ $w = f(x, y, z, u, v)$ โดยเทียบกับ u ที่ $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ ซึ่งอาจจะเขียนแทนด้วย $(\partial w/\partial u)(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ จะง่ายขึ้นไปอีกถ้าเขียน $(\partial \omega/\partial u)_0$

ตัวอย่าง 4.2.3 ตัวต้านทานไฟฟ้าสามตัว R_1, R_2 และ R_3 ต่อกันอย่างขนาน ทำให้เกิดความต้านทาน R

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

จงหาว่า $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ ให้ R_1 และ R_3 เสมือนค่าคงตัวและหาอนุพันธ์ทั้งสองทั้งของสมการ โดยเทียบกับ R_2

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$-\frac{1}{R_2}\frac{\partial R}{\partial R_2} = -\frac{1}{R_2^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2$$

ตัวอย่าง 4.2.3 ถ้า $w = (xy)^z$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial z}$

วิธีทำ ถือว่า x และ y เป็นค่าคงตัว ดังนั้น xy จึงเป็นค่าคงตัวด้วยอาศัยกฎที่ว่า

$$\frac{d}{dz}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dz}$$

ดังนั้น

$$\partial w/\partial z = (xy)^z \ln (xy)$$

แบบฝึกหัด 4.2

ในข้อ 1 ถึง 3 จงแสดงสิ่งที่แทนฟังก์ชัน $w = f(x, y)$ มาสองประการ

(ก) โดยการเขียนพื้นผิวในปริภูมิ xyw และ

(ข) จงวาดวงศ์ของเส้นโค้งระดับ (family of level curves)

$f(x, y) =$ ค่าคงตัว

1. $f(x, y) = x$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$
3. $f(x, y) = x^2 - y^2$

ในข้อ 4 ถึง 8 จงหา $\partial w/\partial x$ และ $\partial w/\partial y$

4. $w = e^x \cos y$
5. $w = e^x \sin y$
6. $w = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$
7. $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
8. $w = \cosh \dfrac{y}{x}$

ในข้อ 9 ถึง 12 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยเทียบกับแต่ละตัวแปร

9. $f(x, y, z, w) = x^2 e^{2y+3z} \cos(4w)$
10. $f(x, y, z) = z \sin^{-1}(y/x)$
11. $f(u, v, w) = \dfrac{u^2 - v^2}{v^2 + w^2}$
12. $f(x, y, r, s) = \sin 2x \cosh 3r + \sinh 3y \cos 4s$

ในข้อ 13 และ 14 ให้ A, B, C เป็นมุมของสามเหลี่ยม และ a, b, c เป็นความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมตามลำดับ

13. จงแสดงฟังก์ชันในรูปของ a, b, c และหาค่า $\partial A/\partial a$ และ $\partial A/\partial b$
14. จงแสดงฟังก์ชันในรูปของ A, b, B และหาค่า $\partial a/\partial A$ และ $\partial a/\partial B$

ในข้อ 15 ถึง 20 จงแสดงพิกัดทรงกลมในรูปฟังก์ชันของพิกัดฉาก x, y, z และหาค่าอนุพันธ์ย่อย

15. $\partial \rho/\partial x$
16. $\partial \phi/\partial z$
17. $\partial \theta/\partial y$
18. $\partial \theta/\partial z$
19. $\partial \phi/\partial x$
20. $\partial \theta/\partial x$

ในข้อ 21 ถึง 23 ให้ $\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุด (x, y, z) จงแสดง x, y, z ในรูปของฟังก์ชันของพิกัดทรงกลม ϱ, ϕ, θ และหาค่าอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้

21. $\partial \vec{R} / \partial \rho$ 22. $\partial \vec{R} / \partial \phi$ 23. $\partial \vec{R} / \partial \theta$

24. ในรูป 4.2.6 ให้

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}f(x, y)$$

เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุด (x, y, w) จงหาค่าของ $\partial \vec{R} / \partial x$, $\partial \vec{R} / \partial y$ และ $\vec{v} = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} \right)$ พร้อมทั้งบอกทิศทางของเวกเตอร์ทั้งสามด้วย

4.3 ระนาบสัมผัสและเส้นปรกติ

(Tangent Plane and Normal Line)

ในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าอนุพันธ์ย่อย

$$f_y(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \qquad ....(4.3.1)$$

$$f_x(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} \qquad ....(4.3.2)$$

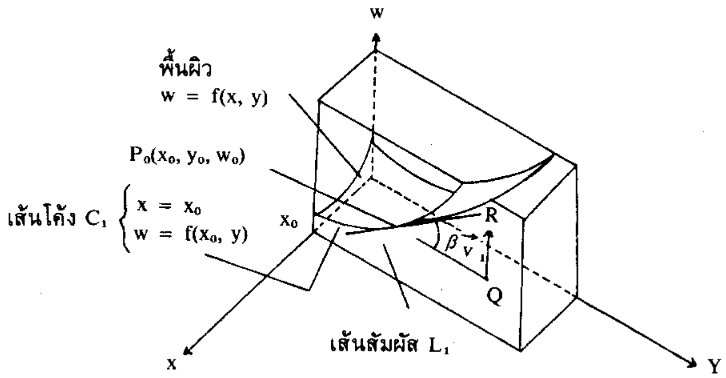
ให้ความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง C_1 และ C_2 เส้นโค้งทั้งสองเกิดจากระนาบ $x = x_0$ และ $y = y_0$ ตัดพื้นผิว $w = f(x, y)$ ตามลำดับ เส้นตรง L_1 และ L_2 กำหนดระนาบขึ้นระนาบหนึ่ง ถ้าพื้นผิวนี้เรียบอย่างพอเพียงใกล้ ๆ จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ระนาบนี้จะสัมผัสพื้นผิวที่ p_0

นิยาม 4.3.1 ระนาบสัมผัสให้ $w = f(x, y)$ เป็นสมการของพื้นผิว S ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุด ๆ หนึ่งบนพื้นผิว ให้ T เป็นระนาบผ่าน P_0 ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดอื่นใด ๆ บน S ถ้าการวัดมุมระหว่าง T และเส้นตรง P_0P ย่างเข้าสู่ศูนย์ขณะที่ P ย่างเข้าสู่ P_0 กล่าวได้ว่า T สัมผัสกับ S ที่ P_0

เส้นตรงผ่าน P_0 ซึ่งอยู่ในแนวฉากกับระนาบนี้เรียกเส้นปรกติ (normal line) กับพื้นผิวที่ P_0

สมมุติว่าพื้นผิวมีระนาบสัมผัสและเส้นปรกติ จะหาสมการของระนาบสัมผัสและเส้นปรกติได้อย่างไร จะเห็นได้ว่า เวกเตอร์ $\vec{N}$ ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย L_1 และ L_2 ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{N}$ อาจจะหาได้จากผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross product) ของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ ซึ่งขนานกับ L_1 และ L_2 จึงเป็นปัญหาต่อไปอีกว่า จะหา $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ ได้อย่างไร

รูป 4.3.1 แสดงส่วนของเส้นโค้ง C_1 ที่การจากการตัดพื้นผิว โดยระนาบ x = x



รูป 4.3.1

สามเหลี่ยม P_0QR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉาก P_0R ทับกับเส้นสัมผัส L_1 ดังนั้น ความชันของ L_1 คือ

$$\tan\beta = \frac{QR}{P_0Q} = f_y(x_0, y_0)$$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $P_0Q = 1$ หน่วยใน y QR จะเท่ากับ $f_y(x_0, y_0)$ หน่วยใน w ในเทอมของเวกเตอร์อาจจะให้

$$\overrightarrow{P_0Q} = 1\,\vec{j}, \quad \overrightarrow{QR} = f_y(x_0, y_0)\,\vec{k}$$

และ

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0Q} + \overrightarrow{QR} = \vec{j} + f_y(x_0, y_0)\,\vec{k} \qquad \text{..........(4.3.3)}$$

เมื่อ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ตามแกน x, y และ w ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกันเส้นโค้ง C_2 ที่เกิดจากการตัดพื้นผิวด้วยระนาบ $y = y_0$ จะได้

$$\vec{v}_2 = \vec{i} + f_x(x_0, y_0)\,\vec{k} \qquad \text{..........(4.3.4)}$$

ซึ่ง $\vec{v}_2$ นี้ ขนานหรือทับกับเส้นตรง L_2

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์ปรกติ $\vec{N}$ คือ

$$\vec{N} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\, f_x(x_0, y_0) + \vec{j}\, f_y(x_0, y_0) - \vec{k} \qquad \text{..........(4.3.5)}$$

ถ้าใช้ z แทน w ก็จะได้ฟังก์ชันพื้นผิวเป็น $z = f(x, y)$ และถ้าเขียนแทนสัมประสิทธิ์ของเวกเตอร์ปรกติด้วย

$$A = f_x(x_0, y_0),\ B = f_y(x_0, y_0),\ C = -1,$$

จะได้ $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\,\vec{k}$ นอกจากนั้น ยังสามารถแสดงสมการระนาบสัมผัส และเส้นปรกติ ที่จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ในรูปพิกัดฉากและในรูปเวกเตอร์ได้ด้วย ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ แล้ว $\vec{R} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด $P(x, y, z)$ และ $\vec{R}_0$ ก็เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของ $\vec{P}_0$ ซึ่ง $\vec{R}_0 = \vec{i}\,x_0 + \vec{j}\,y_0 + k\,\vec{z_0}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0P} = \vec{R} - \vec{R}_0$ $(x - x_0)\,\vec{i} + (y - y_0)\,\vec{j} + (z - z_0)\,\vec{k}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์อยู่ในระนาบสัมผัสจะต้องตั้งฉากกับเวกเตอร์ปรกติด้วย ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการของระนาบสัมผัสพื้นผิวที่จุด P_0 ได้ดังนี้

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

และ

$$\vec{N} \cdot (\vec{R} - \vec{R}_o) = 0 \qquad \text{..........(4.3.6)}$$

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นปรกติ เวกเตอร์ $\vec{R} - \vec{R}_o = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j} + (z - z_o)\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่บนเส้นปรกติ จึงขนานกับ $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ เพราะฉะนั้น $\vec{R} - \vec{R}_o = t\vec{N}$ ซึ่งก็คือสมการของเส้นปรกติ ซึ่งสามารถเสียใหม่ได้ว่า

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(A, B, C), \ -\infty < t < \infty$$

และ

$$\vec{R} = \vec{R}_o + t\vec{N} \qquad \text{..........(4.3.7)}$$

แบบฝึกหัด 4.3

ในข้อ 1 ถึง 3 จะหาระนาบที่สัมผัสกับพื้นผิว $z = f(x, y)$ ที่ P_0 และจงหาเส้นปรกติกับพื้นผิวที่ P_0 ด้วย

1. $z = x^2 + y^2, (3, 4, 25)$
2. $z = x^2 - xy - y^2, (1, 1, -1)$
3. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ (3, -4, \dfrac{3}{5})$
4. จงแสดงว่ามีเส้นตรงเส้นหนึ่งบนกรวย

$$z^2 = 2x^2 + 4y^2$$

ซึ่งทำให้ระนาบสัมผัสขนานกับระนาบ

$$12x + 14y + 11z = 25$$

จงหาเส้นตรงเส้นนั้นและระนาบสัมผัส

5. จงหาระนาบสัมผัส และเส้นปรกติของพื้นผิว $5x^2 - yz + 1 = 0$ ที่จุด $(1, 3, 2)$
6. จงหาเวกเตอร์สัมผัสกับ C ที่จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เมื่อเส้นโค้ง C เกิดจากการตัดกันของพื้นผิว $z = f(x, y)$ และ $z = g(x, y)$ (แสดงในพจน์ของอนุพันธ์ย่อยของ f และ g ที่ P_0)
7. จงหาเวกเตอร์ยาว $\sqrt{3}$ ที่สัมผัสกับเส้นโค้งเกิดจากการตัดกันของกรวย

$$z^2 = 4x^2 + 9y^2$$

และระนาบ

$$6x + 3y + 2z = 5$$

ที่จุด $P_0(2, 1, -5)$

4.4 การประมาณค่าของ $\triangle w$

(Approximate Value of $\triangle w$)

ถ้าพื้นผิว $w = f(x, y)$ มีระนาบสัมผัสที่จุด $P_0(x_0, y_0, w_0)$ แล้วสมการของระนาบสัมผัสคือ

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - 1(w - w_0) = 0 \qquad \text{..........(4.4.1)}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติเป็น

$$\vec{N} = f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}$$

เมื่อ (x_0, y_0, w_0) เป็นพิกัดของจุดบนพื้นผิว และ (x, y, w_{tan}) เป็นพิกัดของจุดบนระนาบสัมผัส จึงเขียนสมการ (4.4.1) ได้ดังนี้

$$w_{tan} - w_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad \text{..........(4.4.2)}$$

หรือ

$$w_{tan} = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) \qquad \text{..........(4.4.3)}$$

ทางขวามือของสมการ (4.4.3) เป็นเชิงเส้นทั้ง x และ y จึงเรียกว่า ลิเนียไรเซชั่น (linearization) ของ f ที่ P_0

ถ้าให้ $x - x_0 = \triangle x$, $y - y_0 = \triangle y$ และแทน $w_{tan} - w_0$ ด้วย $\triangle w_{tan}$ จึงเขียนสมการ (4.4.2) ใหม่ดังนี้

$$\triangle w_{tan} = f_x(x_0, y_0)\triangle x + f_y(x_0, y_0)\triangle y \qquad \text{...........(4.4.4)}$$

ในการศึกษาเรื่องนี้ภายใต้ข้อจำกัดที่เหมาะสมบนฟังก์ชันจะเห็นว่า

1) พื้นผิวมีระนาบสัมผัส และ

2) การเปลี่ยนใน w บนพื้นผิว $w = f(x, y)$ แตกต่างจาก $\triangle w_{tan}$ โดยจำนวน $\epsilon_1\triangle x + \epsilon_2\triangle y$ ที่ทั้ง ϵ_1 และ ϵ_2 เล็ก เมื่อ $\triangle x$ และ $\triangle y$ เล็ก

ทฤษฎีบท 4.4.1 ให้ฟังก์ชัน $w = f(x, y)$ ต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ย่อย f_x, f_y ตลอดบริเวณ

$$R : |x - x_0| < h, |y - y_0| < k$$

ของระนาบ xy ให้ f_x และ f_y ต่อเนื่องที่ (x_0, y_0)

ให้

$$\triangle w = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) \qquad \text{..........(4.4.5)}$$

แล้ว

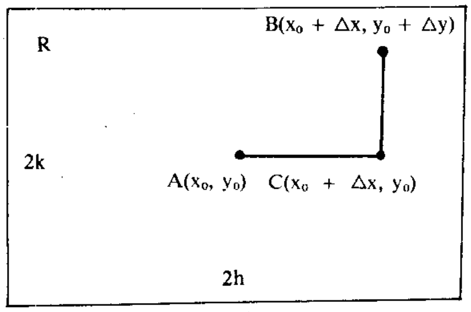
$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \qquad \text{..........(4.4.6)}$$

$\nabla\, w_{tan}$

ซึ่ง

$$\epsilon_1 \text{ และ } \epsilon_2 \to 0 \text{ เมื่อ } \Delta x \text{ และ } \Delta y \to 0 \qquad \text{..........(4.4.7)}$$

บริเวณ R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $2h \times 2k$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $A(x_0, y_0)$ ดังรูป 4.4.1



รูป 4.4.1

จะจำกัด Δx และ Δy เล็ก โดยทำให้จุด

$(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$

$(x_0 + \Delta x, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)$

ทั้งหมดอยู่ภายในสี่เหลี่ยมผืนผ้า R นี้ สมมุติว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ย่อย fx และ f_y ตลอดสี่เหลี่ยมผืนผ้า R

พิสูจน์ ส่วนที่เปลี่ยนไป Δw เป็นการเปลี่ยนใน f จาก $A(x_0, y_0)$ ไปยัง

$B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

ส่วนที่เปลี่ยนไปนี้แบ่งออกเป็นสองส่วน คือ Δw_1 และ Δw_2

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \qquad \text{..........(4.4.8)}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \qquad \text{..........(4.4.9)}$$

การเปลี่ยนครั้งที่หนึ่งเป็นการเปลี่ยน w จาก A ไปยัง C และครั้งที่สองเป็นการเปลี่ยนจาก C ไปยัง B ดังรูป 4.4.1

โดยอาศัยพีชคณิตจะได้

$$
\begin{aligned}
\Delta w_2 + \Delta w_1 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) \\
&\quad - f(x_0, y_0) \\
&= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= \Delta w \qquad \text{..........(4.4.10)}
\end{aligned}
$$

ใน Δw_1 ตรึง $y = y_0$ และมีส่วนที่เปลี่ยนคือฟังก์ชันของ x ที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ เพราะฉะนั้นจึงนำทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (The Mean Value Theorem) มาใช้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\Delta w_1 &= f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \\
&= f_x(x_1, y_0)\, \Delta x \qquad \text{..........(4.4.11)}
\end{aligned}
$$

สำหรับ บาง x_1 ใน $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (ถ้า $\Delta x = 0$ เลือก $x_1 = x_0$)

ในทำนองเดียวกัน ใน Δw_2 ให้ $x = x_0 + \Delta x$ จะมีส่วนที่เปลี่ยนคือฟังก์ชันของ y ที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

$$
\begin{aligned}
\Delta w_2 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \\
&= f_y(x_0 + \Delta x, y_1)\, \Delta y \qquad \text{..........(4.4.12)}
\end{aligned}
$$

สำหรับ y_1 ใน $[y_0, y_0 + \Delta y]$ (ถ้า $\Delta y = 0$ เลือก $y_1 = y_0$)

ดังนั้น

$$
\Delta w = f_x(x_1, y_0)\, \Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, y_1)\, \Delta y \qquad \text{..........(4.4.13)}
$$

สำหรับ บาง $x_1 = x_0 + c_1 \Delta x$ และ $y_1 = y_0 + c_2 \Delta y$ เมื่อ c_1 และ c_2 ไม่เป็นลบและน้อยกว่าหนึ่ง

เมื่อ f_x และ f_y ต่อเนื่องที่ $P_0(x_0, y_0)$ จึงได้ว่า

$$
f_x(x_1, y_0) \to f_x(x_0, y_0) \qquad \text{..........(4.4.14)}
$$

และ

$$
f_y(x_0 + \Delta x, y_1) \to f_y(x_0, y_0) \qquad \text{..........(4.4.15)}
$$

ขณะที่ Δx และ Δy ย่างเข้าสู่ศูนย์ เพราะฉะนั้นอาจจะเขียนได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f_x(x_1, y_0) &= f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1 \qquad \text{..........(4.4.16)} \\
f_y(x_0 + \Delta x, y_1) &= f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2 \qquad \text{..........(4.4.17)}
\end{aligned}
$$

และทั้ง ϵ_1, ϵ_2 ย่างเข้าสู่ศูนย์ ขณะที่ Δx และ Δy ย่างเข้าสู่ศูนย์ แทนสมการ (4.4.16), (4.4.17) ลงใน (4.4.13) จะได้ผลลัพธ์

$$\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + \in_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \in_2]\Delta y$$

ขณะที่ (4.4.14), (4.4.15) ประกันว่า

$$\in_1 \text{ และ } \in_2 \to 0 \text{ เมื่อ } \Delta x \text{ และ } \Delta y \to 0$$

บทแทรก 4.4.1 ให้ $w = f(x, y)$ ต่อเนื่องในบริเวณ $R : |x - x_0| < h, |y - y_0| < k$. ให้ f_x และ f_y มีอยู่ใน R และต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) แล้วพื้นผิว $w = f(x, y)$ มีระนาบสัมผัสที่ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เมื่อ $w_0 = f(x_0, y_0)$

พิสูจน์ ให้ $P(x, y, w)$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างจากจุด P_0 บนพื้นผิว $w = f(x, y)$ ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์

$$\vec{N} = \vec{i} f_x(x_0, y_0) + \vec{j} f_y(x_0, y_0) - \vec{k} \qquad \text{..........(4.4.18)}$$

โคไซน์ของมุม θ ระหว่าง $\overrightarrow{P_0P}$ และ $\vec{N}$ คือ

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N}}{|\overrightarrow{P_0P}||\vec{N}|} \qquad \text{..........(4.4.19)}$$

เมื่อ

$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{i}(x - x_0) + \vec{j}(y - y_0) + \vec{k}(w - w_0)$$

$$= \vec{i}\Delta x + \vec{j}\Delta y + \vec{k}\Delta w \qquad \text{..........(4.4.20)}$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos\theta = \frac{f_x(x_0 y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y - \Delta w}{|\overrightarrow{P_0P}||\vec{N}|} \qquad \text{..........(4.4.21)}$$

$$= \frac{-\in_1 \Delta x - \in_2 \Delta y}{|\overrightarrow{P_0P}||\vec{N}|}$$

จาก (4.4.18) จะเห็นได้ว่า $|\vec{N}| \geqslant 1$ และจาก (4.4.20) จะพบว่า

$$\frac{|\Delta x|}{|\overrightarrow{P_0P}|} \leqslant 1, \quad \frac{|\Delta y|}{|\overrightarrow{P_0P}|} \leqslant 1$$

ดังนั้น จาก (4.4.21) และทฤษฎีบทที่เพิ่งผ่านมา จะได้ว่า

$$|\cos\theta| \leqslant |\in_1| + |\in_2| \to 0$$

ขณะที่ $P \to P_0$ เพราะฉะนั้น สำหรับจุดใด ๆ $P \neq P_0$ บนพื้นผิวมุมระหว่างเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_0P}$ กับเวกเตอร์ $\vec{N}$ (สมการ 4.4.18) ย่างเข้าสู่ 90° สิ่งนี้หมายความว่า ระนาบผ่าน P_0 ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ นั่นคือ สัมผัสกับพื้นผิวที่ P_0

ตัวอย่าง 4.4.1 จงหา $\Delta w, \Delta w_{tan}, \in_1$ และ $\in_2$ และ $\in_1$ และ $\in_2$ ย่างเข้าสู่ศูนย์เมื่อไร สำหรับฟังก์ชัน

$$w = x^2 + y^2 = f(x, y)$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\\ &= (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2)\\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2\\ &= 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\\ &= \Delta w_{tan} + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y\end{aligned}$$

เมื่อ $f_x = 2x$ และ $f_y = 2y$ ดังนั้น $\Delta w_{tan} = 2x\Delta x + 2y\Delta y$ และ $\Delta w - \Delta w_{tan} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ อาศัยสมการ (4.4.6) จะได้ $\in_1 = \Delta x$ และ $\in_2 = \Delta y$ และทั้ง $\in_1$ และ $\in_2$ ย่างเข้าสู่ศูนย์เมื่อ Δx และ Δy ย่างเข้าสู่ศูนย์

4.4.1 ฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัว (Function of More Variables)

ฟังก์ชันสามตัวแปร

$$w = f(x, y, z)$$

ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อย f_x, f_y, f_z และที่บางย่านของจุด $(x_0, y_0\ z_0)$ อนุพันธ์ต่อเนื่อง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0\ y_0, z_0)\\ &= f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y + \in_3 \Delta z \quad \ldots\ldots(4.4.1.1)\end{aligned}$$

ซึ่ง

$$\in_1, \in_2, \in_3 \to 0 \text{ เมื่อ } \Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$$

อนุพันธ์ย่อย f_x, f_y, f_z หาค่าที่จุด (x_0, y_0, z_0) และอาจจะประมาณค่า Δw โดยใช้เพียงบางส่วนของสมการ (4.4.1.1) ซึ่งเป็นเชิงเส้นใน $\Delta x, \Delta y$ และ Δz จะเขียนแทนการประมาณเชิงเส้นของ Δw โดย Δw_{lin} นั่นคือ

$$\Delta w_{lin} = f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \Delta z \qquad \text{..........(4.4.1.2)}$$

สมการ (4.4.1.2) สามารถเขียนอีกรูปแบบหนึ่งได้ คือ

$$w_{lin} = w_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \qquad \text{..........(4.4.1.3)}$$

โดยใช้สัญกรณ์

$$A = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0, B = , \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0, C = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \qquad \text{..........(4.4.1.4)}$$

ทางด้านขวามือของสมการ (4.4.1.3) แทนฟังก์ชันเชิงเส้น $L(x, y, z)$ ซึ่งเรียก ลิเนียไรเซชั่น (linearization) ของ f ที่ P_0 มีคุณสมบัติว่า

$$|f(x, y, z) - L(x, y, z)| \leqslant |\epsilon_1 \Delta x| + |\epsilon_2 \Delta y| + |\epsilon_3 \Delta z|$$

ในสัญกรณ์ของสมการ (4.4.1.1) ถ้าให้ Δs เป็นระยะทาง $|PP_0|$ ดังนั้น

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

แล้ว $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ และ $|\Delta z|$ ต่างก็สั้นกว่าหรือเท่ากันกับ Δs เพราะฉะนั้น ความแตกต่างระหว่างค่าที่แน่นอน $f(x, y, z)$ และการประมาณเชิงเส้น $L(x, y, z)$ น้อยกว่าหรือเท่ากันกับ $\epsilon \cdot \Delta s$ ซึ่ง

$\epsilon = |\epsilon_1| + |\epsilon_2| + |\epsilon_3|$ ย่างเข้าสู่ศูนย์ ขณะที่ $\Delta s \rightarrow 0$

สมการ (4.4.1.1) นั้นใช้ภายใต้สมมุติฐาน

$$\lim_{\Delta s \to 0} |f(x, y, z) - L(x, y, z)|$$

อาจจะพิสูจน์สมการ (4.4.1.1) โดยให้ Δw เสมือนผลบวกของส่วนที่เปลี่ยนสามส่วน

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0),$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0)$$

และนำทฤษฎีบทค่ามัชฌิมไปใช้ในแต่ละกรณี ซึ่งสองพิกัดจะต้องเป็นค่าคงตัว และเพียงตัวเดียวที่แปรผันในแต่ละส่วนที่เปลี่ยนย่อย $\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3$ ดังตัวอย่าง $\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$ เพียงแต่ y แปรผัน โดย $x = x_0 + \Delta x$ และ $z = z_0$ ฟังก์ชัน $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ y ด้วยอนุพันธ์ f_y กับ ทฤษฎีค่ามัชฌิม จะได้

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0) \Delta y$$

สำหรับบาง y_1 ระหว่าง y_0 และ $y_0 + \Delta y$

ความจริง Δw_{lin} เป็นการประมาณค่าที่ดีสำหรับ Δw เมื่อส่วนที่เปลี่ยนในตัวแปรอิสระเล็ก ๆ อาจจะใช้ในการคำนวณการประมาณที่ดีขึ้น การเปลี่ยนแปลงเล็ก ๆ ในฟังก์ชันของสองตัวแปรหรือมากกว่า ก็มีความเที่ยงตรงเช่นเดียวกับการใช้เส้นสัมผัสประมาณค่าส่วนเปลี่ยนไปสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ของตัวแปรตัวเดียว

ตัวอย่าง 4.4.1.1 จงหาค่า Δw และ Δw_{tan} สำหรับฟังก์ชัน

$$w = x^2 + xy$$

วิธีทำ $f(x, y) = x^2 + xy, \; f_x = 2x + y, \; f_y = x$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \Delta w_{tan} &= f_x \Delta x + f_y \Delta y \\ &= (2x + y) \Delta x + x \Delta y \end{aligned}$$

ในการหา Δw นั้นคำนวณจาก

$$\begin{aligned} w + \Delta w &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &= (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + xy + x\Delta y + y\Delta x + (\Delta x)(\Delta y) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\Delta w = (2x + y)\Delta x + x\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta x)(\Delta y)$$

จะสังเกตต่อไปได้อีกว่า ผลต่าง

$$\Delta w - \Delta w_{lin} = (\Delta x)^2 + (\Delta x)(\Delta y)$$

ประกอบด้วยพจน์ไม่เป็นเชิงเส้นใน Δx และ Δy ซึ่งย่างเข้าสู่ศูนย์เร็วกว่าพจน์เชิงเส้น

ตัวอย่าง 4.4.1.2 จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้น

$$w \approx w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \Delta z$$

หาค่า

$$\sqrt{(0.98)^2 + (2.01)^2 + (1.94)^2}$$

วิธีทำ ให้

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f(x, y, z),$$

$$x_0 = 1.00,\ y_0 = 2.00,\ z_0 = 2.00,$$

$$\Delta x = -0.02,\ \Delta y = +0.01,\ \Delta z = -0.06$$

แล้วรากที่สองที่ต้องการคำนวณ คือ

$$w_0 + \Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$$

ซึ่ง

$$w_0 = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 \quad \text{สำหรับ } P_0(1, 2, 2)$$

และ

$$\Delta w \approx \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z$$

$$= \frac{x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{-0.02 + 0.02 - 0.12}{3}$$

$$= -0.04$$

เพราะฉะนั้น

$$w_0 + \Delta w = 3 - 0.04$$

$$= 2.96$$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหา $\triangle w_{tan}$ และ $\triangle w$ ถ้า

$$w = x^2 - xy + y^2$$

$$(x_0 y_0) = (1, -2), \quad \triangle x = 0.01, \quad \triangle y = -0.02$$

2. จงหาค่าโดยประมาณ (ทศนิยมสองตำแหน่ง) กับค่าของ

$$\sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$$

ข้อ 3 ถึง 5 จงหาลิเนียไรเซชั่น ของฟังก์ชัน f ที่จุด P_0 ดังที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ

3. $f(x, y) = (2 + xy)\cos y, P_0(2, \frac{\pi}{2})$

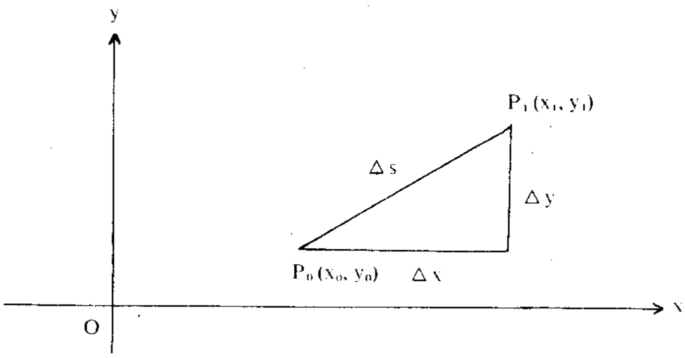
4. $f(x, y, z) = x^2 y\exp z, P_0(1, -2, \ln 2)$

5. $f(x, y, u, v) = (x^2 + y^2) / (u^2 - v^2), P_0(1, -1, 0, 2)$

4.5 อนุพันธ์ระบุทิศทาง : กรณีทั่วไป

(The Directional Derivative : General Case)

พิจารณาการกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ (instantaneous rate of change) ที่ $P_0(x_0, y_0)$ ของฟังก์ชัน $w = f(x, y)$ วัดในหน่วยของการเปลี่ยนแปลงของ w ต่อหน่วยของระยะทางตามรังสี L ด้วยจุดยอดที่ P_0 และทำมุม $\varnothing$ ในทางบวกกับแกน x ให้ $P_0(x_0, y_0)$ ตรึงอยู่กับที่ และให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดบน L อยู่ใกล้ ๆ P_0 (รูป 4.5.1)



รูป 4.5.1

ให้

$$\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$$

ทั้งคู่จะเป็นศูนย์ในเมื่อ P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ตาม L แล้ว สำหรับแต่ละตำแหน่งของ P_1 บน L สามารถคำนวณอัตราส่วน

$$\frac{\Delta w}{\Delta s} = \frac{w_1 - w_0}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$$= \frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$$

ซึ่งวัดอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ w ตาม L จาก P_0 ถึง P_1 ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยนี้มีลิมิตขณะที่ $P_1 \to P_0$ เขียนแทนลิมิตนี้โดย dw/ds และเรียกลิมิตนี้ว่าอนุพันธ์ระบุทิศทางของ w ที่ P_0 ในทิศทาง $\varnothing$

ทฤษฎีบท 4.5.1 ให้ $w = f(x, y)$ ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อย f_x, f_y ตลอดบางย่านของจุด $P_0(x_0, y_0)$ ให้ f_x และ f_y ต่อเนื่องที่ P_0 แล้วอนุพันธ์ระบุทิศทางที่ P_0 มีค่าสำหรับมุมระบุทิศทาง $\varnothing$ ใด ๆ และกำหนดโดย

$$\frac{dw}{ds} = f_x(x_0, y_0)\cos\varnothing + f_y(x_0, y_0)\sin\varnothing \qquad \text{..........(4.5.1)}$$

พิสูจน์ อาศัยสมการ (4.4.6) ในหัวข้อที่ผ่านมา คือ

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

ดังนั้น

$$\frac{\Delta w}{\Delta s} = f_x(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta s} + f_y(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta s} + \in_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \in_2 \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

ซึ่ง $\in_1$ และ $\in_2 \to 0$ ขณะที่ Δx และ $\Delta y \to 0$

ถ้า $P_1 \to P_0$ ตาม L หรือตามเส้นโค้งเรียบ ซึ่งสัมผัสกับ L ที่ P_0 จะได้

$$\ell im \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds} = \cos\varnothing,\ \ell im \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{dy}{ds} = \sin\varnothing$$

ดังนั้น

$$\frac{dw}{ds} = \ell im \frac{\Delta w}{\Delta s}$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\varnothing + f_y(x_0, y_0)\sin\varnothing$$

ตัวอย่าง 4.5.1 ให้ $w = 100 - x^2 - y^2$ ถ้าเริ่มต้นจากจุด $P_0(3, 4)$ ในทิศทางใดที่จะทำให้ w เพิ่มขึ้นรวดเร็วที่สุด

วิธีทำ

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

$$f_x(3, 4) = -2x = -2(3) = -6,\ f_y(3, 4) = -2y = -2(4) = -8$$

$$(dw/ds)_{(3,4)} = -6\cos\varnothing - 8\sin\varnothing$$

ในการทำให้ w เพิ่มขึ้นรวดเร็วที่สุด จะต้องหามุม $\varnothing$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน

$$F(\varnothing) = -6\cos\varnothing - 8\sin\varnothing$$

มีค่าสูงสุด เพราะ

$$F'(\varnothing) = 6\sin\varnothing - 8\cos\varnothing$$

เท่ากับศูนย์เมื่อ

$$\tan \phi = \frac{4}{3}, \sin \phi = \pm \frac{4}{5}, \cos \phi = \pm \frac{3}{5}$$

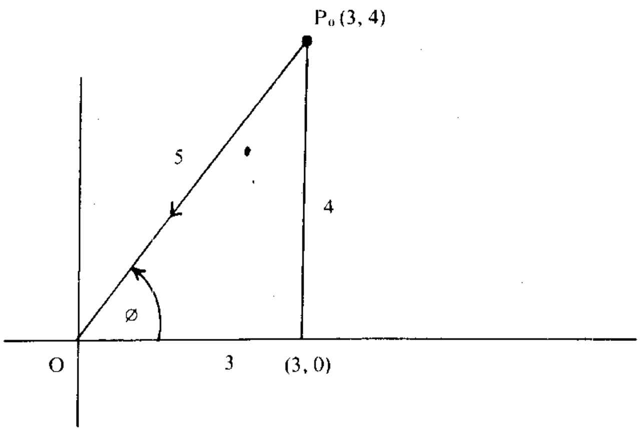
ขณะที่

$$F''(\phi) = 6 \cos \phi + 8 \sin \phi$$

เป็นลบในกรณีที่ทั้ง $\sin \phi$ และ $\cos \phi$ เป็นลบ ดังนั้น ค่าสูงสุดของ $F(\phi)$ ได้รับเมื่อ

$$\cos \phi = -\frac{3}{5}, \sin \phi = -\frac{4}{5}$$

จะเห็นได้ว่าความหมายในทางเรขาคณิตของผลลัพธ์นี้คือ w เพิ่มขึ้นรวดเร็วที่สุด ถ้ารังสี L ชี้จาก $P_o(3, 4)$ ไปยังจุดกำเนิด ดังรูป 4.5.2



รูป 4.5.2

อนุพันธ์ของ w เทียบกับระยะทางในทิศทางนี้ คือ

$$\begin{aligned}\left(\frac{dw}{ds}\right)_{(3,4)} &= -6 \cos \phi - 8 \sin \phi \\ &= -6\left(-\frac{3}{5}\right) - 8\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{18}{5} + \frac{32}{5} = +10\end{aligned}$$

นั่นคือ w เพิ่มขึ้นที่อัตราชั่วขณะ 10 หน่วย ใน w ต่อหน่วยความยาวตามรังสีนี้

ลัญกรณ์ของอนุพันธ์ระบุทิศทางสามารถขยายออกไปจากกรณีของฟังก์ชันของสองตัวแปรอิสระไปยังกรณีของฟังก์ชันของสามตัวแปรอิสระ โดยพิจารณาค่าของฟังก์ชัน

$$w = f(x, y, z)$$

ที่ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และที่จุดใกล้ ๆ $P_1(x_1\, y_1, z_1)$ ซึ่งอยู่บนรังสีที่กำหนดทิศทาง L ที่ผ่าน P_0 เพื่อความสะดวกจึงกำหนดทิศทาง L โดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\vec{u} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma \qquad \text{..........(4.5.2)}$$

ชี้ในทิศทางเดียวกัน ถ้าให้

$$x_1 - x_0 = \Delta x,\ y_1 - y_0 = \Delta y,\ z_1 - z_0 = \Delta z$$

แล้ว

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{i}\Delta x + \vec{j}\Delta y + \vec{k}\Delta z$$

ระยะทางจาก P_0 ไปยัง P_1 คือ

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

เมื่อ $\overrightarrow{P_0P_1}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และมีความยาวเท่ากับ Δs จึงได้ว่า

$$\frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\Delta s} = \vec{u}$$

นั่นก็คือ

$$\vec{i}\,\frac{\Delta x}{\Delta s} + \vec{j}\,\frac{\Delta y}{\Delta s} + \vec{k}\,\frac{\Delta z}{\Delta s} = \vec{i}\cos\alpha\ \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$

หรือ

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta,\ \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$$

โคไซด์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{P_0P_1}$ ยังคงเป็นค่าคงตัว ขณะที่ P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ตาม L ดังนั้น ในทางลิมิตขณะที่ $\Delta s \to 0$ จะได้

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,\ \frac{dy}{ds} = \cos\beta,\ \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

ต่อไปจะนิยามอนุพันธ์ระบุทิศทางของ w ที่ P_0 ในทิศทางของ $\vec{u}$ เป็นลิมิต ขณะที่ P_1 ย่างเข้าสู่ P_0 ตาม L ของอัตราของการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ w โดยเทียบกับระยะทาง

$$\frac{dw}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta s}$$

$$= \lim_{P_1 \to P_0} \frac{f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$$

ถ้า f, f_x, f_y และ f_z เป็นฟังก์ชันของ x, y, z ที่ต่างก็ต่อเนื่องในบางย่านของจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ แล้วนำสมการ (4.4.1.1) มาประยุกต์ใช้ จะพบว่าอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $w = f(x, y, z)$ ที่ P_0 ในทิศทาง $\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ คือ

$$\frac{dw}{ds} = f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0 z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma \quad \text{..........(4.5.3)}$$

ซึ่งสามารถแสดงเสมือนผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ ของสมการ (4.5.2) กับเวกเตอร์

$$\vec{v} = \vec{i} f_x(x_0, y_0, z_0) + \vec{j} f_y(x_0, y_0, z_0) + \vec{k} f_z(x_0, y_0, z_0)$$

นั่นคือ

$$\frac{dw}{ds} = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{..........(4.5.4)}$$

เป็นการแยกตัวประกอบของอนุพันธ์ระบุทิศทางออกเป็นส่วน $\vec{u}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับทิศทางเท่านั้น และส่วน $\vec{v}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับฟังก์ชันและจุด P เท่านั้น เวกเตอร์ $\vec{v}$ เรียก เกรเดียนต์ (gradient) ของ f ที่ P_0 สมการ (4.5.4) นำไปใช้ทั้งในสองมิติ และสามมติได้ และในสมการ (4.5.1) ก็เป็นกรณีพิเศษของสามมิติด้วย $\gamma = 90°$ ซึ่ง $\cos\gamma = 0$

แบบฝึกหัด 4.5

ข้อ 1, 2 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f = f(x, y, z)$ ที่กำหนดให้ ที่จุดที่กำหนดให้ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ที่กำหนดให้

1. $f = e^x \cos(yz)$, $P_0(0, 0, 0)$, $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
2. $f = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $P_0(1, 1, 1)$, $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
3. ในทิศทางใดของการเดินทางเมื่อเริ่มต้นที่ $P_0(1, 1, 0)$ ทำให้ฟังก์ชันมีอัตราลดลงเร็วที่สุด เมื่อ

$$f = (x + y - z)^2 + (3x - y - 6)^2$$

4. อนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชันที่กำหนดให้ $w = f(x, y)$ ที่ $P_0(1, 2)$ ในทิศทางมุ่งไปสู่ $P_1(2, 3)$ เท่ากับ $+2\sqrt{2}$ และในทิศทางมุ่งไปสู่ $P_2(1, 0)$ เท่ากับ -3 อยากทราบค่า dw/ds ที่ P_0 ในทิศทางที่มุ่งไปสู่จุดกำเนิดมีค่าเท่าไร
5. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x, y) = x \tan^{-1} y/x$ ที่ $(1, 1)$ ในทิศทางของ $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j}$
6. ในทิศทางใดที่จะทำให้อนุพันธ์ระบุทิศทาง ของ

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ที่ $(1, 1)$ เท่ากับศูนย์

4.6 เกรเดียนต์

(Gradient)

อนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $w = f(x, y, z)$ สามารถแสดงด้วยผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}$ ซึ่งบอกเพียงทิศทางและเวกเตอร์ $\vec{v}$ ซึ่งเป็นเพียงค่าของอนุพันธ์ย่อยของ w ที่ P_0 และเรียกเกรเดียนต์ของ w สัญลักษณ์สองตัวที่ใช้แทนเกรเดียนต์คือ grad w และ ∇w ซึ่ง ∇ ก็คือการกลับหัวลงของตัวเดลตา (delta) โดยทั่วไปเรียก เดล (del) เกรเดียนต์นิยามโดยสมการ

$$\text{grad } w = \nabla w = \vec{i}\frac{\partial w}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial w}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \text{..........(4.6.1)}$$

ตัวดำเนินการ "เดล" ("del" operator)

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{..........(4.6.2)}$$

คุณสมบัติประการแรกในเชิงเรขาคณิตของเกรเดียนต์ เป็นการเชื่อมระหว่างเกรเดียนต์กับอนุพันธ์ระบุทิศทาง โดยใช้ ∇w แทน เกรเดียนต์ ทำให้สามารถเขียนสมการ (4.5.3) ในหัวข้อ 4.5 ในรูป

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)_0 = (\nabla w)_0 \cdot \vec{u} \qquad \text{..........(4.6.3)}$$

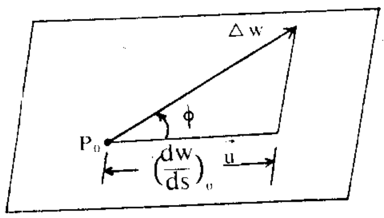
ซึ่งดรรชนีล่าง $_0$ ใช้เพื่อแสดงความจริงว่า ทั้ง ∇w และ dw/ds คำนวณค่าที่จุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$

ผลคูณเชิงสเกลาร์จากสมการ (4.6.3) กล่าวได้ว่า

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)_0 = |(\nabla w)_0||\vec{u}| \cos\theta$$

$$= |(\nabla w)_0| \cos\theta \qquad \text{..........(4.6.4)}$$

ซึ่ง θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $(\nabla w)_0$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}$ นั่นก็คือ $(dw/ds)_0$ เป็นโพรเจกชันเชิงสเกลาร์ (scalar projection) ของ grad w ที่ P_0 บนทิศทาง $\vec{u}$ ดังรูป 4.6.1



รูป 4.6.1

เมื่อโพรเจคชั่นนี้มีค่าสูงสุดเมื่อ $\cos\theta = 1$ ในสมการ (4.6.4) นั่นคือ เมื่อ $\vec{n}$ และ ∇w มีทิศทางเดียวกัน สามารถกล่าวได้ว่า "ฟังก์ชั่น $w = f(x,y,z)$ เปลี่ยนแปลงรวดเร็วที่สุดในทิศทางที่กำหนดโดย เวกเตอร์ grad w นั่นเอง ยิ่งไปกว่านั้นอนุพันธ์ระบุทิศทางในทิศทางนี้มีค่าเท่ากับขนาดของเกรเดียนต์"

เพราะฉะนั้นอาจแสดงลักษณะเกรเดียนต์นี้ของฟังก์ชั่น $w = f(x,y,z)$ ที่จุด $P_o(x_o,y_o,z_o)$ เสมือนเวคเตอร์

ก) มีทิศทางในทิศทางซึ่ง $(dw/ds)_o$ มีค่าสูงสุด และ

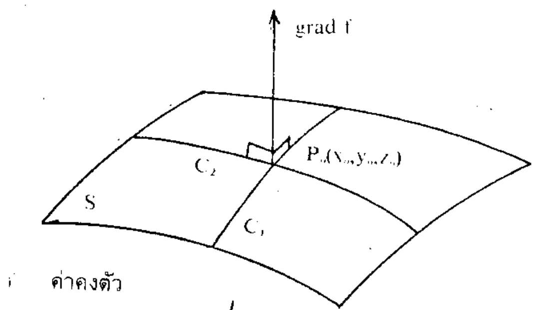
ข) มีขนาดเท่ากับค่าสูงสุดของ $(dw/ds)_o$

การแปลความหมายประการที่สองของ เวกเตอร์เกรเดียนต์อาจจะได้จากการพิจารณาดังต่อไปนี้ จุดทั้งหลายที่ฟังก์ชั่น $w = f(x,y,z)$ ให้ค่าเท่ากับ w_o (ค่าที่จุด $P_o(x_o,y_o,z_o)$) วะให้พื้นผิวในปริภูมิ สมการของพื้นผิวก็คือ

$$f(x,y,z) = w_o$$

$$f(x,y,z) - w_o = 0 \qquad \text{..........(4.6.5)}$$

ซึ่ง w_o เป็นค่าคงตัว ถ้า w แทนอุณหภูมิ พื้นผิวที่กำหนดในสมการ (4.6.5) เป็นพื้นผิวที่มีอุณหภูมิเท่ากัน (isothermal surface) ถ้า w แทนศักย์ไฟฟ้า แล้วพื้นผิวก็เป็นพื้นผิวที่ศักย์ไฟฟ้าเท่ากัน (equivpotential surface) เวกเตอร์เกรเดียนต์ปรกติกับพื้นผิวที่มีอุณหภูมิเท่ากัน หรือพื้นผิวที่มีศักย์ไฟฟ้าเท่ากัน ดังรูป 4.6.2



รูป 4.6.2

พิจารณาเส้นโค้ง C ใด ๆ บนพื้นผิว S ของสมการ (4.6.5) และผ่านจุด P_o คำนวณค่าอนุพันธ์ระบุทิศทาง $(dw/ds)_o$ ในทิศทางของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง C ที่ P_o อนุพันธ์นี้เป็นศูนย์ เพราะว่า w ยังคงเป็นค่าคงตัวบน C และ $(\Delta w)_c = 0$ ดังนั้น

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)_o = \lim \frac{\Delta w}{\Delta s} = 0$$

ถ้าเปรียบเทียบผลลัพธ์นี้กับสมการ (4.6.4) จะเห็นได้ว่าที่จุด P_o ใด ๆ ซึ่ง $(\nabla w)_o$ ไม่เป็นศูนย์ ค่า $\cos\theta$ ต้องเป็นศูนย์นั่นก็คือ

$(\nabla w)_o$ ตั้งฉาก (perpendicular) กับ $\vec{u}$ ซึ่ง $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยกับ C ที่ P_o เมื่อ C อาจจะเป็นเส้นโค้งใด ๆ บน S ผ่าน P_o ให้ผลลัพธ์ว่า $(\nabla w)_o$ ปรกติกับพื้นผิว S ที่ P_o ในกรณียกเว้นที่ $(\nabla w)_o$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งมีทิศทางไม่แน่นอน แต่ถ้าถือว่าเวกเตอร์ศูนย์ตั้งฉาก (orthogonal) ในทุกทิศทางแล้วก็อาจจะกล่าวโดยไม่ต้องมีข้อยกเว้นว่า เกรเดียนต์ ของฟังก์ชั่น $f(x,y,z)$ ที่จุด $P_o(x_o,y_o,z_o)$ ตั้งฉาก (orthogonal) กับพื้นผิว

$$f(x,y,z) = \text{ค่าคงตัว}$$

ที่ผ่านจุดนั้น

ตัวอย่าง 4.6.1 จงหาระนาบที่สัมผัสกับพื้นผิว

$$z = x^2 + y^2$$

ที่จุด $P_o(1, -2, 5)$

วิธีทำ ให้ $w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ ดังนั้นสมการของพื้นผิวอยู่ในรูป

$$f(x,y,z) = \text{ค่าคงตัว}$$

ซึ่งค่าคงตัวในกรณีนี้เป็นศูนย์ แล้วเวกเตอร์นั้นคือ

$$\begin{aligned}(\text{grad } f)_o &= \left(\vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o \\ &= (\vec{i}\,2x + \vec{j}\,2y - \vec{k})_{(1,-2,5)} \\ &= 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

ปรกติกับพื้นผิวที่ P_o แต่ได้ทราบแล้วว่าสมการของระนาบที่ผ่าน $P_o(x_o,y_o,z_o)$ ปรกติกับเวกเตอร์

$$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

คือ

$$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0$$

ดังนั้นระนาบที่ต้องการคือ

$$2(x-1) - 4(y+2) - (z-5) = 0$$

หรือ

$$2x - 4y - z = 5$$

เป็นสมการของระนาบสัมผัสที่ต้องการ

แบบฝึกหัด 4.6

1. จงหาสมการของเส้นปรกติของพื้นผิว

$$z^2 = x^2+y^2 \text{ ที่ } (3, 4, -5)$$

2. เส้นตรงลากผ่านจุดกำเนิดและปรกติกับพื้นผิว $xy+z = 2$
   ก) จงหาสมการของเส้นตรงเหล่านี้
   ข) จงหาจุดทุกจุดที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรงเหล่านี้กับพื้นผิว
3. ในทิศทางใดของการเดินทางเมื่อเริ่มต้นที่จุด $P_o(2, -1, 2)$ ทำให้ฟังก์ชั่นมีอัตราเพิ่มขึ้นสูงสุด เมื่อ $f = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ อยากทราบว่าอัตราแปรเปลี่ยนชั่วขณะของ f ต่อหน่วย ของระยะทางในทิศทางนี้มีค่าเท่าไร
4. จงหาระนาบสัมผัส และเส้นปรกติ ของไฮเพอร์โบลอยด์ $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ ที่ $(3, 5 -4)$
5. ก) ในกรณีของฟังก์ชั่น $w = f(x,y)$ ของตัวแปรอิสระสองตัว จงหานิพจน์ของ grad f ข) จงหาทิศทางที่ทำให้ฟังก์ชั่น $w = x^2+xy+y^2$ เพิ่มขึ้นเร็วที่สุดที่จุด $(-1,1)$ อยากทราบว่าขนาดของ dw/ds ในทิศทางนี้มีค่าเท่าไร

4.7 กฎลูกโซ่สำหรับอนุพันธ์ย่อย

(The Chain Rule for Partial Derivatives)

ตามที่ได้เคยทำการศึกษามาแล้ว สูตร

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \text{..........(4.7.1)}$$

มีประโยชน์ในการแก้ปัญหาในเรื่องอัตราสัมพัทธ์ (related rate) และด้วยเส้นโค้งซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equation). สมการ (4.7.1) เรียก "กฎลูกโซ่" สำหรับการหาอนุพันธ์ฟังก์ชั่น

$$y = f(x) \qquad \text{..........(4.7.2)}$$

โดยเทียบกับ t เมื่อ x เป็นฟังก์ชั่นของ t

$$x = g(t) \qquad \text{..........(4.7.3)}$$

ผลลัพธ์ ของการแทนค่าสมการ (4.7.3) ลงในสมการ (4.7.2) ให้ y เป็นฟังก์ชั่น $F(t)$

$$y = f[g(t)] = F(t) \qquad \text{..........(4.7.4)}$$

สมการ (4.7.1) บอกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นนี้ $F'(t)$ สามารถหาได้โดยคำนวณพจน์ทางขวามือของสมการนั้น

$$F'(t) = f'(x)\,g'(t) \qquad \text{..........(4.7.5)}$$

หรือ

$$F_t = f_x g_t \qquad \text{..........(4.7.6)}$$

$$y_t = y_x x_t \qquad \text{..........(4.7.7)}$$

ซึ่ง (4.7.5) ใช้เครื่องหมาย (prime) แทนอนุพันธ์ และ (4.7.6), (4.7.7) ใช้ดรรชนีล่างสำหรับความหมายเดียวกัน

พิจารณาฟังก์ชั่น

$$w = f(x,y,z) \qquad \text{..........(4.7.8)}$$

ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่อง

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x,\quad \frac{\partial w}{\partial y} = f_y,\quad \frac{\partial w}{\partial z} = f_z \qquad \text{..........(4.7.9)}$$

ตลอดบางบริเวณ R ของปริภูมิ x,y,z ให้สมการของเส้นโค้ง C ในพจน์ของตัวแปรเสริม t เป็น

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad \text{..........(4.7.10)}$$

แล้ว

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad \text{..........(4.7.11)}$$

ในการพิสูจน์สมการ (4.7.11) ให้ t_0 เป็นค่าของ t ที่สมนัยกับจุด P_0 ใน R และให้ Δt เป็นส่วนที่เปลี่ยน (increment) ใน t ซึ่งจุด P ที่สมนัยกับ $t_0 + \Delta t$ อยู่ใน R ด้วยให้ $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w$ แทนส่วนที่เปลี่ยนใน x, y, z, w แล้วโดยสมการ (4.4.1.1) เขียนได้ว่า

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$+ \in_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \in_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} + \in_3 \frac{\Delta z}{\Delta t} \qquad \text{..........(4.7.12)}$$

$\in_1, \in_2, \in_3 \to 0$ ขณะที่ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$

สมมุติว่า ให้ $\Delta t \to 0$ ในสมการ (4.7.12) และสมมุติว่าเส้นโค้ง C กำหนดโดยสมการ (4.7.10) ซึ่งอนุพันธ์ dx/dt, dy/dt, dz/dt ต่างก็มีค่าที่ t_0 แล้ว

$\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ ขณะที่ $\Delta t \to 0$

และสามพจน์ในสมการ (4.7.12) เกี่ยวข้องกับเอพไซลอนเข้าสู่ศูนย์ขณะที่พจน์อื่น ๆ ให้

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$$

ซึ่งก็คือสมการ (4.7.11) ที่ทุก ๆ อนุพันธ์ คำนวณค่าสำหรับ $t = t_0, x = x_0, y = y_0,$ และ $z - z_0$

สมการ (4.7.11) สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{dw}{dt} = \nabla w \cdot \vec{v} \qquad \text{..........(4.7.13)}$$

ซึ่ง ถ้า t เป็นเวลา v เป็นความเร็ว

$$\vec{v} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt} \qquad \text{..........(4.7.14)}$$

นอกจากนั้นยังสามารถเขียนในรูปผลคูณของเมตริกต์ได้ดังนี้

$$\frac{dw}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} \qquad \text{..........(4.7.15)}$$

พิจารณาฟังก์ชัน w ในสมการ (4.7.8) บนพื้นผิว S ใน R โดยทั่วไปจะเลือกสองตัวแปรเสริมเพื่อกำหนดสมการพื้นผิว (ดังตัวอย่างคือเส้นรุ้งและเส้นแวงบนพื้นผิวของทรงกลม) ดังนั้นพิจารณากรณีที่ x, y และ z เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรเสริม คือ r และ s

$$x = x(r, s),\ y = y(r, s),\ z = z(r, s) \qquad \text{..........(4.7.16)}$$

และคำนวณ

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta r} \qquad \text{..........(4.7.17)}$$

โดยถือว่า s เป็นค่าคงตัว ในกรณีนี้สมการ (4.7.12) ถูกแทนที่โดยสมการที่คล้ายคลึงกันด้วย Δr แทนที่ Δt โดยตลอด เมื่อ $\Delta r \to 0$ (s เป็นค่าคงตัว) จะได้

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r}$$

และสองนิพจน์ที่คล้ายคลึงกัน ด้วย y และ z ในที่ของ x ดังนั้น เมื่อ $\Delta r \to 0$ ผลลัพธ์ก็คือ

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial r} \qquad \text{..........(4.7.18)}$$

นิพจน์ในทำนองเดียวกันด้วย s แทนที่ r ก็จะเป็นการพิสูจน์ $\partial w/\partial s$

ในกรณีที่ทั่วไปขึ้นไปอีก อาจจะพิจารณาฟังก์ชัน

$$w = f(x, y, z, u, \ldots, v)$$

ของตัวแปรใด ๆ x, y, z, u, ..., v และแต่ละตัวแปรนี้สัมพันธ์กับ ตัวแปรอื่น ๆ อีก คือ p, q, r, s, ..., t กำหนดโดยสมการ

$$\begin{aligned} x &= x(p, q, r, s, \ldots, t), \\ y &= y(p, q, r, s, \ldots, t), \qquad \text{..........(4.7.19)} \\ &\vdots \\ v &= v(p, q, r, s, \ldots, t) \end{aligned}$$

แล้วสมมุติว่าถูกกำหนดให้หา

$$\partial w/\partial p,\ \partial w/\partial q,\ \partial w/\partial r, \ldots, \partial w/\partial t$$

โดยวิธีการที่ได้ใช้มาแล้ว จะพบว่า

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} \quad \ldots\ldots.(4.7.20)$$

ในพจน์ของสัญกรณ์ดรรชนีล่างสำหรับอนุพันธ์ย่อย

$$w_p = w_x x_p + w_y y_p + w_z z_p + \ldots + w_v v_p$$

ในรูปเมตริกต์สมการ (4.7.20) สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial y}\ \frac{\partial w}{\partial z} \ldots \frac{\partial w}{\partial v} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial z}{\partial p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial v}{\partial p} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots.(4.7.21)$$

ถ้าแทนที่ p โดย q หรือ r หรือ s, ..., หรือ t บนทั้งสองด้านของสมการนี้ แล้วจะได้ $\partial w/\partial q$ หรือ $\partial w/\partial r$ หรือ $\partial w/\partial s$, ..., หรือ $\partial w/\partial t$ ทุก ๆ สมการเหล่านี้แสดงโดยสมการเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$\left(\frac{\partial w}{\partial p}\ \frac{\partial w}{\partial q} \ldots \frac{\partial w}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial y} \ldots \frac{\partial w}{\partial v} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} & \ldots & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} & \ldots & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} & \ldots & \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots.(4.7.22)$$

ในการที่จะได้อนุพันธ์ย่อยในแนวตั้ง (column) ของเวกเตอร์แนวนอน (row vector) ทางซ้ายมือก็โดยหาผลคูณภายใน (inner product) ของเวกเตอร์แนวนอน

$$\text{grad } w = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial y} \ldots, \frac{\partial w}{\partial v} \right]$$

กับเวกเตอร์แนวตั้งที่เหมาะสมในเมตริกซ์ทางขวามือ

ตัวอย่าง 4.7.1 สมมุติว่า $w = r^2 \cos 2\theta$ ซึ่ง

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \tan^{-1}(y/x)$

จงหา $\partial w/\partial x$ และ $\partial w/\partial y$

วิธีทำ

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}\ \ \frac{\partial w}{\partial y}\right] = \left[\frac{\partial w}{\partial r}\ \ \frac{\partial w}{\partial \theta}\right]\begin{bmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$= \left[2r\cos 2\theta - 2r^2 \sin 2\theta\right]\begin{bmatrix}\dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r}\\[2ex] \dfrac{-y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2}\end{bmatrix}$$

$$= [2x\cos 2\theta + 2y\sin 2\theta\ \ 2y\cos 2\theta - 2x\sin 2\theta$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= 2x\cos 2\theta + 2y\sin 2\theta\\ &= 2r(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta)\\ &= 2r\cos(2\theta - \theta)\\ &= 2x\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= 2(y\cos 2\theta - x\sin 2\theta)\\ &= 2r(\sin\theta\cos 2\theta - \cos\theta\sin 2\theta)\\ &= 2r\sin(\theta - 2\theta)\\ &= -2y\end{aligned}$$

ตรวจสอบ $w = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = x^2 - y^2$

ดังนั้น $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2x,\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = -2y$

กฎลูกโซ่สำหรับการเปลี่ยนตัวแปรนั้นใช้บ่อยครั้งเพื่อที่จะแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปใหม่ โดยมุ่งหวังว่ารูปแบบใหม่จะง่ายกว่าในการแก้ปัญหา เมื่อเทียบกับรูปแบบเดิม ดังตัวอย่างที่จะได้เห็นต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.7.2 จงแสดงว่าการเปลี่ยนตัวแปรจาก x และ y เป็น $r = y - ax,\ s = y + ax$ ....(4.7.23)

แปลงสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\partial w}{\partial x} - a\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \text{..........(4.7.24)}$$

อยู่ในรูปที่แก้ปัญหาได้ง่ายกว่า และจงแก้ปัญหาในข้อนี้ (เมื่อ a เป็นค่าคงตัว)

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $w = f(x, y)$ ถูกแปลงเป็น $w = F(r, s)$ ภายใต้การแปลงดังสมการ (4.7.23) ถ้า $a \neq 0$ สมการสามารถแก้ปัญหาสำหรับ x และ y ในพจน์ของ r และ s ได้ดังนี้

$$x = \frac{1}{2a}(s - r),\quad y = \frac{1}{2}(r + s)$$

โดยสมมติฐานว่า $a \neq 0$ และนำกฎลูกโซ่มาใช้

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}\ \ \frac{\partial w}{\partial y}\right] = \left[\frac{\partial w}{\partial r}\ \ \frac{\partial w}{\partial s}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial w}{\partial r}\ \ \frac{\partial w}{\partial s}\right]\begin{bmatrix}-a & 1\\ a & 1\end{bmatrix}$$

$$= \left[-a\frac{\partial w}{\partial r} + a\frac{\partial w}{\partial s}\qquad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right]$$

เพราะฉะนั้น จากนิยามของการเท่ากันของเมตริกซ์

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -a\frac{\partial w}{\partial r} + a\frac{\partial w}{\partial s},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \qquad \text{..........(4.7.25)}$$

ผลลัพธ์ของการนำค่าจากสมการ (4.7.25) ไปแทนในทางซ้ายมือของสมการ (4.7.24) คือ $-2a\,(\partial w/\partial r)$ ดังนั้นสมการใหม่ก็คือ

$$-2a\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \text{ หรือ } \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \qquad \text{..........(4.7.26)}$$

นั่นคือ $w = F(r, s)$ เป็นค่าคงตัว เมื่อ s เป็นค่าคงตัว และ r อาจจะเป็นตัวแปรได้ ดังนั้น w ต้องเป็นฟังก์ชันของ s เท่านั้น

$$w = \phi(s) = \phi(y + ax)$$

ดังนั้น $\phi(s)$ เป็นฟังก์ชันของ s ใด ๆ ที่หาอนุพันธ์ได้

ดังตัวอย่าง

$$\phi(s) = e^{2s} + \tan^{-1}(s^2) + \sqrt{s^2 + 4}$$

ก็เป็นฟังก์ชันที่เหมาะสม สำหรับกรณีพิเศษนี้จะได้

$$\begin{aligned} w &= \phi(y + ax) \\ &= e^{2y + 2ax} + \tan^{-1}(y + ax)^2 + \sqrt{(y + ax)^2 + 4} \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่กำหนดให้

ข้อสังเกตุ ถ้า $a = 0$ ในตัวอย่าง 4.7.2 สมการที่กำหนดให้จะเป็น $\partial w/\partial x = 0$ ในสมการ (4.7.26) ก็เช่นเดียวกัน จะได้ $r = y$ และผลเฉลยก็คือ $w = \phi(y)$

ตัวอย่าง 4.7.3 จากตัวอย่าง 4.7.2 จงกำหนด w ถ้าค่า w ตามแกน x กำหนดโดย $w = \sin x$ สมมุติว่า $a \neq 0$ จงหา w นี้ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.7.24) ด้วย

วิธีทำ ผลเฉลยทั่วไปของตัวอย่าง 4.7.2 คือ

$$w = f(x, y) = \phi(y + ax)$$

พิจารณาตัวอย่าง 4.7.2 บนแกน x ค่า $y = 0$ จึงต้องการ

$$w = f(x, 0) = \phi(ax) = \sin x \qquad \text{..........(4.7.27)}$$

ให้ $u = ax$ ชั่วคราว และ $x = u/a$ จึงเขียนสมการ (4.7.27) ใหม่ได้ว่า

$$\phi(u) = \sin(u/a)$$

ทีนี้ใส่ $y + ax$ ในที่ u จะได้

$$w = \phi(y + ax) = \sin \frac{y + ax}{a} \qquad \text{..........(4.7.28)}$$

ตรวจสอบ ถ้า w กำหนดสมการ (4.7.28) แล้ว

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \frac{y + ax}{a} \text{ และ } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{a} \cos \frac{y + ax}{a}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial w}{\partial x} - a\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

เมื่อ $y = 0$

$$w = \sin \frac{0 + ax}{a} = \sin x$$

เพราะฉะนั้น สมการ (4.7.28) สอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.7.24) และเงื่อนไขที่กำหนดแต่แรก (4.7.27)

แบบฝึกหัด 4.7

ข้อ 1, 2 จงหา dw/dt ก) โดยแสดง w เสมือนฟังก์ชันของ t แล้วหาอนุพันธ์ ข) โดยใช้กฎลูกโซ่

1. $w = x^2 + y^2 + z^2,\ x = e^t \cos t, y = e^t \sin t,\ z = e^t$
2. $w = e^{2x+3y} \cos 4z,\ x = \ell n\, t,\ y = \ell n\, (t^2 + 1),\ z = t$
3. ถ้า $w = \ell n\, (x^2 + y^2 + 2z), x = r + s,\ y = r - s,\ z = 2rs$ จงหา $\partial w/\partial r$ และ $\partial w/\partial s$ โดยกฎลูกโซ่ และตรวจสอบคำตอบโดยใช้วิธีอื่น
4. ถ้า a และ b เป็นค่าคงตัว และ

$$w = (ax + by)^3 + \tanh\ (ax + by) + \cos (ax + by)$$

จงแสดงว่า

$$a \frac{\partial w}{\partial y} = b \frac{\partial w}{\partial x}$$

5. ถ้า a และ b เป็นค่าคงตัว และ $w = f(ax + by)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ $u = ax + by$ จงแสดงว่า

$$a \frac{\partial w}{\partial y} = b \frac{\partial w}{\partial x}$$

6. ถ้า $w = f\,[xy/(x^2 + y^2)]$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ของ $u = xy/(x^2 + y^2)$ จงแสดงว่า $x\,(\partial w/\partial x) + y(\partial w/\partial y) = 0$
7. ถ้า $w = f(x + y, x - y)$ มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่อง โดยเทียบกับ $u = x + y, v = x - y$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2$$

4.8 ผลต่างอนุพัทธ์รวม ผลต่างอนุพัทธ์ของฟังก์ชัน (The Total Differential)

ผลต่างอนุพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$w = f(x, y, z) \qquad \text{..........(4.8.1)}$$

ถูกนิยามด้วย

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \qquad \text{..........(4.8.2)}$$

กฎลูกโซ่ (สมการ 4.7.11 ในหัวข้อ 4.7) ทำให้ได้แนวคิดที่จะหารทั้งสองด้านของสมการ (4.8.2) ด้วย dt ในการคำนวณ dw/dt ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้ หรือถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ r, s และต้องการคำนวณ $\partial w/\partial r$ ต้องถือว่า s เป็นค่าคงตัวในการคำนวณ dx, dy, dz และหารทั้งสองด้านของสมการ (4.8.2) โดย dr แต่เขียน $\partial w/\partial r$ แทน dw/dr และต่อ ๆ ไปเพื่อแสดงว่า s เป็นค่าคงตัว

พจน์ที่แยกจากกัน

$$\frac{\partial w}{\partial x}dx,\ \frac{\partial w}{\partial y}dy,\ \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

เรียก "ผลต่างอนุพัทธ์ย่อย" (partial differential) ของ w โดยเทียบกับ x,y,z ตามลำดับ แล้วผลบวกของผลต่างอนุพัทธ์ย่อยสมการ (4.8.2) เรียก ผลต่างอนุพัทธ์รวม dw

โดยทั่วไปผลต่างอนุพัทธ์รวมของฟังก์ชัน

$$w = F(x, y, z, u, \ldots, v)$$

ถูกนิยามด้วยผลบวกของทุก ๆ ผลต่างอนุพัทธ์ย่อย

$$dw = F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_u du + \ldots + F_v dv$$

ถ้า x, y และ z เป็นตัวแปรอิสระในสมการ (4.8.1) แล้ว dx, dy และ dz เป็นตัวแปรอิสระใหม่สามตัวในสมการ (4.8.2) ในปัญหาต่าง ๆ จะเกี่ยวข้องกับส่วนที่เปลี่ยนซึ่งจะตกลงที่จะเลือกให้

$$dx = \Delta x,\ dy = \Delta y,\ dz = \Delta z \qquad \text{..........(4.8.3)}$$

ดังนั้น จึงสามารถใช้ผลต่างอนุพัทธ์ dw ซึ่งเป็นค่าประมาณที่ดีของ Δw (ดังสมการ (4.4.1.2) หัวข้อ 4.4) เมื่อ x, y, z ไม่เป็นตัวแปรอิสระ แต่กำหนดโดยสมการ

$$x = x(t), \qquad x = x(r, s),$$
$$y = y(t), \quad \text{หรือ} \quad y = y(r, s),$$
$$z = z(t) \qquad z = z(r, s)$$

แล้วในกรณีที่หนึ่ง

$$dx = x'(t)\,dt, \; dy = y'(t)\,dt, \; dz = z'(t)\,dt$$

และในกรณีที่สอง

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds, \qquad \text{..........(4.8.4)}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial s} ds,$$

ถ้าพิจารณา

$$w = f[x(r, s), y(r, s), z(r, s)] = F(r, s)$$

เสมือนฟังก์ชันของ r และ s แล้ว โดยสมการ (4.8.2) จะได้

$$dw = \frac{\partial w}{\partial r} dr + \frac{\partial w}{\partial s} ds \qquad \text{..........(4.8.5)}$$

ซึ่ง

$$\frac{\partial w}{\partial r} = F_r(r, s), \; \frac{\partial w}{\partial s} = F_s(r, s)$$

จะเห็นได้ว่า dw ที่ได้ในสมการ (4.8.2) กับ dw ที่ได้ในสมการ (4.8.5) เป็นค่าเดียวกันเพราะเป็นผลสืบเนื่องของกฎลูกโซ่สำหรับอนุพันธ์ ถ้าเริ่มต้นด้วย dw ที่กำหนดโดยสมการ (4.8.2) และแทนค่า dx, dy, dz ที่กำหนดโดยสมการ (4.8.4) ลงไป แล้วจะได้

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds\right) + \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial s}\right) dz$$

และนิพจน์ในวงเล็บซึ่งคูณด้วย dr และ ds ก็คือ $\partial w/\partial r$ และ $\partial w/\partial s$ ตามลำดับ โดยอาศัยกฎลูกโซ่สำหรับอนุพันธ์ ดังนั้น เมื่อเริ่มต้นด้วยนิพจน์สำหรับ dw ที่กำหนดให้โดยสมการ (4.8.2) จะมีการแปลงเป็นนิพจน์สำหรับ dw กำหนดโดยสมการ 5) ด้วยวิธีการที่ผ่านมานับเป็นการสร้างความสมมูลของทั้งสองประการ

เมื่อ r และ s เป็นตัวแปรอิสระ จะถือว่า dr และ ds เป็นตัวแปรอิสระด้วย แต่ไม่รวม dx, dy, และ dz ซึ่งความจริงกำหนดอยู่ในสมการ (4.8.4)
ดังนั้น ในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับส่วนที่เปลี่ยน เพื่อความสะดวกจะให้

$$dr = \Delta r \quad \text{และ} \quad ds = \Delta s$$

แต่ไม่ใช่ให้

$$dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$$

เมื่อกำหนดค่าขอบเขตโดยสมการ (4.8.4) อย่างไรก็ตาม ผลต่างอนุพัทธ์ dx,dy และ dz ต่างก็เป็นค่าโดยประมาณของส่วนที่เปลี่ยน Δx, Δy และ dz เป็นอย่างดี เมื่อ Δr และ Δs เล็ก (ในหัวข้อ 4.4)

ตัวอย่าง 4.8.1 จงแสดงว่า dw โดยสมการ (4.8.2) กับ dw ที่ได้จากการแทนค่าโดยตรงมีค่าเท่ากัน เมื่อ

$$w = x^2 + y^2 + z^2$$

ด้วย

$$x = r\cos s, y = r\sin s, z = r$$

วิธีทำ เมื่อใช้สมการ (4.8.2) จะได้

$$dw = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$$

ด้วย

$$\begin{aligned} dx &= \cos s\,dr - r\sin s\,ds \\ dy &= \sin s\,dr + r\cos s\,ds, \\ dz &= dr \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} dw &= 2(x\cos s + y\sin s + z)\,dr + 2(-xr\sin s + yr\cos s)\,ds \\ &= 2(r\cos^2 s + r\sin^2 s + r)\,dr + 2(-r^2\cos s\sin s + r^2\sin s\cos s)\,ds \\ &= 4r\,dr \end{aligned}$$

เมื่อหาค่า w โดยตรงด้วยพจน์ของ r และ s จะได้

$$\begin{aligned} w &= r^2\cos^2 s + r^2\sin^2 s + r^2 \\ &= 2r^2 \\ \therefore\quad dw &= 4r\,dr \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.8.2 จงแสดงว่าความชันที่จุด (x, y) ของเส้นโค้งในระนาบ ซึ่งสมการกำหนดโดย

$$F(x, y) = 0$$

คือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad \text{ถ้า} \quad F_y(x, y) \neq 0$$

วิธีทำ ให้ $w = F(x, y)$ และพิจารณาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ w ที่จุด (x, y) ในทิศทางของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ถ้า s แทนความยาวส่วนโค้งตามเส้นโค้ง อนุพันธ์ระบุทิศทางคือ

$$\frac{dF}{ds} = F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds}$$

แต่ F เป็นค่าคงตัวตามที่กำหนดให้ ดังนั้น

$$\frac{dF}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s} = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} = 0$$

และถ้า $F_y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = -\frac{F_x}{F_y}$$

ตัวอย่าง 4.8.3 ให้ $w = F(x, y, z)$ เป็นค่าคงตัวตามเส้นโค้ง C ผ่านจุด $P_0 (x_0 y_0, z_0)$ ให้ dx, dy, dz เป็นเวกเตอร์

$$d\vec{R} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

สัมผัสกับ C ที่ P_0 จงแสดงว่า

$$dw = \text{grad}\, F \cdot d\vec{R} = 0$$

วิธีทำ โดยนิยาม

$$\begin{aligned} dw &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= (\vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z) \cdot (\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz) \\ &= \text{grad}\, F \cdot d\vec{R} \end{aligned}$$

อนุพันธ์ระบุทิศทางของ w ที่ P_0 ในทิศทางของ $d\vec{R}$ คือ

$$\frac{dw}{ds} = \text{grad } F \cdot \vec{u}$$

ซึ่ง

$$\vec{u} = \frac{d\vec{R}}{|d\vec{R}|}$$

เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $d\vec{R}$ ตาม C ค่า w ยังคงเป็นค่าคงตัว และ $\frac{dw}{ds} = 0$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} dw &= \text{grad } F \cdot d\vec{R} \\ &= \text{grad } F \cdot \vec{u}\, |d\vec{R}| \\ &= \frac{dw}{ds}\, |d\vec{R}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$dw = \text{grad } F \cdot d\vec{R} = 0$$

ข้อสังเกต

ให้ $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ เป็นสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง C ของตัวอย่าง 4.8.3 แล้ว $d\vec{R}/dt$ คือเส้นสัมผัสกับ C และ $dw/dt = \vec{\nabla} w \cdot (d\vec{R}/dt)$ เป็นศูนย์ เพราะว่า w เป็นค่าคงตัวบน C ดังนั้น $\vec{\nabla} w$ ปรกติกับ C