แบบฝึกหัด 4.8

1. จงแสดงว่าสูตรต่อไปนี้

ก) $d(u + v) = du + dv$

ข) $d(uv) = vdu + udv$

ค) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

สมเหตุสมผลสำหรับผลต่างอนุพัทธ์รวม ในกรณีที่ u และ v เป็นตัวแปรอิสระ หรือถ้าทั้ง u และ v เป็นฟังก์ชันของจำนวนใด ๆ ของตัวแปรอิสระ เช่น $u = u(x, y, ..., p)$, $v = v(x, y, ... p)$.

2. พื้นที่ของสามเหลี่ยมคือ $A = \frac{1}{2} ab \sin C$ เมื่อ a และ b เป็นด้านประกอบของมุม C ซึ่งยาว 150 ฟุต และ 200 ฟุต ตามลำดับ C ทำมุม 60° จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม โดยประมาณ เมื่อทั้ง a และ b ต่างก็คลาดเคลื่อนไป $\frac{1}{2}$ ฟุต และ C คลาดเคลื่อนไป 2°

3. ก) กำหนดให้ $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ จงแสดง dx และ dy ในพจน์ของ dr และ $d\theta$

ข) จงแก้สมการใน ก) สำหรับ dr และ $d\theta$ ในพจน์ของ dx และ dy

ค) ในคำตอบ ข) สมมุติว่า A และ B เป็นสัมประสิทธิ์ของ dx และ dy ในนิพจน์สำหรับ dr นั่นคือ

$$dr = A\,dx + B\,dy$$

พิสูจน์โดยการคำนวณโดยตรงว่า $A = \partial r/\partial x$ และ $B = \partial r/\partial y$ เมื่อ $r^2 = x^2 + y^2$

4. กำหนดให้ $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ ถ้าสมการเหล่านี้พิจารณาอย่างปริยาย (implicitly) นิยาม u และ v เสมือนฟังก์ชันของ x และ y

ก) จงแสดง dx และ dy ในพจน์ของ du และ dv

ข) จงใช้ตัวกำหนด (determinants) แก้สมการใน ก) สำหรับ du และ dv ในพจน์ของ dx และ dy

ค) จงแสดงว่า

$$\frac{\partial x}{\partial x} \qquad \frac{g_v}{f_u g_v \quad f_v g_u}$$

เมื่อ $f_u g_v - f_v g_u \neq 0$

5. ก) กำหนดให้ $x = \rho \sin \phi \cos \theta,$

$y = \rho \sin \phi \sin \theta,$

$z = \rho \cos \phi$

จงแสดง dx, dy, dz ในพจน์ของ $d\rho, d\phi, d\theta$

ข) จงแก้สมการใน ก) สำหรับ ρ ในพจน์ของ dx, dy, dz โดยใช้ตัวกำหนด

ค) จากคำตอบใน ข) จงหา $\partial\rho/\partial x$ โดยพิจารณา ρ, ϕ, θ เป็นฟังก์ชันของ x, y, z ที่กำหนดให้อย่างปริยาย โดยสมการของ ก)

4.9 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปรอิสระ

(Maxima and Minima of Functions of Two Independent Variables)

พิจารณาสมการ

$$z = f(x, y) \qquad \text{..........(4.9.1)}$$

ซึ่งฟังก์ชัน f หาค่าได้และต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อยโดยเทียบกับ x และ y ต่อเนื่อง ในบางบริเวณ R ในระนาบ xy ถ้ามีจุด ๆ หนึ่ง (a, b) ใน R ซึ่ง

$$f(x, y) \geqslant f(a, b) \qquad \text{..........(4.9.2)}$$

สำหรับทุก ๆ จุด (x, y) ใกล้กับจุด (a, b) อย่างพอเพียง แล้วฟังก์ชัน f กล่าวได้ว่ามีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ หรือสัมพัทธ์ (local or relative) ที่ (a, b) ถ้าสมการ (4.9.2) เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จุด (x, y) ใน R แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เหนือ R ที่ (a, b) ถ้าสมการ (4.9.2) ผันกลับ (reverse) แล้ว f มีค่าสูงสุด (สัมพัทธ์ หรือ สัมบูรณ์ ที่ (a, b)

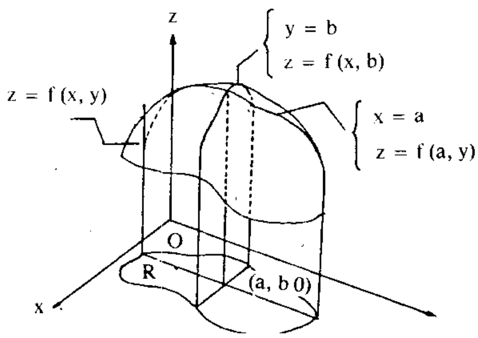
สมมุติว่า ค่าสูงสุด (หรือค่าต่ำสุด) ของ f เหนือ บริเวณ R ปรากฏที่จุด (a,b) ที่ไม่อยู่บนขอบของ R และสมมุติว่า ทั้ง $\partial f/\partial x$ และ $\partial f/\partial y$ มีค่าที่ (a, b) แล้วเงื่อนไขที่จำเป็นประการแรกที่จะต้องสอดคล้องก็คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{ที่ } (a, b)$$

จะแสดงให้เป็นได้โดย เริ่มด้วยภาคตัดของพื้นผิว (4.9.1) โดยระนาบ y = b ได้เส้นโค้งซึ่งมีสมการเป็น

$$z = f(x, b),\ y = b,$$

และเส้นโค้งนี้มีจุดวกกลับ (turning point) สูงหรือต่ำที่ x = a ดังรูป 4.9.1



รูป 4.9.1

ดังนั้น

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=a,\,y=b} = 0$$

ในทำนองเดียวกัน เส้นโค้ง

$$z = f(a, y),\ x = a,$$

ซึ่งระนาบ $x = a$ ตัดพื้นผิว ทำให้มีจุดวกกลับสูงต่ำด้วย เมื่อ $y = b$ นั่นคือ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=a,\,y=b} = 0$$

หลักการขั้นพื้นฐานที่ใช้การพิสูจน์ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน f ก็โดยการทดสอบว่า ผลต่าง

$$D = f(x, y) - f(a, b)$$

จะไม่เป็นลบ (เป็นบวกหรือศูนย์) สำหรับทุก ๆ จุด (x, y) ใกล้ ๆ กับจุด (a, b) ในกรณีของค่าต่ำสุดที่ (a, b) หรือไม่เป็นบวกในกรณีของค่าสูงสุด วิธีหนึ่งที่ใช้ทดสอบสำหรับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด โดยให้

$$x = a + h,\ y = b + k$$

และตรวจสอบผลต่าง D สำหรับ ค่าเล็ก ๆ ของ h และ k

ตัวอย่าง 4.9.1 จงหาจุดสูงและจุดต่ำบนพื้นผิว

$$z = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = f(x, y)$$

วิธีทำ เงื่อนไขจำเป็นประการแรกสำหรับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ z คือ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

สิ่งนี้นำไปสู่ระบบสมการ (simultaneous equations)

$$2x - y = -2,\ -x + 2y = -2$$

ด้วยผลเฉลย

$$x = y = -2$$

ดังนั้น จุดซึ่งเรียก (a, b) ก็คือ $(-2, -2)$ ค่าของ z ที่สมนัย คือ

$$f(-2, -2) = -8$$

การตรวจสอบผลต่าง

$$D = f(x, y) - f(-2, -2)$$

ให้

$$x = -2 + h, y = -2 + k$$

จะได้

$$D = f(-2 + h, -2 + k) - f(-2, -2)$$
$$= h^2 - hk + k^2$$
$$= (h - k/2)^2 + 3k^2/4$$

จะเห็นได้ว่า D มีค่าเป็นบวกสำหรับทุกค่าของ h, k ยกเว้นที่ $h = k = 0$ นั่นก็คือ

$$f(x, y) \geqslant f(-2, -2)$$

สำหรับ ทุก (x, y) แตกต่างจาก (– 2, – 2) ดังนั้น พื้นผิวมีจุดต่ำที่ (– 2, – 2, – 8) ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ – 8

แบบฝึกหัด 4.9

จงหาจุดสูงและจุดต่ำสำหรับพื้นผิวต่อไปนี้

1. $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$
2. $z = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$
3. $z = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$
4. $z = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$
5. $z = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$
6. $z = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$

4.10 ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด

(The Method of Least Squares)

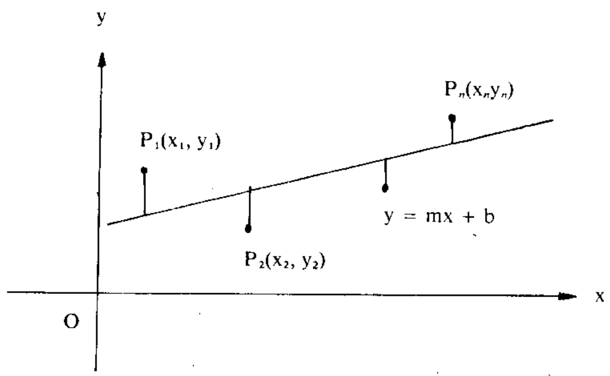
การประยุกต์ที่สำคัญของค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร เรียกว่า "ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด" เป็นการประยุกต์กับปัญหาเส้นตรงที่เมหาะสม

$$y = mx + b \qquad \text{..........(4.10.1)}$$

กับชุดของการทดลองที่มีข้อมูลเป็นจุด

$$(x_1\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \ldots,\ (x_n,\ y_n)$$

พิจารณารูป 4.10.1



รูป 4.10.1

แต่ละค่า x ของข้อมูล เรียก x_{obs} จะมีค่า y ที่สมนัยสองค่า คือ ค่า y ของข้อมูล คือ y_{obs} กับ ค่า y เป็นค่าทำนายโดยเส้นตรง คือ $y = mx_{obs} + b$ จะเรียกผลต่างของค่า y ทั้งสองนี้ว่า ค่าเบี่ยงเบน (deviation) นั่นคือ

$$Y_{obs} - (mx_{obs} + b) \qquad \text{..........(4.10.2)}$$

หรือ

$$dev = y_{obs} - mx_{obs} - b$$

ชุดของค่าเบี่ยงเบนทั้งหมดเป็น

$$d_1 = y_1 - (mx_1 + b), \ldots, d_n = y_n - (mx_n + b) \ldots \qquad \text{..........(4.10.3)}$$

เส้นตรงที่เหมาะสมอย่างสมบูรณ์แบบก็คือ เส้นตรงที่ทำให้ค่าเบี่ยงเบนเหล่านี้เป็นศูนย์ โดยทั่วไปแล้วไม่มีเส้นตรงที่เหมาะสมอย่างสมบูรณ์แบบ ปัญหาก็คือ จะหาเส้นตรงที่เหมาะสมที่สุดได้อย่างไร จะเห็นได้ว่าบางค่าความเบี่ยงเบนเป็นบวก และบางค่าเป็นลบ แต่กำลังสองจะทำให้เป็นบวกทั้งหมด

พิจารณานิพจน์

$$f(m, b) = (y_1 - mx_1 - b)^2 + (y_2 - mx_2 - b)^2 + \dots + (y_n mx_n - b)^2$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันสองตัวแปรอิสระ m และ b ซึ่งผลบวกกำลังสองของค่าความเบี่ยงเบนนี้ขึ้นอยู่กับ m และ b ค่านี้ไม่เป็นลบ แต่อาจจะเป็นศูนย์ได้ ถ้า m และ b มีค่าทำให้เกิดเส้นตรงที่เหมาะสมอย่างสมบูรณ์แบบ

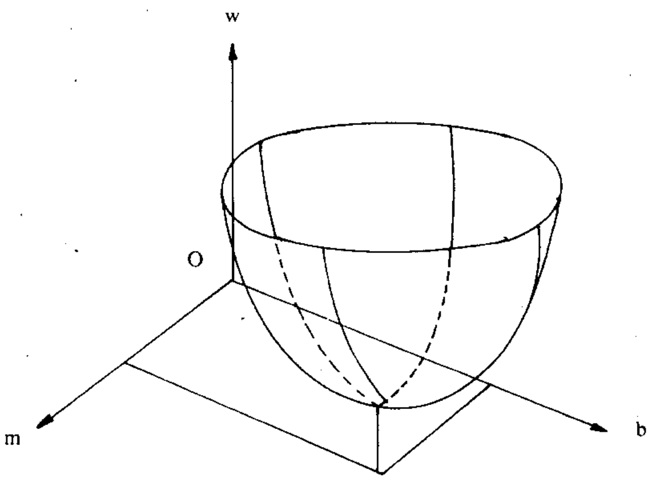
ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นการศึกษาหาเส้นตรงที่เหมาะสมที่สุดสำหรับข้อมูล คือ $y = mx + b$ โดยจะหาค่า m และ b จากฟังก์ชันของผลบวกของกำลังสองของค่าเบี่ยงเบน

$$f(m, b) = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$$

เมื่อ m และ b ให้ค่าฟังก์ชัน f เป็นค่าต่ำสุด นั่นก็คือ เป็นความพยายามที่จะหาค่าของ m และ b ที่พื้นผิว

$$w = f(m, b)$$

ในปริภูมิ mbw มีจุดต่ำ รูป 4.10.2



รูป 4.10.2

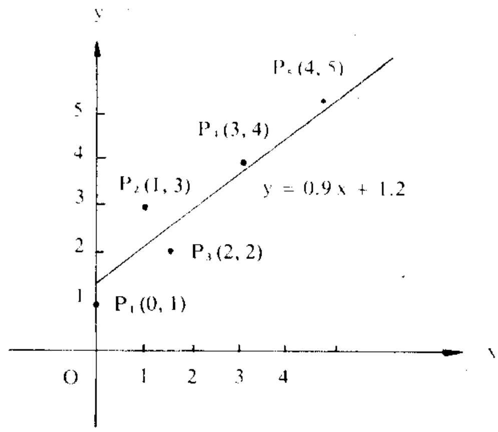
ในการหาค่า m และ b จึงเป็นการแก้สมการ

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0$$

นั่นเอง

ตัวอย่าง 4.10.1 จงหาเส้นตรงที่เป็นเส้นเหมาะสมที่สุดสำหรับชุด (0, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 5) ด้วยระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

วิธีทำ พิจารณารูป 4.10.3



รูป 4.10.3 เส้นตรง $y = 0.9x + 1.2$

พิจารณา ตาราง 4.10.1

x_{obs}	y_{obs}	dev	$(\text{dev})^2$
0	1	$1 - b$	$1 - 2b + b^2$
1	3	$3 - m - b$	$9 - 6b + b^2 - 6m + 2mb + m^2$
2	2	$2 - 2m - b$	$4 - 4b + b^2 - 8m + 4mb + 4m^2$
3	4	$4 - 3m - b$	$16 - 8b + b^2 - 24m + 6mb + 9m^2$
4	5	$5 - 4m - b$	$25 - 10b + b^2 - 40m + 8mb + 16m^2$

ตาราง 4.10.1

ผลบวกของกำลังสองของค่าเบี่ยงเบน คือ

$$f(m, b) = \Sigma(y_{obs} - mx_{obs} - b)^2$$

ซึ่ง y_{obs} และ x_{obs} เป็นพิกัดของจุดที่ได้จากการสังเกต (หรือกำหนดให้) ที่จะต้องหาเส้นตรง $y = mx + b$ ที่เหมาะสม

อาศัย ตาราง 4.10.1 ผลบวกของกำลังสองจะได้

$$\begin{aligned} f(m, b) &= \Sigma (\text{dev})^2 \\ &= 55 - 30b + 5b^2 - 78m + 20mb + 30m^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -78 + 20b + 60m$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -30 + 10b + 20m$$

ค่าของ m และ b ซึ่งทำให้ f มีค่าต่ำสุดจะต้องสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0,\ 20b + 6m = 78$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 0,\ 10b + 20m = 30$$

ผลเฉลยก็คือ $m = 0.9$, $b = 1.2$ เส้นตรงที่เหมาะสมที่สุด (โดยผลบวกกำลังสองของค่าเบี่ยงเบนน้อยที่สุด) คือ

$$y = 0.9x + 1.2$$

เพื่อพิสูจน์ว่า ค่าของ m และ b สมนัยกับค่าต่ำสุด ให้

$$m = 0.9 + h,\ b = 1.2 + k$$

คำนวณ

$$\Delta = f(0.9 + h, 1.2 + k) - f(0.9, 1.2)$$

ในการคำนวณดังกล่าวพบว่า

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(m + h, b + k) - f(m, b) \\ &= (-30 + 10b + 20m)k + (-78 + 20b + 60m)h + 5k^2 + 20kh + 30h^2 \end{aligned}$$

นิพจน์ในวงเล็บคือ $\partial f/\partial b$ และ $\partial f/\partial m$ ตามลำดับ และทั้งสองค่าต่างเป็นศูนย์ ถ้า $m = 0.9$ และ $b = 1.2$

ดังนั้น

$$f(0.9 + h, 1.2 + k) - f(0.9, 1.2) = 5k^2 + 20kh + 30h^2$$
$$= 5(k + 2h)^2 + 10h^2$$

ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์สำหรับทุกค่า h และ k เว้นที่ $h = k = 0$
นั่นก็คือ

$$f(0.9 + h, 1.2 + k) \geqslant f(0.9, 1.2)$$

จึงสรุปได้ว่า ได้พบ m และ b ฟังก์ชัน f (m, b) ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

แบบฝึกหัด 4.10

1. โดยระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด (method of least square) เส้นตรง $y = mx + b$ เหมาะสมกับจุดข้อมูล (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ เมื่อผลบวกกำลังสองของค่าเบี่ยงเบน คือ

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2$$

ก) จงแสดงว่า สมการ $\partial f/\partial b = 0$ และ $\partial f/\partial m = 0$ สมมูลกับ

$$m(\Sigma x_i) + nb = \Sigma y_i,$$
$$m(\Sigma x_i^2) + b(\Sigma x_i) = \Sigma x_i y_i,$$

เมื่อผลบวกทั้งหมดเริ่มจาก $i = 1$ ถึง $i = n$

ข) จงแสดงผลเฉลย b, m ของสมการจาก (ก) ในพจน์ของตัวกำหนด (determinants)

ข้อ 2 ถึง 4 จงประยุกต์ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุดที่จะให้ได้เส้นตรง $y = mx + b$ ที่เหมาะสมที่สุดกับจุดสามจุดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ

2. $(-1, 2), (0, 1), (3, -1)$
3. $(-2, 0), (0, 2), (2, 3)$
4. $(0, 0), (1, 2), (2, 3)$
5. ถ้า $y = mx + b$ เป็นเส้นตรงที่เหมาะสมที่สุดด้วยระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด จงแสดงว่าผลบวกของค่าเบี่ยงเบน

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)$$

เป็นศูนย์ (หมายความว่าไม่มีค่าบวกและค่าลบของค่าเบี่ยงเบน)

6. จงแสดงว่า จุด

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right), \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right]$$

อยู่บนเส้นตรง $y = mx + b$ ซึ่งกำหนดโดยระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด (หมายความว่า เส้นตรงที่เหมาะสมที่สุด ผ่านจุดศูนย์ถ่วงของ n จุด)

4.11 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันหลายตัวแปรอิสระ ตัวคูณลากรองจ์

(Maxima and Minima of Functions of Several Independent Variables. Lagrange multipliers)

ในการหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันหลายตัวแปรอิสระ

$$w = f(x, y, z, u \ldots, v)$$

นั้น ถ้าให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีค่าสุดขีด (extreme) ที่จุดข้างในของโดเมน กล่าวคือ

$$x = a,\ y = b,\ z = c,\ \ldots,\ v = e,$$

แล้ว โดยให้ $y = b, z = c, \ldots, v = e$ จะได้ฟังก์ชันของ x ตัวแปรเดียว

$$F(x) = f(x, b, c, d, \ldots, e)$$

ซึ่งมีค่าสุดขีดที่ $x = a$ ดังนั้น ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยโดยเทียบกับ x ที่ $x = a, y = b, \ldots, v = e$ อนุพันธ์ย่อยนั้นจะต้องเท่ากับศูนย์ โดยทฤษฎีบทสำหรับค่าสูงสุดต่ำสุดสำหรับฟังก์ชัน $F(x)$ ของตัวแปรอิสระตัวเดียว นั่นคือ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ ที่ } (a, b, c, \ldots, e)$$

ด้วยเหตุผลในทำนองเดียวกันก็จะได้เงื่อนไขที่จำเป็นประการแรก สำหรับค่าสุดขีดของฟังก์ชันหลายตัวแปรอิสระ กล่าวคือ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \text{ ที่ } (a, b, \ldots, e)$$

จำนวนของระบบสมการดังกล่าวจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนตัวแปรอิสระ $x, y, \ldots, v$ อย่างไรก็ตาม ผลเฉลยของระบบสมการนี้อาจจะสมนัยกับค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด หรือไม่ให้ทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดของ f เลยก็ได้ นับเป็นวิธีเดียวกันกับที่ปรากฏในผลเฉลยของสมการ $dy/dx = 0$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 4.11.1 จงหาระยะทางต่ำสุดจากจุดกำเนิดไปยังระนาบ

$$2x + y - z = 5$$

วิธีทำ ถ้า $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบแล้วระยะทางจากจุดกำเนิดไปยัง P คือ $|\overrightarrow{op}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ระยะทางดังกล่าวอาจจะเขียนในรูปฟังก์ชั่นได้ว่า

$$f(x, y, z) = |\overrightarrow{op}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ตัวแปร x, y, z ไม่ได้เป็นตัวแปรอิสระทุกตัว เมื่อ P อยู่บนระนาบ

$$2x + y - z = 5$$

แก้สมการสำหรับ z จะได้

$$z = 2x + y - 5$$

ให้ x และ y เป็นตัวแปรอิสระและหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$$

เงื่อนไขจำเป็น

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \text{ และ } \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

นำไปสู่สมการ

$$10x + 4y - 20 = 0, 4x + 4y - 10 = 0$$

ด้วยผลเฉลย $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{5}{6}$ พิกัด z ของจุดที่สมนัย P คือ $z = -\frac{5}{6}$ จึงได้จุด $(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{-5}{6})$ เพียงจุดเดียวบนระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่จำเป็น ดังนั้นถ้าปัญหาที่กำหนดมาให้มีคำตอบ ก็จะได้คำตอบเป็น

$$|\vec{OP}| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{-5}{6}\right)^2}$$
$$= \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

ตัวอย่าง 4.11.2 จงหาระยะทางที่ใกล้ที่สุดจากจุดกำเนิดไปยังพื้นผิว $x^2 - z^2 = 1$ พร้อมทั้งเขียนรูปมาให้ดูด้วย

วิธีทำ จะต้องทำการหาค่าต่ำสุดของ

$$w = x^2 + y^2 + z^2$$

เมื่อ $x^2 = 1 + z^2$ หรือ $z^2 = x^2 - 1$ ถ้ากำจัด z^2 เสียจะได้

$$w = 2x^2 + y^2 - 1$$

ซึ่งอนุพันธ์เป็น

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y$$

เป็นศูนย์ที่ $x = 0, y = 0$ เท่านั้น จะพบว่าเมื่อ $x = 0$ ทำให้ z มีค่าจินตภาพ นั่นคือ $z^2 = x^2 - 1 = -1$ ความจริงแล้วจุด $P(x, y, z)$ อยู่บนพื้นผิว $z^2 = x^2 - 1$ เมื่อ $|x| \geqslant 1$ เท่านั้น

ถ้ากำจัด x^2 และแสดง w เป็นฟังก์ชันของ y และ z จะได้

$$w = 1 + y^2 + 2z^2$$

มีอนุพันธ์ย่อยเป็น

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 4z$$

ซึ่งเป็นศูนย์ทั้งคู่ เมื่อ $y = z = 0$ จะนำไปสู่

$$x^2 = 1 + z^2 = 1, \quad x = \pm 1$$

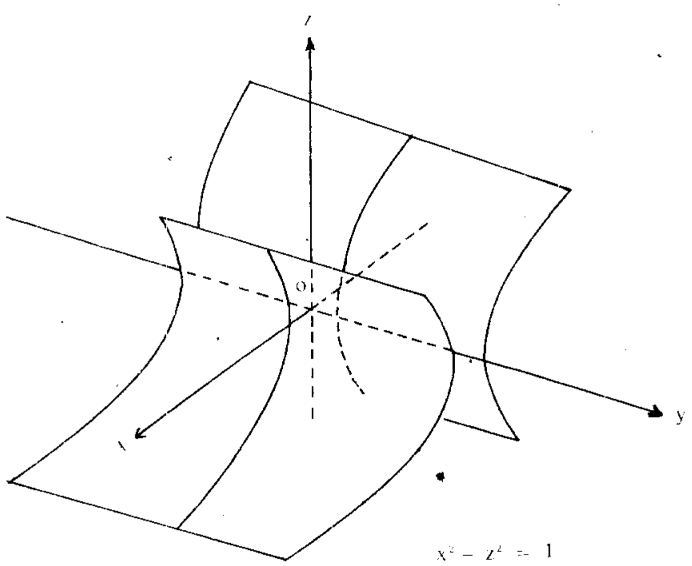
จากนิพจน์ $w = 1 + y^2 + 2z^2$ จะเห็นได้โดยง่ายว่า $w \geqslant 1$ สำหรับทุกค่าจำนวนจริงของ y และ z เมื่อ $y^2 + 2z^2 \geqslant 0$ เพราะฉะนั้นจุดสองจุด $(\pm 1, 0, 0)$ อยู่ใกล้จุดกำเนิดกว่าจุดอื่นบนพื้นผิว นั่นคือ ระยะทางใกล้ที่สุดจากจุดกำเนิดไปยังผิวก็จะยาวเท่ากับ

$$|\vec{OP}| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1$$

ในการแสดง w ในพจน์ของ y และ z เป็นตัวแปรอิสระ จะได้ตัวแปรอิสระที่ใช้ได้ทุกค่าจำนวนจริง

$$-\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

พื้นผิวจึงเป็นทรงกระบอกไฮเพอร์โบลิกสองชิ้น (two sheeted hyperbolic cylinder) ที่สมาชิกขนานกับแกน y ดังรูป 4.11.1



รูป 4.11.1

4.11.1 ระเบียบวิธีตัวคูณของลากรองจ์

(Method of Lagrange multipliers)

ในตัวอย่าง 4.11.2 เป็นการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

ภายใต้เงื่อนไขข้างเดียว (หรือเงื่อนไขบังคับ) คือ

$$g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1 = 0$$

ระเบียบวิธีตัวคูณของลากรองจ์ประยุกต์กับ ปัญหาในรูปแบบนี้

ในการหาค่าต่ำสุด (หรือค่าสูงสุด) ของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $g(x, y, z) = 0$ นั้นจะต้องสร้างฟังก์ชันช่วยคือ

$$H(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \qquad \text{..........(4.11.1.1)}$$

และหาค่าของ x, y, z, λ จากอนุพันธ์ย่อยของ H ทุกตัวเท่ากับศูนย์

$$H_x = o, H_y = o, H_z = o, H_\lambda = o \qquad \text{..........(4.11.1.2)}$$

ตัวอย่าง 4.11.1.1 จงหาจุดบนระนาบ

$$2x - 3y + 5z = 19$$

ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดที่สุด โดยใช้ระเบียบวิธีตัวคูณของลากรองจ์

วิธีทำ ฟังก์ชันที่จะหาค่าต่ำสุดได้จากการยกกำลังสองของระยะทางจากจุดกำเนิดไปยัง $P(x, y, z)$ ซึ่งอยู่บนระนาบ

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{..........(4.11.1.3)}$$

เงื่อนไขบังคับคือ

$$g(x, y, z) = 2x - 3y + 5z - 19 = o \qquad \text{..........(4.11.1.4)}$$

ให้

$$H(x, y, z, \lambda) = z^2 + y^2 + z^2 - \lambda(2x - 3y + 5z - 19) \qquad \text{..........(4.11.1.5)}$$

แล้ว

$$H_x = 2x - 2\lambda = o, H_y = 2y + 3\lambda = o, \quad H_z = 2z - 5\lambda = o \qquad \text{..........(4.11.1.5)}$$

และ

$$H_\lambda = -(2x - 3y + 5z - 19 = 0) \quad \text{นั่นคือ } H_\lambda = -g(x, y, z) \qquad \text{..........(4.11.1.6)}$$

จากสมการ (4.11.1.5) ได้

$$x = \lambda, y = -\frac{3}{2}\lambda, z = \frac{5}{2}\lambda \qquad \text{..........(4.11.1.7)}$$

และเมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (4.11.1.6) หรือ (4.11.1.4) จะได้

$$2\lambda = \frac{9}{2}\lambda + \frac{25}{2}\lambda = 19$$

ดังนั้น

$$\lambda = 1$$

แทนค่า $\lambda = 1$ ลงในสมการ (4.11.1.7) จะได้จุด $P_o\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ จะเห็นได้ว่า เวคเตอร์ OP. เป็นแนวฉากกับระนาบที่กำหนดให้ดังนั้น $|\vec{OP}| = \frac{1}{2}\sqrt{38}$ เป็นระยะทางสั้นที่สุดจากจุดกำเนิดถึงระนาบ

ถ้ามีเงื่อนไขบังคับสองเงื่อนไขคือ

$$g(x, y, z) = o \text{ และ } h(x, y, z) = o$$

จะต้องใช้ตัวคูณลากรองจ์สองตัวคือ λ และ μ และกระทำร่วมกับฟังก์ชันช่วย

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z)$$

แล้วถือว่า x, y, z, λ, μ เสมือนห้าตัวแปรอิสระสำหรับ H แล้วให้อนุพันธ์ย่อยลำดับหนึ่งทั้งห้าของ H เท่ากับศูนย์ผลลัพธ์ที่ได้จะสมมูลกับ

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g + \mu \vec{\nabla} h \text{ ที่ } (x_o, y_o, z_o) \qquad \text{..........(4.11.1.8)}$$

$$g(x_o, y_o, z_o) = o \text{ และ } h(x_o, y_o, z_o) = o$$

ตัวอย่าง 4.11.1.2 กรวย $z^2 = x^2 + y^2$ ถูกตัดโดยระนาบ $z = 1 + x + y$ ในเส้นโค้ง C จงหาจุดบน C ที่ใกล้ที่สุดและไกลที่สุดจากจุดกำเนิด

วิธีทำ ฟังก์ชัน $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ จะมีค่าต่ำสุด (หรือสูงสุด) อยู่ภายใต้เงื่อนไขบังคับคือ

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \qquad \text{..........(4.11.1.9)}$$

$$h(x, y, z) = 1 + x + y - z = 0 \qquad \text{..........(4.11.1.10)}$$

จะใช้สมการ (4.11.1.8) สำหรับจุดวิกฤต (critical points) จะได้

$$2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = \lambda(2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}) + \mu(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

ส่วนประกอบของเวคเตอร์ที่เท่ากันต้องเท่ากันจึงได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 2x\lambda + \mu \\ 2y &= 2y\lambda + \mu \end{aligned}\right\} \rightarrow x - y = (x - y)\lambda$$

$$\left. 2z = -2z\lambda - \mu \right\} \rightarrow y + z = (y - z)\lambda$$

สมการ $x - y = (x - y)\lambda$ จะสอดคล้อง ถ้า $x = y$ หรือถ้า $x \neq y$ แล้ว $\lambda = 1$ แต่กรณีหลังนำไปใช้ไม่ได้ เพราะถ้า $\lambda = 1$ แล้ว $y + z = y - z$ ทำให้ได้ว่า $z = o$ จากสมการ (4.11.1.9) เมื่อ $z = o$ ให้ $x^2 + y^2 = o$ หรือ $x = y = o$ แต่จุด (0,0,0) ไม่อยู่ในระนาบ $z = 1 + x + y$ เพราะฉะนั้น $\lambda \neq 1$ จะได้ว่า $x = y$ การตัดกันของระนาบนี้กับระนาบ $z = 1 + x + y$ จะเป็นเส้นตรงซึ่งตัดกรวยที่จุดสองจุด จะหาจุดทั้งสองนี้ได้โดยการแทนค่า $y = x$ และ $z = 1 + 2x$ ลงในสมการของกรวย

$$x^2 + x^2 = (1 + 2x)^2$$

$$2x^2 + 4x + 1 = o$$

$$x = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

จุดทั้งสองคือ

$$A = (-1 - \sqrt{1/2},\ -1 - \sqrt{1/2},\ -1 - \sqrt{2}) \qquad \text{..........(4.11.1.11)}$$

$$B = (-1 + \sqrt{1/2},\ - \ + \sqrt{1/2},\ -1 + \sqrt{2} \qquad \text{..........(4.11.1.12)}$$

ในปัญหานี้ทราบแล้วว่า C อาจจะเป็นวงรีหรือไฮเพอร์โบลา ถ้าเป็นวงรีก็สรุปได้ว่า B เป็นจุดที่ใกล้จุดกำเนิดที่สุด และ A เป็นจุดที่ไกลจากจุดกำเนิดที่สุด แต่ถ้า C เป็นไฮเพอร์โบลา แล้วจะไม่มีจุดที่อยู่ห่างจากจุดกำเนิดที่สุด และจุด A และ B เป็นจุดบนสองสาขาของไฮเพอร์โบลาที่ต่างก็อยู่ใกล้จุดกำเนิดที่สุด

แบบฝึกหัด 4.11

1. จงหาจุดบนพื้นผิว $x = xy + 1$ ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดที่สุด
2. กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า ด้านบนเปิด มีความจุ 256 ลูกบาศก์นิ้ว จงหาขนาดของกล่องที่มีพื้นที่พื้นผิวต่ำสุด
3. ฐานของกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีราคาเป็นสามเท่าของด้านบนและด้านข้างต่อหนึ่งตารางฟุต จงหาความสัมพันธ์ของขนาดที่จะทำให้กล่องมีราคาที่ประหยัดที่สุดสำหรับปริมาตรที่กำหนดให้
4. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด (2,1,1) และตัดอัฐมภาคที่หนึ่ง (first octant) แล้วให้ปริมาตรน้อยที่สุด (พิจารณาระนาบที่ตัดแกนทั้งสามทางบวกเท่านั้น)
5. รูปห้าเหลี่ยมที่ประกอบด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดด้านบนด้วยสามเหลี่ยมหน้าจั่วถ้าพื้นที่คงที่ (fixed) จงหาขนาดซึ่งทำให้เส้นรอบรูป (perimeter) ต่ำสุด
6. ระนาบในรูป

   $$z = Ax + By + C$$

   เหมาะสมกับจุด (x_i, y_i, z_i) ดังต่อไปนี้

   (o,o,o), (o,1,1), (1,1,1), (1,0, − 1)

   จงหาระนาบที่ให้ผลบวกกำลังสองของความเบี่ยงเบนมีค่าต่ำสุด

   $$\sum_{i=1}^{4} (Ax_i + By_i + C - z_i)^2$$
7. จงใช้วิธีตัวคูณของลากรองจ์ หาจุดที่อยู่ใกล้สุดและไกลสุดกับจุดกำเนิด และอยู่บนเส้นโค้ง $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$ ในระนาบ xy
8. จงใช้วิธีตัวคูณของลากรองจ์ หาจุดบนพื้นผิว $x^2 + y^2 + x^2 = 25$ ที่ซึ่งฟังก์ชัน $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ เป็นค่าต่ำสุด ค่าสูงสุดและจงแปลความหมายในเชิงเรขาคณิตของ $\nabla f = \lambda \nabla g$ ที่จุดต่ำสุดและจุดสูงสุดด้วย

4.12 อนุพันธ์อันดับสูงขึ้น

(Higher - Order Derivatives)

อนุพันธ์ย่อยของอันดับที่สองแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

หรือ

$f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}$

ซึ่งนิยามด้วยสมการ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ตัวอย่าง 4.12.1 ถ้า $f(x, y) = x \cos y + ye^x$

แล้วจงแสดงอันดับของการหาอนุพันธ์ด้วยสัญลักษณ์

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + ye^x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin y + e^x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ye^x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = ye^x = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = e^x = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

และต่อไปได้เรื่อย ๆ ขณะที่

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + e^x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y + e^x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x \cos y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = e^x = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

การคำนวณ $\partial^2 f/\partial y \partial x$ นั้น จะหาอนุพันธ์ครั้งที่หนึ่งโดยเทียบกับ x แล้วจึงเทียบกับ y และอาจเขียนแทนด้วย $(f_x)_y$ หรือ f_{xy} หรือโดย f_{12}

ทฤษฎีบท 4.12.1 ให้ฟังก์ชั่น $w = f(x,y)$ กับอนุพันธ์ย่อย f_x, f_y, f_{xy} และ f_{yx} ต่อเนื่องในบางย่านของจุด P (a, b) แล้วที่จุดนั้น

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

พิสูจน์ ให้ (a,b) เป็นจุดอยู่ภายในสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ในระนาบ xy ซึ่ง f, f_x, f_y, f_{xy} และ f_{yx} เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องตลอด R แล้วความจริงที่ว่า

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) \qquad \text{..........(4.12.1)}$$

ให้ h และ k เป็นจำนวนที่ทำให้จุด (a + h, b + k) ยังคงอยู่ในสี่เหลี่ยมผืนผ้า R พิจารณาผลต่าง

$$\Delta = F(a+h) - F(a) \qquad \text{..........(4.12.2)}$$

เมื่อนิยาม F (x) ในพจน์ของ f (x, y) โดยสมการ

$$F(x) = f(x, b+k) - f(x, b) \qquad \text{..........(4.12.3)}$$

นำทฤษฎีบทค่ามัชฌิมมาประยุกต์กับฟังก์ชั่น F(x) และสมการ (4.12.2) จะได้

$$\Delta = h F'(c_1) \qquad \text{..........(4.12.4)}$$

ซึ่ง c_1 อยู่ระหว่าง a และ a + h จากสมการ (4.12.3)

$$F'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$$

ดังนั้นสมการ (4.12.4) กลายเป็น

$$\Delta = h[f_x(c_1, b+k) - f_x(c_1, b)] \qquad \text{..........(4.12.5)}$$

ประยุกต์ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมกับฟังก์ชั่น $q(y) = f_x(c_1, y)'$ จะได้

$$g(b+k) - g(b) = kg'(d_1) \qquad \text{..........(4.12.6)}$$

หรือ

$$f_x(c_1, b+k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

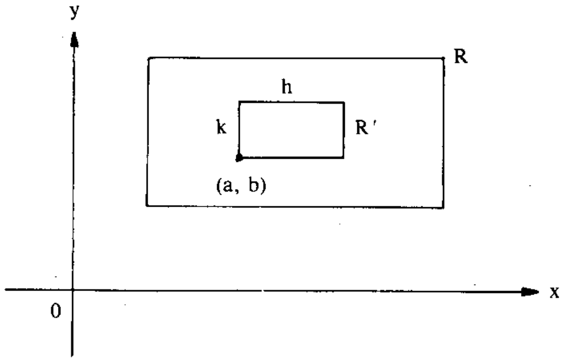
สำหรับบาง d_1 ระหว่าง b และ b + k นำไปแทนค่าในสมการ (4.12.5) จะได้

$$\triangle = hkf_{xy}(c_1, d_1) \qquad \text{..........(4.12.8)}$$

สำหรับบางจุด (c_1, d_1) ในสี่เหลี่ยมผืนผ้า R′ ซึ่งจุดยอดคือสี่จุด

$$(a, b) \quad , \quad (a+h, b) \quad , \quad (a+h, b+k) \quad , \quad (a, b+k).$$

ดังรูป 4.12.1



รูป 4.12.1

ในอีกทางหนึ่ง แทนค่าจากสมการ (4.12.3) ในสมการ (4.12.2) จะเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \triangle &= f(a+h, b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\ &= [\, f(a+h, b+k) - f(a,b+k) \,] - [\, f(a+h,b) - f(a,b) \,] \\ &= \phi(b+k) - \phi(b) \end{aligned} \qquad \text{..........(4.12.9)}$$

ซึ่ง

$$\phi(y) = f(a+h, y) - f(a, y) \qquad \text{..........(4.12.10)}$$

นำทฤษฎีบทค่ามัชฌิมมาประยุกต์ใช้กับสมการ (4.12.9) จะได้

$$\triangle = k\,\phi'(d_2) \qquad \text{..........(4.12.11)}$$

สำหรับบาง d_2 ระหว่าง b และ b + k โดยสมการ (4.12.10)

$$\phi'(y) = f_y(a+h, y) - f_y(a, y) \qquad \text{..........(4.12.12)}$$

แทนค่าจากสมการ (4.12.12) ลงในสมการ (4.12.11) จะได้

$$\Delta \;=\; k[f_y(a+h, d_2) - f_y(a, d_2)] \qquad \text{..........(4.12.13)}$$

สุดท้ายนำทฤษฎีบทค่ามัชฌิมมาประยุกต์ใช้กับนิพจน์ในวงเล็บจะได้

$$\Delta\, k\, h\, f_{yx}(c_2, d_2) \qquad \text{..........(4.12.14)}$$

สำหรับบาง c_2 ระหว่าง a และ a + h

เปรียบเทียบสมการ (4.12.8) และ (4.12.14) แสดงว่า

$$f_{xy}(c_1, d_1) \;=\; f_{yx}(c_2, d_2) \qquad \text{..........(4.12.15)}$$

ซึ่งทั้ง $(c_1\ d_1)$ และ $(c_2\ d_2)$ อยู่ในสี่เหลี่ยมผืนผ้า R′ ดังรูป 4.12.1
สมการ (4.12.15) ยังไม่ใช่ผลลัพธ์ที่ต้องการนัก เพราะเป็นการพูดได้เพียงว่าอนุพันธ์ผสม f_{xy} มีค่าเช่นเดียวกันที่ (c_1, d_1) กับอนุพันธ์ f_{yx} ที่ (c_2, d_2) แต่จำนวน h และ k นั้นอาจจะทำให้เล็กตามที่ประสงค์ได้ สมมุติฐานที่ว่า f_{xy} และ f_{yx} ต่อเนื่องตลอด R หมายความว่า

$$f_{xy}(c_1, d_1) \;=\; f_{xy}(a, b) + \epsilon_1$$

และ

$$f_{yx}(c_2, d_2) \;=\; f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$$

ซึ่ง

$\epsilon_1, \epsilon_2 \to o$ ขณะที่ $h, k \to o$

ดังนั้น ถ้าให้ h และ $k \to o$ จะได้ว่า

$$f_{xy}(a, b) \;=\; f_{yx}(a, b)$$

ถ้าจะย้อนกลับไปพิจารณาตัวอย่างในตอนเริ่มต้นของหัวข้อนี้ จะพบว่าไม่เพียงแต่จะกล่าวว่า

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \quad \text{เท่านั้น}$$

แต่ยังรวมกรณี

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \quad \text{ด้วย}$$

การเท่ากันนี้อาจจะพิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎีบท 4.12.1 ได้ ดังนี้

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f_x\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f_x\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

ถ้าอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ยังต่อเนื่องแล้ว สัญกรณ์

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$$

อาจใช้แทนผลลัพธ์ของการหาอนุพันธ์ฟังก์ชัน $f(x, y)$ m ครั้งโดยเทียบกับ x และ n ครั้งโดยเทียบกับ y โดยการหาอนุพันธ์ทั้งหมดนี้ไม่เจาะจงอันดับก่อนหลัง ดังตัวอย่าง $\partial^5 f / (\partial x^2 \partial y^3)$ เป็นการหาอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องห้าครั้งสองครั้งโดยเทียบกับ x และสามครั้งโดยเทียบกับ y ส่วนสัญกรณ์ f_{xyyxy} หมายความว่าจะต้องหาอนุพันธ์โดยเทียบกับ x ก่อนแล้วจึงเทียบกับ y สองครั้ง แล้วจึงเทียบกับ x อีกครั้งหนึ่ง และสุดท้ายโดยเทียบกับ y (เป็นการอ่านดรรชนีล่างจากซ้ายไปขวา)

แบบฝึกหัด 4.12

1. ถ้า $w = \cos(x + y) + \sin(x - y)$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

2. ถ้า $w = \ln(2x + 2y) + \tan(2x - 2y)$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

3. ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$

จงแสดงว่า $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \neq c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

4. จงแสดงว่า v สอดคล้องกับ สมการของลาปลาซ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = o$$

เมื่อ $v = \cos 3x \cos 4y \sin h\, 5z$

5. จงแสดงว่า

$$w_{xy} = w_{yx}$$

เมื่อ

$$w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$$

4.13 ผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง

(Exact differentials)

ได้พบปัญหาทางฟิสิคส์มากมายที่จะต้องเปลี่ยนมาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในพจน์ของสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วทำการอินทิเกรตในกรณีที่ง่ายที่สุด สามารถที่จะแยกตัวแปรและเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

ซึ่งสามารถที่จะแก้ปัญหาได้ ถ้าสามารถคำนวณค่า $\int f(x)\,dx$ และ $\int g(y)\,dy$ บางครั้งก็ไม่สามารถแยกตัวแปรออกเป็นพวกได้ ดังสมการ

$$(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0 \qquad \text{..........(4.13.1)}$$

และ

$$(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0 \qquad \text{..........(4.13.2)}$$

โดยทั่วไปแล้วจะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$M(x, y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad \text{..........(4.13.3)}$$

ซึ่ง $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y (ส่วนใหญ่ฟังก์ชันเหล่านี้จะต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ย่อยโดยเทียบกับ x และ y และต่อเนื่องด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ (4.13.3) สามารถแก้ปัญหาได้โดยง่าย ถ้าสามารถหาฟังก์ชัน

$$w = f(x, y) \qquad \text{..........(4.13.4)}$$

ซึ่งทางซ้ายมือของสมการ (4.13.3) เป็นผลต่างอนุพันธ์รวมของ w ถ้าเป็นไปตามนี้สมการ (4.13.3) ก็กลายเป็น

$$dw = 0$$

และผลเฉลยของสมการนี้ก็หาได้โดยง่าย

$$w = C$$

และผลเฉลยของสมการ (4.13.3) ก็คือ

$$f(x, y) = C$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวที่ไม่เจาะจง

นิพจน์

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \qquad \text{..........(4.13.5)}$$

เรียกผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรงก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $w = f(x, y)$ ซึ่ง

$$df(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \qquad \text{..........(4.13.6)}$$

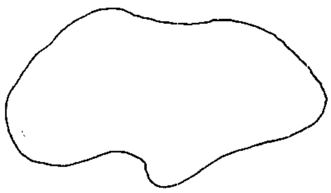
ถ้าไม่มีฟังก์ชันดังกล่าว นิพจน์ไม่เป็นผลต่างอนุพันธ์แม่นตรง

คุณสมบัติสามประการของบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว (simply connected region) ของระนาบในพจน์ของชุดของจุด

1. แต่ละจุดของเซตเป็นจุดข้างใน (interior point) ของเซต (แต่ละจุดสามารถเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมเล็ก ซึ่งจุดทั้งหมดที่อยู่ข้างในอยู่ในเซตนี้) หมายความว่าบริเวณเป็นเซตเปิด (openset) ในระนาบ

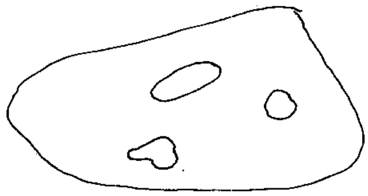
2. สองจุดใด ๆ ของเซตสามารถเชื่อมด้วยวิถีหลายเหลี่ยม (polygonal path) ทุก ๆ จุดดังกล่าวอยู่ในเซต (คุณสมบัตินี้ทำให้เซตเป็นเซตเชื่อมโยง)

3. ถ้า C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว (simple closed curve) ใด ๆ ทุก ๆ จุดเหล่านี้จะต้องอยู่ในเซต แล้วทุก ๆ จุดข้างในของ C อยู่ในเซตด้วย พิจารณารูป 4.13.1



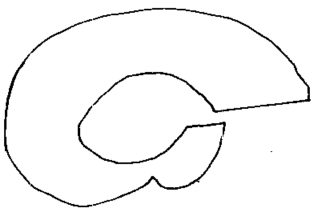
ก.

ก : บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว



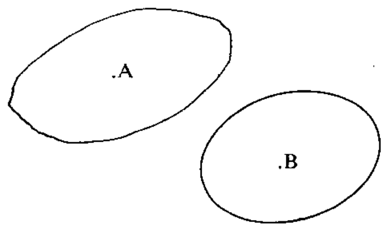
ข.

ข : บริเวณเชื่อมโยงที่ไม่เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว



ค.

ค : บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว



ง : บริเวณที่ไม่เชื่อมโยง เพราะไม่มีวิถีจาก A ไปยัง B ที่อยู่ภายในเซตทั้งหมด

รูป 4.13.1

รูป 4.13.1 (ก, ค) แสดงบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว รูป 4.13.1 (ข) แสดงบริเวณที่เชื่อมโยงแต่ไม่เป็นเชื่อมโยงเชิงเดียว และรูป 4.13.1 (ง) แสดงบริเวณประกอบด้วยสองบริเวณที่ไม่เชื่อมโยง

ทฤษฎีบท 4.13.1 ให้ฟังก์ชัน M (x, y) และ N (x, y) ต่อเนื่อง และมี อนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่อง Mx, My, Nx, Ny สำหรับทุกจำนวนจริงของ x และ y ในบางบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว แล้วเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับ

M (x, y) dx + N (x, y) dy

เป็นผลต่างอนุพันธ์แม่นตรงใน G นั่นคือ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

พิสูจน์ สมมุติว่านิพจน์เป็นผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง นั่นคือสมมุติว่ามีฟังก์ชัน f (x,y) ซึ่งสมการ (4.13.6) สอดคล้องกับทุก ๆ จุดใน G และยังทราบต่อไปอีกว่า

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \text{..........(4.13.7)}$$

ในสมการ (4.13.6) และ (4.13.7) dx และ dy เป็นตัวแปรอิสระอาจจะให้ตัวใดตัวหนึ่ง dx หรือ dy เป็นศูนย์และให้ตัวที่เหลือไม่เป็นศูนย์ แล้วทางเดียวที่ทั้งสองสมการจะให้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \qquad \text{..........(4.13.8)}$$

อาศัยทฤษฎีบทของหัวข้อ 4.12 ที่ว่า ถ้า M และ N ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อยใน G แล้ว

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ดังนั้นเงื่อนไข

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{..........(4.13.9)}$$

จึงเป็นเงื่อนไขที่จำเป็น ถ้าสมการ (4.13.8) สอดคล้อง

ถ้า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ ใน } G$$

แล้วมีฟังก์ชัน w = f (x, y) ซึ่งโดเมนรวม G ซึ่ง

$$df = Mdx + N\,dy$$

จากสมการ (4.13.8)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

อินทิเกรตสมการแรกโดยเทียบกับ x จะได้

$$f(x, y) = \int_x M(x, y)\,dx + g(y) \qquad \text{..........(4.13.10)}$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองด้านของสมการ (4.13.10) โดยเทียบกับ y โดยถือ x เป็นค่าคงตัว จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_x M(x, y)\,dx + \frac{\partial g(y)}{\partial y} \qquad \text{..........(4.13.11)}$$

เมื่อ g (y) เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น จึงสามารถเขียน dg/dy แทน $\partial g/\partial y$ ได้ แล้วให้ $\partial f/\partial y$ จากสมการ (4.13.11) เท่ากับ N (x, y) จะได้

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_x M(x, y)\,dx + \frac{dg(y)}{dy}$$

หรือ

$$\frac{dg(y)}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_x M(x, y)\,dx \qquad \text{..........(4.13.12)}$$

จะใช้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อจะหาค่า g (y) โดยการอินทิเกรตสมาชิกทางขวามือโดยเทียบกับ y และแทนค่าผลลัพธ์นี้กลับไปในสมการ (4.13.10) ก็จะได้คำตอบสุดท้ายนั่นคือ f (x, y) ที่ต้องการ

ความสำเร็จของวิธีการนี้ขึ้นอยู่กับความจริงที่ว่านิพจน์ทางขวามือของสมการ (4.13.12) เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้นและมีเงื่อนไขกำหนดว่า

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

จะต้องสอดคล้อง (ถ้าทางขวามือของ 4.13.11 ขึ้นอยู่กับ x เสมือน y ทางด้านขวามือ จะเท่ากับ dg/dy ไม่ได้ เพราะ dg/dy เกี่ยวข้องกับ y เท่านั้น)

แต่โดยทั่วไปสามารถพิสูจน์ว่า นิพจน์นั้นอิสระจาก x โดยการแสดงว่าอนุพันธ์ย่อยโดยเทียบกับ x จะต้องเท่ากับศูนย์โดยคำนวน

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_x M(x, y)\,dx\right)$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_x M(x, y)\,dx$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} \int_x M(x, y)\,dx\right)$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(M)$$

จะต้องอันตรธานไป ถ้าเป็นความจริงที่ว่า

$$\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$$

ดังที่ได้ตั้งสมมุติฐานไว้

ตัวอย่าง 4.13.1 จงหา f (x, y) เมื่อ

$$df = (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

วิธีทำ ให้ $M = x^2 + y^2$, $N = 2xy$

จะเห็นว่าเงื่อนไข

$$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$$

สอดคล้อง หา f (x, y) ซึ่ง

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

อินทิเกรตสมการแรกโดยเทียบกับ x ก่อน ขณะที่ให้ y เป็นค่าคงตัว และบวก g (y) เสมือนค่าคงตัวของการอินทิเกรต จะได้

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2x + g(y)$$

หาอนุพันธ์สมการนี้เทียบกับ y โดยให้ x เป็นค่าคงตัวจะได้

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{dg}{dy}$$

หรือ $2xy = 2xy + \dfrac{dg}{dy}$ ซึ่ง $\dfrac{dg}{dy} = 0$

นั่นคือ

$$g(y) = C$$

ดังนั้น

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2x + C$$

แบบฝึกหัด 4.13

จงพิจารณาว่าแต่ละข้อต่อไปนี้เป็น ผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรงหรือไม่ ถ้าเป็นผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรงของฟังก์ชัน f (x, y) จงหา f ด้วย

1. $2x(x^3 + y^3)\,dx + 3y^2(x^2 + y^2)\,dy$
2. $e^y\,dx + x(e^y + 1)dy$
3. $(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$
4. $(\cosh y + y\cosh x)\,dx + (\sinh x + x\sinh y)\,dy$
5. $(\sin y + y\sin x)\,dx + (\cos x + x\cos y)dy$
6. $(1 + e^x)\,dy + e^x(y - x)\,dx$
7. $(e^{x+y} + e^{x-y})(dx + dy)$