บทที่ 3

เวกเตอร์ฟังก์ชันและอนุพันธ์

(Vector Functions and Their Derivatives)

3.1 ความนำ

(Introduction)

ในบทเรียนนี้จะได้ศึกษาฟังก์ชันจาก E^1 ถึง E^n ในชั้นต้นจะศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคในปริภูมิสองหรือสามมิติ ในการประยุกต์ส่วนใหญ่จะใช้ $n = 2$ หรือ 3 และจะใช้ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ตามแกนพิกัด x, y, z ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.1.1 ตำแหน่งของอนุภาคในระนาบ xy ณ เวลา t กำหนดโดย

$$x = e^t, \quad y = te^t$$

ให้

$$\vec{R}(t) = \vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}e^t + \vec{j}te^t$$

จงหา ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา $t = 0$ และเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าไร และไปในทิศทางใด

วิธีทำ ที่ $t = 0$ จะได้ $x = 1$ และ $y = 0$ ดังนั้น

$$\vec{R}(0) = \vec{i}$$

เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา $t = 0$ ในเวลาอันสั้นหลังจาก $t = 0$ ทั้ง x และ y จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปจากตำแหน่งเดิม ให้การเคลื่อนที่นี้เท่ากับ

$$\Delta\vec{R} = \vec{i}\Delta x - \vec{j}\Delta y$$

สำหรับ Δt เล็ก ๆ และเวกเตอร์นี้ให้ค่าโดยประมาณของทิศทางของการเคลื่อนที่ $|\Delta\vec{R}/\Delta t|$ ให้ค่าโดยประมาณของความเร็วสำหรับค่าเล็ก ๆ ของ Δt ซึ่งทราบว่า

$$\Delta x \approx \frac{dx}{dt}\Delta t \text{ และ } \Delta y \approx \frac{dy}{dt}\Delta t$$

เพราะฉะนั้น

$$\Delta \vec{R} \approx \vec{i}\,\frac{dx}{dt}\,\Delta t + \vec{j}\,\frac{dy}{dt}\,\Delta t \;=\; \left(\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt}\right)\Delta t,$$

ซึ่งจะนำไปสู่ผลสรุปที่ว่า

$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} \approx \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt}$$

ดูเหมือนมีเหตุผลที่จะใช้

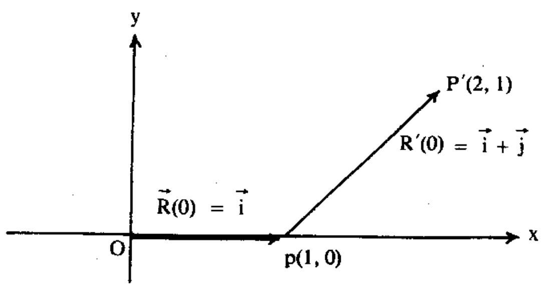
$$\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} \;=\; \vec{i}\,(e^t) + \vec{j}\,(te^t + e^t)$$

คำนวณค่าที่ $t = 0$ จะได้เวกเตอร์ $\vec{i} + \vec{j}$ ซึ่งให้

ความเร็ว (speed) $= |\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{2}$

ทิศทาง (direction) $= \dfrac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$

เวกเตอร์ $\vec{i} + \vec{j}$ นี้เรียก เวกเตอร์ความเร็ว (velocity vector) ที่ $t = 0$ ส่วนประกอบ (component) ของเวกเตอร์นี้ ก็คือ อนุพันธ์ของส่วนประกอบของเวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector) $\vec{R} = \overrightarrow{OP}$ ที่ $t = 0$ (รูป 3.1.1)



ที่ $t = 0$ เวกเตอร์ตำแหน่ง คือ $\vec{R} = \vec{i}$ และเวกเตอร์ความเร็ว คือ $\vec{R}' = \vec{i} + \vec{j}$

รูป 3.1.1

เป็นความต้องการที่จะนิยาม อนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน $R(t)$ นั่นคือ ต้องการจะนิยามลิมิต ซึ่ง

$$\lim_{h\to a} \vec{F}(h)$$

เมื่อ $\vec{F}(h)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันของ h สำหรับนิยามนี้ สมมุติว่า $\vec{F}$ มี n ส่วนประกอบ

$$\vec{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \qquad \text{..........(3.1.1)}$$

เมื่อแต่ละส่วนประกอบเป็นฟังก์ชันซึ่งโดเมนรวมบางย่านใกล้เคียง (deleted neighborhood) ของ $h = a$ แล้วจำกัด h ให้อยู่ในเซตส่วนร่วมของย่านใกล้เคียงเหล่านี้ และกล่าวได้ว่า $\vec{F}$ มีลิมิตขณะที่ $h \to a$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละส่วนประกอบของ $\vec{F}$ มีลิมิต

ถ้าขณะที่ $h \to a$

$$\lim f_1(h) = L_1, \lim f_2(h) = L_2, \ldots, \lim f_n(h) = L_n \qquad \text{..........(3.1.2)}$$

แล้วนิยามของ $\vec{F}(h)$ เป็น $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$:

$$\lim_{h\to a} \vec{F}(h) = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \qquad \text{..........(3.1.3)}$$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาค่าของ $\lim_{h\to 0} F(h)$ เมื่อ $F(h) = \left(e^h, \frac{\sin h}{h}\right)$

วิธีทำ ขณะที่ $h \to 0$

$$\lim e^h = 1, \quad \lim \frac{\sin h}{h} = 1,$$

ดังนั้น

$$\lim_{h\to 0} F(h) = (1, 1)$$

3.1.1 ความต่อเนื่อง (Continuity)

เวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{F}$ ต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อแต่ละส่วนประกอบของฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a ด้วย ดังนิยาม 3.1.1.1

นิยาม 3.1.1.1 เวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$
กล่าวได้ว่า ต่อเนื่อง ที่ $h = a$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\in > 0$
จะมีค่าสมนัย $\delta > 0$ ค่าหนึ่ง ซึ่ง

$$|\vec{F}(h) - \vec{F}(a)| < \in \text{ เมื่อ } |h - a| < \delta \qquad \text{..........(3.1.1.1)}$$

อสมการต่อไปนี้ ทำให้สามารถแสดงได้ว่าเป็นการสมมูลกับความต่อเนื่องที่ h = a ของทุก ๆ ส่วนประกอบของ $\vec{F}$

$$|f_i(h) - f_i(a)| = \sqrt{[f_i(h) - f_i(a)]^2}$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [f_j(h) - f_j(a)]^2}$$

$$|f_i(h) - f_i(a)| \leqslant |F(h) - F(a)| \qquad \text{..........(3.1.1.2)}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |f_j(h) - f_j(a)|$$

อสมการที่หนึ่งของอสมการเหล่านี้เป็นจริง เพราะว่า ส่วนของผลบวก (summand) ภายใต้กรณฑ์ไม่เป็นลบทุกจำนวน ดังนั้นผลบวกของทุกจำนวนจะต้องมากกว่าหรือเท่ากันกับแต่ละจำนวน อสมการที่สองอยู่ในรูป

$$\sqrt{a^2 + b^2 + \ldots + k^2} \leqslant |a| + |b| + \ldots + |k| \qquad \text{..........(3.1.1.3)}$$

สามารถพิสูจน์ได้โดยตรง (โดยยกกำลังสองทั้งสองด้านของ (3.1.1.3) แล้วถอดกรณฑ์ที่สอง) หรืออสมการสุดท้ายใน (3.1.1.2) สามารถสรุปจากหลักเกณฑ์จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (triangle inequality)

$$|\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_n| \leqslant |\vec{V}_1| + |\vec{V}_2| + \ldots + |\vec{V}_n| \qquad \text{..........(3.1.1.4)}$$

ประยุกต์กับเวกเตอร์ $\vec{V}_j$ ซึ่งส่วนประกอบเป็นศูนย์ทั้งหมดยกเว้นส่วนประกอบที่ j ซึ่งคือ

$$f_j(h) - f_i(a), \; j = 1, 2, \ldots, n$$

สมมุติว่าแต่ละส่วนประกอบของ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่ h = a แล้วกำหนดให้ $\in > 0$ และ j เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จาก 1 ถึง n จะมี δ_j ที่สมนัย ซึ่ง

$$|f_j(h) - f_j(a)| < \in/n \text{ เมื่อ } |h - a| < \delta_j, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

ถ้า $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ แล้วแต่ละเทอมในส่วนผลบวกที่สองใน (3.1.1.2) น้อยกว่า $\in/n$ ดังนั้นผลบวกของทุกเทอมจึงน้อยกว่า $\in$ และเงื่อนไข (3.1.1.1) จึงสอดคล้อง

ในทางกลับกัน สมมุติว่าเริ่มต้นด้วยเงื่อนไข (3.1.1.1) แล้ว อสมการที่หนึ่งใน (3.1.1.2) จะให้

$|f_i(h) - f_i(a)| < \in$ เมื่อ $|h - a| < \delta$

ดังนั้น f_i ต่อเนื่อง ที่ $h = a$ สำหรับ i จาก i ถึง n

ในทางปฏิบัติจึงกล่าวได้ว่า เวกเตอร์ฟังก์ชันหนึ่งต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่งในโดเมนของเวกเตอร์ฟังก์ชันนั้น ทุก ๆ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ฟังก์ชันนั้นต่อเนื่องที่จุดนั้นด้วย

3.1.2 อนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน (Derivative of a Vector Function)

จะนิยามอนุพันธ์ของ $\vec{F}$ แบบเดียวกับที่ใช้สำหรับสเกลาร์ฟังก์ชัน คืออยู่ในรูปของสมการลิมิต

$$\vec{F}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{F}(c + h) - \vec{F}(c)}{h} \qquad \text{..........(3.1.2.1)}$$

ทฤษฎีบท 3.1.2.1 ให้

$$\vec{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชัน ซึ่ง ฟังก์ชันส่วนประกอบนิยามในบางย่านของ c แล้ว F หาอนุพันธ์ได้ที่ c ก็ต่อเมื่อแต่ละส่วนประกอบหาอนุพันธ์ได้ที่นั่นด้วย ถ้าเงื่อนไขนี้เป็นจริงแล้ว

$$\vec{F}\,'(c) = (f_1'(c), f_2'(c), \ldots, f_n'(c)) \qquad \text{..........(3.1.2.1)}$$

พิสูจน์ ผลหารของผลต่างที่ต้องการพิจารณา คือ

$$\frac{\vec{F}(c + h) - \vec{F}(c)}{h} = \left(\frac{f_1(c + h) - f_1(c)}{h}, \ldots, \frac{f_n(c + h) - f_n(c)}{h}\right) \qquad \text{..........(3.1.2.2)}$$

และทางด้านซ้ายมือของสมการนี้มีลิมิตก็ต่อเมื่อแต่ละส่วนประกอบทางขวามือมีลิมิต ขณะที่ $h \to 0$ ส่วนประกอบที่ i ทางขวามือมีลิมิตก็ต่อเมื่อ f_i หาอนุพันธ์ได้ที่ c ถ้าแต่ละส่วนประกอบหาอนุพันธ์ได้ที่ c แล้ว ขณะที่ $h \to 0$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{F}(c + h) - \vec{F}(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f_1(c + h) - f_1(c)}{h}, \ldots, \frac{f_n(c + h) - f_n(c)}{h}\right)$$

นั่นคือ

$$\vec{F}'(c) = (f_1'(c), f_2'(c), \ldots, f_n'(c))$$

ตัวอย่าง 3.1.2.1 อยากทราบว่า เวกเตอร์ฟังก์ชัน

$$\vec{F} = [\sin t, \ln t, \tan^{-1}(3t)]$$

หาอนุพันธ์ได้ที่ใด และจงหาอนุพันธ์ด้วย

วิธีทำ ส่วนประกอบที่หนึ่ง $\sin t$ หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกค่าของ t และอนุพันธ์ก็คือ $\cos t$ ส่วนประกอบที่สอง $\ln t$ หาอนุพันธ์ได้สำหรับ $t > 0$ และอนุพันธ์คือ $1/t$ ส่วนประกอบที่สาม $\tan^{-1}(3t)$ หาอนุพันธ์ได้ทุกหนทุกแห่ง และอนุพันธ์คือ $3/(1+9t^2)$ ดังนั้น

เวกเตอร์ฟังก์ชันนี้ หาอนุพันธ์ได้เมื่อ $t > 0$ และอนุพันธ์ คือ

$$F'(t) = \left(\cos t, \frac{1}{t}, \frac{3}{1+9t^2}\right), t > 0$$

แบบฝึกหัด 3.1

จงหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชันต่อไปนี้ และอยากทราบว่าโดเมนของแต่ละฟังก์ชันเป็นเช่นไร

1. (e^{2t}, te^{-t})
2. $(\ln\sqrt{1 + t}, \sqrt{1 - t^2})$
3. $(\sin^{-1}2t, \tan 3t, 1/t)$
4. $(\sec^{-1}3x, \cosh 2x, \tanh 4x)$
5. $\left(\dfrac{2t - 1}{2t + 1}, \ln(1 - 4t^2)\right)$

3.2 ความเร็วและความเร่ง
(Velocity and Acceleration)

การนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวกับการอยู่กับที่ (statics) นั้นใช้ความรู้เพียงพีชคณิตของเวกเตอร์ แต่การประยุกต์ในปัญหาที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่(dynamics) จะต้องอาศัยความรู้ของแคลคูลัสของเวกเตอร์ด้วย ในหัวข้อนี้จะศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบเพื่อไม่ให้ยุ่งยาก แต่มีแนวความคิดที่ว่าจะขยายไปสู่การเคลื่อนที่ในปริภูมิได้โดยง่าย

3.2.1 เวกเตอร์ตำแหน่ง (Position Vector)

สมมุติว่า จุด P เคลื่อนไปตามเส้นโค้งในระนาบ xy และสมมุติว่าทราบตำแหน่งของ P ที่เวลา t ใด ๆ สิ่งนี้หมายความว่า การเคลื่อนที่ของ P อธิบายได้โดยคู่หนึ่งของฟังก์ชัน f และ g

$$x = f(t), \ y = g(t)$$

เวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยัง P เรียก เวกเตอร์ตำแหน่งของ P แม้ว่าน่าจะเรียกเวกเตอร์เรดาร์ (radar) เวกเตอร์นี้เป็นฟังก์ชันของ t กำหนดโดย

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y \qquad \text{..........(3.2.1.1)}$$

หรือ

$$\vec{R} = \vec{i}f(t) + \vec{j}g(t) \qquad \text{..........(3.2.1.2)}$$

3.2.2 เวกเตอร์ความเร็ว (Velocity Vector)

ในทางคณิตศาสตร์ได้นิยามอนุพันธ์ $\vec{R}$ โดยเทียบกับ t ดังนี้

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} \qquad \text{..........(3.2.2.1)}$$

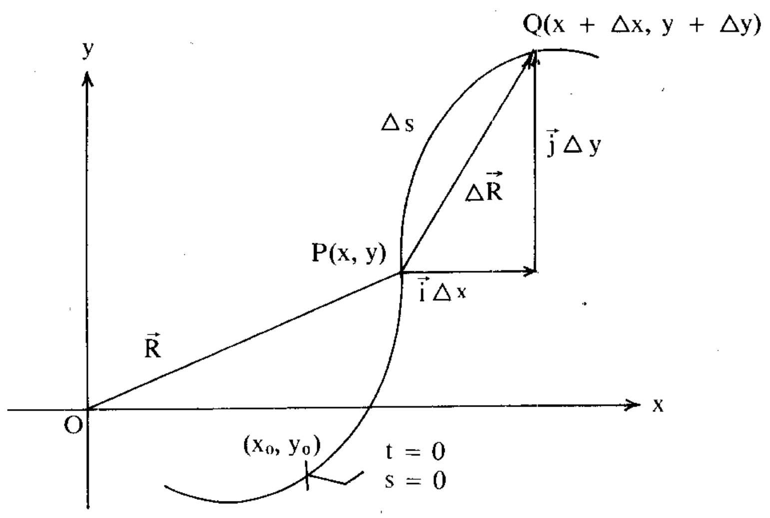
เมื่อ R ถูกกำหนดโดย (3.2.1.1) และ

$$\vec{R} + \Delta \vec{R} = \vec{i}(x + \Delta x) + \vec{j}(y + \Delta y) \qquad \text{..........(3.2.2.2)}$$

ในที่นี้ P(x, y) แทนตำแหน่งของอนุภาคที่เวลา t ขณะที่ Q(x + Δx, y + Δ y) แทนตำแหน่งของอนุภาคที่เวลา t + Δ t โดยลบ (3.2.1.1) จาก (3.2.2.2) จะได้

$$\Delta \vec{R} = \vec{i}\Delta x + \vec{j}\Delta y \qquad \text{..........(3.2.2.3)}$$

ซึ่งคือ เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ ในรูป 3.2.2.1



รูป 3.2.2.1 $\Delta\vec{R} = \vec{i}\Delta x + \vec{j}\Delta y$

หารทั้งสองด้านของ (3.2.2.3) ด้วย Δt เพื่อคำนวณหา $d\vec{R}/dt$

$$\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \vec{i}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \vec{j}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\vec{i}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \vec{j}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

$$= \vec{i}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \vec{j}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ดังนั้น

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} \qquad \text{..........(3.2.2.4)}$$

ผลลัพธ์ (3.2.2.4) นั้นสมมูลกับผลที่ได้จากการหาอนุพันธ์ทั้งสองด้านของ (3.2.1.1) โดยเทียบกับ t โดยถือว่า $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ เป็นค่าคงตัว

นัยสำคัญทางเรขาคณิตของ (3.2.2.4) อาจจะศึกษาได้โดยการคำนวณทิศทางและขนาดของเวกเตอร์นี้

ความชันของ $\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$

ขนาดของ $\frac{d\vec{R}}{dt} = |\frac{d\vec{R}}{dt}| = |\vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt}| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} = |\frac{ds}{dt}|$

เมื่อ s แทนความยาวโค้งตามเส้นโค้งวัดจากบางจุดเริ่มต้น (x_0, y_0)

ถ้าเขียนเวกเตอร์ให้เท่ากับ $d\vec{R}/dt$ โดยเริ่มต้นที่จุด P เวกเตอร์นี้จะให้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

(ก) สัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด P มีความชันเท่ากับ dy/dx ซึ่งเป็นความชันเดียวกับความชันของเส้นโค้งที่จุด P และ

(ข) มีขนาดเท่ากับ |ds/dt| ซึ่งคือความเร็วชั่วขณะของอนุภาคที่ P

ดังนั้น ในทางฟิสิกส์ เวกเตอร์ $d\vec{R}/dt$ เมื่อลากจาก P จึงเหมาะที่จะแทนเวกเตอร์ความเร็ว (velocity vector) ซึ่งมีคุณสมบัติทั้งสองข้อดังกล่าวข้างต้น

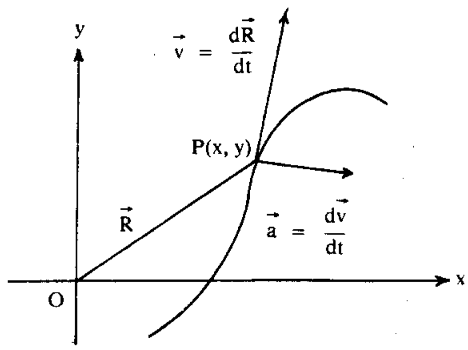
อาจกล่าวโดยสรุปได้ว่า ถ้าหาอนุพันธ์เวกเตอร์ตำแหน่ง

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y$$

โดยเทียบกับเวลา ผลที่ได้จะให้เวกเตอร์ความเร็ว

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt}$$

โดยทั่ว ๆ ไปจะเขียนเวกเตอร์ความเร็วที่จุด P ดังรูป 3.2.2.2



รูป 3.2.2.2

3.2.3 **ความเร่ง** (Acceleration)

เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}$ ได้มาจากการหาอนุพันธ์ $\vec{v}$ ต่อไปอีกหนึ่งครั้ง

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \text{..........(3.2.3.1)}$$

สำหรับอนุภาคที่มีมวลเป็นค่าคงตัว m เคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรง $\vec{F}$ กฎข้อที่สองของนิวตันกล่าวว่า

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{..........(3.2.3.2)}$$

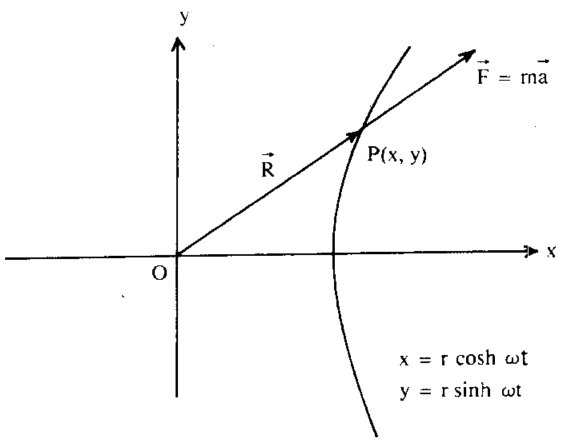
โดยปรกติ เวกเตอร์ของแรงจะเริ่มที่จุด P และนำเวกเตอร์ $\vec{a}$ ดังรูป (3.2.2.2) มาใช้ด้วย

ตัวอย่าง 3.2.3.1 อนุภาค P(x, y) เคลื่อนที่ไปบนไฮเพอร์โบลา

$$x = r\cosh \omega t,\ y = r\sinh \omega t, \qquad \text{..........(3.2.3.3)}$$

เมื่อ r และ ω เป็นค่าคงตัวบวก จงหาเวกเตอร์ตำแหน่ง ($\vec{R}$) เวกเตอร์ความเร็ว ($\vec{v}$) เวกเตอร์ความเร่ง ($\vec{a}$) เวกเตอร์ของแรง ($\vec{F}$) พร้อมทั้งหาขนาดและทิศทางของ $\vec{F}$ ด้วย

วิธีทำ พิจารณารูป 3.2.3.1



รูป 3.2.3.1

$$\vec{R} = \vec{i}(r\cosh\omega t) + \vec{j}(r\sinh\omega t)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i}\,(\omega r\sinh\omega t) + \vec{j}(\omega r\cosh\omega t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{i}(\omega^2 r\cosh\omega t) + \vec{j}(\omega^2 r\ \mathrm{sint}\ \omega t)$$

$$= \omega^2\vec{R}$$

ดังนั้น

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$= m\omega^2\vec{R}$$

ขนาดของ $\vec{F}$ คือ

$$|\vec{F} = |m\omega^2\vec{R}|$$

$$= m\omega^2|\vec{R}|$$

$$= m\omega^2|\overrightarrow{OP}|$$

$$= m\omega^2\sqrt{r^2\cosh^2\omega t + r^2\sinh^2\omega t}$$

$$= m\omega^2 r\sqrt{\cosh^2\ \omega t + \sinh^2\omega t}$$

เพราะว่า ขนาดของ $\vec{F}$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะทาง OP ดังนั้นจึงมีทิศทางเดียวกับทิศทางของ $\vec{R}$ ดังนั้น

แรง $\vec{F}$ จึงมีทิศทางจาก O ไปตาม $\vec{R}$

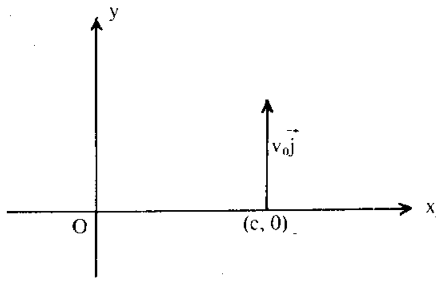
ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า หาวิถีของการเคลื่อนที่ได้อย่างไร โดยการอินทิเกรดสมการ (3.2.3.2) เมื่อ แรง $\vec{F}$ กำหนดในรูปฟังก์ชันของเวลาและตำแหน่งเริ่มต้นของ $\vec{F}$ และของเวกเตอร์ความเร็วของอนุภาคถูกกำหนดให้ แรง $\vec{F}$ อาจจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของ P เสมือนขึ้นอยู่กับเวลาด้วย

ตัวอย่าง 3.2.3.2 แรงกระทำต่ออนุภาค P ซึ่งมีมวล m กำหนดโดยฟังก์ชันของ t

$$\vec{F} = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t$$

ถ้าอนุภาคเริ่มต้นที่จุด (c, 0) ด้วยความเร็วต้น $v_0\vec{j}$ และตั้งฉากกับแกน x จงหาเส้นโค้งนี้

วิธีทำ พิจารณารูป 3.2.3.2



รูป 3.2.3.2

ถ้าให้เวกเตอร์ตำแหน่งเป็น

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y$$

$$\vec{F} = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t = m\frac{d^2R}{dt^2} \qquad \text{..........(3.2.3.4)}$$

และที่ $t = 0$ นั่นคือ ที่จุด (c, 0) ดังรูป 3.2.3.2

$$\vec{R} = \vec{i}c \text{ และ } \frac{d\vec{R}}{dt} = v_0\vec{j} \qquad \text{..........(3.2.3.5)}$$

ใน (3.2.3.4) ให้ $\vec{v} = d\vec{R}/dt$ จะได้

$$m\frac{d}{dt}(v) = (\vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t)$$

หรือ

$$md\vec{v} = (\vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t)dt$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างได้

$$m\vec{v} = m\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i}\sin t - \vec{j}\cos t + \vec{C}_1 \qquad \text{..........(3.2.3.6)}$$

เมื่อค่าคงตัวของการอินทิเกรตเป็นเวกเตอร์แทนด้วย $\vec{C}_1$ ค่าของ $\vec{C}_1$ อาจจะหาได้โดยใช้ความเร็วต้นทางขวามือของสมการ (3.2.3.5) แทนลงในสมการ (3.2.3.6) ด้วย $t = 0$ จะได้

$$m v_0 \vec{j} = -\vec{j} + \vec{C}_1$$

$$\vec{C}_1 = (m v_0 + 1)\vec{i}$$

แทนค่า $\vec{C}_1$ ใน (3.2.3.6)

$$m \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i} \sin t + (m v_0 + 1 - \cos t)\vec{j}$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการต่อไปอีกจะได้

$$m\vec{R} = -\vec{i} \cos t + \vec{j}(m v_0 t + t - \sin t) + \vec{C}_2$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $\vec{R} = \vec{i}c$ (สมการ 3.2.3.5) ช่วยให้หาค่า $\vec{C}_2$ ได้

$$m c \vec{i} = -\vec{i} + \vec{C}_2, \vec{C}_2 = \vec{i}(mc + 1)$$

ดังนั้น เวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{R}$ ถูกกำหนดโดย

$$\vec{R} = \frac{1}{m}[\vec{i}(mc + 1 - \cos t) + \vec{j}(m v_0 t + t - \sin t)]$$

สมการพาราเมตริคของเส้นโค้งที่ต้องการ นั้นหาได้ด้วยการเทียบส่วนประกอบ $\vec{R}$ ข้างบนกับ

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y$$

ซึ่งให้

$$x = c + \frac{1 - \cos t}{m}, y = v_0 t + \frac{t - \sin t}{m}$$

สมการข้างบนนี้เป็นความเร็วและความเร่งในสองมิติ ซึ่งจะเหมาะที่จะอธิบายการเคลื่อนของอนุภาคบนพื้นผิวแบนเรียบ เช่น การที่ตัวแมลงตัวเล็ก ๆ บินแฉลบไปบนพื้นผิวของสระ หรือการเล่นฮอคคิ (hockey) ที่ลื่นไถลไปบนสนามน้ำแข็ง แต่การอธิบายการบินของแมลงภู่ หรือการยิงจรวดนั้นต้องการสามพิกัด ดังนั้น ถ้า

$$R(t) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \qquad \text{..........(3.2.3.7)}$$

เมื่อ x, y, z เป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้สองครั้งแล้ว

ความเร็วของ P(x, y, z) คือ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt} \qquad \text{..........(3.2.3.8)}$$

และความเร่ง คือ

$$\vec{a} = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z}{dt^2} \qquad \text{..........(3.2.3.9)}$$

แบบฝึกหัด 3.2

ข้อ 1 ถึง 8 $\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุด P(x, y) ที่เคลื่อนที่ขณะเวลา t จงหาเวกเตอร์ความเร็วและความเร่ง (velocity and acceleration vectors) สำหรับ t ใด ๆ และจงหาเวกเตอร์เหล่านี้ และอัตราเร็ว (speed) ที่ขณะใดขณะหนึ่งที่กำหนดให้

1. $\vec{R} = (a\cos wt)\vec{i} + (a\sin wt)\vec{j}$, a และ w เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวก; $t = \pi/(3w)$
2. $\vec{R} = (2\cos t)\vec{i} + (3\sin t)\vec{j}$, $t = \pi/4$
3. $\vec{R} = (t+1)\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}$, $t = 2$
4. $\vec{R} = (\cos 2t)\vec{i} + (2\sin t)\vec{j}$, $t = 0$
5. $\vec{R} = e^t\vec{i} + e^{-2t}\vec{j}$, $t = \ln 3$
6. $\vec{R} = (\sec t)\vec{i} + (\tan t)\vec{j}$, $t = \pi/6$
7. $\vec{R} = (\cosh 3t)\vec{i} + (2\sinh t)\vec{j}$, $t = 0$
8. $\vec{R} = [\ln(t+1)]\vec{i} + t^2\vec{j}$; $t = 1$
9. ถ้าแรงที่กระทำกับอนุภาค P มีมวล m คือ

$$\vec{F} = -mg\vec{j}$$

ซึ่ง m และ g เป็นค่าคงตัว และอนุภาคเริ่มต้นที่จุดกำเนิดด้วยความเร็ว

$$v_0 = (v_0\cos\alpha)\vec{i} + (v_0\sin\alpha)\vec{j}$$

ที่เวลา t = 0 จงหาเวกเตอร์ $\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y$ จากจุดกำเนิดไปยัง P ที่เวลา t

ข้อ 10 ถึง 12 จงหาเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}$ และเวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}$ สำหรับการเคลื่อนที่และหามุม θ ระหว่าง $\vec{v}$ และ $\vec{a}$ ที่เวลา t = 0

10. $x = e^t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t\cos t$
11. $x = \tan t$, $y = \sinh 2t$, $z = \operatorname{sech} 3t$
12. $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = \tan^{-1} t$, $z = \sqrt{t^2} + 1$

3.3 เวกเตอร์สัมผัส

(Tangential Vectors)

ขณะที่จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งที่กำหนดให้ในระนาบ xy อาจจะจินตภาพตำแหน่งของจุด P ที่แน่นอนด้วยความยาวโค้ง s ที่เริ่มจากจุด P_0 ใด ๆ บนเส้นโค้งนั้น เวกเตอร์

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y$$

จาก O ถึง P(x, y) เป็นฟังก์ชันของ s และจะได้ตรวจสอบคุณสมบัติของ $\frac{d\vec{R}}{ds}$ ให้ P มีพิกัด (x, y) สมนัยกับค่า s ขณะที่ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ สมนัยกับ $s + \Delta s$ แล้ว

$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s} = \vec{i}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \vec{j}\frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta s} \qquad \text{..........(3.3.1)}$$

เป็นเวกเตอร์ซึ่งขนาดคือคอร์ด (chord) PQ หารด้วยโค้ง PQ และย่างเข้าสู่หนึ่งขณะที่ $\Delta s \to 0$ ดังนั้น

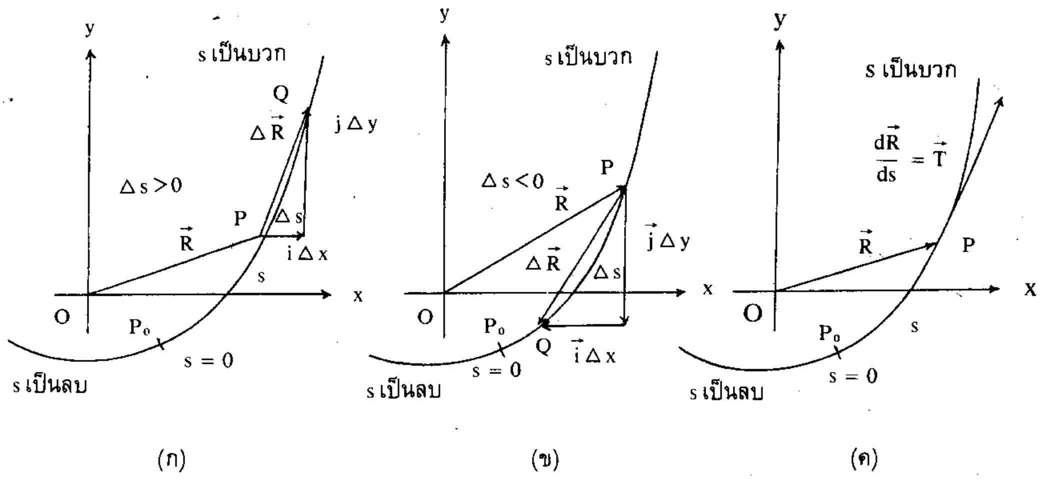
$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s} \qquad \text{..........(3.3.2)}$$

เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเป็นทิศทางมีขีดจำกัด (limiting direction) โดยการย่างเข้าสู่ของ $\Delta \vec{R}/\Delta s$ ขณะที่ $\Delta s \to 0$

$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta s}$$

มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$ ในกรณี (ก) เมื่อ Δs เป็นบวก หรือมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{QP}$ ในกรณี (ข) เมื่อ Δs เป็นลบ รูป 3.3.1 (ก) และ (ข) แสดงสองกรณีนี้และแสดงให้เห็นแต่ละกรณี $\Delta \vec{R}/\Delta s$ มีทิศทางไปตามคอร์ดผ่าน P และ Q และชี้ในทิศทางเพิ่มขึ้นของ s (นั่นคือ ชี้ขึ้นทางขวา แม้ว่า $\Delta \vec{R}$ ชี้ลงทางซ้าย รูป 3.3.1 (ข))

ขณะที่ $\Delta s \to 0$ และ $Q \to P$ ทิศทางของคอร์ดผ่าน P และ Q ย่างเข้าสู่ทิศทางของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่ P ดังนั้น ทิศทางมีขีดจำกัดของ $\Delta \vec{R}/\Delta s$ กล่าวได้อีกทางหนึ่งก็คือทิศทางของ $d\vec{R}/ds$ ตามเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ P และชี้ในทิศทางที่ความยาวโค้ง s เพิ่มขึ้น โดยชี้ออกจาก P_0 เมื่อ s เป็นบวก และชี้ไปยัง P_0 เมื่อ s เป็นลบ



รูป 3.3.1 $\Delta\vec{R}/\Delta s$ *จะชี้ในทิศทางของการเพิ่มขึ้นของ* s *ทั้ง (ก) และ (ข) ดังนั้น ทิศทางของ* $\Delta\vec{R}/\Delta s$ *และของ* $\vec{T} = d\vec{R}/ds$ *(ค) กำหนดการวัด* s *และโดยรูปทรงทางเรขาคณิตของเส้นโค้ง*

ไม่ว่าจะชี้ไปทางไหน เวกเตอร์

$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{T} \qquad \text{..........(3.3.3)}$$

เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสกับเส้นโค้งที่ P ดังรูป 3.3.1 (ค)

ถ้าให้ $\Delta s \to 0$ ในสมการ 3.3.1 จะพบว่า

$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{i}\frac{dx}{ds} + \vec{j}\frac{dy}{ds} \qquad \text{..........(3.3.4)}$$

ซึ่งใช้ในการหา $\vec{T}$ ที่จุดใด ๆ ของเส้นโค้งเมื่อกำหนดสมการมาให้ โดยธรรมชาติของการเคลื่อนที่เกือบจะทุก ๆ กรณี จะสัมพันธ์กับเวลาไม่ใช่ความยาวโค้ง ถ้า $\vec{R} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ และ t ไม่ใช่ความยาวโค้ง แล้ววิธีที่ดีที่สุดในการหา $\vec{T}$ ก็จะใช้ $\vec{v} = d\vec{R}/dt$ นั่นก็คือ หา $\vec{v}$ ก่อนแล้วหาร v ด้วย $|\vec{v}|$ จะได้

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

ซึ่งจะใช้ได้ทุก ๆ กรณี ยกเว้น ที่จุด $\vec{v} = \vec{0}$

ตัวอย่าง 3.3.1 จงหา $\vec{T}$ สำหรับการเคลื่อนที่

$$\vec{R} = (\cos t + t\sin t)\vec{i} + (\sin t - t\cos t)\vec{j},\ t \geqslant 0$$

วิธีทำ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = (-\sin t + t\cos t + \sin t)\vec{i} + (\cos t + t\sin t - \cos t)\vec{j}$$

$$= (t\cos t)\vec{i} + (t\sin t)\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = t;$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$$

ตัวอย่าง 3.3.2 สำหรับการเคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกา

$$\vec{R} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$$

รอบวงกลมหนึ่งหน่วย จงหา $\vec{T}$

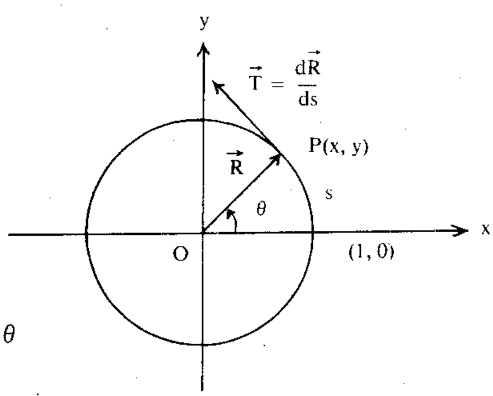
วิธีทำ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{d\theta} = (-\sin\theta)\vec{i} + (\cos\theta)\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$$

ดังนั้น $\vec{T} = \vec{v} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$

และ $\vec{T}$ ก็คือ $\vec{R}$ ที่หมุน (rotates) 90° ทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป 3.3.2



รูป 3.3.2 $\vec{R} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$

$$\vec{T} = \vec{i}[(\cos(\theta + 90^\circ)] + \vec{j}[\sin\theta + 90^\circ]$$

3.3.1 **เส้นโค้งในปริภูมิและความยาวโค้ง** (Space Curves and Arc length)

เท่าที่ได้ศึกษามาทั้งหมดสำหรับสองมิติเป็นการเคลื่อนที่ในระนาบ สามารถที่จะขยายไปยังสามมิติเป็นการเคลื่อนที่ในปริภูมิซึ่งเป็นเป้าหมาย ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดซึ่งตำแหน่งในปริภูมิกำหนดโดยสมการ

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t) \qquad \text{..........(3.3.1.1)}$$

ซึ่ง f, g และ h เป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้ ขณะที่ t แปรเปลี่ยนอย่างต่อเนื่อง การเคลื่อนที่ของ P ให้เส้นโค้งในปริภูมิ

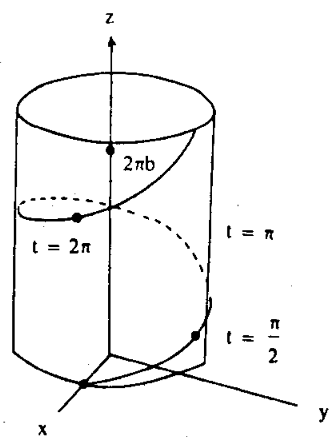
ตัวอย่าง 3.3.1.1 อยากทราบว่า สมการ

$$x = a \cos \omega t,\ y = a \sin \omega t,\ z\ bt \qquad \text{..........(3.3.1.2)}$$

ซึ่ง a, b และ w เป็นค่าคงตัวบวก

แทนสมการของอะไร และมีรูปร่างอย่างไร

วิธีทำ สมการดังกล่าวแทนวงกลมเกลียว (circular helix) โพรเจกชันของจุด $P(x, y, z)$ ไปบนระนาบ xy เคลื่อนที่รอบวงกลม $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, ขณะที่ t แปรเปลี่ยน และระยะทางระหว่าง P กับระนาบ xy เปลี่ยนอย่างแน่นอนด้วย t และมีรูปร่างดังรูป 3.3.1.1



รูป 3.3.1.1 วงกลมเกลียว $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$, $z = bt$ *ขดเป็นวงขึ้นจากระนาบ* xy *ขณะที่* t *เพิ่มขึ้นจากศูนย์*

ให้ P_0 เป็นจุดคงที่ใด ๆ บนเส้นโค้งในปริภูมิ และวัดระยะทางตามเส้นโค้งจาก P_0 ในทิศทางบวก สามารถให้ P_0 เป็นตำแหน่งของ P เมื่อ $t = 0$ และการวัดความยาวโค้งจะไปในทิศทางที่ P เริ่มเคลื่อนที่จาก P_0 ขณะที่เลือก t เป็นค่าบวก แล้วตำแหน่งของ P บนเส้นโค้งจะเป็นฟังก์ชันของความยาวโค้ง s จาก P_0 ถึง P

เวกเตอร์

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \qquad \text{..........(3.3.1.3)}$$

จากจุดกำเนิดไปยัง P เป็นฟังก์ชันของ s ด้วย ต่อไปจะได้พิจารณานัยสำคัญทางเรขาคณิต (geometrical significance) ของอนุพันธ์

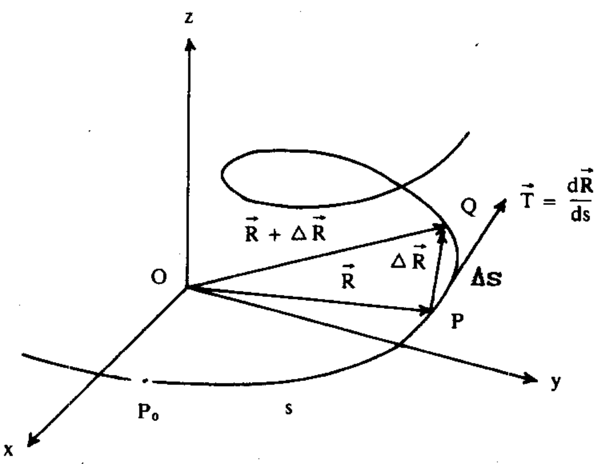
$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{i}\frac{dx}{ds} + \vec{j}\frac{dy}{ds} + \vec{k}\frac{dz}{ds} \qquad \text{..........(3.3.1.4)}$$

ถ้าคำนวณอนุพันธ์จากนิยาม

$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s}$$

อาศัยรูป 3.3.1.2

$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s}$ = เวกเตอร์ของขนาด $\frac{\text{คอร์ด } PQ}{\text{โค้ง } PQ}$ ทิศทางไปตามเส้นตัดกราฟ (secant line) PQ



รูป 3.3.1.2 ถ้า $\vec{R}$ หาอนุพันธ์ได้แล้ว $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสกับเส้นโค้งที่เกิดโดย P

ขณะที่ $Q \to P$ และ $\Delta s \to 0$ ทิศทางของเส้นตัดกราฟย่างเข้าสู่ทิศทางของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่ P ขณะที่อัตราส่วนของคอร์ดกับส่วนโค้งย่างเข้าสู่หนึ่ง (สำหรับเส้นโค้งเรียบ) เพราะฉะนั้น ลิมิตของ $\Delta \vec{R}/\Delta s$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสกับเส้นโค้งที่ P และชี้ในทิศทางซึ่งความยาวโค้งเพิ่มขึ้นไปตามเส้นโค้ง กล่าวอีกทางก็คือ เวกเตอร์ $\vec{T}$ ซึ่งนิยามโดยสมการ

$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{T} \qquad \text{..........(3.3.1.5)}$$

เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สัมผัสกับเส้นโค้งในปริภูมิ ที่จุด P ซึ่งเป็นจุดปลายของเวกเตอร์ $\vec{R} = \vec{OP}$

ในการหา $\vec{T}$ ไม่ได้ต้องการที่จะแสดงส่วนประกอบของ $\vec{R}$ ในพจน์ของ s เสมือนการเคลื่อนที่ในระนาบ ความจริงก็คือ $\vec{T}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จึงจะคำนวณ $\vec{T}$ จาก เวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v} = d\vec{R}/dt$ โดยสูตร

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \text{..........(3.3.1.6)}$$

ตัวอย่าง 3.3.1.2 จงหา $\vec{T}$ สำหรับวงกลมเกลียวของตัวอย่าง 3.3.1.1

วิธีทำ เวกเตอร์ความเร็ว คือ

$$\vec{v} = \vec{i}(-a\omega \sin \omega t) + \vec{j}(a\omega \cos \omega t) + \vec{k}(b)$$

ซึ่งมีความยาวเท่ากับ

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2\omega^2 \sin^2 \omega t + a^2\omega^2 \cos^2 \omega t + b^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{a\omega(-\vec{i}\sin \omega t + \vec{j}\cos \omega t + b\vec{k}}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}$$

ถ้ารวมผลของสมการ (3.3.1.4) กับ (3.3.1.5) จะได้ **(3.3.1.8)**

เมื่อ

$$\vec{T} = \vec{i}\frac{dx}{ds} + \vec{j}\frac{dy}{ds} + k\frac{dz}{ds} \qquad \text{..........(3.3.1.7)}$$

และเมื่อ

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$$

หมายความว่า

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad \text{..........(3.3.1.8)}$$

ความยาวของโค้งของเส้นโค้งอาจจะคำนวณโดย ds จาก (3.3.1.8) โดยอินทิเกรตระหว่างลิมิตที่เหมาะสม

ตัวอย่าง 3.3.1.3 ก) จงหา s สำหรับวงกลมเกลียวในตัวอย่าง 3.3.1.1 และตัวอย่าง 3.3.1.2

ข) จงหาความยาวของการหมุนหนึ่งรอบเต็มของวงกลมเกลียว

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$$

วิธีทำ ก)

$$ds = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}\,dt$$

ดังนั้น

$$s = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}\int dt$$

ซึ่งจะต้องกำหนดค่าของลิมิตที่เหมาะสมในการอินทิเกรตมาด้วย

ข) สำหรับ $a = b = \omega = 1$ จึงได้ว่า

$$s = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} dt$$

$$= 2\pi\sqrt{2}$$

นั่นคือ $\sqrt{2}$ เท่าของความยาวของวงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบ xy บนวงกลมเกลียวตั้งอยู่

แบบฝึกหัด 3.3

ข้อ 1 ถึง 3; $\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิด 0 ไปยัง P(x, y) สำหรับแต่ละการเคลื่อนที่ จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{T} = d\vec{R}/ds$

1. $\vec{R} = 2\vec{i}\cos t + 2\vec{j}\sin t$
2. $\vec{R} = (\cos^3 t)\vec{i} + (\sin^3 t)\vec{j}$
3. $\vec{R} = (\cos 2t)\vec{i} + (2\cos t)\vec{j}$

ข้อ 4 ถึง 7, $\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{T}$ สำหรับแต่ละเส้นโค้งในปริภูมิ

4. $x = 6\sin 2t,\ y = 6\cos 2t,\ z = 5t$
5. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t$
6. $x = 3\cosh 2t,\ y = 3\sinh 2t,\ z = 6t$
7. $x = 3t\cos t,\ y = 3t\sin t,\ z = 4t$

ข้อ 8, 9 จงหาความยาวของเส้นโค้งระหว่าง $t = 0$ และ $t = \pi$

8. เส้นโค้งของข้อ 5
9. เส้นโค้งของข้อ 7

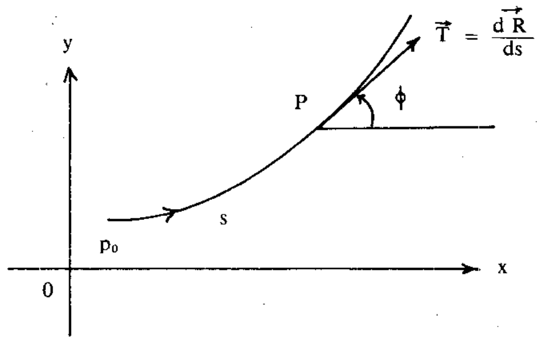
3.4 ความโค้งและเวกเตอร์ปรกติ

(Curvature and Normal Vectors)

พิจารณาอัตราแปรเปลี่ยนของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (unit tangent vector) $\vec{T}$ ขณะที่ P เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง ความยาวของ $\vec{T}$ เป็นค่าคงตัว โดยเท่ากับหนึ่งเสมอ แต่ทิศทางของ $\vec{T}$ ต้องเปลี่ยน เมื่อสัมผัสเส้นโค้ง และเส้นสัมผัส $\vec{T}$ จะเปลี่ยนทิศทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งเว้นแต่ในที่ซึ่งเส้นโค้งเป็นเส้นตรง

3.4.1 การเคลื่อนที่ในระนาบ (Motion in a Plane)

ถ้า P เคลื่อนที่ตามเส้นโค้งในระนาบ xy วัดทิศทางของ $\vec{T}$ โดยให้ $\vec{T}$ ทำมุม ϕ กับแกน x ในทิศทางบวก ดังรูป 3.4.1.1



รูป 3.4.1.1 ค่าของ $|d\phi/ds|$ *ที่* P *เรียกความโค้งของเส้นโค้งที่* P

แล้ววัดอัตราที่ซึ่ง $\vec{T}$ เปลี่ยนจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งตามเส้นโค้งกับการแปรเปลี่ยนใน ϕ ค่าสัมบูรณ์ของอนุพันธ์ $d\phi/ds$ ของ ϕ เทียบกับความยาวโค้ง (วัดในเรเดียนต่อหน่วยความยาว) เรียกฟังก์ชันความโค้งของเส้นโค้ง และค่าสัมบูรณ์ที่จุดใด ๆ เรียกความโค้งที่จุดนั้น ๆ สัญกรณ์สำหรับความโค้งเป็นอักษรกรีก κ (kappa)

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| \qquad \text{..........(3.4.1.1)}$$

ซึ่ง

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx}$$

และ

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

จะพิสูจน์สูตรสำหรับ κ จากสมการทั้งบนได้โดยตรง

$$\phi = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2y/dx^2}{1 + (dy/dx)^2}$$

และ

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

ดังนั้น

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi/dx}{ds/dx}\right| = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \qquad \text{..........(3.4.1.2)}$$

สูตรสำหรับ κ ในพจน์ของ dx/dy และ d^2x/dy^2 ถ้าใช้

$$\phi = \cos^{-1}\frac{dx}{dy}$$

และ

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi/dy}{ds/dy}\right|$$

ผลลัพธ์ซึ่งสมนัยกับ (3.4.1.2) คือ

$$\kappa = \frac{|d^2x/dy^2|}{[1 + (dx/dy)^2]^{3/2}} \qquad \text{..........(3.4.1.3)}$$

ถ้าสมการของเส้นโค้งถูกกำหนดในรูปแบบตัวแปรเสริม (paramatric form)

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

แล้ว

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

และถ้าใช้

$$\kappa = \left| \frac{d\phi/dt}{ds/dt} \right|$$

การคำนวณจะได้เป็น

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \; \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \left[\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\right]$$

และ

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

ดังนั้น

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}} \qquad \text{..........(3.4.1.4)}$$

ตัวอย่าง 3.4.1.1 จงหาความโค้งของเส้นตรง

วิธีทำ สำหรับเส้นตรงใด ๆ

มุม ϕ เป็นค่าคงตัว

และเพราะว่า

$\frac{d\phi}{ds}$ ในสมการ (3.4.1.2) เป็นศูนย์

ดังนั้น ความโค้งของเส้นตรงเป็น 0

ตัวอย่าง 3.4.1.2 จงหาความโค้งของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a (ให้จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุดกำเนิด)

วิธีที่ 1 ให้วงกลมมีสมการเป็น

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$$

แล้ว

$$x = -a\sin\theta,\ y = a\cos\theta$$

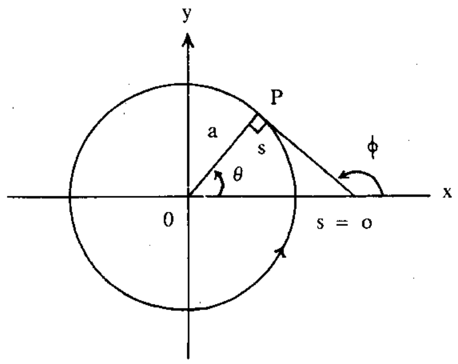
$$x = -a\cos\theta,\ y = -a\sin\theta$$

จากสมการ (3.4.1.4) จะได้

$$n = \frac{|(-a\sin\theta)(-a\sin\theta) - (a\cos\theta)(-a\cos\theta)|}{[a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta]^{3/2}}$$

$$= \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}$$

วิธีที่ 2 พิจารณารูป 3.4.1.2



รูป 3.4.1.2 P : $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$

ให้ s และ ϕ แสดงในพจน์ของ θ ดังต่อไปนี้

$$s = a\theta,\ \phi = \theta + \pi/2 \qquad \text{..........(3.4.1.5)}$$

จากสมการ (3.4.1.1) จะให้

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta}{ad\theta}\right| = \frac{1}{a}$$

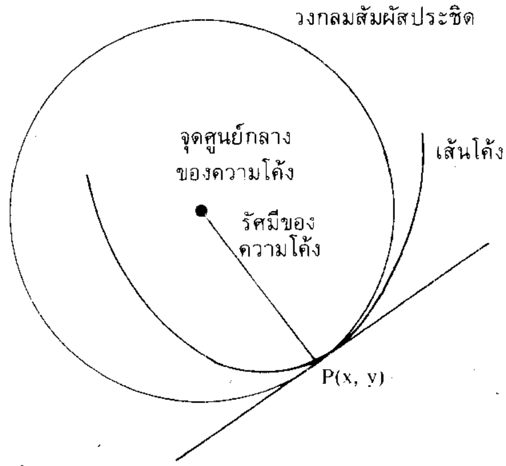
ความโค้งของวงกลมเท่ากับส่วนกลับของรัศมีของวงกลมนั้น วงกลมที่เล็กกว่ามีความโค้งมากกว่า ในการหมุนรอบเหรียญสลึงจะมีการเปลี่ยนทิศทางต่อหน่วยของความยาวโค้งรวดเร็วกว่าการหมุนรอบเหรียญบาท

3.4.2 วงกลมและรัศมีของความโค้ง (Circle and Radius of Curvature)

วงกลมที่สัมผัสกับเส้นโค้งในระนาบที่จุด P ซึ่งจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ทางด้านเว้าหงายของเส้นโค้ง และมีความโค้งเท่ากับความโค้งของเส้นโค้งที่จุด P จะเรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมของความโค้ง (circle of curvature) มีรัศมีเท่ากับ $1/k$ จากตัวอย่าง 3.4.1.2 จึงนิยามรัศมีของความโค้ง ρ ที่ P เป็น

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} \qquad \text{..........(3.4.2.1)}$$

เรียกจุดศูนย์กลางของวงกลมของความโค้งว่า จุดศูนย์กลางของความโค้ง (center of curvature) วงกลมของความโค้งมีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอันดับสองเท่ากับอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอันดับสองของเส้นโค้งที่จุดนี้ ด้วยเหตุผลนี้แสดงว่าวงกลมนี้มีความสัมพันธ์กับเส้นโค้งที่ P กว่าวงกลมอื่น ๆ จึงเรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมสัมผัสประชิด (osculating circle) ดังรูป 3.4.2.1

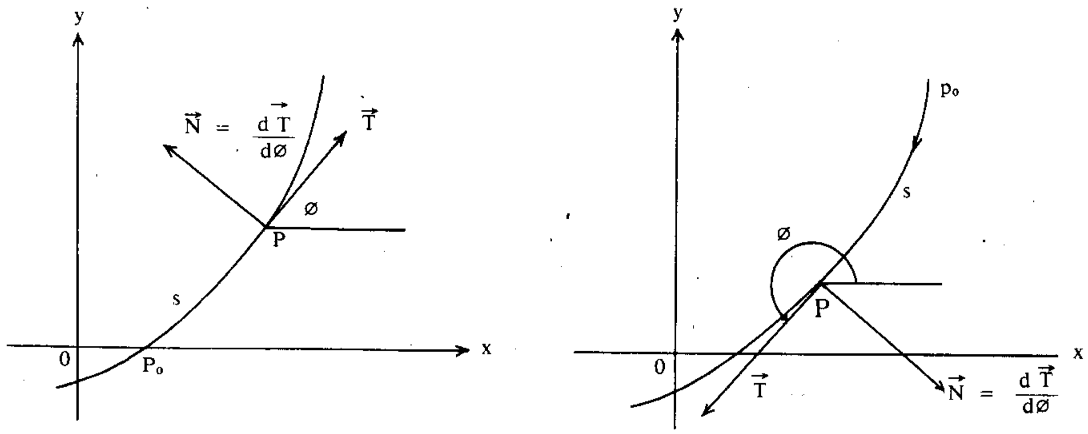


รูป 3.4.2.1 วงกลมสัมผัสประชิดหรือวงกลมของความโค้งที่ P(x, y)

รูป 3.4.2.1 วงกลมสัมผัสประชิด หรือวงกลมของความโค้งที่ P(x, y) เมื่อความเร็วและความเร่งเกี่ยวข้องเพียงแต่อนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของพิกัดของ P นอกจากนั้นอาจจะคาดล่วงหน้าได้ว่าความเร็วและความเร่งชั่วขณะของอนุภาคเคลื่อนที่บนเส้นโค้งใด ๆ อาจจะแสดงในพจน์ของความเร็วและความเร่งชั่วขณะสัมพันธ์กับอนุภาคเคลื่อนที่บนวงกลมสัมผัสประชิด ซึ่งจะได้ทำการศึกษาการคาดการล่วงหน้านี้ต่อไปในภายหน้า

3.4.3 เวกเตอร์ปรกติหนึ่งหน่วย (Unit Normal Vector)

อัตราแปรเปลี่ยนของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{T}$ ขณะที่ P เคลื่อนที่ตามเส้นโค้ง ในพจน์ของความชันมุม ø ดังรูป 3.4.3.1



รูป 3.4.3.1 หมุน $\vec{T}$ ทวนเข็มนาฬิกา 90° ได้ $\vec{N}$

สามารถเขียน

$$\vec{T} = \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi \qquad \text{..........(3.4.3.1)}$$

และแล้วอนุพันธ์

$$\frac{d\vec{T}}{d\phi} = -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi \qquad \text{..........(3.4.3.2)}$$

มีขนาด

$$\left|\frac{d\vec{T}}{d\phi}\right| = \sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi} = 1$$

จากสมการ (3.4.3.1) และ (3.4.3.2) จะเห็นได้ว่า

$$\vec{T}\cdot\frac{d\vec{T}}{d\phi} = 0$$

เพราะฉะนั้น $d\vec{T}/d\varnothing$ ตั้งฉากกับ $\vec{T}$ ความจริงนี้ จะเห็นได้จากสมการ (3.4.3.2) ว่า

$$\frac{d\vec{T}}{d\varnothing} = \vec{N} \qquad \text{..........(3.4.3.3)}$$

ที่

$\vec{N} = \vec{i}\cos(\varnothing + 90°) + \vec{j}\sin(\varnothing + 90°) = -\vec{i}\sin\varnothing + \vec{j}\cos\varnothing$ เป็นเวกเตอร์ปรกติหนึ่งหน่วยได้โดยการหมุนเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{T}$ ทวนเข็มนาฬิกาไป 90° ดังรูป (3.4.3.1)

เปรียบเทียบสมการ (3.4.3.1) และ (3.4.3.2) แสดงว่า $\vec{N}$ สามารถหาได้จาก $\vec{T}$ โดยเปลี่ยนส่วนประกอบและเปลี่ยนเครื่องหมายของส่วนประกอบตัวใหม่ตัวแรก

ตัวอย่าง 3.4.3.1 จงหา $\vec{N}$ สำหรับเส้นโค้งที่เกิดจาก

$$\vec{R} = (2t + 3)\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}.$$

วิธีทำ เริ่มต้นด้วยการหา $\vec{T}$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\vec{i} + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\vec{j}$$

แล้วสลับส่วนประกอบของ $\vec{T}$ และเปลี่ยนเครื่องหมายของส่วนประกอบตัวใหม่ตัวแรก

$$\vec{N} = -\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\,j$$

สำหรับเส้นโค้งในปริภูมิ ทิศทางของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{T}$ ไม่ได้กำหนดโดยมุมเดี่ยวเช่น $\varnothing$ จะใช้ความยาวโค้ง s แทน เสมือนตัวแปรเสริม สำหรับทฤษฎีบทในการศึกษาของ $\vec{T}$ ในหัวข้อต่อไป จะพบว่า $\vec{T}$ และ $d\vec{T}/ds$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ถ้า $d\vec{T}/ds$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ จะใช้ทิศทางเวกเตอร์นี้ระบุมุขสำคัญปรกติ (principal normal) กับเส้นโค้ง ในกรณีสองมิติ จะได้จากกฎลูกโซ่

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\varnothing}\,\frac{d\varnothing}{ds} = \vec{N}\,(\pm k)$$

ถ้าให้ทิศทางของเส้นโค้งซึ่ง ø ทำให้ฟังก์ชันของ s เพิ่มขึ้น

$$\frac{d\varnothing}{ds} = k$$

และ

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\varnothing}\frac{d\varnothing}{ds} = \vec{N}\,k \qquad ....(3.4.3.4)$$

รวมเส้นโค้งทั้งสองมิติและสามมิติเป็นสมการเดียวโดยตัดส่วนกลางของสมการ (3.4.3.4) ออกไป จะได้สมการง่าย ๆ

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{N}\,k \qquad ....(3.4.3.5)$$

สมการ (3.4.3.5) k คือขนาดของ $d\vec{T}/ds$

$$k = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| \qquad ....(3.4.3.6)$$

จำนวนนี้เรียกความโค้งของเส้นโค้งในปริภูมิ นิยามนี้ไม่ขัดแย้งกัน (consistent) กับสมการ (3.4.1.1) สำหรับเส้นโค้งในระนาบ แต่เป็นการขยายแนวความคิดของความโค้งของเส้นโค้งไปในปริภูมิ

สมการ (3.4.3.5) และ (3.4.3.6) ร่วมกับนิยาม เวกเตอร์มุขสำคัญปรกติหนึ่งหน่วย (Unit principal normal vector) $\vec{N}$ โดยที่ $d\vec{T}/ds \neq 0$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|} \qquad ....(3.4.3.7)$$

ตัวอย่าง 3.4.3.2 จงหาความโค้งและเวกเตอร์มุขสำคัญปรกติหนึ่งหน่วย สำหรับวงกลมเกลียวในตัวอย่าง 3.3.1.1 และ 3.3.1.2 ของหัวข้อ 3.3

วิธีทำ ในตัวอย่าง 3.3.1.2 หัวข้อ 3.3 พบว่า

$$\vec{T} = \frac{a\omega(-\vec{i}\sin\omega t + \vec{j}\cos\omega t) + b\vec{k}}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} \qquad ....(3.4.3.8)$$

และ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt}$$

$$= \frac{-a\omega^2}{a^2\omega^2 + b^2}\ (\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$$

และ

$$k = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{a\omega^2}{a^2\omega^2 + b^2} \qquad \text{..........(3.4.3.9)}$$

ขีดจำกัดสองกรณีของสมการ (3.4.3.9) มีคุณค่าแต่การตรวจสอบ กรณีแรก ถ้า $b = 0$ แล้ว $z = 0$ วงกลมเกลียวจะกลายเป็นวงกลมรัศมี a ในระนาบ xy ขณะที่สมการ (3.4.3.9) ลด $k = 1/a$ กรณีที่สอง ถ้า $a = 0$ แล้ว $x = y = 0$ และ $z = bt$ บอกให้ทราบว่าจุดจะเคลื่อนที่ไปตามแกน z สมการ (3.4.3.9) ให้ความโค้งอย่างถูกต้องเป็น $k = 0$ ในกรณีทั่วไป ความโค้งของวงกลมเกลียวเป็นค่าคงตัวและมีค่าน้อยกว่าความโค้งของวงกลมที่เป็นภาคตัดขวางของทรงกระบอก ซึ่งวงกลมเกลียวพันอยู่ดังรูป 3.3.1.1

เวกเตอร์มุขสำคัญปรกติหนึ่งหน่วยคือ

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|} = -(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$$

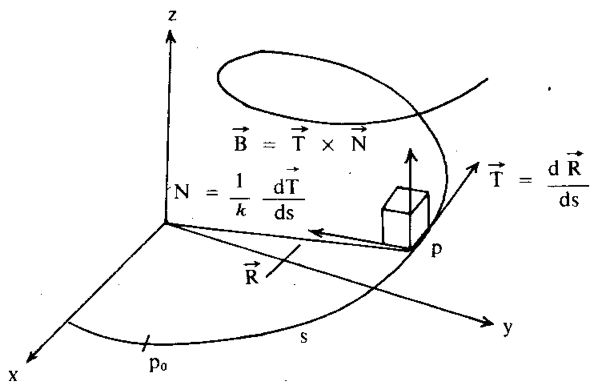
$$= -\frac{\vec{i}x + \vec{j}y}{a} \qquad \text{..........(3.4.3.10)}$$

ซึ่งขนานกับเวกเตอร์จากจุด (,0, 0, z) บนแกน z ไปยังจุด (x, y, z) บนวงกลมเกลียว

เมื่อกำหนดเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ ให้ จะสามารถนิยามเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สาม ให้ตั้งฉากกับทั้งเวกเตอร์ $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ ได้โดยสมการ

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \qquad \text{..........(3.4.3.11)}$$

เวกเตอร์ B อาจจะนิยามให้อยู่ในระนาบที่ปรกติกับ $\vec{T}$ ที่ P ดังรูป 3.4.3.1



รูป 3.4.3.1 $\vec{T}$, $\vec{N}$ *และ* $\vec{B}$ *ให้รูปแบบพิกัดมือขวา*

และเรียกคู่แนวฉาก (binormal) ที่ P เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทั้งสาม $\vec{T}$, $\vec{N}$ และ $\vec{B}$ ให้รูปแบบระบบมือขวาของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สัมพันธ์ในเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากในการศึกษาเส้นโค้งในปริภูมิ

แบบฝึกหัด 3.4

ข้อ 1 ถึง 5 จงหาความโค้งของแต่ละเส้นโค้ง

1. $y = a \cosh (x/a)$

2. $y = e^{2x}$

3. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$

   $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

4. $x = \ln \sec y$

5. $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$

6. จงแสดงว่าเมื่อ x และ y เป็นฟังก์ชันของความยาวของส่วนโค้ง s เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ แสดงได้ดังนี้

$$\vec{T} = \vec{i}\,\frac{dx}{ds} + j\,\frac{dy}{ds}, \quad \vec{N} = -\vec{i}\,\frac{dy}{ds} + j\,\frac{dx}{ds}$$

   เมื่อ $dx/ds = \cos \varnothing$, $dy/ds = \sin \varnothing$ และ $\varnothing$ เป็นมุมทางบวกของแกน x ไปยังเส้นสัมผัส

ข้อ 7 ถึง 9 จงหาเวกเตอร์มุขสำคัญปรกติหนึ่งหน่วย $\vec{N}$ ความโค้ง κ และเวกเตอร์คู่แนวฉากหนึ่งหน่วย $\vec{B}$

7. $x = 6\sin 2t,\ y = 6\cos 2t,\ z = 5t$

8. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t$

9. $x = 3\cosh 2t,\ y = 3\sinh 2t,\ z = 6t$

3.5 การหาอนุพันธ์ของผลคูณของเวกเตอร์
(Differentiation of Products of Vectors)

ถ้าส่วนประกอบของเวกเตอร์เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสเกลาร์ t ที่หาอนุพันธ์ได้แล้วเวกเตอร์นั้นเป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้ และอนุพันธ์ของเวกเตอร์นี้ก็หาได้โดยการหาอนุพันธ์ส่วนประกอบ (หัวข้อ 3.1 สมการ (3.1.2.1))

เป็นความสะดวกที่จะพัฒนาสูตรสำหรับอนุพันธ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) และผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross product) ของสองเวกเตอร์ที่เป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้ ดังตัวอย่าง

$$\vec{U} = \vec{i} f_1(t) + \vec{j} f_2(t) + \vec{k} f_3(t) \qquad \text{..........(3.5.1)}$$
$$\vec{V} = \vec{i} g_1(t) + \vec{j} g_2(t) + \vec{k} g_3(t)$$

เมื่อ f's และ g's เป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้ แล้วโดยสูตรปรกติสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันสเกลาร์ และเป็นการง่ายที่จะพิสูจน์ว่า

$$\frac{d}{dt}(\vec{U} \cdot \vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \text{..........(3.5.2)}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{U} \times \vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt} \times \vec{V} + \vec{U} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \text{..........(3.5.3)}$$

อย่างไรก็ตามแทนที่จะใช้ส่วนประกอบมาพิสูจน์เอกลักษณ์ (3.5.2), และ (3.5.3) จะพิสูจน์โดยใช้กระบวนการของ $\triangle$ ดังตัวอย่างให้

$$\vec{W} = \vec{U} \times \vec{V}$$

เมื่อ t มีบางค่าที่แน่นอนให้ส่วนที่เปลี่ยนของ t เป็น $\triangle t$ และแทนค่าใหม่ของเวกเตอร์โดย $\vec{U} + \triangle \vec{U}$ และอื่น ๆ อีกดังนั้น

$$\vec{W} + \triangle \vec{W} = (\vec{U} + \triangle \vec{U}) \times (\vec{V} + \triangle \vec{V})$$
$$= \vec{U} \times \vec{V} + \vec{U} \times \triangle \vec{V} + \triangle \vec{U} \times \vec{V} + \triangle \vec{U} \times \triangle \vec{V}$$

และ

$$\frac{\triangle \vec{W}}{\triangle t} = \vec{U} \times \frac{\triangle \vec{V}}{\triangle t} + \frac{\triangle \vec{U}}{\triangle t} \times V + \frac{\triangle \vec{U}}{\triangle t} \times \triangle \vec{V}$$

หาลิมิต ขณะที่ $\Delta t \to 0$ จะสังเกตได้ว่า

$$\ell im \frac{\Delta\vec{W}}{\Delta t} = \frac{d\vec{W}}{dt}, \ \ell im \frac{\Delta\vec{U}}{\Delta t} = \frac{d\vec{U}}{dt}, \ \ell im \ \Delta\vec{V} = \ell im \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \quad \ell im \Delta t = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{U} \times \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{U}}{dt} \times \vec{V}$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ (3.5.3)

สมการ (3.5.2) และ (3.5.3) ทั้งสองเหมือนกับสมการสำหรับอนุพันธ์ของผลคูณของสองสเกลาร์ฟังก์ชัน u และ v ความจริงแล้วการพิสูจน์โดยกระบวนการ Δ ใช้ได้เช่นเดียวกันสำหรับเวกเตอร์หรือสเกลาร์ เพียงแต่ต้องระมัดระวังในอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์ นั่นคือความสำคัญสำหรับของตัวประกอบ เพราะเมื่อสลับลำดับแล้ว เครื่องหมายของผลคูณจะเปลี่ยนไป

ตัวอย่าง 3.5.1 สูตรสำหรับอนุพันธ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น (triple scalar product) นำไปสู่เอกลักษณ์ (identity) ที่น่าสนใจยิ่งสำหรับอนุพันธ์ของตัวกำหนด (determinant) ของอันดับสาม

พิจารณา ให้

$$\vec{U} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$
$$\vec{V} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \qquad \text{..........(3.5.4)}$$
$$\vec{W} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$$

เมื่อส่วนประกอบเป็นฟังก์ชันของสเกลาร์ t ที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

เอกลักษณ์

$$\frac{d}{dt}(\vec{U} \cdot V \times W) = \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot \vec{V} \times \vec{W} + \vec{U} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \times \vec{W} + \vec{U} \cdot V \times \frac{d\vec{W}}{dt} \quad (3.5.5)$$

สมมูลกับ

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt} & \frac{du_2}{dt} & \frac{du_3}{dt} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{dw_1}{dt} & \frac{dw_2}{dt} & \frac{dw_3}{dt} \end{vmatrix}$$

..........(3.5.6)

กล่าวได้ว่าอนุพันธ์ของตัวกำหนดของอันดับสามคือผลบวกของสามตัวกำหนดที่ได้รับจากตัวกำหนดเริ่มแรกโดยการหาอนุพันธ์ทีละแถวของแต่ละตัวกำหนดใหม่ ผลนี้อาจจะขยายออกไปยังตัวกำหนดอันดับ n ใด ๆ

3.5.1 อนุพันธ์ของเวกเตอร์ที่มีความยาวเป็นค่าคงตัว (Derivatives of Vectors of Constant Length)

การหาอนุพันธ์เอกลักษณ์

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}||\vec{V}| \cos 0^\circ = |\vec{V}|^2 \qquad \text{..........(3.5.7)}$$

ในกรณีที่ $\vec{V}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นค่าคงตัว แล้ว $|\vec{V}|^2$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้นอนุพันธ์เป็นศูนย์ หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ (3.5.7) โดยเทียบกับ t จะได้

$$\frac{d}{dt}(\vec{V} \cdot \vec{V}) = \frac{d}{dt}|\vec{V}|^2$$

นั่นคือ

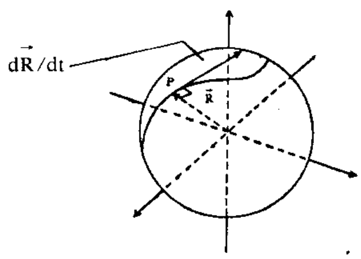
$$\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot V = 0$$

เมื่อผลคูณเชิงสเกลาร์สลับที่ได้ ดังนั้น

$$2\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \qquad \text{..........(3.5.8)}$$

หมายความว่า $\vec{V}$ เป็นศูนย์หรือ $d\vec{V}/dt$ เป็นศูนย์ (เมื่อ V มีทิศทางและขนาด เป็นค่าคงตัว) หรือ $d\vec{V}/dt$ ตั้งฉากกับ $\vec{V}$

ตัวอย่าง 3.5.1.1 สมมุติว่าจุด P เคลื่อนที่ไปบนพื้นผิวของทรงกลม แล้วขนาดของเวกเตอร์ $\vec{R}$ จากจุดศูนย์กลางไปยังจุด P เป็นค่าคงตัวเท่ากับรัศมีของทรงกลม เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ความเร็ว $d\vec{R}/dt$ ตั้งฉากกับ $\vec{R}$ เสมอ (รูป 3.5.1.1)



รูป 3.5.1.1 เวกเตอร์ความเร็วของอนุภาค P ที่เคลื่อนที่บนพื้นผิวของทรงกลมสัมผัสกับทรงกลม

สามารถใช้เหตุผลนี้แสดงว่าอนุพันธ์ของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{T}$ เป็นเชิงตั้งฉากกับ (orthogonal) กับ $\vec{T}$ เพราะว่า $|\vec{T}| = 1$ จะได้

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$$

ดังนั้น ด้วยเหตุผลเดียวกันที่ใช้จาก (3.5.7) ไปยัง (3.5.8) จะได้ว่า

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

นับเป็นความเที่ยงตรงของการกล่าวแต่แรกว่า $d\vec{T}/ds$ ตั้งฉากกับ $\vec{T}$ ดังนั้นนิยาม

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{N}k \qquad \text{..........(3.5.9)}$$

ดังกำหนดให้ในสมการ (3.4.3.5) หัวข้อ 3.4 ด้วย $k = |d\vec{T}/ds|$ ทำให้เวกเตอร์ $\vec{N}$ สัมพันธ์กับ $\vec{T}$ ในเชิงตั้งฉาก (orthogonal)

3.5.2 ส่วนประกอบสัมผัสและปรกติของเวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์ความเร่ง

(Tangential and Normal Component of the Velocity and Acceleration Vectors.)

ในทางกลศาสตร์จะมีประโยชน์มากถ้าสามารถศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาค P ในพจน์ของความเร็วชั่วขณะ ds/dt ความเร่งตามวิถี (path) นี้ d^2s/dt^2 และความโค้งของวิถี จะเป็นการง่ายขึ้นถ้าจะได้อ้างถึงเวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์ความเร่งกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{T}$ และ $\vec{N}$

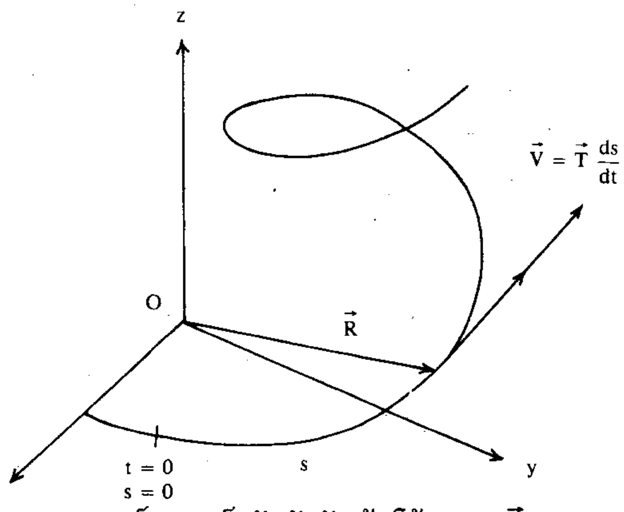
ในหัวข้อ 3.2 พบว่า เวกเตอร์ความเร็วกำหนดโดย

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \text{..........(3.5.2.1)}$$

เมื่อ $\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่ง $\overrightarrow{OP}$ อาจจะเขียนเวกเตอร์นี้ในรูปแบบ

หรือ $$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{ds}\,\frac{ds}{dt} \qquad \text{..........(3.5.2.2)}$$

ถ้าใช้ผลของสมการ (3.3.1.5) หัวข้อ 3.3 ซึ่งเป็นข้อสังเกตแต่แรกว่าเวกเตอร์ความเร็วสัมผัสกับเส้นโค้งและมีขนาด $|\vec{v}| = |ds/dt|$ ดังรูป 3.5.2.1



รูป 3.5.2.1 เวกเตอร์ความเร็วสัมผัสกับเส้นโค้งและ $|\vec{v}| = ds/dt$

เพื่อที่จะได้เวกเตอร์ความเร่ง โดยการหาอนุพันธ์สมการ (3.5.2.2) โดยเทียบกับ t

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{T}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{ds}{dt} \qquad \text{..........(3.5.2.3)}$$

โดยสมการ (3.5.9)

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{N}k\,\frac{ds}{dt}$$

ดังนั้น

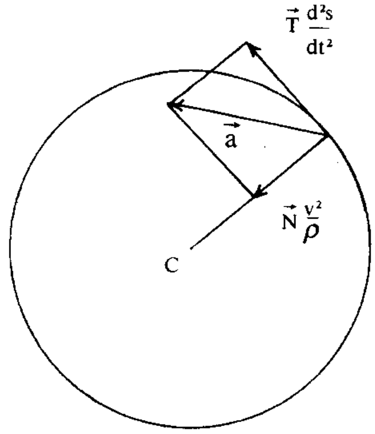
$$\vec{a} = \vec{T}\frac{d^2s}{dt^2} + \vec{N}k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \qquad \text{..........(3.5.2.3)}$$

สมการ (3.5.2.3) แสดงเวกเตอร์อัตราเร่งในพจน์ของส่วนประกอบสัมผัสและส่วนประกอบปรกติ ส่วนประกอบสัมผัส $a_T = d^2s/dt^2$ เป็นอนุพันธ์ของความเร็ว ds/dt ของอนุภาคในวิถี ส่วนประกอบปรกติ $a_N = k\,(ds/dt)^2$ มีทิศทางมุ่งไปสู่ด้านเว้าของเส้นโค้งและมีขนาด

$$a_N = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{(ds/dt)^2}{\varrho} = \frac{v^2}{\varrho}$$

เมื่อ v เป็นความเร็วชั่วขณะของอนุภาค และ ϱ เป็นรัศมีของความโค้งของวิถี

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร็วเป็นค่าคงตัว v^2/p มุ่งสู่จุดศูนย์กลางของวงกลม และความเร่งเป็นเพียงความเร่งปกติ v^2/ϱ มุ่งสู่จุดศูนย์กลางของวงกลมถ้าความเร็วไม่คงที่เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}$ ก็จะเป็นผลจากส่วนประกอบสัมผัสและปรกติ ดังรูป 3.5.2.1



รูป 3.5.2.1 ส่วนประกอบสัมผัสและปรกติของเวกเตอร์อัตราเร่ง

จากรูป 3.5.2.1 จะเห็นได้ว่า สมการ

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_T^2 + a_N^2 \qquad \text{..........(3.5.2.4)}$$

ใช้ในการกำหนดส่วนประกอบปรกติของความเร่ง

$$a_N = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_T^2} \qquad \text{..........(3.5.2.5)}$$

จะสังเกตได้ว่า สมการ (3.5.2.5) นั้น สามารถหา a_N ได้ โดยไม่ต้องหา k ก่อน

ตัวอย่าง 3.5.2.1 พิกัดของการเคลื่อนของอนุภาคที่เวลา t กำหนดโดย

$x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t$

จงหาเวกเตอร์ความเร็ว และเวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร็ว ds/dt และส่วนประกอบสัมผัสและปรกติของอัตราเร่ง

วิธีทำ

$$\vec{v} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt}$$

$$= \vec{i}\,[-\sin t + t\cos t + \sin t] + \vec{j}\,[\cos t + t\sin t - \cos t]$$

$$= \vec{i}\,t\cos t + \vec{j}\,t\sin t$$

และ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\,[-t\sin t + \cos t] + \vec{j}\,[t\cos t + \sin t]$$

ส่วนประกอบสัมผัสของเวกเตอร์ความเร็ว คือ

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{v}| = \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2} = t$$

และส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร่ง คือ

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(t) = 1$$

ใช้สมการ (3.5.2.5) หาส่วนประกอบปรกติของความเร่ง

$$a_N = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{(-t\sin t + \cos t)^2 + (t\cos t + \sin t)^2 - 1} = t$$

จะเห็นได้ว่าความเร่งสัมผัสมีขนาดเป็นค่าคงตัวและความเร่งปรกติเริ่มต้นด้วยขนาดศูนย์ ที่ $t = 0$ และเพิ่มขึ้นด้วยเวลา

สมการ (3.5.2.2) และ (3.5.2.3) สามารถที่จะใช้ในการหาสูตรสำหรับความโค้ง k ในเทอมของความเร็วและความเร่ง โดยเริ่มต้นด้วยการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์ความเร่ง จะได้

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{T}\frac{ds}{dt} \times \left[\vec{T}\frac{d^2s}{dt^2} + \vec{N}k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \vec{T} \times \vec{N}k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \qquad \text{..........(3.5.2.6)}$$

เพราะสามารถประยุกต์กฎการกระจายสำหรับผลคูณเชิงเวกเตอร์ และ $\vec{T} \times \vec{T} = \vec{O}$ ยิ่งไปกว่านั้น $\vec{T} \times \vec{N}$ เป็นเวกเตอร์คู่แนวฉากหนึ่งหน่วย $\vec{B}$ ดังกำหนดโดยสมการ (3.4.3.11) ในหัวข้อ 3.4 เพราะฉะนั้น

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{B}k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \qquad \text{..........(3.5.2.7)}$$

เมื่อ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ขนาดของ $\vec{v} \times \vec{a}$ คือ

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = k\left|\frac{ds}{dt}\right|^3 = k|\vec{v}|^3$$

ในที่สุด ถ้า $|v| \neq 0$ จะได้ (โดยการหาร)

$$k = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} \qquad \text{..........(3.5.2.8)}$$

จะใช้สมการนี้อย่างไร เมื่อกำหนดการเคลื่อนที่ในรูป $\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ ก็หาอนุพันธ์โดยเทียบกับเวลาจะได้ $\vec{v}$ แล้วหาอนุพันธ์อีกจะได้ $\vec{a}$ คำนวณ $\vec{v} \times \vec{a}$ โดยใช้ตัวกำหนดของอันดับ 3 ในรูปของผลคูณเชิงเวกเตอร์ แล้วหารด้วยความยาวของเวกเตอร์นี้ยกกำลังสาม ซึ่งคือความยาวของ $\vec{v}$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.5.2.2 จงใช้สมการ (3.5.2.8) หาความโค้งของเส้นโค้งของตัวอย่าง 3.5.2.1

วิธีทำ เมื่อเวกเตอร์ความเร่ง คือ

$$\vec{v} = \vec{i}\, t\cos t + \vec{j}\, t\sin t$$

และอัตราเร่ง คือ

$$\vec{a} = \vec{i}(-t\sin t + \cos t) + \vec{j}(t\cos t + \sin t)$$

เพราะฉะนั้น

$$\vec{V} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ t\cos t & t\sin t & 0 \\ (-t\sin t + \cos t) & (t\cos t + \sin t) & 0 \end{vmatrix} \quad ;$$

นำไปสู่

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{k}(t^2\cos^2 t + t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t - t\sin t\cos t)$$

$$= \vec{k}t^2$$

และ

$$\kappa = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v}|^3} = \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t}$$

ผลลัพธ์นี้เที่ยงตรงสำหรับ $t > 0$ ถ้าเส้นโค้งและการเคลื่อนที่มีอยู่สำหรับ $t < 0$ สมควรจะแทนที่ t ด้วย $|t|$ สำหรับ $t < 0$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{d}{dt}(\vec{U}\cdot\vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt}\cdot\vec{V} + \vec{U}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}$$

โดยกระบวนการของ Δ

2. จงประยุกต์ $\frac{d}{dt}(\vec{U}\cdot\vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt}\cdot\vec{V} + \vec{U}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}$ และ $\frac{d}{dt}(\vec{U}\times\vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt}\times\vec{V} + \vec{U}\times\frac{d\vec{V}}{dt}$ กับ $\vec{U}\cdot\vec{V}_1$ ด้วย $\vec{V}_1 = \vec{V}\times\vec{W}$ และจงพิสูจน์ว่า

$$\frac{d}{dt}(\vec{U}\cdot\vec{V}\times\vec{W}) = \frac{d\vec{U}}{dt}\cdot V\times W + \vec{U}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}\times\vec{W} + \vec{U}\cdot\vec{V}\times\frac{d\vec{W}}{dt}$$

3. ถ้า $\vec{F}(t) = \vec{i}f(t) + \vec{j}g(t) + \vec{k}h(t)$ เมื่อ f, g และ h เป็นฟังก์ชันของ t ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สอง และสาม จงแสดงว่า

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{F}\cdot\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\times\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}\right)\right] = \vec{F}\cdot\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\times\frac{d^3\vec{F}}{dt^3}\right)$$

และจงอธิบายด้วยว่าทำไมคำตอบจึงมีเทอมเดียวแทนที่จะมีสามเทอม

4. จงหาเวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์ความเร่งในพจน์ของส่วนประกอบสัมผัสและปรกติ

ข้อ 5 ถึง 7 จงหาเวกเตอร์ความเร็ว และเวกเตอร์ความเร่ง และหาอัตราเร็ว ds/dt และส่วนประกอบสัมผัสและปรกติของเวกเตอร์ความเร่ง

5. $\vec{R} = \vec{i}\cosh 2t + \vec{j}\sinh 2t$
6. $\vec{R} = (a\cos\omega t)\vec{i} + (a\sin\omega t)\,5)\,\vec{j}$, a และ ω เป็นค่าคงตัวบวก
7. $\vec{R} = \vec{i}e^t\cos t + \vec{j}e^t\sin t$
8. จงแสดงว่ารัศมีของความโค้งของเส้นโค้งในระนาบถูกกำหนดโดย

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - \ddot{s}^2}}$$

เมื่อ

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},\quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ldots$$

และ

$$\ddot{s} = \frac{d}{dt}(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

9. ถ้าแรงกระทำกับอนุภาคตั้งฉากกับทิศทางในการเคลื่อนที่ตลอดเวลา จงแสดงว่าความเร็วจะต้องคงที่

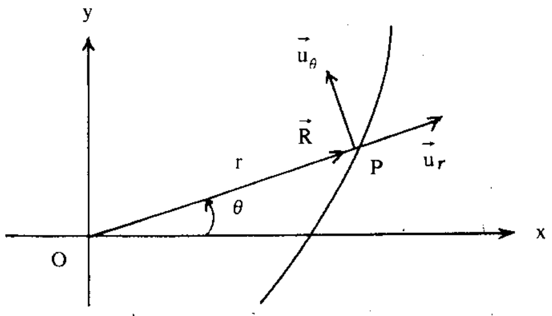
3.6 พิกัดเชิงขั้ว

(Polar Coordinates)

เมื่ออนุภาค P เคลื่อนที่ไปบนเส้นโค้ง ซึ่งสมการกำหนดในรูปพิกัดเชิงขั้ว จะเป็นความสะดวกที่จะแสดงเวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์ความเร่งในพจน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\vec{u}_r = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta,\ \vec{u}_\theta = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta \qquad \text{..........(3.6.1)}$$

เวกเตอร์ $\vec{u}_r$ ชี้ไปตามเวกเตอร์รัศมี $\overrightarrow{OP}$ และ $\vec{u}_\theta$ ชี้ที่มุมฉากกับ $\overrightarrow{OP}$ และในทิศทางเพิ่มขึ้น θ ดังแสดงในรูป 3.6.1



รูป 3.6.1 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}_r$ และ $\vec{u}_\theta$

จาก (3.6.1) พบว่า

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{i}\cos\theta - \vec{j}\sin\theta = -\vec{u}_r \qquad \text{..........(3.6.2)}$$

กล่าวได้ว่า อนุพันธ์ u_r หรือ u_θ โดยเทียบกับ θ สมมูลกับการหมุนเวกเตอร์นั้น 90° ทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อเวกเตอร์ $\vec{R} = \overrightarrow{OP}$ และ $r\vec{u}_r$ มีทิศทางเดียวกัน และความยาวของ $\vec{R}$ เป็นค่าสัมบูรณ์ของพิกัดเชิงขั้ว r ของ $P(r, \theta)$ จึงได้ว่า

$$\vec{R} = r\vec{u}_r \qquad \text{..........(3.6.3)}$$

หาอนุพันธ์สมการนี้เทียบกับ t จะได้ความเร็ว แต่ทั้ง r และ u_r อาจแปรผันได้จากสมการ (3.6.2) และกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{du_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = u_\theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{du_\theta}{dt} = \frac{du_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\vec{u}_r \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{..........(3.6.4)}$$

ดังนั้น

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{u}_r \frac{dr}{dt} + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

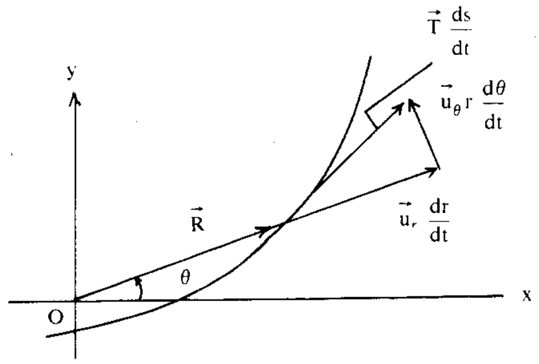
กลายเป็น

$$\vec{v} = \vec{u}_r \frac{dr}{dt} + \vec{u}_\theta r \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{..........(3.6.5)}$$

เวกเตอร์ความเร็วนี้สัมผัสกับเส้นโค้งที่ P และมีขนาดเป็น

$$|\vec{v}| = \sqrt{(dr/dt)^2 + r^2(d\theta/dt)^2} = |ds/dt|$$

ถ้าสามด้านของ "สามเหลี่ยมเชิงอนุพันธ์" (differential triangle) มีด้านเป็น dr, $rd\theta$ และ ds ทุกด้านหารด้วย dt ดังรูป 3.6.2



รูป 3.6.2 $\vec{u}_r \frac{dr}{dt} + \vec{u}_\theta r \frac{d\theta}{dt}$ *เป็นเวกเตอร์ความเร็ว*

นั่นคือ แต่ละด้านของสามเหลี่ยมมีความยาว dr/dt, $rd\theta/dt$, และ ds/dt มีเวกเตอร์ความเร็วเป็น

$$\vec{v} = \vec{T}\frac{ds}{dt} = \vec{u}_r \frac{dr}{dt} + \vec{u}_\theta r \frac{d\theta}{dt}$$

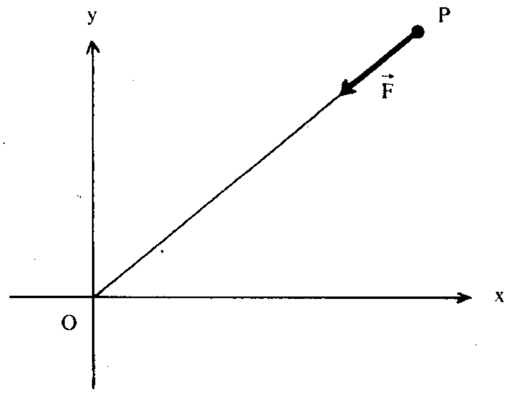
เวกเตอร์ความเร่งหาได้โดยการหาอนุพันธ์เวกเตอร์ความเร็วใน (3.6.5) ดังนี้

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\vec{u}_r \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{du_r}{dt}\frac{dr}{dt}\right) + \left(\vec{u}_\theta r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \vec{u}_\theta \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{du_\theta}{dt} r \frac{d\theta}{dt}\right.$$

อาศัยสมการ (3.6.4) จะได้

$$\vec{a} = \vec{u}_r\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \vec{u}_\theta\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right] \qquad \text{..........(3.6.6)}$$

รูปแบบเชิงขั้วเหมาะสำหรับการศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เรียกว่า "ศูนย์ร่วมสนามแรง" (central force field) หมายความว่า แรงกระทำต่ออนุภาคมุ่งสู่จุดเดียวซึ่งเป็นศูนย์กลางของแรง ซึ่งจะเลือกที่จุดกำเนิด ดังรูป 3.6.1



รูป 3.6.1 F *เป็นศูนย์ร่วมของแรง ถ้ามุ่งสู่จุดคงที่ (จุดกำเนิด) ไม่ว่า* P *จะเคลื่อนที่อย่างไร*

แล้วจาก $\vec{F} = m\vec{a}$ จะพบว่า ส่วนประกอบของอัตราเร่ง $\vec{u}_\theta$ ต้องเป็นศูนย์ นั่นก็คือ ศูนย์ร่วมสนามแรงใด ๆ

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \text{..........(3.6.7)}$$

เมื่อจุดกำเนิดเป็นศูนย์กลางของแรง (center of force) (ตัวอย่างเช่น ดวงอาทิตย์ถูกเลือกเสมือนจุดกำเนิด กับการดึงดูดแห่งความโน้มถ่วงระหว่างดวงอาทิตย์และดาวพระเคราะห์) ในการอินทิเกรต (3.6.7) ให้

$$u = \frac{d\theta}{dt}$$

แล้ว

$$r\frac{du}{dt} + 2u\frac{dr}{dt} = 0$$

หรือ

$$r\,du = -2u\,dr, \quad \frac{du}{u} = -2\frac{dr}{r}$$

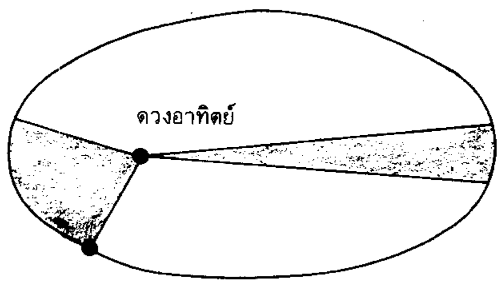
$$\ln|u| = -2\ln|r| + c_1,$$

$$\ln|ur^2| = c_1, \quad |ur^2| = e^{c_1} = C$$

หรือ

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \pm C \qquad \text{..........(3.6.8)}$$

ทางด้านซ้ายของสมการนี้คือ 2dA/dt เมื่อ $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ เป็นพื้นที่ที่กวาดด้วยเวกเตอร์รัศมี $\overrightarrow{OP}$ หมุนผ่านมุมเล็ก ๆ $d\theta$ ดังนั้น สมการ (3.6.8) กล่าวได้ว่า เวกเตอร์รัศมีกวาดเหนือพื้นที่ด้วยอัตราเป็นค่าคงตัวในศูนย์ร่วมสนามแรง กฎของ Kepler ข้อที่สอง ของการเคลื่อนที่ของดาวพระเคราะห์เป็นความจริงที่ว่า สนามของการดึงดูดแห่งความโน้มถ่วงของดวงอาทิตย์ สำหรับดาวพระเคราะห์เป็นศูนย์ร่วมสนามแรง ดังรูป 3.6.3



รูป 3.6.3 เส้นเชื่อมดาวพระเคราะห์กับดวงอาทิตย์กวาดเหนือพื้นที่เท่ากัน ในเวลาเท่ากัน

แบบฝึกหัด 3.6

ข้อ 1 ถึง 5 จงหาเวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์ความเร่งในพจน์ของ u_r และ u_θ

1. $r = a(1 - \cos\theta)$ และ $\dfrac{d\theta}{dt} = 3$

2. $r = a\sin 2\theta$ และ $\dfrac{d\theta}{dt} = 2t$

3. $r = e^{a\theta}$ และ $\dfrac{d\theta}{dt} = 2$

4. $r = a(1 + \sin t)$ และ $\theta = 1 - e^{-t}$

5. $r = 2\cos 4t$ และ $\theta = 2t$