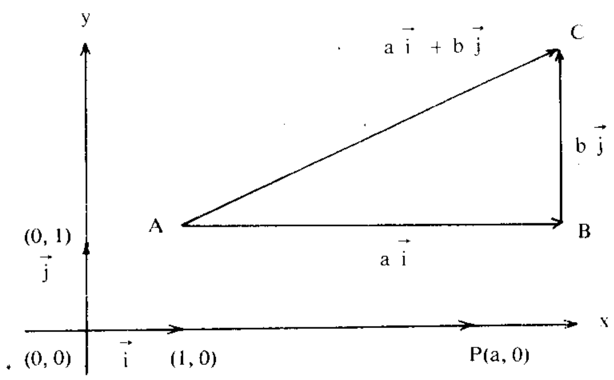
บทที่ 2
เวกเตอร์และสมการอิงตัวแปรเสริม
(Vectors and Paramatric Equations)

2.1 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i}$ และ $\vec{j}$
(Vector Component and the Unit Vectors $\vec{i}$ and $\vec{j}$

บางปริมาณทางฟิสิกส์ เช่น ความยาวและมวล เป็นการกำหนดอย่างสมบูรณ์ เมื่อขนาดได้ถูกกำหนดให้ในพจน์ของหน่วยที่แน่นอน ปริมาณดังกล่าวเรียก สเกลาร์ (scalars) ปริมาณอื่น เช่น แรง ความเร็ว ทั้งทิศทางและขนาดต่างก็มีความสำคัญ เรียกปริมาณนี้ว่า เวกเตอร์ โดยทั่วไปแทนเวกเตอร์ด้วยเส้นจำกัดระบุทิศทาง (directed line segment) ซึ่งทิศทางนี้แทนทิศทางของเวกเตอร์ และความยาวในพจน์ของหน่วยวัดแทนขนาดของเวกเตอร์

พีชคณิตของเวกเตอร์ขึ้นอยู่กับการแทนแต่ละเวกเตอร์ในพจน์ของส่วนประกอบที่ขนานกับแกนระบบพิกัดฉาก จะใช้หน่วยความยาวเดียวกันบนทั้งสองแกนของเวกเตอร์ในระนาบ สำหรับ เวกเตอร์ยาวหนึ่งหน่วยตามแกน x เลือกเวกเตอร์ $\vec{i}$ จากจุด (0, 0) ไปยัง (1, 0) ตามแกน y เลือกเวกเตอร์ $\vec{j}$ จาก (0, 0) ไปยัง (0, 1) ดังรูป 2.1.1



รูป 2.1.1 เวกเตอร์ $\overrightarrow{AC}$ แสดงด้วยผลคูณของ $\vec{i}$ บวกผลคูณของ $\vec{j}$

แล้ว $a\vec{i}$ มี a เป็นสเกลาร์ แทนเวกเตอร์ขนานแกน x มีขนาด $|a|$ และชี้ในทิศทางทางขวาถ้า a เป็นบวก และชี้ทางซ้ายถ้า a เป็นลบ ในทำนองเดียวกัน $b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ขนานแกน y มีทิศทางเดียวกับ $\vec{j}$ ถ้า b เป็นบวกหรือมีทิศทางตรงข้ามถ้า b เป็นลบ

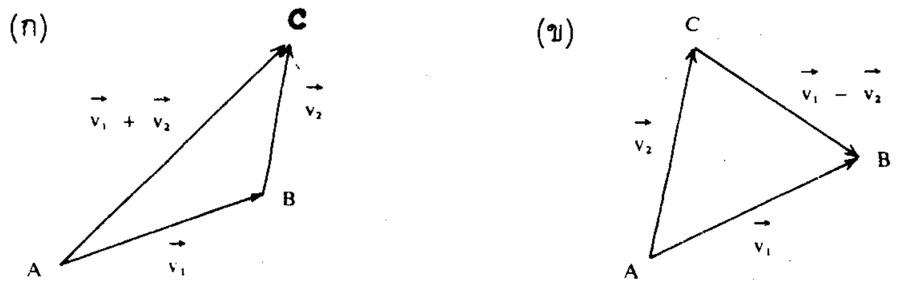
ปรกติในเชิงเวกเตอร์จะต้องพบกับเวกเตอร์อิสระ (free vectors) หมายความว่า เวกเตอร์มีอิสระในการเคลื่อนที่ภายใต้การเปลี่ยนที่ ที่ขนานกับตำแหน่งเดิม จึงกล่าวได้ว่า เวกเตอร์สองเวกเตอร์เท่ากัน ถ้ามีทิศทางและขนาดเดียวกัน เงื่อนไขนี้แสดงในทางพีชคณิตดังนี้

$$a\vec{i} + b\vec{j} = a'\vec{i} + b'\vec{j} \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = a' \text{ และ } b = b'$$

นั่นคือ สองเวกเตอร์เท่ากันก็ต่อเมื่อส่วนประกอบ (component) ของเวกเตอร์ทั้งสองที่สมนัยกันเท่ากัน ดังนั้น รูป 2.1.1 เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และเวกเตอร์จาก (0, 0) ไปยัง (a, 0) ต่างก็เท่ากับ $a\vec{i}$

การบวก (Addition)

สองเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ บวกกัน กระทำได้โดยสร้างเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ จากจุด A ใด ๆ ไปยังจุด B ดังรูป 2.1.2 (ก) แล้วให้เวกเตอร์เท่ากับ $\vec{v}_2$ โดยเริ่มจากจุดปลายของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ นั่นคือ $\vec{v}_2 = \overrightarrow{BC}$ ผลบวก $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ คือเวกเตอร์ซึ่งเริ่มต้นจาก A ของ $\vec{v}_1$ ไปสิ้นสุดลงที่จุดปลาย C ของ $\vec{v}_2$



รูป 2.1.2 ผลบวก (ก) และผลต่าง (ข) ของสองเวกเตอร์

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} \ , \ \vec{v}_2 = \overrightarrow{BC}$$
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ถ้าประยุกต์หลักการนี้เข้ากับเวกเตอร์ $a\vec{i}$ และ $b\vec{j}$ ในรูป 2.1.1 จะพบว่า $a\vec{i} + b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้านประกอบมุมฉากเป็น $a\vec{i}$ และ $b\vec{j}$ ตามลำดับ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ กำหนดให้ในพจน์ของส่วนประกอบ

$$\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j},$$
$$\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$$

แล้ว

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j} \quad \text{..........(2.1.1)}$$

การลบ (Subtraction)

การลบเวกเตอร์ $\vec{v}_2$ จากเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ ในทางเรขาคณิตกระทำได้โดยสร้างเวกเตอร์ทั้งสองให้เริ่มต้นที่จุดเดียวกัน แล้วลากเวกเตอร์จากจุดปลายของ $\vec{v}_2$ ไปยังจุดปลายของ $\vec{v}_1$ ดังนั้นในรูป 2.1.2 (ข) จะได้ว่า

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB}, \ \vec{v}_2 = \overrightarrow{AC}$$

และ

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

ในพจน์ของส่วนประกอบ การลบเวกเตอร์เป็นไปตามกฎทางพีชคณิต

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (a_1 - a_2)\vec{i} + (b_1 - b_2)\vec{j} \quad \text{..........(2.1.2)}$$

กล่าวได้ว่าส่วนประกอบที่สมนัยลบกัน

ความยาวของเวกเตอร์ (Length of a Vector)

ความยาวของเวกเตอร์ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ปรกติเขียนแทนด้วย $|\vec{v}|$ อ่านว่า ขนาดของ $\vec{v}$ รูป 2.1.1 แสดง $\vec{v}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว $|a|$ และ $|b|$ ดังนั้นจึงสามารถประยุกต์ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส ได้ดังนี้

$$|\vec{v}| = |a\vec{i} + b\vec{j}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

การคูณโดยสเกลาร์ (Multiplication by Scalars)

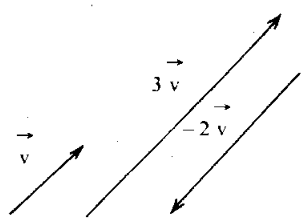
การดำเนินการเชิงพีชคณิตของการคูณเวกเตอร์ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ด้วยสเกลาร์ c จะได้

$$c(a\vec{i} + b\vec{j}) = (ca)\vec{i} + (cb)\vec{j}$$

ในเชิงเรขาคณิต $c\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีความยาว $|c|$ เท่าของความยาวของ $\vec{v}$

$$|c\vec{v}| = |(ca)\vec{i} + (cb)\vec{j}| = \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} = |c|\sqrt{a^2 + b^2} = |c|\,|\vec{v}| \quad \text{..........(2.1.3)}$$

ทิศทางของ $c\vec{v}$ ไปทางเดียวกันกับ $\vec{v}$ ถ้า c เป็นบวก และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{v}$ ถ้า c เป็นลบ ดังรูป 2.1.3 ถ้า $c = 0$ เวกเตอร์ $c\vec{v}$ ไม่มีทิศทาง



รูป 2.1.3 การคูณของ $\vec{v}$ ด้วยสเกลาร์

เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector)

เวกเตอร์ใด ๆ ซึ่งความยาวเป็นศูนย์เรียก เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}$ เวกเตอร์ $a\vec{i} + b\vec{j} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = b = 0$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

เวกเตอร์ $\vec{u}$ ใด ๆ ซึ่งความยาวเท่ากับหนึ่งหน่วยและขนานกับแกนพิกัดจะเรียกเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้จากการหมุน $\vec{i}$ ผ่านมุม θ ในทิศทางบวก ดังรูป 2.1.4 แล้ว $\vec{u}$ มีส่วนประกอบในแนวระดับเป็น

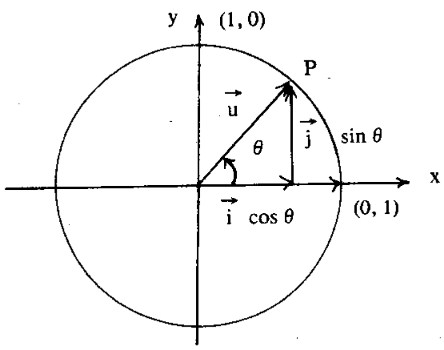
$$u_x = \cos\theta$$

และในแนวดิ่งเป็น

$$u_y = \sin\theta$$

ดังนั้น

$$\vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta \qquad \text{..........(2.1.4)}$$



รูป 2.1.4 $\vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$

ถ้าให้มุม θ ในสมการ (2.1.4) แปรเปลี่ยนจาก 0 ถึง 2π แล้วจุด p จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ในการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเวกเตอร์ $\vec{v}$ ที่กำหนดให้ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จะหาได้โดยหาร $\vec{v}$ ด้วยความยาวของ $\vec{v}$ คือ $|\vec{v}|$ จำนวนนี้เป็นการคูณ $\vec{v}$ ด้วยสเกลาร์ $1/|\vec{v}|$ ผลลัพธ์มีความยาว 1 เพราะว่า

$$\left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}\,|\vec{v}| = 1 \qquad \text{..........(2.1.5)}$$

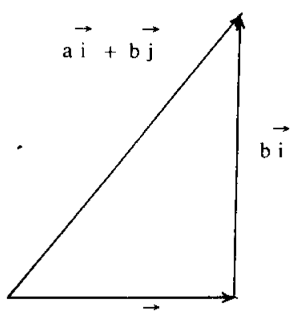
เวกเตอร์สองเวกเตอร์กล่าวได้ว่า ขนานกันถ้าเส้นจำกัดที่แทนเวกเตอร์ทั้งสองขนานกันในทำนองเดียวกัน เวกเตอร์ขนานกับเส้นตรง ถ้าเส้นจำกัดที่แทนเวกเตอร์ขนานกับเส้นตรงนั้น เมื่อพูดถึงเวกเตอร์สัมผัสหรือปรกติกับเส้นโค้งที่จุด ๆ หนึ่ง หมายความว่า เวกเตอร์ขนานกับเส้นตรงที่สัมผัสหรือปรกติกับเส้นโค้งที่จุดนั้น

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสและปรกติกับเส้นโค้ง $y = (x^3/2) + \frac{1}{2}$ ที่จุด (1, 1)

วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 1) คือ

$$y' = \frac{3x^2}{2}\bigg|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

พยายามหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีความชันเท่ากับ $\frac{3}{2}$ เวกเตอร์ $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ มีความชัน $\frac{3}{2}$ ดังรูป 2.1.5



รูป 2.1.5 ถ้า $a \neq 0$ เวกเตอร์ $a\vec{i} + b\vec{j}$ *มีความชัน* b/a

ความยาวของ $\vec{v}$ คือ

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ต้องการคือ

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

เวกเตอร์ $\vec{u}$ สัมผัสเส้นโค้งที่ (1, 1) เพราะว่ามีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ อย่างไรก็ตามเวกเตอร์

$$-\vec{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

ซึ่งชี้ในทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ ก็สัมผัสกับเส้นโค้งที่ (1, 1) ด้วย

ในการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปรกติกับเส้นโค้งที่ (1, 1) นั้น จะต้องหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งความชันเป็นลบส่วนกลับของความชันของ $\vec{u}$ จะทำได้อย่างรวดเร็วโดยสับเปลี่ยนส่วนประกอบของ $\vec{u}$ และเปลี่ยนเครื่องหมายตัวหนึ่งของสองตัวนั้น จะได้

$$\vec{n} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j} \quad \text{และ} \quad -\vec{n} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

แบบฝึกหัด 2.1

ข้อ 1 ถึง 4 จงแสดงแต่ละเวกเตอร์ในรูป $a\vec{i} + b\vec{j}$ พร้อมทั้งเขียนภาพด้วย

1. $\overrightarrow{p_1p_2}$ ถ้า p_1 คือ จุด (1, 3) และ p_2 คือจุด (2, − 1)
2. เวกเตอร์จากจุด A(2, 3) ไปยังจุดกำเนิด
3. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ทำมุม 30° ทางบวกของแกน x
4. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $3\vec{i} - 4\vec{j}$

ข้อ 5 ถึง 7 จงหาความยาวของแต่ละเวกเตอร์ และมุมที่แต่ละเวกเตอร์กระทำกับแกน x ทางบวก

5. $\vec{i} + \vec{j}$
6. $\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$
7. $5\vec{i} + 12\vec{j}$
8. จงใช้เวกเตอร์แสดงว่า เส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน (ให้ A เป็นจุดยอดจุดหนึ่ง และให้ M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุม แล้วแสดงว่า $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$)

2.2 สมการอิงตัวแปรเสริมในจลนคณิตศาสตร์

(Parametric Equations in Kinematics)

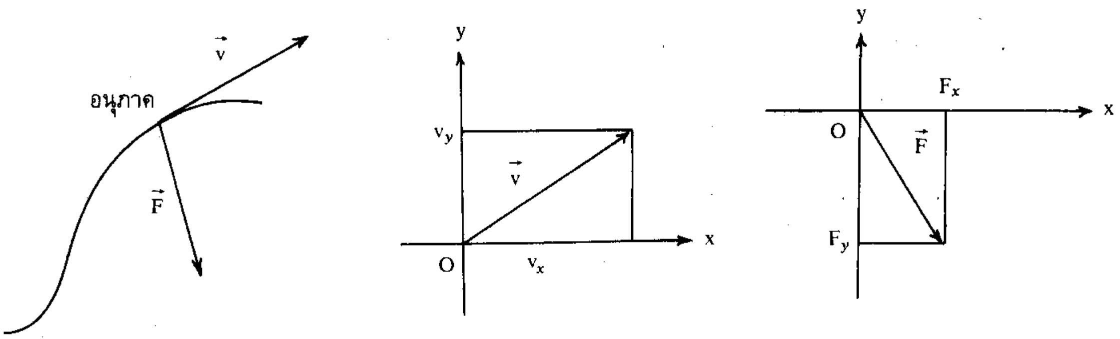
ในกลศาสตร์ของนิวตัน การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบตามปรกติ อธิบายโดยคู่หนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$F_x \quad \frac{d\,(mv_x)}{dt}, F_y \;=\; \frac{d\,(mv_y)}{dt} \qquad \text{..........(2.2.1)}$$

ที่แสดงกฎข้อที่สองของการเคลื่อนที่ของนิวตัน

$$\vec{F} \;=\; \frac{d\,(m\vec{v})}{dt} \qquad \text{..........(2.2.2)}$$

ในรูปอิงตัวแปรเสริม $\vec{F}$ เป็นเวกเตอร์แทนแรงกระทำบนอนุภาคมวล m ที่เวลา t เวกเตอร์ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ความเร็วของอนุภาคที่เวลา t



แรงและเวกเตอร์ความเร็วของการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบจะมีรูปร่างเช่นนี้ในเวลา t ที่เจาะจง

ส่วนประกอบ v_x และ v_y ของ $\vec{v}$

ส่วนประกอบ F_x และ F_y ของ $\vec{F}$

รูป 2.2.1 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบ

ปริมาณ F_x และ F_y เป็นส่วนประกอบ x– และ y– ของ $\vec{F}$ ขณะที่ v_x และ v_y เป็นส่วนประกอบของ $\vec{v}$

ถ้าทราบตำแหน่งและความเร็วของอนุภาค ณ ขณะใดขณะหนึ่งแล้ว ตำแหน่งของอนุภาคในทุกขณะหลังจากนั้นสามารถหาได้ด้วยการอินทิเกรตโดยเทียบกับเวลา ค่าคงตัวของการอินทิเกรต หาได้จากเงื่อนไขเริ่มแรกที่กำหนดให้ ผลที่ได้ก็คือคู่ของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = f(t), y = g(t) \qquad \text{..........(2.2.3)}$$

ซึ่งสมการนี้จะให้พิกัด x และ y ของอนุภาคเป็นฟังก์ชันของ t

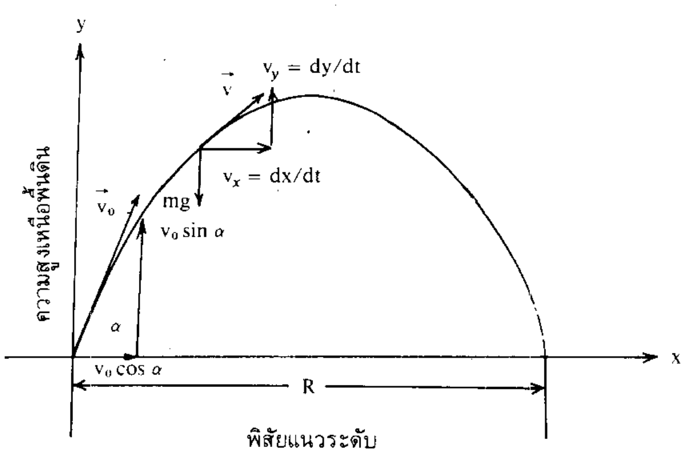
สมการ (2.2.3) ให้รายละเอียดในการเคลื่อนที่ของอนุภาคมากกว่าสมการคาร์ทีเซียน

$$y = F(x) \qquad \text{..........(2.2.4)}$$

ซึ่งได้จากสมการ (2.2.3) โดยการกำจัด t สมการอิงตัวแปรเสริมจะบอกได้ว่า อนุภาคไปที่ไหน และไปในที่ ๆ กำหนดให้เมื่อไร ขณะที่สมการคาร์ทีเซียนบอกแต่เพียงเส้นโค้งที่อนุภาคเคลื่อนที่เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.2.1 ยิงโปรเจคไทล์ (projectile) ด้วยความเร็วต้น v_0 ฟุต/วินาที ที่มุมยก α สมมุติว่าความโน้มถ่วง (gravity) เป็นแรงเดียวที่กระทำกับโปรเจคไทล์ จงหาการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์

วิธีทำ ให้โปรเจคไทล์เริ่มต้นการเคลื่อนที่ ที่จุดกำเนิด ดังรูป 2.2.2



รูป 2.2.2 โปรเจคไทล์เคลื่อนที่ตามพาราโบลา

ระยะการเดินทางของโปรเจคไทล์เหนือพื้นดินวัดตามแกน x และความสูงของโปรเจคไทล์เหนือพื้นดินวัดตามแกน y ที่เวลา t ใด ๆ ตำแหน่งของโปรเจคไทล์กำหนดโดย คู่พิกัด x (t), y (t) ที่สมมุติว่าเป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้ ถ้าวัดระยะทางด้วยฟุตและเวลาเป็นวินาทีด้วย $t = 0$ ในขณะที่ยิงโปรเจคไทล์ แล้วเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์เป็น

$$t = 0 \text{ วินาที} \qquad x = 0 \text{ ฟุต} \qquad y = 0 \text{ ฟุต}$$

$$v_x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \cos x \text{ ฟุต/วินาที} \quad v_y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = v_0 \sin x \text{ ฟุต/วินาที} \qquad \text{..........(2.2.5)}$$

ถ้าโปรเจคไทล์เดินทางไปเพียงสองสามไมล์ และไปไม่สูงนัก จะไม่ทำให้ตัวแบบคลาดเคลื่อนอย่างจริงจัง ที่แรงของความโน้มถ่วงด้วยเวกเตอร์ค่าคงตัว $\vec{F}$ ที่ชี้ตรงลงด้านล่าง ส่วนประกอบ x และ y ของแรงนั้นเป็น

$$F_x = 0 \text{ ปอนด์} \qquad F_y = -mg \text{ ปอนด์}$$

เมื่อ m เป็นมวลของโปรเจคไทล์ และ g เป็นอัตราเร่งของความโน้มถ่วงด้วยค่าเหล่านี้สำหรับ F_x และ F_y สมการ (2.2.1) กลายเป็น

$$0 = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -mg = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \text{..........(2.2.6)}$$

ในการแก้สมการทั้งสองสำหรับ x และ y โดยการอินทิเกรตแต่ละสมการสองครั้ง จะได้ค่าคงตัวของการอินทิเกรตสี่จำนวน ซึ่งอาจจะคำนวณโดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (2.2.5) จากสมการที่หนึ่งใน (2.2.6) ได้ว่า

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ ฟุต/วินาที}^2, \quad \frac{dx}{dt} = c_1 \text{ ฟุต/วินาที}, \quad x = c_1 t + c_2 \text{ ฟุต} \qquad \text{..........(2.2.7)}$$

และจากสมการที่สองใน (2.2.6)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \text{ ฟุต/วินาที}^2, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + c_3 \text{ ฟุต/วินาที}, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3 t + c_4 \qquad \text{.........(2.2.8)}$$

จากเงื่อนไขเริ่มแรก จะพบว่า

$$c_1 = v_0 \cos\alpha \text{ ฟุต/วินาที}, \; c_2 = 0 \text{ ฟุต}, \; c_3 = v_0 \sin\alpha \text{ ฟุต/วินาที}, \; c_4 = 0 \text{ ฟุต} \qquad \text{..........(2.2.9)}$$

ตำแหน่งของโปรเจคไทล์หลังจากยิงไปแล้ว t วินาที คือ

$$x = (v_0 \cos\alpha)\, t \text{ ฟุต}, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t \text{ ฟุต} \qquad \text{..........(2.2.10)}$$

สำหรับมุมยก α ที่กำหนดให้ และความเร็วต้นของกระสุน v_0 ที่กำหนดให้ ตำแหน่งของโปรเจคไทล์ที่เวลาใด ๆ อาจจะกำหนดจากสมการอิงตัวแปรเสริม (2.2.10) สมการเหล่านี้อาจจะใช้ตอบคำถามต่าง ๆ เช่น

1. โปรเจคไทล์ขึ้นไปสูงเท่าไร
2. โปรเจคไทล์ตกลงดินไกลเท่าไร และพิสัยแนวระดับแปรเปลี่ยนกับมุมยกอย่างไร
3. มุมยกจะต้องทำมุมเท่าไร จึงจะให้พิสัยสูงสุด

ประการแรก โปรเจคไทล์จะถึงจุดสูงสุดเมื่อ y– (แนวตั้ง) ของโปรเจคไทล์ หรือส่วนประกอบความเร็วเป็นศูนย์ นั่นคือ เมื่อ

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha = 0 \text{ ฟุต/วินาที}$$

หรือ

$$t = t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \text{ วินาที}$$

สำหรับค่าของ t นี้ ค่าของ y คือ

$$y_{max} = -\frac{1}{2} g (t_m)^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t_m = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \text{ ft}$$

ประการที่สอง ในการหา R จะต้องหาเวลาตั้งแต่เริ่มต้นของโปรเจคไทล์จนกระทั่งตกดิน นั่นก็คือจะต้องหาเวลาของ t สำหรับ $y = 0$ แล้วหาค่าของ x สำหรับค่าของ t นี้

$$y = t\left(-\frac{1}{2} gt + v_0 \sin\alpha\right) = 0 \text{ ฟุต}$$

เมื่อ

$$t = 0 \quad \text{หรือ} \quad t = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = 2\, t_m \text{ sec.}$$

เมื่อ $t = 0$ เป็นขณะที่ยิงโปรเคไทล์ $t = 2\,t_m$ เป็นเวลาเมื่อโปรเจคไทล์ตกพื้นดิน ค่าของ x ที่สมนัย คือ

$$R = (v_0 \cos\alpha)(2\,t_m) = v_0 \cos\alpha \,\frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \text{ ฟุต}$$

ประการสุดท้าย สูตรที่กำหนดให้สำหรับ R แสดงพิสัยสูงสุด สำหรับความเร็วต้นของกระสุนที่กำหนดให้ จะได้เมื่อ $\sin 2\alpha = 1$ หรือ $\alpha = 45^\circ$

สมการคาร์ทีเซียนของวิถีของโปรเจคไทล์ได้รับจาก (2.2.10) ต้องการเพียงแทน

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

แทนสมการแรกลงในสมการที่สองของ (2.2.10) เพื่อกำจัด t จะได้

$$y = -\left(\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) x^2 + (\tan \alpha) x \qquad \text{..........(2.2.11)}$$

เมื่อสมการนี้เป็นเชิงเส้นใน y และกำลังสองใน x ซึ่งแทนพาราโบลา ดังนั้นวิถีของโปรเจคไทล์ (ไม่คิดความต้านทานของอากาศ) เป็นพาราโบลา

แบบฝึกหัด 2.2

ข้อ 1,2 ให้ถือว่าโปรเจคไทล์ เป็นไปตามกฎที่ได้อธิบายข้างต้น และไม่มีการเสียดทานของอากาศเข้ามาเกี่ยวข้อง

1. จงหาค่ามุมยกสองมุมที่ทำให้ โปรเจคไทล์ ถึงเป้าหมายเดียวกัน ซึ่งอยู่ห่างจากปืน 25,000 ฟุต ถ้าความเร็วต้นเท่ากับ 1,000 ฟุตต่อวินาที จงหาเวลาที่ใช้ในการเดินทางที่สมนัยกับมุมทั้งสองนี้
2. จงแสดงว่า โปรเจคไทล์ ไปได้สามในสี่ของระยะทางสูงสุดในเวลาครึ่งหนึ่งของเวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดสูงสุด

ข้อ 3, 4 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริม พร้อมทั้งเขียนภาพโดยจุด P (x, y) สำหรับ $t \geqslant 0$ ถ้าพิกัดของจุดสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ และเงื่อนไขเริ่มแรก

3. $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dt}{dt} = -x^2; t = 0, x = 1, y = -4$
4. $\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}, \frac{dy}{dt} = x^2; t = 0, x = 0, y = 1$

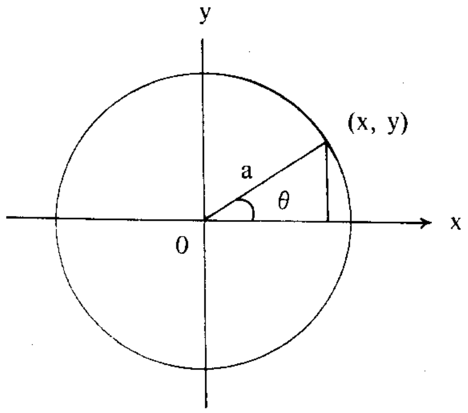
2.3 สมการอิงตัวแปรเสริมในเรขาคณิตวิเคราะห์

(Parametric Equations in Analytic Geometry)

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ไม่ได้เป็นวิธีที่ทำให้เกิดสมการอิงตัวแปรเสริม-เท่านั้น ดังตัวอย่างได้เคยใช้สมการ

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \qquad \text{..........(2.3.1)}$$

แทนวงกลมรัศมี a ซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ดังรูป 2.3.1



รูป 2.3.1 $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$

ในทำนองเดียวกัน สมการ

$$x = a\cos\phi, \quad y = b\sin\phi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi \qquad \text{..........(2.3.2)}$$

เป็นสมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับวงรี ซึ่งสมการคาร์ทีเซียนเป็น

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

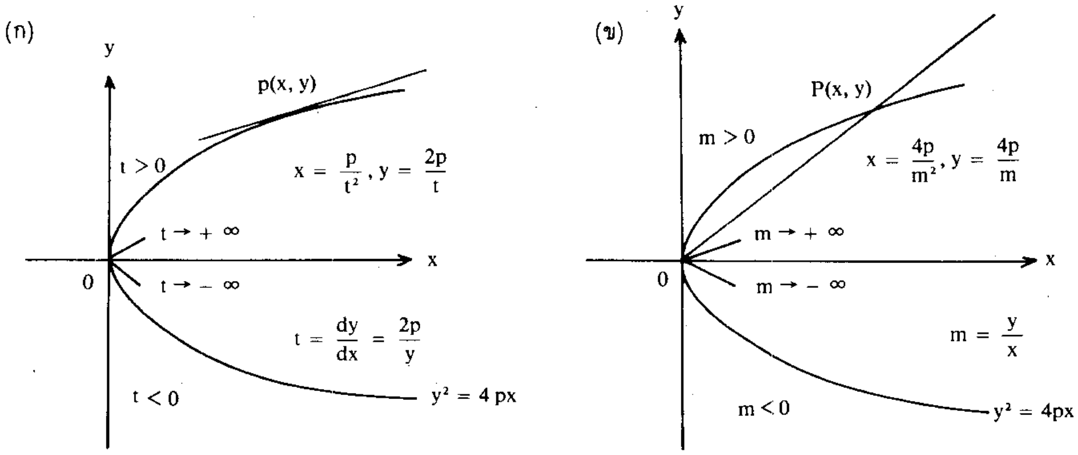
ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับพาราโบลา

$$y^2 = 4px \qquad \text{..........(2.3.3)}$$

วิธีทำ พาราโบลาสามารถหาตัวแปรเสริมได้หลายทาง ทางหนึ่งก็คือใช้ความชัน

$$t = \frac{dy}{dx}$$

ของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่ (x, y) เสมือนตัวแปรเสริม ดังรูป 2.3.2 (ก) เมื่อ



ตัวแปรเสริม t : ความชันของเส้นสัมผัสที่ p

ตัวแปรเสริม m : ความชันของ 0P

รูป 2.3.2 เชิงตัวแปรเสริมของพาราโบลา $y^2 = 4px$

สมการอิงตัวแปรเสริมในกรณีนี้เป็น

$$y = \frac{2p}{t}, \; x = \frac{p}{t^2} \qquad \text{..........(2.3.4)}$$

ถ้าใช้ตัวแปรเสริม

$$m = \frac{y}{x}$$

รูป 2.3.2 (ข) ซึ่งเป็นความชันของเส้นตรงเชื่อมจุดกำเนิดกับจุด P(x, y) บนพาราโบลา จะได้

$$y^2 = m^2x^2 \text{ และ } y^2 = 4px$$

ซึ่งจะนำไปสู่

$$x = \frac{4p}{m^2}, \; y = \frac{4p}{m} \qquad \text{..........(2.3.5)}$$

เป็นสมการอิงตัวแปรเสริม

บางครั้งสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งและสมการคาร์ทีเซียนไม่ให้กราฟเดียวกันในส่วนขยายออกเต็มที่

ตัวอย่าง 2.3.2 สมมุติว่าสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งเป็น

$$x \cosh \theta, \; y = \sinh \theta \qquad \text{..........(2.3.6)}$$

แล้ว

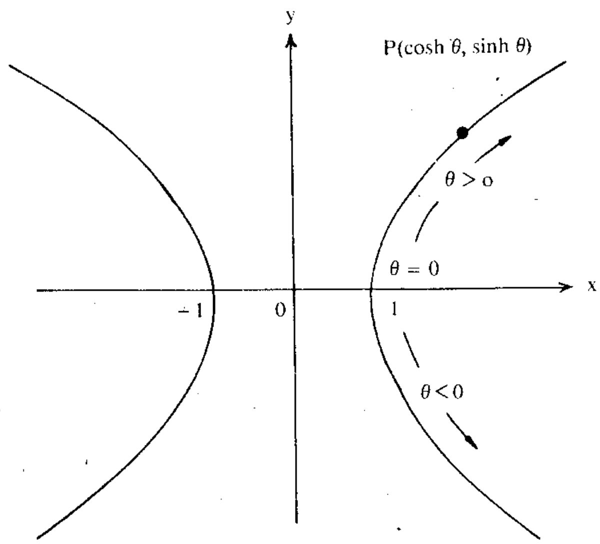
$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

สามารถกำจัด θ และเขียนได้ว่า

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad \text{..........(2.3.7)}$$

เป็นสมการคาร์ทีเซียนของเส้นโค้ง สมการ (2.3.7) มีความหมายเกินไปจากสมการอิงตัวแปรเสริม

เนื่องจาก $x = \cosh \theta$ เป็นบวกเสมอ ดังนั้น สมการอิงตัวแปรเสริมแทนเส้นโค้งทั้งหมดที่อยู่ทางด้านขวาของแกน y ขณะที่สมการคาร์ทีเซียน (2.3.7) แทนสาขาทั้งทางขวาและทางซ้ายของไฮเพอร์โบลา ดังรูป 2.3.3



รูป 2.3.3 สมการอิงตัวแปรเสริม $x = \cosh \theta, y = \sinh \theta, -\infty < \theta < \infty$ *ให้เพียงสาขาทางขวาของไฮเพอร์โบลา* $x^2 - y^2 = 1$ *เพราะว่า* $\cosh \theta \geqslant 1$

เมื่อไม่รวมสาขาทางซ้ายมือโดยเลือกแต่ค่าบวกของ x นั่นคือ

$$x = \sqrt{1 + y^2} \qquad \text{..........(2.3.8)}$$

แทนเส้นโค้งกำหนดโดย (2.3.6)

ตัวอย่าง 2.3.3 เส้นโค้งซึ่งสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$x = \cos 2\theta, \ y = \cos \theta \qquad \text{..........(2.3.9)}$$

อยู่ในจัตุรัส $-1 \leqslant x \leqslant 1, \ -1 \leqslant y \leqslant 1$ อาจจะกำจัดθ ดังนี้

$$x = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2y^2 - 1$$

ดังนั้น ทุก ๆ จุดบนกราฟของ (2.3.9) อยู่บนเส้นโค้ง

$$x = 2y^2 - 1 \qquad \text{..........(2.3.10)}$$

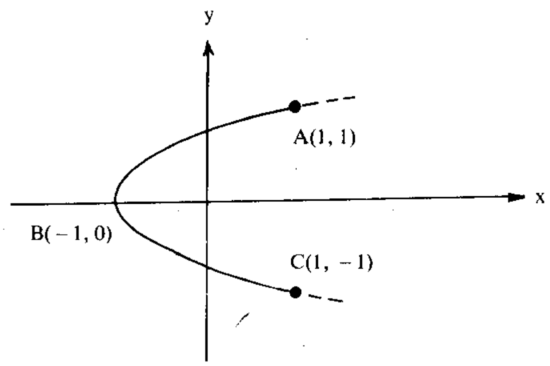
ถ้าไม่มีข้อจำกัด

$$|x| \leqslant 1, \ |y| \leqslant 1$$

แล้ว สมการ (2.3.10) แทนพาราโบลาที่สมบูรณ์

$$y^2 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

ดังแสดงให้เห็นในรูป 2.3.4

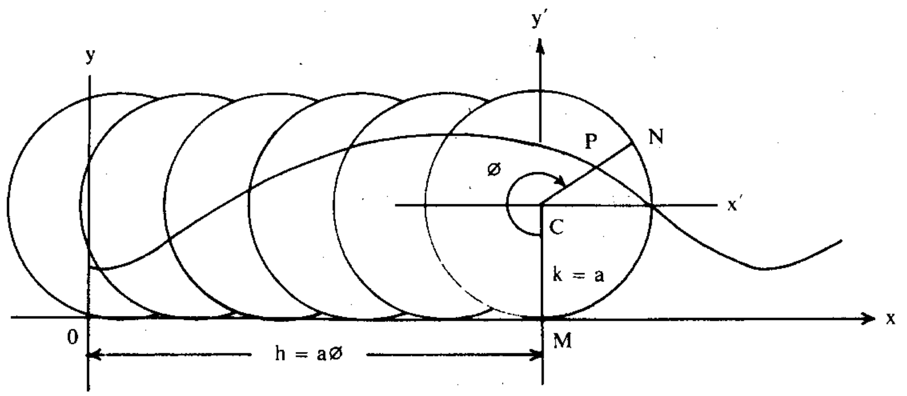


รูป 2.3.4 $x = \cos 2\theta, \ y = \cos \theta$

สมการอิงตัวแปรเสริมแทนเพียงโค้ง ABC จาก (2.3.9) จะเห็นได้ว่า จุดเริ่มต้นที่ A(1, 1) เมื่อ $\theta = 0$เคลื่อนที่ไปตาม AB ถึง B(−1, 0) ขณะที่ θ แปรเปลี่ยนจาก 0 ถึง $\pi/2$ และต่อไปยัง C(1, −1) ยัง C(1, −1) ขณะที่ θ เพิ่มขึ้นถึง π ขณะที่ θ เปรเปลี่ยนจาก π ถึง 2π จุดเดินทางเป็นโค้ง CBA กลับมายัง A เมื่อทั้ง x และ y เป็นคาบ (periodic) x เป็นคาบของ π และ y เป็นคาบของ 2π การแปรเปลี่ยนเพิ่มขึ้นไปอีกของ θ ก็จะเป็นการซ้ำไปบนส่วนของพาราโพลาเดิม

ตัวอย่าง 2.3.4 วงล้อวงหนึ่งรัศมี a หมุนไปตามเส้นตรงในแนวระดับโดยวงล้อตั้งในแนวดิ่งเสมอ จงหาเส้นโค้งที่เกิดจากการลากของจุด P ซึ่งอยู่บนซี่ล้อรถ ห่างจากจุดศูนย์กลาง b หน่วย เส้นโค้งดังกล่าวเรียก โทรคอยด์ (trochoid) (ภาษากรีกสำหรับคำว่าวงล้อ คือ โทรคอยด์) เมื่อ b = a จุด P ก็อยู่บนเส้นรอบวง และเส้นโค้งถูกเรียกว่า ไซคลอยด์ (cycloid) สิ่งนี้เหมือนกับวิถีของการเดินทางโดยหัวตะปูที่ปักติดกับยางนอกรถยนต์

วิธีทำ ในรูป 2.3.5



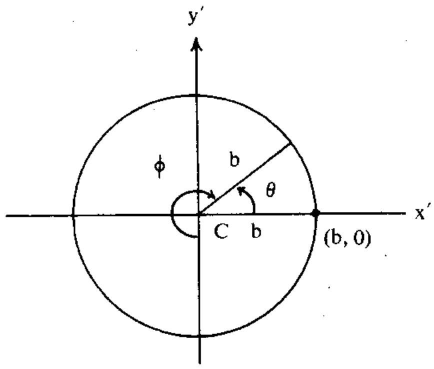
รูป 2.3.5 โทรคอยด์ : $x = a\varnothing - b \sin \varnothing,\ y = a - b \cos \varnothing$

เลือกแกน x เป็นเส้นที่ลูกล้อหมุนไป ด้วยแกน y ผ่านจุดต่ำของโทรคอยด์ ใช้มุม $\varnothing$ ซึ่ง CP หมุน เป็นตัวแปรเสริม เมื่อวงกลมหมุนโดยไม่มีการลื่นไถล ระยะทาง OM ที่วงล้อเคลื่อนที่ตามแนวระดับเท่ากับส่วนโค้งวงกลม (circular arc) MN = $a\varnothing$ (หมุนวงล้อกลับแล้ว N จะตกที่จุดกำเนิด)

เพราะฉะนั้น พิกัด xy ของ C คือ

$$h = a\phi,\ k = a \qquad \text{..........(2.3.11)}$$

ให้แกน $x'y'$ ขนานกับแกน xy และมีจุดศูนย์กลางที่ C ดังรูป 2.3.6



รูป 2.3.6 พิกัด xy ของ P เป็น $x' = b\cos\theta$, $y' = b\sin\theta$

พิกัด xy และ $x'y'$ ของ P สัมพันธ์กันโดยสมการ

$$x = h + x', \; y = k + y' \qquad \text{..........(2.3.12)}$$

จากรูป 2.3.5 จึงอ่านได้ทันทีว่า

$$x' = b\cos\theta, \; y' = b\sin\theta$$

หรือเมื่อ

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \phi$$

$$x' = -b\sin\phi, \; y' = -b\cos\phi \qquad \text{..........(2.3.13)}$$

แทนผลลัพธ์นี้และสมการ (2.3.11) ลงใน (2.3.12) จะได้

$$x = a\phi - b\sin\phi$$

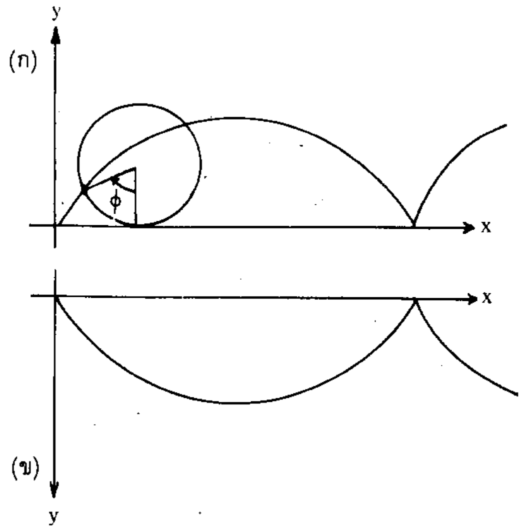
$$y = a - b\cos\phi \qquad \text{..........(2.3.14)}$$

เสมือนสมการอิงตัวแปรเสริมของโทรคอยด์

ไซคลอยด์ดังรูป 2.3.7 (ก)

$$x = a(\phi - \sin\phi), \; y = a(1 - \cos\phi) \qquad \text{..........(2.3.15)}$$

ได้จาก (2.3.14) โดยให้ $b = a$ เป็นกรณีพิเศษที่สำคัญที่สุด

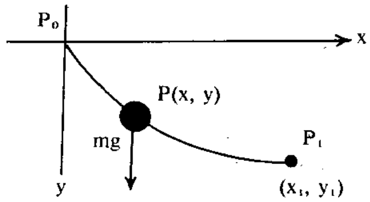


รูป 2.3.7 ไซคลอยด์ : $x = a(\phi - \sin\phi)$, $y = a(1 - \cos\phi)$

เส้นทางลงเร็วที่สุดและเวลาเดียวกัน (Brachistochrones and Tautochrones)

ถ้าสะท้อนทั้งไซคลอยด์และแกน y ข้ามแกน x สมการ (2.3.15) ยังคงใช้ได้ และผลของเส้นโค้งในรูป 2.3.7 (ข) มีคุณสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ ประการหนึ่งที่จะกล่าวถึงโดยไม่พิสูจน์ เพราะการพิสูจน์จะอยู่ในคณิตศาสตร์สาขาแคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of Variation) ส่วนใหญ่ของทฤษฎีพื้นฐานของวิชาแขนงนี้เป็นผลงานของสองพี่น้องตระกูล Bernoulli คือ John และ James ซึ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ท้าทายให้คิดปัญหาหนึ่งก็คือปัญหา เส้นทางลงเร็วที่สุด กล่าวว่า ในระหว่างเส้นโค้งเรียบทั้งหลายที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ จงหาว่า เส้นทางใดที่ทำให้ลูกหินกลมที่กระทำโดยแรงแห่งความโน้มถ่วงเท่านั้นเลื่อนลงเร็วที่สุด (in the shortest time)

จุดสองจุด P_0 และ P_1 ในรูป 2.3.8



รูป 2.3.8 ลูกหินเลื่อนลงตามไซคลอยด์

อาจจะเลือกให้อยู่ในระนาบแนวดิ่งที่จุดกำเนิดและที่ (x_1, y_1) ตามลำดับ จึงสามารถกำหนดปัญหาในพจน์ของคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ พลังงานจลน์ (kinetic energy) ของลูกหินที่จุดเริ่มต้นเป็นศูนย์ เมื่อความเร็วเป็นศูนย์ งานได้กระทำโดยความโน้มถ่วงในการเคลื่อนที่อนุภาคจาก (0, 0) ไปยังจุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ mgy และจะต้องเท่ากับการเปลี่ยนแปลงในพลังงานจลน์ นั่นคือ

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

ดังนั้น ความเร็ว

$$v = ds/dt$$

ที่อนุภาคมีเมื่อถึงจุด P(x, y) คือ

$$v = \sqrt{2gy}$$

นั่นคือ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \text{ หรือ } dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$$

เวลา t_1 กำหนดสำหรับลูกหินที่เลื่อนจาก P_0 ถึง P_1 ขึ้นอยู่กับเส้นโค้งเฉพาะ $y = f(x)$ ไปตามการเคลื่อนที่และกำหนดโดย

$$t_1 = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{2gf(x)}}\,dx \qquad \text{..........(2.3.16)}$$

ปัญหาก็คือ การหาเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ผ่านจุด $P_0(0, 0)$ และ $P_1(x_1, y_1)$ และค่าต่ำสุดของอินทิกรัลในสมการ (2.3.16) (Brachistochrone มาจากภาษากรีกสองคำที่รวมกัน หมายความว่า "เวลาสั้นที่สุด" (shortest time))

แรกทีเดียวอาจจะเดาว่าเส้นตรงที่เชื่อม P_0 และ P_1 น่าจะเป็นเส้นทางลงเร็วที่สุด แต่เป็นไปไม่ได้เพราะมีเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยกว่าโดยที่อนุภาคเริ่มต้นตกในแนวดิ่งจะสร้างความเรียวได้เร็วกว่าเลื่อนตามวิถีเอียง ด้วยการเพิ่มความเร็วนี้อาจจะสามารถทำให้การเดินทางในวิถีที่ยาวกว่ายังคงถึงจุด P_1 ในเวลาที่สั้นกว่าได้ และเส้นโค้งเส้นทางเร็วที่สุด ตามปรกติเป็นโค้งของไซคลอยด์ ผ่านจุด P_0 และ P_1

ถ้าเขียนสมการ (2.3.16) ในรูปแบบที่สมมูล

$$t_1 = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}}$$

แล้วนำสมการ (2.3.15) แทนในค่า t_1 นี้จะได้

$$t_1 = \int_{\phi=0}^{\phi_1} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos\phi)}{2ga(1 - \cos\phi)}}\, d\phi = \phi_1 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

เป็นเวลาที่ใช้สำหรับอนุภาคที่เลื่อนจาก P_0 ถึง P_1 เวลาที่ใช้สำหรับถึงจุดต่ำสุดของโค้งหาได้โดยให้ $\phi_1 = \pi$ ทีนี้จะได้พบความจริงที่น่าประหลาดที่เวลาที่ใช้ในการเลื่อนตามไซคลอยด์จาก (0, 0) ไปยังจุดต่ำสุด $(a\pi, 2a)$ เป็นเวลาเดียวกันกับเวลาที่ใช้สำหรับอนุภาคที่เริ่มต้นจากที่หยุดนิ่งจากจุดใด ๆ ที่อยู่ระหว่างโค้งนี้ เช่นที่ (x_0, y_0) ไปยัง $(2\pi, 2a)$ สำหรับกรณีหลังจะได้ว่า

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

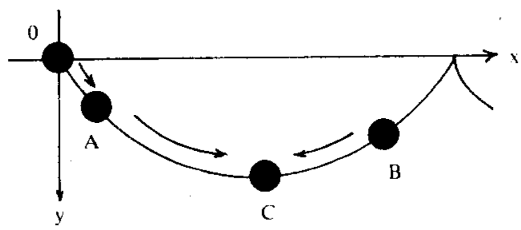
เป็นความเร็วที่ $P(x, y)$ และเวลาที่ใช้คือ

$$T = \int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos\phi)}{2ag(\cos\phi_0 - \cos\phi)}}\, d\phi = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\phi}{\cos\phi_0 - \cos\phi}}\, d\phi$$

$$= \frac{a}{g} \int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2(\phi/2)}{[2\cos^2(\phi_0/2) - 1] - [2\cos^2(\phi/2) - 1]}}\, d\phi$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[- \sin^{-1} \frac{\cos(\phi/2)}{\cos(\phi_0/2)}\right]_{\phi_0}^{\pi} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}(- \sin^{-1} 0 + \sin^{-1} 1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

เมื่อคำตอบนี้อิสระจากค่าของ ϕ_0 จึงได้ว่าในระยะเวลาเท่ากันที่ใช้จนถึงจุดต่ำสุดบนไซคลอยด์ไม่ว่าอนุภาคจะอยู่ตรงไหนของโค้งเมื่อเริ่มต้นจากการหยุดนิ่ง ดังนั้น ในรูป 2.3.9 สามอนุภาคที่เริ่มต้นในเวลาเดียวกันจาก 0, A และ B จะถึง C พร้อมกัน ด้วยเหตุผลนี้ไซคลอยด์จึงเป็นเวลาเดียวกัน (tautochrone) ด้วย (tautochrone หมายความว่า เวลาเดียวกัน (same time)) นอกจากจะเป็นเส้นทางลงเร็วที่สุดแล้ว



รูป 2.3.9 ลูกหินถูกปล่อยบนไซคลอยด์ที่ 0, A และ B จะใช้เวลาเท่ากันที่ถึง C

แบบฝึกหัด 2.3

ข้อ 1 ถึง 5 จงเขียนภาพของเส้นโค้งซึ่งเกิดจากจุด $P(x, y)$ ขณะที่ตัวแปรเสริม t แปรเปลี่ยนไปตามโดเมนที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาสมการคาร์ทีเซียนของเส้นโค้งในแต่ละกรณี

1. $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
2. $x = \sec t,\ y = \tan t,\ -\pi/2 < t < \pi/2$
3. $x = 2t + 3,\ y = 4t^2 - 9,\ -\infty < t < \infty$
4. $x = 2 + 1/t,\ y = 2 - t,\ 0 < t < \infty$
5. $x = t^2 + t,\ y = t^2 - t,\ -\infty < t < \infty$
6. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของครึ่งวงกลม

$$x^2 + y^2 = a^2,\ y > 0$$

โดยใช้ ความชัน $t = dy/dx$ ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ (x, y) เป็นตัวแปรเสริม (parameter)

7. จงแสดงว่าความชันของไซคลอยด์

$$x = a(\varnothing\ 1 \sin\phi)$$

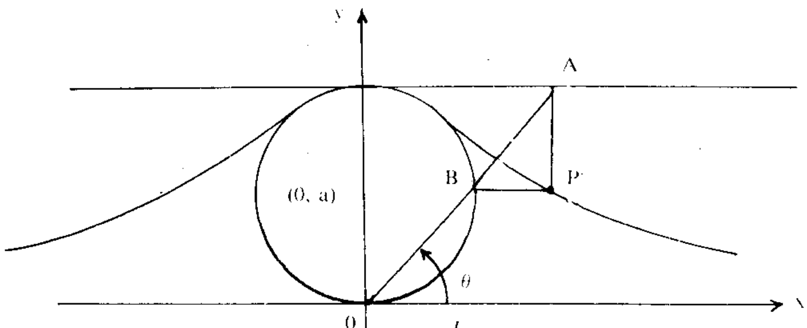
$$y = a(1 - \cos\phi)$$

คือ $dy/dx = \cot\phi/2$ ในกรณีเฉพาะเส้นสัมผัสกับไซคลอยด์เป็นแนวดิ่ง เมื่อ ϕ เป็น 0 หรือ 2π

8. สามารถสร้างเส้นโค้งทรงระฆังได้ดังนี้ ให้ C เป็นวงกลมรัศมี a มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, a)$ บนแกน y (รูป 2.3.10) เส้นที่แปรเปลี่ยน 0A ผ่านจุดกำเนิด 0 ตัดกับเส้นตรง $y = 2a$ ที่จุด A และตัดวงกลมที่จุด B จุด P บนเส้นซึ่งเกิดจากการตัดกันของเส้นที่ลากผ่าน A และ B โดยขนานกับแกน y และแกน x ตามลำดับ

   ก) จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งที่เกิดจาก P โดยมีมุม θ จากแกน x ไปยังเส้น 0A เป็นตัวแปรเสริม

   ข) จงหาสมการคาร์ทีเซียน สำหรับเส้นโค้งที่เกิดจาก P ด้วย



รูป 2.3.10

2.4 พิกัดปริภูมิ

(Space Coordinates)

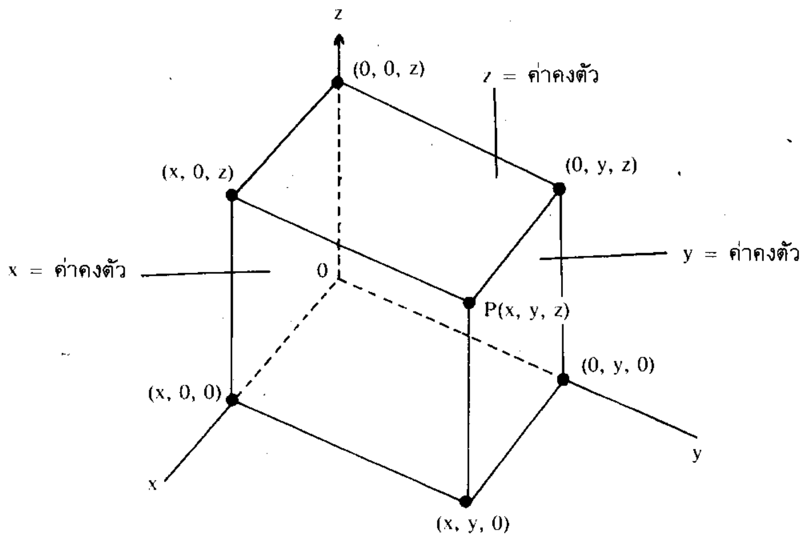
ก) พิกัดฉาก (Cartesian Coordinates)

รูป 2.4.1 แสดงระบบแกนพิกัด ox, oy และ oz ร่วมกันในเชิงตั้งฉาก (mutually orthogonal) ระบบนี้เรียกว่า ระบบมือขวา (right handed system) เพราะว่า เกลียวปิดทางขวา (right-threaded screw) ชี้ไปตาม oz นั่นคือ หมุนจาก ox ไปยัง oy นั่นเอง พิกัดฉากของจุด P(x, y, z) ในปริภูมิ อาจจะอ่านจากแกนพิกัดโดยระนาบที่ผ่านจุด P และตั้งฉากแต่ละแกน จุดบนแกน x มีพิกัด y และ z เป็นศูนย์ทั้งคู่ นั่นคือ จะมีพิกัดของรูป (x, 0, 0) จุดทั้งหลายในระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z กล่าวได้ว่ามีพิกัด z เดียวกัน ดังนั้น จุดในระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z ที่ 5 หน่วยเหนือระนาบ xy ทุก ๆ จุดบนระนาบนี้มีพิกัดในรูป (x, y, 5) สามารถเขียนแทนด้วย $z = 5$ เสมือนสมการของระนาบนี้

สามระนาบ

$x = 2, y = 3, z = 5$

ตัดกันที่จุด P(2, 3, 5) จุดทั้งหลายของระนาบ yz ได้จากการให้ $x = 0$ สามระนาบพิกัด $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ แบ่งปริภูมิออกเป็นแปดอัฐมภาค (octants) อัฐมภาค ซึ่งทุก ๆ พิกัดทั้งสามเป็นบวก เรียก อัฐมภาคที่หนึ่ง และไม่มีการกำหนดอัฐมภาคที่เหลือทั้งเจ็ดว่าเป็นอัฐมภาคที่เท่าไร



รูป 2.4.1 ระบบพิกัดมือขวา (Right handed coordinate system)

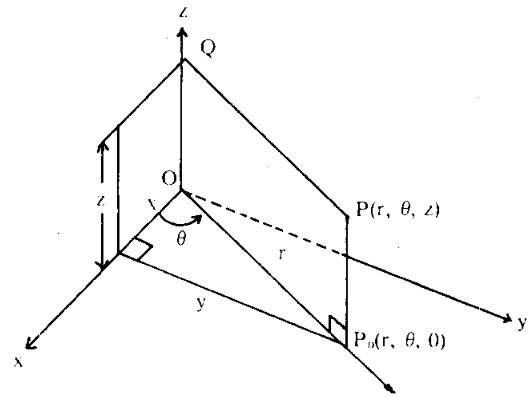
ข) พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinates)

บ่อยครั้งทีเดียวที่พบว่าเป็นความสะดวกที่จะใช้พิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) กำหนดจุดในปริภูมิซึ่งเหมือนกับพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) ใช้แทน (x, y) ในระนาบ $z = 0$ เข้าคู่กันด้วยพิกัด z ทรงกระบอกและพิกัดฉากสัมพันธ์ด้วยสมการเหล่านี้ (รูป 2.4.2)

$$x = r\cos\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$y = r\sin\theta, \qquad \tan\theta = y/x$$

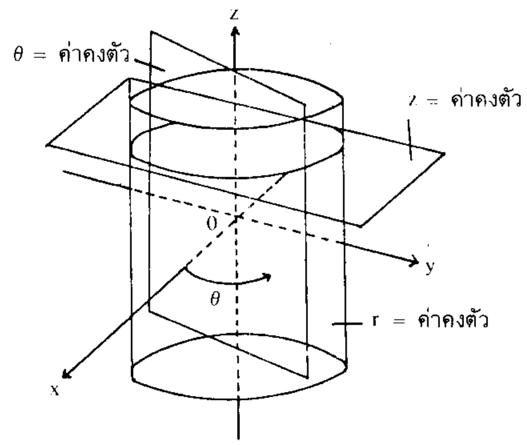
$$z = z$$



รูป 2.4.2 พิกัดทรงกระบอก

สมการ $r =$ ค่าคงตัว เป็นทรงกระบอกวงกลมฉาก รัศมี r ซึ่งแกนคือ แกน z $r = 0$ เป็นสมการสำหรับแกน z เอง สมการ $\theta =$ ค่าคงตัว เป็นระนาบที่ประกอบด้วยแกน z และทำมุม θ กับระนาบ xz (รูป 2.4.3)

พิกัดทรงกระบอกจะสะดวกเมื่อมีแกนสมมาตรสำหรับปัญหาทางฟิสิกส์

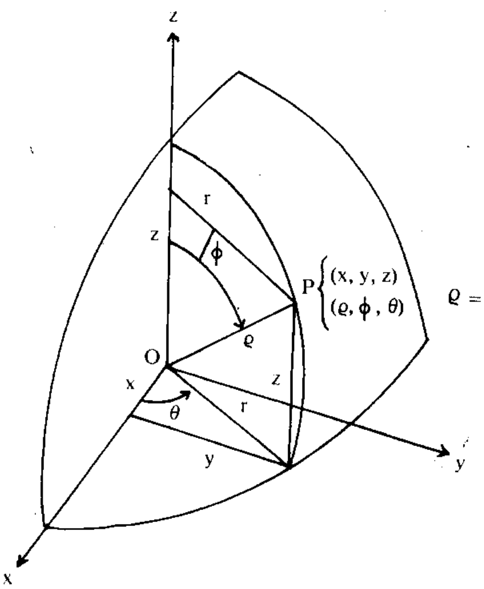


รูป 2.4.3 บางระนาบและทรงกระบอกที่มีสมการง่าย ๆ ในพิกัดทรงกระบอก

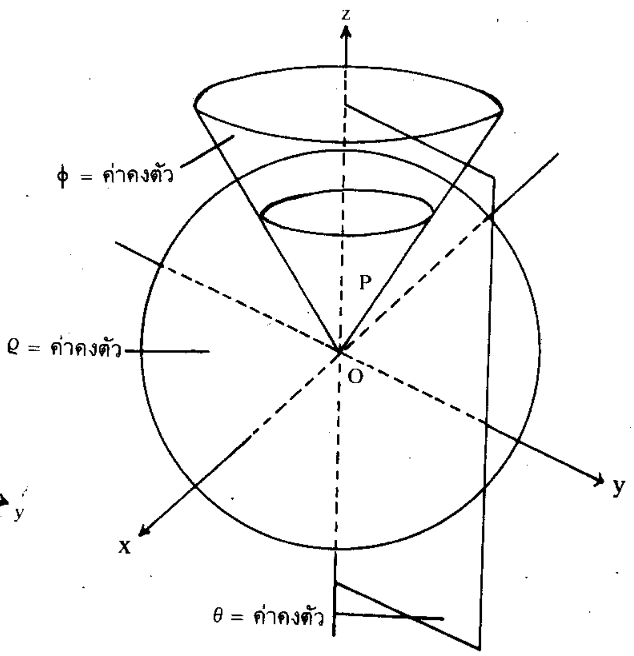
ค. พิกัดทรงกลม (Spherical Coordinates)

พิกัดทรงกลมจะมีประโยชน์เมื่อมีจุดศูนย์กลางของสมมาตร ซึ่งสามารถให้เป็นจุดกำเนิด พิกัดทรงกลม (ϱ, ϕ, θ) แสดงให้เห็นดังรูป 2.4.4

พิกัดที่หนึ่ง $\varrho = |OP|$ เป็นระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุด P และไม่เคยติดลบ สมการ ϱ = ค่าคงตัว เป็นพื้นผิวทรงกลมรัศมี ϱ ด้วยจุดศูนย์กลางที่ O ดังรูป 2.4.5 พิกัดทรงกลมที่สอง ϕ เป็นมุมที่วัดลงมาจากแกน z ไปยังเส้นตรง OP สมการ ϕ = ค่าคงตัวเป็น กรวยด้วยจุดยอดที่ O แกน oz และมุมก่อกำเนิด ϕ และแปลความกว้างสำหรับคำว่า กรวย ซึ่งจะรวม ระนาบ xy สำหรับ $\phi = \pi/2$ และกรวยที่มุมก่อกำเนิดใหญ่กว่า $\pi/2$ พิกัดทรงกลมที่สาม θ เป็นมุม θ เช่นเดียวกับในพิกัดทรงกระบอก เป็นมุมจากระนาบ xz กับระนาบที่ผ่าน P และแกน z ผิดกัน แต่ตรงกันข้ามกับพิกัดทรงกระบอก สมการ θ = ค่าคงตัวในพิกัดทรงกลม กำหนดครึ่งระนาบ ดังรูป 2.4.5



รูป 2.4.4 พิกัดทรงกลม



รูป 2.4.5 ทรงกลมและกรวยซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีสมการในรูปพิกัดทรงกลม

จากรูป 2.4.4 อาจจะอ่านความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากทรงกระบอกและทรงกลม

$$r = \varrho \sin \phi \qquad x = r \cos \theta \qquad x = \varrho \sin \phi \cos \theta$$

$$z = \varrho \cos \phi \qquad y = r \sin \theta \qquad y = \varrho \sin \phi \sin \theta$$

$$\theta = \theta \qquad z = z \qquad z = \varrho \cos \phi \qquad \text{..........(2.4.2)}$$

ทุก ๆ จุดในปริภูมิที่จะกำหนดให้อยู่ในรูปพิกัดทรงกลมได้ต้องอยู่ในพิสัยจำกัด คือ

$$\varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \qquad \text{..........(2.4.3)}$$

แบบฝึกหัด 2.4

ข้อ 1 ถึง 4 จงอธิบายเซตของจุด $P(x, y, z)$ ซึ่งพิกัดฉากสอดคล้องกับคู่ของระบบสมการที่กำหนด พร้อมทั้งเขียนภาพ

1. $x =$ ค่าคงตัว, $y =$ ค่าคงตัว

2. $y = x, z = 5$

3. $x^2 + y^2 = 4, z = -2$

4. $x = 0, \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

ข้อ 5 ถึง 8 จงอธิบายเซตของจุด $P(r, \theta, z)$ ซึ่งพิกัดทรงกระบอกสอดคล้องกับคู่ของระบบสมการ พร้อมทั้งเขียนภาพ

5. $r = 2, z = 3$

6. $\theta = \pi/6, z = r$

7. $r = 3, z = 2\theta$

8. $r = 2\theta, z = 3\theta$

ข้อ 9 ถึง 12 จงอธิบายเซตของจุด $P(\varrho, \phi, \theta)$ ซึ่งพิกัดทรงกลมสอดคล้องกับคู่ของระบบสมการที่กำหนดให้ พร้อมทั้งเขียนภาพ

9. $\varrho = 5, \theta = \pi/4$

10. $\varrho = 5, \phi = \pi/4$

11. $\theta = \pi/4, \phi = \pi/4$

12. $\theta = \pi/2, \varrho = 4 \cos \phi$

ข้อ 13 ถึง 16 จงแปลงสมการต่อไปนี้จากระบบพิกัดที่กำหนดให้ (คาร์ทีเซียน, ทรงกระบอก, ทรงกลม) ในรูปของอีกสองระบบที่เหมาะสม

13. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

15. $z^2 = r^2$

16. $\varrho = 6 \cos \phi$

ข้อ 17 ถึง 21 จงอธิบายเซตดังต่อไปนี้

17. $x \geqslant 0$

18. $3 \leqslant \varrho \leqslant 5$

19. $r \geqslant 2,\ \varrho \leqslant 5$

20. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ \varrho \geqslant 0$

21. $4x^2 + 9y^2 \leqslant 36$

2.5 เวกเตอร์ในปริภูมิ

(Vectors in Space)

เวกเตอร์ในปริภูมิเป็นเวกเตอร์ในสามมิติ เหมือนกันกับเวกเตอร์ในระนาบ และอยู่ภายใต้กฎเดียวกัน คือ การบวก การลบ การคูณด้วยสเกลาร์เวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดซึ่งพิกัดฉากเป็น (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยพื้นฐาน เขียนแทนด้วย $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ และเขียนเวกเตอร์จากจุดกำเนิด O ไปยังจุด P(x, y, z) เป็น

$$\vec{R} = \vec{OP} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z \qquad \text{..........(2.5.1)}$$

ถ้า $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นสองจุดในปริภูมิ รูป 2.5.1 แล้วเวกเตอร์จาก P_1 ถึง P_2 เป็นผลบวกของเวกเตอร์

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2}$$

เมื่อ

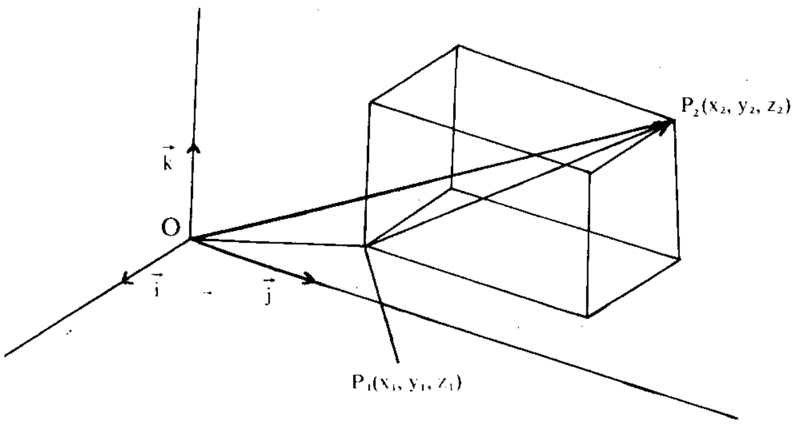
$$\overrightarrow{P_1O} = -\overrightarrow{OP_1}$$

จึงได้ว่า

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

หรือ

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{i}\,(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}\,(z_2 - z_1) \qquad \text{..........(2.5.2)}$$

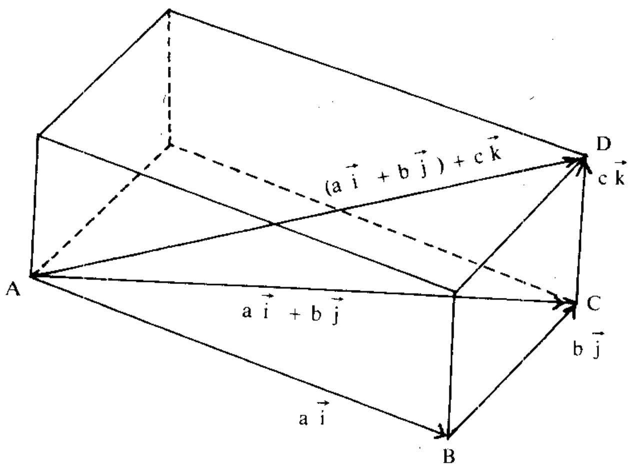


รูป 2.5.1 $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2}$

ความยาวของเวกเตอร์ใด ๆ

$$\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

กำหนดได้โดยการประยุกต์ทฤษฎีบทของปีทาโกรัสสองครั้ง ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รูป 2.5.2



รูป 2.5.2 $|\overrightarrow{AD}|$ *สามารถกำหนดได้จากสามเหลี่ยมมุมฉาก* ABC *และ* ACD

$$|\overrightarrow{AC}| = |a\vec{i} + b\vec{j}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

และในสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + c^2}$$

นั่นคือ

$$|a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad \text{..........(2.5.3)}$$

ถ้าประยุกต์เหตุผลนี้กับเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ของสมการ (2.5.2) จะได้สูตรสำหรับระยะทางระหว่างจุดสองจุด

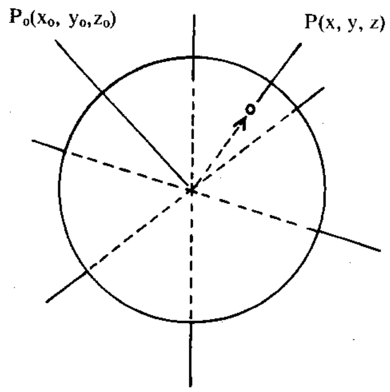
$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad \text{..........(2.5.4)}$$

สมการ (2.5.4) อาจจะใช้กำหนดสมการสำหรับทรงกลมรัศมี a ด้วยจุดศูนย์กลางที่ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ รูป 2.5.3 จุด P อยู่บนทรงกลมก็ต่อเมื่อ

$$|\overrightarrow{P_0P}| = a$$

หรือ

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \qquad \text{..........(2.5.5)}$$



รูป 2.5.3 ทรงกลม $(x - x_0)^2 + (y - y_0)2 + (z - z_0)^2 = a^2$

ตัวอย่าง 2.5.1 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$$

วิธีทำ กำลังสองสมบูรณ์ของสมการที่กำหนดมาให้จะได้

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 = 0 + 1 + 4$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5$$

เปรียบเทียบสมการ (2.5.5) แสดงว่า $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 0$ และ $a = \sqrt{5}$

จุดศูนย์กลางคือ $(-1, 2, 0)$ และรัศมีคือ $\sqrt{5}$

ทิศทาง (Direction)

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใน ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกทิศทางของ $\vec{A}$ โดยการหาร $\vec{A}$ ด้วยความยาวของ $\vec{A}$

$$\text{ทิศทางของ } \vec{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \qquad \text{..........(2.5.6)}$$

ตัวอย่าง 2.5.2 จงหาทิศทางของ

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$$

ความยาวของ $\vec{A}$ คือ $\sqrt{4 + 9 + 49} = \sqrt{62}$ และ

ทิศทางของ $(2\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}) = \dfrac{2\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}}{\sqrt{62}}$

แบบฝึกหัด 2.5

ข้อ 1, 2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$
3. จงหาระยะทางระหว่างจุด $P(x, y, z)$ กับ ก) แกน x ข) แกน y ค) แกน z ง) ระนาบ xy
4. ระยะทางจาก $P(x, y, z)$ ไปยังจุดกำเนิด คือ d_1 และระยะทางจาก P ไปยัง $A(0, 0, 3)$ คือ d_2 จงเขียนสมการสำหรับพิกัดของ P ถ้า

   ก) $d_1 = 2d_2$, ข) $d_1 + d_2 = 6$, ค) $|d_1 - d_2| = 2$

ข้อ 5, 6 จงหาความยาวของเวกเตอร์ต่อไปนี้

5. $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
6. $\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$
7. จงหาทิศทางของ $4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$
8. จงหาเวกเตอร์จากจุดกำเนิด O ไปยังจุดตัดของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ซึ่งจุดยอดเป็นจุดสามจุด คือ

   $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 2, -1)$

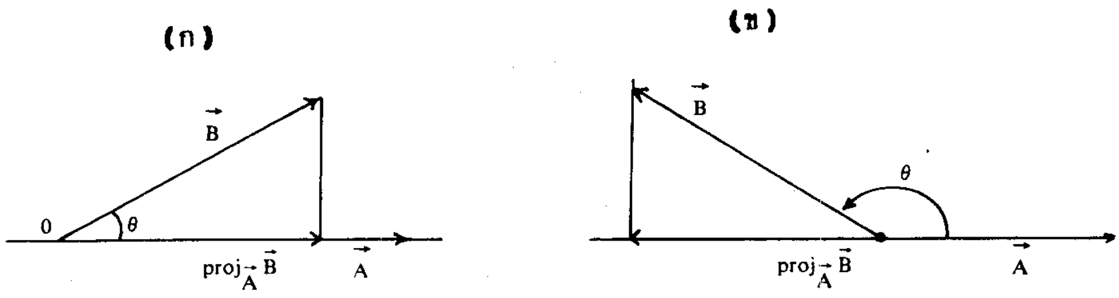
2.6 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์

(The Scalar Product or Dot Product of Two Vectors)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นสเกลาร์นิยามโดยสมการ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta \qquad \text{..........(2.6.1)}$$

ซึ่ง θ วัดด้วยมุมที่เล็กที่สุดที่กำหนดโดย $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เมื่อทั้งสองเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นเดียวกัน ดังรูป 2.6.1 นิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์ที่กำหนดให้ในที่นี้ "พิกัดอิสระ" (coordinate-free)



รูป 2.6.1 เวกเตอร์โพรเจคชัน (Vector projection) *ของ* $\vec{B}$ *บน* $\vec{A}$ *ใน (ก) ส่วนประกอบของ* $\vec{B}$ *ในทิศทางของ* $\vec{A}$ *คือความยาวของเวกเตอร์โพรเจคชัน ใน (ข) ความยาวของเวกเตอร์โพรเจคชันเป็นลบ*

จาก (2.6.1) จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าการสลับที่ของสองเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่เปลี่ยนค่าของผลคูณ นั่นคือ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \qquad \text{..........(2.6.2)}$$

การดำเนินการของการคูณสเกลาร์นั้นสลับที่ได้

เวกเตอร์ที่ได้จากการโพรเจค $\vec{B}$ ไปบน เส้นที่ผ่าน $\vec{A}$ เรียก เวกเตอร์โพรเจคชันของ $\vec{B}$ บน A เขียนแทนด้วย $\text{proj}_{\vec{A}} \vec{B}$ ดังรูป 2.6.1

ส่วนประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$ คือความยาวของเวกเตอร์โพรเจคชันของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$ และเป็นจำนวนที่เป็นบวกหรือเป็นลบ เครื่องหมายเป็นบวก ถ้า $\text{proj}_{\vec{A}} \vec{B}$ มีทิศทางเดียวกับ $+\vec{A}$ และเป็นลบถ้ามีทิศทางเดียวกับ $-\vec{A}$ ไม่ว่าจะในกรณีใด ส่วนประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$ เท่ากับ $|\vec{B}| \cos\theta$ พิจารณารูป 2.6.1 อีกครั้ง

ผลคูณเชิงสเกลาร์ให้ความสะดวกในการคำนวณส่วนประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศทาง $\vec{A}$ แก้สมการ (2.6.1) สำหรับ $|\vec{B}| \cos\theta$ จะได้

$$\text{ส่วนประกอบในทิศทางของ } \vec{A} = |\vec{B}| \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|} \qquad \text{..........(2.6.3)}$$

คูณทั้งสองด้านของสมการ (2.6.3) โดย $|\vec{A}|$ นำไปสู่การแปลความทางเรขาคณิตของ $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}|(|\vec{B}| \cos\theta) \\ &= (\text{ความยาวของ } \vec{A}) \text{ คูณ (ส่วนประกอบ } \vec{B} \text{ ในทิศทาง } \vec{A}) \end{aligned}$$

อาจจะสับเปลี่ยนบทบาทของ $|\vec{A}|$ และ $|\vec{B}|$ ซึ่งเขียนผลคูณเชิงสเกลาร์ได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{B}|(|\vec{A}| \cos\theta) \\ &= (\text{ความยาวของ } \vec{B}) \text{ คูณ (ส่วนประกอบ } \vec{A} \text{ ในทิศทาง } \vec{B}) \text{ ใน} \end{aligned}$$

การคำนวณ $\vec{A} \cdot \vec{B}$ จากส่วนประกอบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ให้

$$\begin{aligned} \vec{A} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \\ \vec{B} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \end{aligned} \qquad \text{..........(2.6.4)}$$

และ

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{B} - \vec{A} \\ &= (b_1 - a_1) \vec{i} + (b_2 - a_2) \vec{j} + (b_3 - a_3) \vec{k} \end{aligned}$$

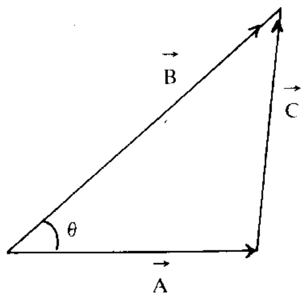
แล้วประยุกต์กฎของโคไซด์กับสามเหลี่ยมซึ่งด้านทั้งสามแทนเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ดังรูป 2.6.2 จะได้

$$|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

$$|\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = \frac{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - |\vec{C}|^2}{2} \qquad \text{..........(2.6.5)}$$

ทางด้านซ้ายมือของสมการนี้คือ $\vec{A} \cdot \vec{B}$ และอาจจะคำนวณทุกพจน์ทางขวามือของ (2.6.5) โดยประยุกต์สมการ (2.5.5) ของหัวข้อ 2.5 เพื่อหาความยาวของ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ผลลัพธ์ของพีชคณิตนี้คือสูตร

$$A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \text{..........(2.6.6)}$$



รูป 2.6.2 สมการ 2.6.6 ได้รับโดยประยุกต์กฎของโคไซด์กับสามเหลี่ยม ซึ่งด้านแทน $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$.

ดังนั้น ในการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ที่กำหนดให้ โดยคูณส่วนประกอบที่สมนัยแล้วบวกเข้าด้วยกันเป็นผลลัพธ์

ตัวอย่าง 2.6.1 จงหามุม θ ระหว่าง $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ และ $\vec{B} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ และจงหาส่วนประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$

วิธีทำ จากสมการ (2.6.6) จะได้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 6 - 6 - 4 = -4$$

ขณะที่จากสมการ (2.6.1)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

เมื่อ

$$|\vec{A}| = \sqrt{1+4+4} = 3 \text{ และ } |\vec{B}| = \sqrt{36+9+4} = 7$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-4}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{21} \approx 101^\circ$$

ส่วนประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$ คือ

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|} = -\frac{4}{3}$$

ซึ่งเป็นความยาวที่เป็นลบของเวกเตอร์โพรเจคชันของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$

จากสมการ (2.6.6) จะเห็นว่า ถ้า

$$\vec{C} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

เป็นเวกเตอร์ที่สามใด ๆ แล้ว

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) &= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3)\\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\\ &= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}\end{aligned}$$

ดังนั้น การคูณสเกลาร์เป็นไปตามกฎของการกระจาย

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \qquad \text{..........(2.6.7)}$$

ถ้ารวมกับกฎการสลับที่สมการ (2.6.2) จะได้ว่า

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C} \qquad \text{..........(2.6.8)}$$

สมการ (2.6.7) และ (2.6.8) ทำให้คูณผลบวกของเวกเตอร์โดยกฎของพีชคณิตได้ เช่น

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{C}+\vec{D}) = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{A}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{D} \qquad \text{..........(2.6.9)}$$

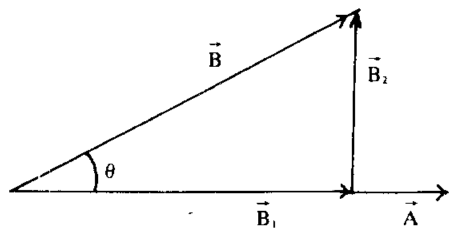
เวกเตอร์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Vectors)

จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าสมการ (2.6.1) ที่ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์เป็นศูนย์ เมื่อเวกเตอร์ทั้งสองตั้งฉากกัน เมื่อ $\cos 90° = 0$ ในทางกลับกัน ถ้า $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ แล้วเวกเตอร์ใดเวกเตอร์หนึ่งเป็นศูนย์ หรือเวกเตอร์ทั้งสองตั้งฉากกับ เวกเตอร์ศูนย์ไม่มีทิศทางที่แน่นอน จึงสามารถยอมรับได้ว่าตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์ แล้วอาจจะกล่าวได้ว่า $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตั้งฉากกัน เวกเตอร์ทั้งหลายที่ตั้งฉากกันกล่าวได้ว่าเป็นเชิงตั้งฉาก (orthogonal)

ถ้าผลคูณเชิงสเกลาร์เป็นลบแล้ว $\cos\theta$ เป็นลบ และมุมระหว่างเวกเตอร์ใหญ่กว่า 90°

ถ้า $\vec{B} = \vec{A}$ แล้ว $\theta = 0$ และ $\cos\theta = 1$ ดังนั้น $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2$

ตัวอย่าง 2.6.2 จงหาเวกเตอร์ $\vec{B}_1$ และ $\vec{B}_2$ เมื่อ $\vec{B}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ $\vec{B}_1$ ขนานกับ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}_2$ ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{A}$ ดังรูป 2.6.3



รูป 2.6.3 เวกเตอร์ $\vec{B}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ที่ขนานและเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{A}$

วิธีทำ ให้

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

ด้วย $\vec{B}_1 = c\vec{A}$ และ $\vec{B}_2 \cdot \vec{A} = 0$ แล้วแทนค่า $c\vec{A}$ สำหรับ $\vec{B}_1$ จะได้ $\vec{B} = c\vec{A} + \vec{B}_2$ และ

$$0 = \vec{B}_2 \cdot \vec{A} = (\vec{B} - c\vec{A}) \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} - c(\vec{A} \cdot \vec{A})$$

หรือ

$$c = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}}$$

ดังนั้น

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} \vec{A}$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B} - \vec{B}_1 = \vec{B} - c\vec{A} = \vec{B} - \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} \vec{A}$$

ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ เพราะว่า c ถูกเลือกมาเพื่อทำให้ $\vec{B}_2 \cdot \vec{A} = 0$

สำหรับตัวอย่าง ถ้า

$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \text{ และ } \vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j}$$

แล้ว

$$c = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \frac{6-1}{9+1} = \frac{1}{2}$$

และ

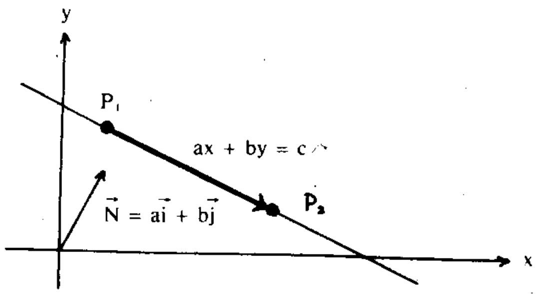
$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2}\vec{A} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

ขนานกับ $\vec{A}$ ขณะที่

$$\vec{B}_2 = \vec{B} - \vec{B}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - 3\vec{k}$$

ตั้งฉากกับ $\vec{A}$

ตัวอย่าง 2.6.3 จงแสดงว่า เวกเตอร์ $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ตั้งฉากกับเส้น $ax + by = c$ ในระนาบ xy ดังรูป 2.6.4



รูป 2.6.4 เวกเตอร์ $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ปรกติกับเส้นตรง $ax + by = c$

วิธีทำ ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นสองจุดใด ๆ บนเส้นตรง นั่นก็คือ

$$ax_1 + by_1 = c, \quad ax_2 + by_2 = c$$

โดยการลบกันและกำจัด c จึงได้ว่า

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

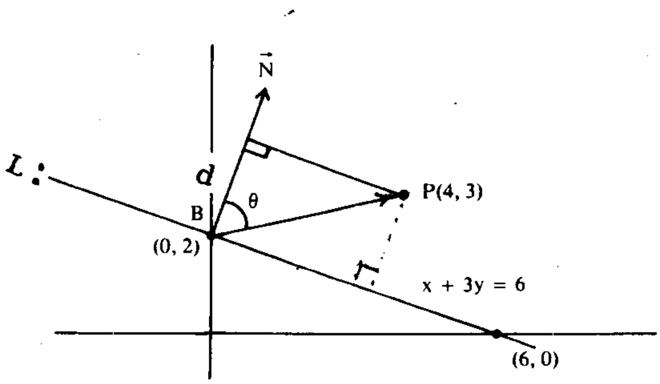
หรือ

$$(a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot [(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}] = 0 \qquad \text{..........(2.6.10)}$$

เมื่อ $(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = \overrightarrow{P_1P_2}$ เป็นเวกเตอร์ที่เชื่อมจุดสองจุดบนเส้นตรง ขณะที่ $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดให้ สมการ (2.6.10) กล่าวว่า $\vec{N} = 0$ หรือ $\overrightarrow{P_1P_2} = 0$ หรือ $\vec{N} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$ แต่ $ax + by = c$ สมมุติว่าเป็นสมการของเส้นตรง ดังนั้น ทั้ง a และ b ไม่เป็นศูนย์ และ $\vec{N} \neq 0$ ยิ่งไปกว่านั้น อาจจะเลือก P_2 ให้แตกต่างจาก P_1 บนเส้นตรงนี้ ทำให้ $\overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$ ดังนั้น $N \perp \overrightarrow{P_1P_2}$

ตัวอย่างเช่น $\vec{N} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ปรกติกับเส้นตรง $2x - 3y = 5$

ตัวอย่าง 2.6.4 จงใช้วิธีการของเวกเตอร์หาระยะทาง d ระหว่าง จุด P(4, 3) และเส้นตรง $L : x + 3y = 6$ ดังรูป 2.6.5



รูป 2.6.5 ระยะทางจาก P ไปยังเส้นตรง L คือ ความยาวของเวกเตอร์โพรเจคชันของ $\overrightarrow{BP}$ ไปบน $\vec{N}$

วิธีทำ เส้นตรงตัดแกน y ที่ B(0, 2) ที่ B ลากเวกเตอร์

$$\vec{N} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

ปรกติกับ L (ดูตัวอย่าง 2.6.3) แล้วระยะทางระหว่าง P และ L คือ ส่วนประกอบ $\overrightarrow{BP}$ ในทิศทางของ $\vec{N}$ เมื่อ

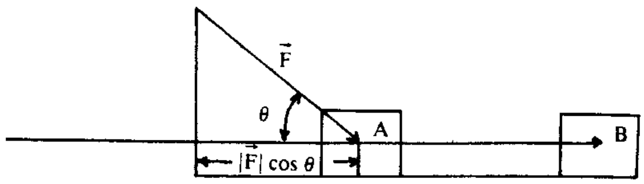
$$\overrightarrow{BP} = (4 - 0)\vec{i} + (3 - 2)\vec{j} = 4\vec{i} + \vec{j}$$

จึงได้ว่า

$$d = \text{proj}_{\vec{N}} \overrightarrow{BP} = \frac{\vec{N} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\vec{N}|} = \frac{4 + 3}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์มีประโยชน์ในทางกลศาสตร์ เมื่อใช้ในการคำนวณงานที่กระทำโดยแรง $\vec{F}$ เมื่อจุดที่ F ทำให้เคลื่อนที่ไป $\overrightarrow{AB}$ ถ้าแรงยังเป็นค่าคงตัวในทิศทางและขนาด งานนี้กำหนดโดย (รูป 2.6.6)

$$\begin{aligned} \text{งาน} &= (|\vec{F}| \cos \theta)\, |\overrightarrow{AB}| \\ &= \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$



รูป 2.6.6 งานกระทำโดย $\vec{F}$ เคลื่อนที่ไป $\overrightarrow{AB}$ คือ $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = (|\vec{F}| \cos \theta)\, |\overrightarrow{AB}|$

แบบฝึกหัด 2.6

1. สมมุติว่า $\vec{A} \cdot \vec{B}_1 = \vec{A} \cdot \vec{B}_2$ และ A ไม่เป็นศูนย์ แต่ว่าไม่ทราบเกี่ยวกับเวกเตอร์ $\vec{B}_1$ และ $\vec{B}_2$ อยากทราบว่าจะนำ $\vec{A}$ ออกจากทั้งสองข้างของสมการได้หรือไม่ จงให้เหตุผลประกอบคำตอบด้วย
2. ก) จงแสดงเวกเตอร์โพรเจกชันของ $\vec{B}$ ไปบน $\vec{A}$ ในรูปของเวกเตอร์ที่จะสะดวกในการใช้คำนวณต่อไป

   ข) จงหาเวกเตอร์โพรเจกชันของ $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ไปบนเวกเตอร์ $\vec{A} = 10\vec{i} + 11\vec{j} - 2\vec{k}$
3. จงหามุมภายในของสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีจุดยอดเป็น $A(-1, 0, 2)$, $B(2, 1, -1)$ และ $C(1, -2, 2)$
4. จงหาจุด $A(a, a, 0)$ บนเส้นตรง $y = x$ ในระนาบ xy ซึ่งเวกเตอร์ $\vec{AB}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง OA เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด และ B เป็นจุด $(2, 4, -3)$
5. จงหาส่วนประกอบของ $\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ในทิศทางของ $\vec{B} = 2\vec{i} + 10\vec{j} - 11\vec{k}$
6. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ของข้อ 5
7. จงหางานที่กระทำโดยแรง $\vec{F} = -w\vec{k}$ ขณะที่จุดของการประยุกต์เคลื่อนที่จากจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ไปยังจุดที่สอง $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ตามเส้นตรง P_1P_2
8. จงใช้วิธีการของเวกเตอร์ แสดงว่าระยะทาง d ระหว่างจุด (x_1, y_1) และเส้นตรง $ax + by + c = 0$ คือ

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

9. ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ทำมุม α, β, และ γ ตามลำดับกับแกน x, y และ z ทางบวก แล้ว $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ เรียก โคไซด์แสดงทิศทาง

   จงแสดงว่า

   ก) $$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

   $$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

   $$\cos\gamma \quad \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

ข) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

ค) $\vec{u} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

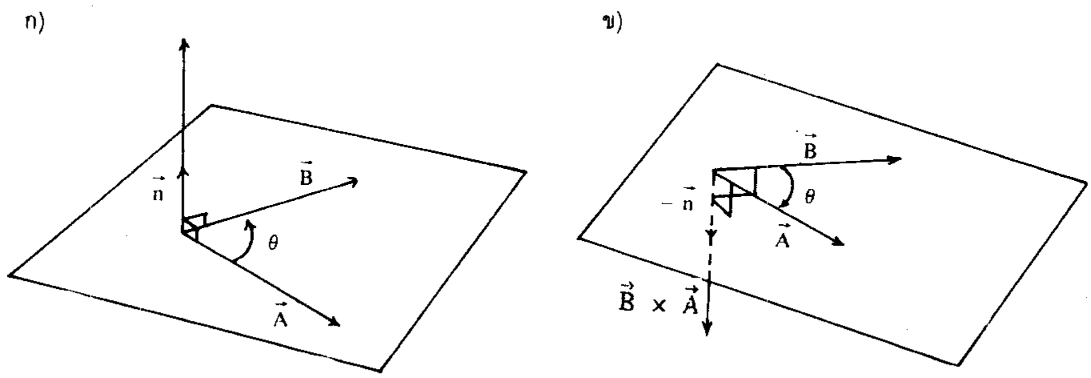
10. **จงแสดงว่าการคูณเชิงสเกลาร์เป็นบวกแน่นอน** (positive definite) **นั่นคือ** $\vec{A} \cdot \vec{A} \geqslant 0$**สำหรับ**ทุกเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{A} \cdot \vec{A} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์

2.7 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์ในปริภูมิ

(The Vector Product of Two Vectors in Space)

เวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์สองเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ อาจจะเปลี่ยนที่ในแนวทางการกระทำที่ขนานกันกับแนวทางการกระทำเดิมได้ โดยนำจุดเริ่มต้นของทั้งสองเวกเตอร์มาเริ่มต้นที่จุดเดียวกัน **และให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ ด้วย $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ แล้ว $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ กำหนดระนาบขึ้นระนาบหนึ่ง** (โดยยกเว้นกรณีที่ $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$) ให้ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับระนาบนี้ และชี้ในทิศทางเกลียวบิดทางขวา โดยหัวลูกศรหมุนจาก $\vec{A}$ ไปยัง $\vec{B}$ เป็นมุม θ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product or cross product) ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ในทิศทางดังกล่าวแล้ว นิยามโดยสมการ (รูป 2.7.1 ก.)

$$\vec{A} \times \vec{B} \quad = \quad \vec{n}\,|\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta \qquad \text{..........(2.7.1)}$$

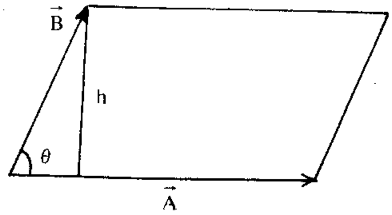


รูป 2.7.1 $\vec{A} \times \vec{B}$ และ $\vec{B} \times \vec{A}$ *มีขนาดเดียวกัน แต่ชี้ในทิศทางตรงกันข้ามจากระนาบของ* $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

เหมือนกับนิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ที่กำหนดให้หัวข้อก่อน คือนิยามของผลคูณเชิงเวกเตอร์ที่กำหนดให้นี้พิกัดอิสระ กล่าวต่อไปได้ว่า ผลคูณเชิงเวกเตอร์ $\vec{A} \times \vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ ขณะที่ผลคูณเชิงสเกลาร์ $\vec{A} \cdot \vec{B}$ เป็น สเกลาร์

ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ขนานกัน แล้ว $\theta = 0^\circ$ หรือ 180° และ $\sin\theta = 0$ ดังนั้น $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{O}$ ในกรณีนี้ทิศทางของ $\vec{n}$ ไม่ได้กำหนด แต่สิ่งนี้ไม่สำคัญเมื่อเวกเตอร์ศูนย์ไม่มีทิศทางที่แน่นอน ในกรณีอื่น ๆ

ทั้งหมด $\vec{n}$ กำหนดได้ และการคูณเชิงเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}$ และมีขนาดเท่ากับพื้นที่ $|\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin \theta$ ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram) กำหนดโดยเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ดังรูป 2.7.2



รูป 2.7.2 พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\vec{A} \times \vec{B}|$

ถ้าลำดับของตัวประกอบ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ กลับกัน รูปทรงการคูณเชิงเวกเตอร์จะมีทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่เกิดจากเวกเตอร์ทั้งสองกลับกัน ดังรูป 2.7.1 ข. ทั้งนี้เพราะว่า เกลียวมือขวา (right handed screw) หมุนผ่าน θ จาก $\vec{B}$ ไปยัง $\vec{A}$ ชี้ในทิศทางตรงข้ามเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแต่แรก $\vec{n}$ จะถูกแทนที่โดย $-\vec{n}$ ด้วยเหตุผลที่ว่า

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \qquad \text{..........(2.7.2)}$$

ดังนั้น การคูณเชิงเวกเตอร์ไม่สลับที่ การสลับลำดับ ของตัวประกอบจะเปลี่ยนค่าผลคูณ

เมื่อนิยามถูกประยุกต์เข้ากับ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ จะพบว่า

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j} \end{aligned} \qquad \text{..........(2.7.3)}$$

ขณะที่

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

ต่อไปจะแสดง $\vec{A} \times \vec{B}$ ในพจน์ของส่วนประกอบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ข้อสังเกตประการแรกก็คือ กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law)

$$(r\vec{A}) \times (s\vec{B}) = (rs)\, \vec{A} \times \vec{B} \qquad \text{..........(2.7.4)}$$

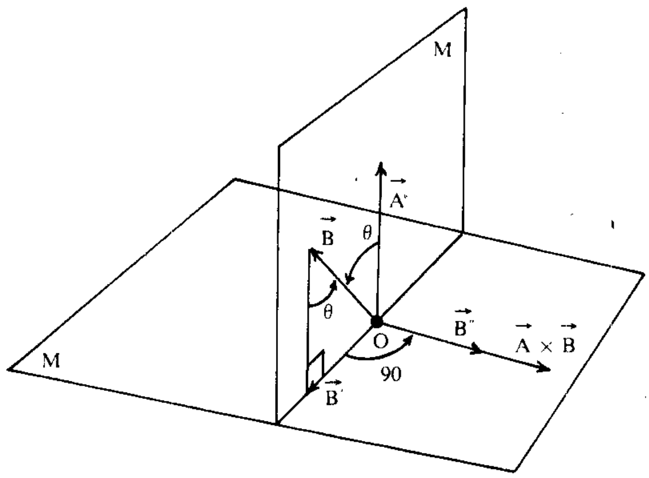
เป็นไปตามความหมายทางเรขาคณิตของการคูณเชิงเวกเตอร์ ประการที่สองจะใช้การพิสูจน์ในเชิงเรขาคณิตเพื่อตั้งกฎการแจกแจง (distributive law)

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \qquad \text{..........(2.7.5)}$$

พิสูจน์ เพื่อแสดงว่าสมการ (2.7.5) เที่ยงตรง จะแปลตามผล ณเชิงเวกเตอร์ $\vec{A} \times \vec{B}$ โดยวิธีการที่แตกต่างออกไป ให้เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ลากจากจุด O และให้ระนาบ M ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ ที่ O ดังรูป 2.7.3 โพรเจคเวกเตอร์ $\vec{B}$ ในเชิงตั้งฉากไปบน M จะได้เวกเตอร์ $\vec{B}'$ ซึ่งความยาวเท่ากับ $|\vec{B}| \sin \theta$ หมุนเวกเตอร์ $\vec{B}'$ ไป 90° รอบ $\vec{A}$ ในทิศทางบวก ทำให้ได้เวกเตอร์ $\vec{B}''$

สุดท้าย คูณ $\vec{B}''$ ด้วยความยาวของ $\vec{A}$ ผลลัพธ์ก็คือ เวกเตอร์ $|\vec{A}|\,\vec{B}''$ เท่ากับ $\vec{A} \times \vec{B}$ เมื่อ $\vec{B}''$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}$ โดยสร้างรูป 2.7.3 และ

$$|\vec{A}||\vec{B}''| = |\vec{A}||\vec{B}'| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$$



รูป 2.7.3 $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|\,\vec{B}''$

โดยแต่ละการดำเนินการทั้งสามนี้คือ

1. โพรเจกชันไปบน M
2. หมุนรอบ $\vec{A}$ ไป 90°
3. คูณด้วยสเกลาร์ $|\vec{A}|$

เมื่อประยุกต์กับสามเหลี่ยม ทำให้เกิดสามเหลี่ยมอื่นอีก ถ้าเริ่มต้นด้วยสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านเป็น $\vec{B}$, $\vec{C}$ และ $\vec{B} + \vec{C}$ ดังรูป 2.7.4 แล้วประยุกต์สามขั้นนี้ จะได้รับอย่างต่อเนื่อง

1. สามเหลี่ยมมีด้านเป็น $\vec{B}'$, $\vec{C}'$ และ $(\vec{B} + \vec{C})'$ สอดคล้องกับสมการเวกเตอร์

$$\vec{B}' + \vec{C}' = (\vec{B} + \vec{C})'$$

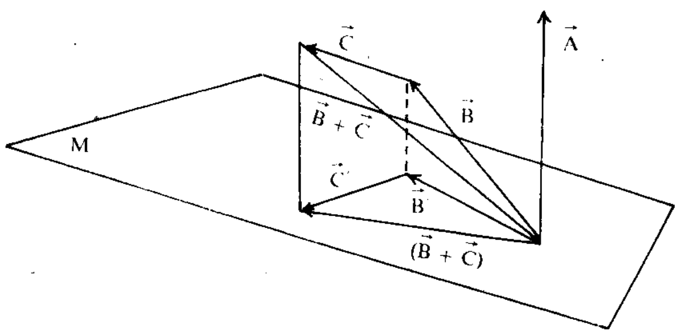
2. สามเหลี่ยมมีด้านเป็น $\vec{B}''$, $\vec{C}''$ และ $(\vec{B} + \vec{C})''$ สอดคล้องกับสมการเวกเตอร์

$$\vec{B}'' + \vec{C}'' = (\vec{B} + \vec{C})''$$

(สัญลักษณ์ $''$ (double-prime) บนแต่ละเวกเตอร์มีความหมายเช่นเดียวกันกับที่มีในรูป 2.7.3) และประการสุดท้าย

3. สามเหลี่ยมมีด้านเป็น $|\vec{A}|\vec{B}''$, $|\vec{A}|\vec{C}''$ และ $|\vec{A}|(\vec{B} + \vec{C})''$ สอดคล้องกับสมการเวกเตอร์

$$|\vec{A}|\vec{B}'' + |\vec{A}|\vec{C}'' = |\vec{A}|(\vec{B} + \vec{C})'' \qquad \text{..........(2.7.6)}$$



รูป 2.7.4 สมการเวกเตอร์ (2.7.7) โพรเจกบนระนาบที่ตั้งฉากกับ $\vec{A}$

เมื่อใช้สมการ $|\vec{A}|\vec{B}'' = \vec{A} \times \vec{B}$, $|\vec{A}|\vec{C}'' = \vec{A} \times \vec{C}$ และ $|\vec{A}|(\vec{B} + \vec{C})'' = \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$ ซึ่งเป็นผลที่ได้ศึกษามาแล้ว สมการ (2.7.6) จะกลายเป็น

$$\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$$

ซึ่งก็คือสมการ (2.6.5) ที่ต้องการจะตั้งขึ้นนั่นเอง

กฎที่คู่กัน

$$(\vec{B} + \vec{C}) \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{A} \qquad \text{..........(2.7.7)}$$

ได้จากสมการ (2.7.5) ด้วย การคูณ ทั้งของด้านของสมการ (2.7.5) ด้วยลบ และอาศัยความจริงที่ว่าการสับเปลี่ยนสองตัวประกอบในผลคูณเชิงสเกลาร์เปลี่ยนเครื่องหมายผลลัพธ์

จากสมการ (2.7.4), (2.7.5) และ (2.7.7) อาจจะสรุปได้ว่า ผลคูณเชิงเวกเตอร์หรือการคูณของเวกเตอร์เป็นไปตามกฎของพีชคณิตตามปรกติ ยกเว้นลำดับของตัวประกอบจะต้องไม่ผันกลับ (reverse) ถ้าประยุกต์ผลลัพธ์นี้ในการคำนวณ $\vec{A} \times \vec{B}$ ด้วย

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\
\vec{B} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}
\end{aligned}$$

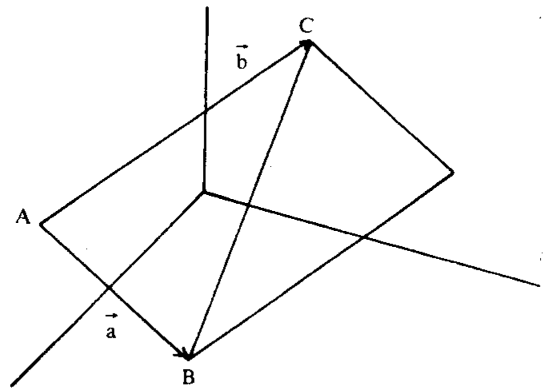
จะได้

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \\
&= a_1b_1\vec{i} \times \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} + a_1b_3\vec{i} \times \vec{k} \\
&\quad + a_2b_1\vec{j} \times \vec{i} + a_2b_2\vec{j} \times \vec{j} + a_2b_3\vec{j} \times \vec{k} \\
&\quad + a_3b_1\vec{k} \times \vec{i} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{j} + a_3b_3\vec{k} \times \vec{k} \\
&= \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \qquad \text{..........(2.7.8)}
\end{aligned}$$

เมื่อสมการ (2.7.3) ได้ใช้ในการคำนวณผลคูณ $\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, เป็นต้น พจน์ทางด้านขวาของสมการ (2.7.8) เป็นพจน์เช่นเดียวกับการขยายลำดับที่สามของตัวกำหนดได้ ดังนั้น ผลคูณเชิงเวกเตอร์อาจจะได้รับความสะดวกในการคำนวณจากสมการ

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{..........(2.7.9)}$$

ตัวอย่าง 2.7.1 จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดเป็น A(1, −1, 0), B(2, 1, −1) และ C(−1, 1, 2) รูป 2.7.5



รูป 2.7.5 พื้นที่ของ $\triangle$ ABC*เป็นครึ่งหนึ่งของ* $|\vec{a} \times \vec{b}|$

วิธีทำ สองด้านของสามเหลี่ยมที่กำหนดให้แทนด้วยเวกเตอร์

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (2-1)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (-1-0)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-1-1)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

พื้นที่ของสามเหลี่ยมเท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่แทนด้วยเวกเตอร์ทั้งสอง พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานคือขนาดของเวกเตอร์

$$\vec{C} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{k}$$

ซึ่ง $|\vec{C}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ **เพราะฉะนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยม คือ** $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{2}$