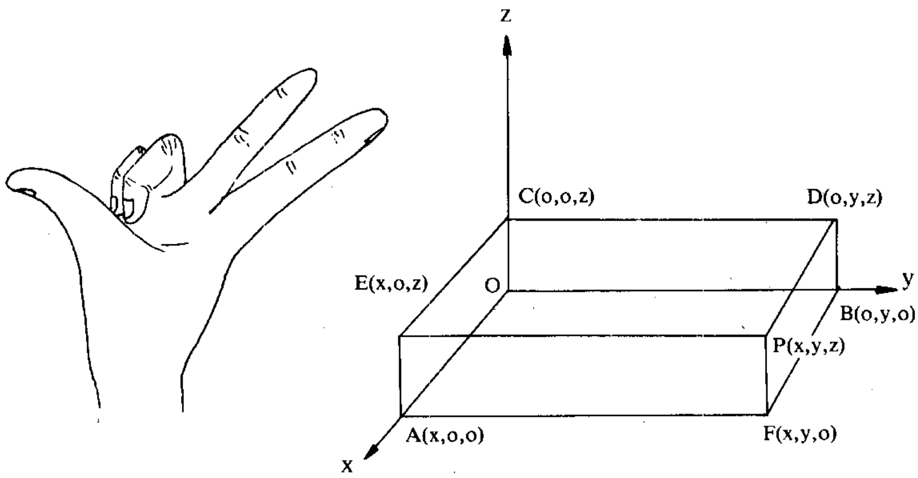
บทที่ 1
เรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ
(Solid Analytic Geometry)

1.1 ระบบพิกัดฉาก

(The Rectangular Coordinate System)

การกำหนดจุดในปริภูมิสามมิติ (three dimensional space) ต้องมีกรอบอ้างอิง (frame of reference) ที่แน่นอน การได้กรอบดังกล่าวก็โดยเลือกตรึงจุด o สำหรับจุดกำเนิด (origin) และเส้นกำหนดทิศทาง (directed lines) สามเส้น ซึ่งตั้งฉากซึ่งกันและกัน (mutually perpendicular) ที่จุด O (รูป 1.1.1) เส้นสามเส้นนี้เรียก แกน x แกน y และแกน z

ให้แกน x และแกน y อยู่ในระนาบแนวระดับ (horizontal plane) และแกน z อยู่ในแนวดิ่ง เมื่อใช้มือขวาให้หัวแม่มือชี้ในทิศทางบวกของแกน x และนิ้วชี้ชี้ในทิศทางบวกของแกน y ถ้านิ้วกลางชี้ในทิศทางบวกของแกน z แล้วระบบพิกัดนี้เป็น ระบบมือขวา (right - handed system) ถ้านิ้วกลางชี้ในทิศทางลบตามแกน z ระบบพิกัดนี้เป็นระบบมือซ้าย (left haned system) ระบบที่แสดงในรูป 1.1.1 เป็นระบบมือขวา และในหนังสือเล่มนี้จะใช้ระบบมือขวา



รูป 1.1.1 ระบบมือขวา

แกน x และแกน y กำหนดระนาบแนวระดับเรียกระนาบ xy ในทำนองเดียวกัน ระนาบ xz เป็นระนาบแนวดิ่ง (vertical plane) ประกอบด้วย แกน x และแกน z และระนาบ yz เป็นระนาบแนวดิ่งที่กำหนดโดยแกน y และแกน z

ถ้า P เป็นจุดใด ๆ ในปริภูมิ จะมีสามพิกัด เมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงที่แน่นอน และพิกัดนี้จะแสดงโดยเขียนว่า P(x,y,z) พิกัดนี้กำหนดดังนี้

x เป็นระยะทางระบุทิศทาง (directed distance) ของ P จากระนาบ yz

y เป็นระยะทางระบุทิศทางของ P จากระนาบ xz

z เป็นระยะทางระบุทิศทางของ P จากระนาบ xy

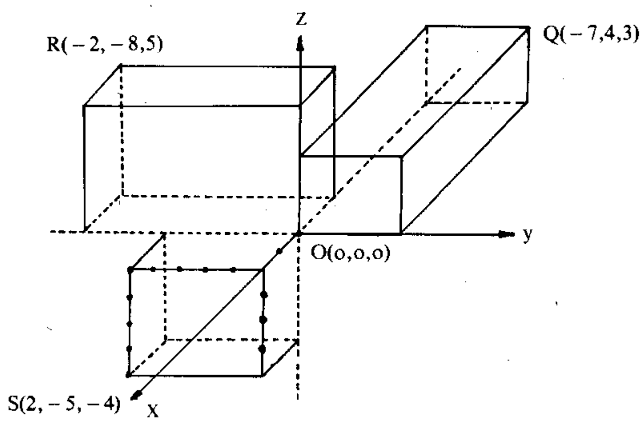
พิจารณาจากรูปที่ 1.1.1 มีระยะทางระบุทิศทาง DP, EP และ FP ตามลำดับ เส้นจำกัด (line segment) เหล่านี้เป็นขอบของกล่อง ที่แต่ละหน้าตั้งฉากกับแกนพิกัดแกนหนึ่ง ด้วยตัวอักษรของรูปที่ 1.1.1 A เป็นโพรเจคชั่น (Projection) ของ P บนแกน x B เป็นโพรเจคชั่นของ P บนแกน y และ C เป็นโพรเจคชั่นของ P บนแกน z ดังนั้นจึงนิยามพิกัดของ P ได้อีกคือ

x เป็นระยะทางระบุทิศทาง OA

y เป็นระยะทางระบุทิศทาง OB

z เป็นระยะทางระบุทิศทาง OC

จุด Q(−7,4,3), R(−2,−8,5) และ S(2,−5,−4) แสดงในรูปที่ 1.1.2 ซึ่งแต่ละจุดก็จะสัมพันธ์กับกล่อง จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ถ้า x เป็นลบ จุด (x,y,z) จะอยู่ด้านหลังของระนาบ yz ถ้า y เป็นลบ จุดก็จะอยู่ทางซ้ายมือของระนาบ xz และถ้า z เป็นลบ จุดจะอยู่ใต้ระนาบ xy ระนาบพิกัดทั้งสามแบ่งปริภูมิออกเป็นแปดบริเวณเรียกอัฐมภาค (octant) อัฐมภาคที่พิกัดทั้งสามเป็นบวก เรียกอัฐมภาคที่หนึ่ง อัฐมภาคอื่น, ก็ให้ชื่อเป็นจำนวนต่อไปได้ แต่ไม่มีความจำเป็น รูปใน 3 มิติด้วยจุดยอด O,A,F,B,C,E,P และ D ดังรูป 1.1.1 ปรกติเรียกทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานฉาก (rectangular parallelepiped) หนังสือเล่มนี้จะใช้คำสั้น ๆ ว่ากล่องแทน

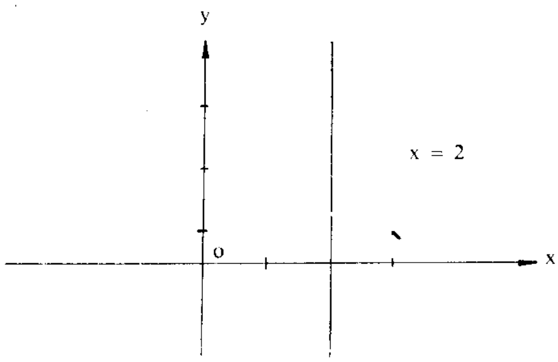


รูป 1.1.2 แต่ละจุดสัมพันธ์กับกล่อง (rectangular parallelepiped)

ในการศึกษาเรขาคณิตวิเคราะห์ในระนาบ (สองมิติ) สมการ

$$x = 2$$

เป็นสมการของเส้นตรง ที่แทนจุดทุกจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และอยู่ห่างจากแกน y สองหน่วย ดังรูป 1.1.3

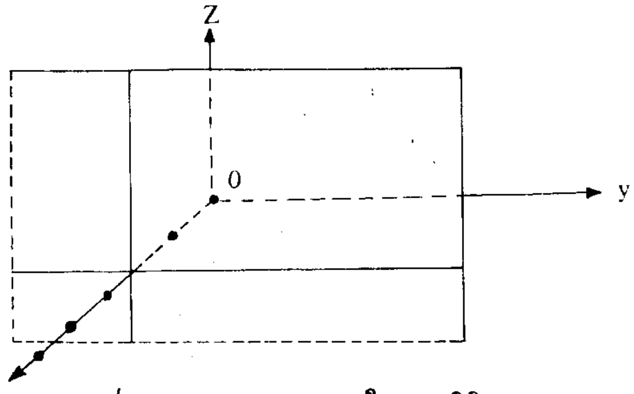


รูป 1.1.3 เส้นตรง x = 2 ในสองมิติ

ส่วนการศึกษาเรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ สมการ

$$x = 2$$

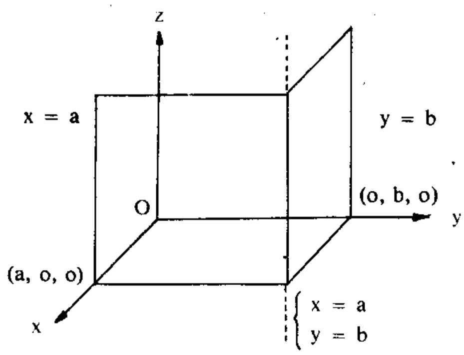
แทนโลกัส (locus) ของจุดทั้งหลายที่สอดคล้องกับสมการนี้ ซึ่งเป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ-yz และห่างจากระนาบ yz 2 หน่วย ดังรูป 1.1.4



รูป 1.1.4 ระนาบ x = 2 ในสามมิติ

ระนาบ x = 2 ตั้งได้ฉากกับแกน x และตัดแกน x ที่จุด (2, 0, 0)จะมีเพียงระนาบหนึ่งและระนาบเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด (2, 0, 0) และตั้งฉากกับแกน x ดังนั้น จุดทุก ๆ จุดที่มี x – พิกัดเป็น 2 หรือ (2, y, z) จะต้องอยู่ในระนาบนี้

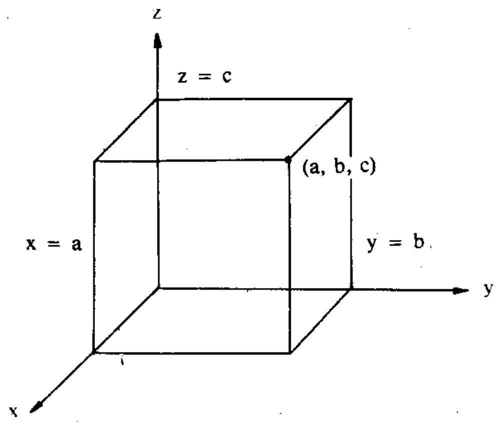
สมการ $x=a$ เป็นสมการของระนาบที่ขนานกับระนาบ yz อยู่ห่างจากระนาบ yz เท่ากับ a หน่วย และตั้งฉากกับแกน x ที่จุด (a,o,o) ส่วนสมการ $y=b$ เป็นสมการของระนาบที่ขนานกับระนาบ xz อยู่ห่างจากระนาบ xz เท่ากับ b หน่วยและตั้งฉากกับแกน y ที่จุด (o, b, o) เพราะว่าระนาบสองระนาบถ้าไม่ขนานกันก็จะต้องตัดกันเป็นเส้นตรง ดังนั้น ระนาบ $x = a$ และ $y = b$ จะต้องตัดกันเป็นเส้นตรง ดังรูป 1.1.5



รูป 1.1.5 เส้นตรง $x = a, y = b$

สมการ $x = a, y = b$ เป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน z

ส่วนสมการ $x = a, y = b$ และ $z=c$ แทนสมการของระนาบ 3 ระนาบ ซึ่งตัดกันที่จุด (a, b, c) ดังรูป 1.1.6



รูป 1.1.6 จุด (a, b, c)

แบบฝึกหัด 1.1

1. เมื่อจุด $P(1, 2, 3)$ เป็นจุดในปริภูมิแล้ว ระยะทางระบุทิศทางของ P จากระนาบพิกัดมีค่าเท่าไร
2. เมื่อจุด $P(1, 2, 3)$ เป็นจุดในปริภูมิแล้ว โพรเจคชั่นของ P บนแกนพิกัด คือ จุดอะไรบ้าง
3. จงเขียนภาพของระนาบ $x = 3$ ลงในปริภูมิ และสัมพันธ์กับระนาบพิกัดอย่างไร
4. จงเขียนภาพของระนาบ $2x + 3y + z = 6$
5. อยากทราบว่า $x = 2$ และ $y = 3$ แทนสมการอะไรในปริภูมิ พร้อมทั้งเขียนภาพประกอบ
6. อยากทราบว่า $x = 1, y = 2$ และ $z = 3$ แทนสมการของอะไรในปริภูมิ พร้อมทั้งเขียนภาพประกอบ

1.2 สูตรระยะทาง

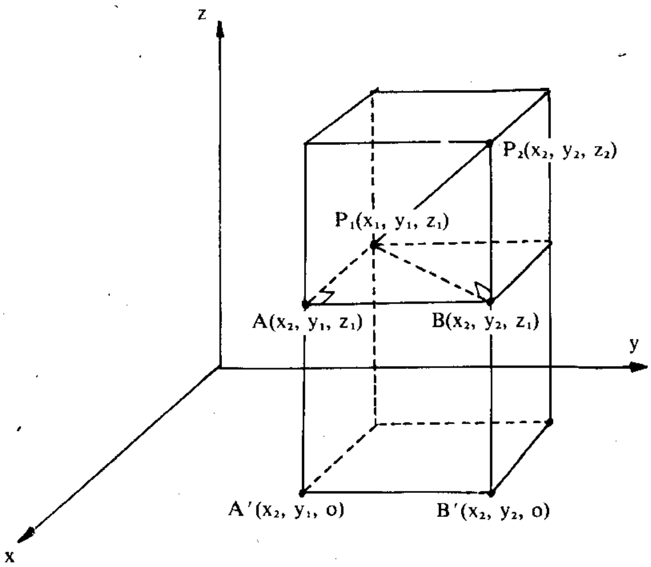
(The Distance Formula)

จะได้กล่าวถึงระยะทางและการหาจุดแบ่งระยะทางระหว่างจุด 2 จุดในอัตราส่วนที่กำหนดให้

ทฤษฎีบท 1.2.1 ระยะทาง d ระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เมื่อ $d = \overline{P_1P_2}$ คือ

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

พิสูจน์ สร้างกล่องที่ทุกหน้าเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า (rectangular bins) ดังรูป 1.2.1 และอาศัยความรู้จากทฤษฎีบทปีทาโกรัสช่วยในการพิสูจน์



รูป 1.2.1

กำหนดให้ระยะทาง d ระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ กับ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ดังรูป 1.2.1 ทำให้จุด A,B มีพิกัดดังนี้ $A(x_2, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_1)$

เพราะฉะนั้น $\overline{P_1A} = x_2 - x_1$

$\overline{AB} = y_2 - y_1$

และ $\overline{BP_2} = z_2 - z_1$

เพราะว่า $\triangle P_1B\,P_2$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

จึงได้ $$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1B}^2 + \overline{BP_2}^2 \qquad \text{..........(1)}$$

และเพราะว่า $\triangle p_1AB$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากด้วย

จึงได้ $$\overline{P_1B}^2 = \overline{P_1A}^2 + \overline{AB}^2 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) จึงได้ว่า

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1A}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BP_2}^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$d = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

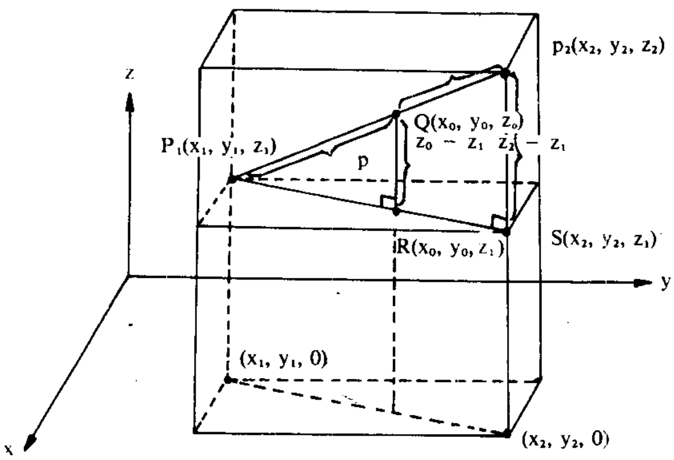
ทฤษฎีบท 1.2.2 เมื่อจุด $Q(x_o, y_o, z_o)$ เป็นจุดแบ่งของเส้นจำกัด จาก $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ไปยัง $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ในอัตราส่วน p : q จะได้ว่า

$$x_0 = \frac{px_2 + qx_1}{p + q} \quad y_0 = \frac{py_2 + qy_1}{p + q}, \quad z_0 = \frac{pz_2 + qz_1}{p + q}$$

พิสูจน์ พิจารณารูป 1.2.2

โดยที่ $Q(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดแบ่งเส้นจำกัด P_1P_2 ในอัตราส่วน p ต่อ q

และอาศัยการฉาย (project) จุด $Q(x_o, y_o, z_o)$ ลงไปบนระนาบ xy ในแนวดิ่งตั้งฉากกับระนาบ xy เพื่อทำการหา z_o ได้ดังนี้



รูป 1.2.2

อาศัยความรู้เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย $\triangle P_1QR$ กับ $\triangle P_1P_2S$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_0 - z_1} = \frac{p + q}{p}$$

จะได้ว่า
$$p(z_2 - z_1) = (p + q)(z_0 - z_1)$$
$$pz_2 - pz_1 = (p + q)z_0 - pz_1 - qz_1$$
$$(p + q)z_0 = pz_2 + qz_1$$
$$z_0 = \frac{pz_2 + qz_1}{p + q}$$

โดยแนวความคิดเดียว ก็จะหาค่าของ x_o, y_o ได้คือ

$$x_0 = \frac{px_2 + qx_1}{p + q}$$

และ
$$y_0 = \frac{py_2 + qy_1}{p + q}$$

ในการหา $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นจำกัด P_1P_2 นั้นเราก็สามารถหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบท 1.2.2 เพราะว่าการหาจุดกึ่งกลางเป็นการแบ่งเส้นจำกัดนี้ในอัตราส่วน 1 : 1 ดังนั้น

$$\bar{x} = \frac{1x_2 + 1x_1}{1 + 1} = \frac{x_2 + x_1}{2} \text{ หรือ } \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

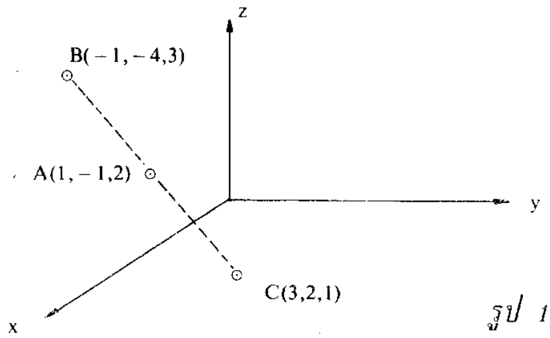
$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

นั่นคือจุดกึ่งกลางของเส้นจำกัดที่มีจุดปลายเป็น $P_1(x_1, y_1, z_1)$

และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ คือ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

ตัวอย่าง 1.2.1 กำหนดให้ A(1, −1,2), B(−1, −4,3) และ C(3,2,1) เป็นจุด 3 จุดในปริภูมิ 3 มิติ แล้วจุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ จะต้องพิจารณาดูว่าแต่ละจุดที่กำหนดให้นั้นอยู่ ณ ที่ใดในปริภูมิ 3 มิติ



รูป 1.2.3

เพราะว่า

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-(-1)^2 + (2-(-4))^2 + (1-3)^2}$$
$$= \sqrt{56}$$
$$= 2\sqrt{14}$$
$$\overline{BA} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-1-(-4))^2 + (2-3)^2}$$
$$= \sqrt{14}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{14}$$

ทำให้ได้ $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$

ดังนั้นจุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.2.2 จุดปลายข้างหนึ่งของเส้นตรง คือ $P_1(-1,2,5)$ จุดกึ่งกลางของเส้นตรงก็คือ P อยู่บนระนาบ xz และเมื่อจุดปลายอีกข้างหนึ่งคือ P_2 อยู่บนเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x=5$, $z=8$ จงหาพิกัดของ P และ P_2

วิธีทำ เมื่อ $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นจำกัด P_1P_2 และอยู่บนระนาบ xz จึงเขียนพิกัดได้เป็น $P(\bar{x}, o, \bar{z})$ ส่วน $P_2(x_2,y_2,z_2)$ นั้นอยู่บนเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x=5$, $z=8$ จึงเขียนในรูปพิกัดได้ว่า $P_2(5,y_2,8)$

อาศัยสูตรของจุดกึ่งกลางจึงได้ว่า

$\bar{x} = \frac{-1+5}{2} = 2$, $0 = \frac{2+y_2}{2}$ นั่นคือ $y_2 = -2$ และ $\bar{z} = \frac{5+8}{2} = \frac{13}{2}$

ดังนั้นพิกัดของจุด P คือ $(2,0,\frac{13}{2})$ และพิกัดของ จุด P_2 คือ $(5,-2,8)$

แบบฝึกหัด 1.2

ข้อ 1 ถึง 5 จงหาความยาวของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมต่อไปนี้ และอยากทราบว่าเป็นสามเหลี่ยมอะไร

1. $A(2,1,3)$, $B(3,-1,-2)$, $C(0,2,-1)$
2. $A(4,3,1)$, $B(2,1,2)$, $C(0,2,4)$
3. $A(3,-1,-1)$, $B(1,2,1)$, $C(6,-1,2)$
4. $A(1,2,-3)$, $B(4,3,-1)$, $C(3,1,2)$
5. $A(0,0,0)$, $B(4,1,2)$, $C(-5,-5,-1)$

ข้อ 6 ถึง 9 จงหาพิกัดของจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด A และ B ดังต่อไปนี้

6. $A(2,1,3)$, $B(-4,-1,2)$
7. $A(4,6,1)$, $B(2,-1,3)$
8. $A(0,2,-3)$, $B(1,4,6)$
9. $A(-2,0,0)$, $B(0,4,-1)$

ข้อ 10 ถึง 13 จงหาความยาวของเส้นมัธยฐาน (median) ของสามเหลี่ยม ABC ดังต่อไปนี้

10. $A(2,1,3)$, $B(3,-1,-2)$, $C(0,2,-1)$
11. $A(4,3,1)$, $B(2,1,2)$, $C(0,2,4)$
12. $A(3,-1,-1)$, $B(1,2,1)$, $C(6,-1,2)$
13. $A(1,2,-3)$, $B(4,3,-1)$, $C(3,1,2)$
14. จุดปลายจุดหนึ่งของเส้นจำกัด (line segment) อยู่ที่ $P(4,6,-3)$ และจุดกึ่งกลางอยู่ที่ $Q(2,1,6)$ จงหาจุดปลายอีกจุดหนึ่ง
15. จุดปลายจุดหนึ่งของเส้นจำกัดอยู่ที่ $P_1(-2,1,6)$ และจุดกึ่งกลาง Q อยู่ในระนาบ $y=3$ จุดปลายอีกจุดหนึ่ง P_2 อยู่บนเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x=4$ และ $z=6$ จงหาพิกัดของ P_2 และ Q

ข้อ 16 ถึง 19 จงพิจารณาว่าจุดสามจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

16. $A(1,-1,2)$, $B(-1,-4,3)$, $C(3,2,1)$
17. $A(2,3,1)$, $B(4,6,5)$, $C(-2,-2,-7)$

18. $A(1, -1, 2), B(3, 3, 4), C(-2, -6, -1)$

19. $A(-4, 5, 6), B(-1, 2, -1), C(3, -3, 6)$

20. จงอธิบายโลกัสของจุดในปริภูมิที่สอดคล้องกับอสมการ $-2 \leqslant x < 3$

21. จงอธิบายโลกัสของจุดในปริภูมิที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $x = 2, z = -4$

22. จงอธิบายโลกัสของจุดในปริภูมิซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$

23. จงอธิบายโลกัสของจุดในปริภูมิซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $x \geqslant 0, y > 0, z < 0$

24. จงพิสูจน์สูตรสำหรับหาจุดกึ่งกลางของเส้นจำกัด

25. สูตรสำหรับพิกัดของจุด $Q(x_0, y_0, z_0)$ ซึ่งแบ่งเส้นจำกัดจาก $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ไปยัง $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ในอัตราส่วน p ต่อ q คือ

$$x_0 = \frac{p x_2 + q x_1}{p + q}, \quad y_0 = \frac{p y_2 + q y_1}{p + q}, \quad z_0 = \frac{p z_2 + q z_1}{p + q}$$

จงพิสูจน์สูตรนี้

26. จงหาสมการของโลกัสของทุก ๆ จุดซึ่งห่างจากจุด $(2, -1, 3)$ และ $(3, 1, -1)$ เท่ากัน พร้อมทั้งอธิบายโลกัสนี้ด้วย

27. จงหาสมการของโลกัสของทุก ๆ จุดซึ่งห่างจากจุด $(5, 1, 0)$ และ $(2, -1, 4)$ เท่ากัน พร้อมทั้งอธิบายโลกัสนี้ด้วย

28. จุด $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}), D(0, 1, 0)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่ด้าน (four-sided figure) จงแสดงว่า $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1$ จงพิสูจน์ว่ารูปนี้ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

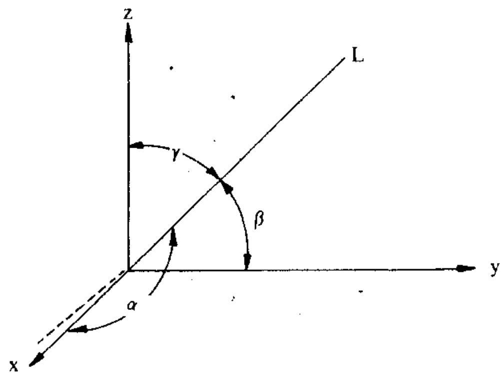
29. จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมที่เชื่อมจุดยอดที่อยู่ตรงข้ามของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานฉากแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

30. **กำหนดให้** P_1, P_2 **เป็นจุดซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น** (1,2,3),(2,4,5) ตามลำดับ **จงหาโคออร์ดิเนตของจุดซึ่งแบ่ง** p_1, p_2 **ในอัตราส่วน** 1 : 2

1.3 โคไซน์แสดงทิศทางและจำนวนแสดงทิศทาง

(Direction Cosines and Numbers)

พิจารณาเส้นตรง L ที่ผ่านจุดกำเนิด และเส้นตรงนี้มีลูกศรกำกับ ดังรูป 1.3.1 เรียกเส้นตรง L นี้ว่าเส้นระบุทิศทาง (directed line)



รูป 1.3.1

ถ้าไม่มีลูกศรบนเส้นตรงเรียกเส้นตรงชนิดนี้ว่า เส้นไม่ระบุทิศทาง (undirected line)

เส้นระบุทิศทาง L ทำมุมกับแกน x แกน y และแกน z ในทิศทางบวก เป็น α, β และ γ ตามลำดับ เรียกมุมทั้งสามนี้ว่า มุมแสดงทิศทาง (direction angles)

เส้นไม่ระบุทิศทาง L จะมีมุมแสดงทิศทางสองชุดด้วยกันคือ α, β, γ และ $180 - \alpha$, $180 - \beta$, $180 - \gamma$ เมื่อ α, β, γ เป็นมุมแสดงทิศทางของเส้นระบุทิศทาง L

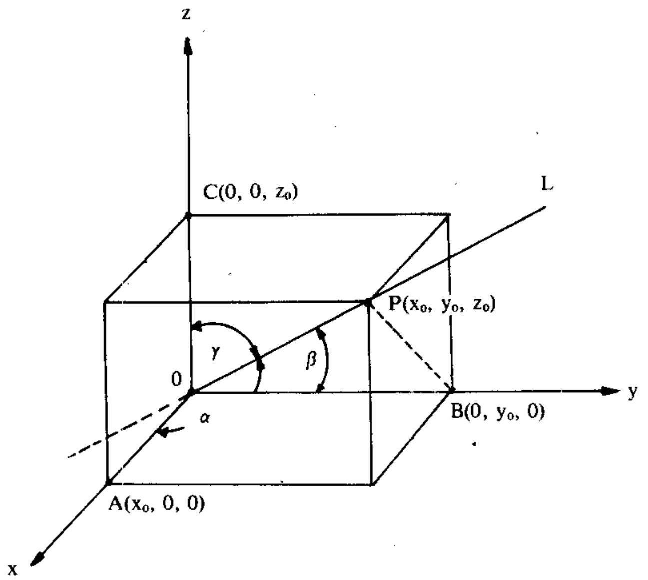
นิยาม 1.3.1 ถ้า α, β, γ เป็นมุมแสดงทิศทางของเส้น L แล้ว $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ เรียกโคไซด์แสดงทิศทางของเส้น L

เมื่อ $\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$ ดังนั้น ถ้า λ, μ, γ เป็นโคไซน์แสดงทิศทางของเส้นระบุทิศทาง L แล้ว λ, μ, γ และ $-\lambda, -\mu, -\gamma$ เป็นโคไซน์แสดงทิศทางสองชุดของเส้นไม่ระบุทิศทาง L

ในการกำหนดโคไซน์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ใด ๆ ในปริภูมิจะใช้การพิจารณาเส้นตรง L′ ที่ผ่านจุดกำเนิดและขนานกับ L ซึ่งได้จากนิยามว่า L มีโคไซน์แสดงทิศทางเช่นเดียวกับ L′ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า เส้นตรงทั้งหลายที่ขนานกันในปริภูมิมีโคไซด์แสดงทิศทางเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.3.1 ถ้า α, β, γ เป็นมุมแสดงทิศทางของ L แล้ว $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

พิสูจน์ ให้ L ผ่านจุดกำเนิดดังรูป 1.3.2



รูป 1.3.2

และให้ $P(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบนเส้น L

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $O(0, 0, 0)$ กับ $P(x_0, y_0, z_0)$ คือ

$$d = \overline{OP} = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2 + (z_0 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

เพราะว่า

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{d}$$

$$\cos\beta = \frac{y_0}{d}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_0}{d}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_0^2}{d^2} + \frac{y_0^2}{d^2} + \frac{z_0^2}{d^2}$$

$$= \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{d^2}$$

$$= \frac{d^2}{d^2}$$

$$= 1$$

นิยาม 1.3.2 สองชุดของเลขสามจำนวน (number triples) a, b, c และ a′, b′, c′ ที่ทุกจำนวนไม่เป็นศูนย์ กล่าวได้ว่าเป็นสัดส่วน (proportional) ถ้ามีจำนวน k ซึ่ง

$$a' = ka, b' = kb, c' = kc$$

จำนวน k อาจจะเป็นบวกหรือลบแต่ไม่ใช่ศูนย์ โดยสมมุติฐานที่ว่าไม่มีเลขสามจำนวนใดเป็น o, o, o, ถ้าจำนวน a, b, และ c ไม่เป็นศูนย์ ก็อาจจะเขียนความสัมพันธ์สัดส่วนได้ดังนี้

$$\frac{a'}{a} = k, \frac{b'}{b} = k, \frac{c'}{c} = k$$

หรือ

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

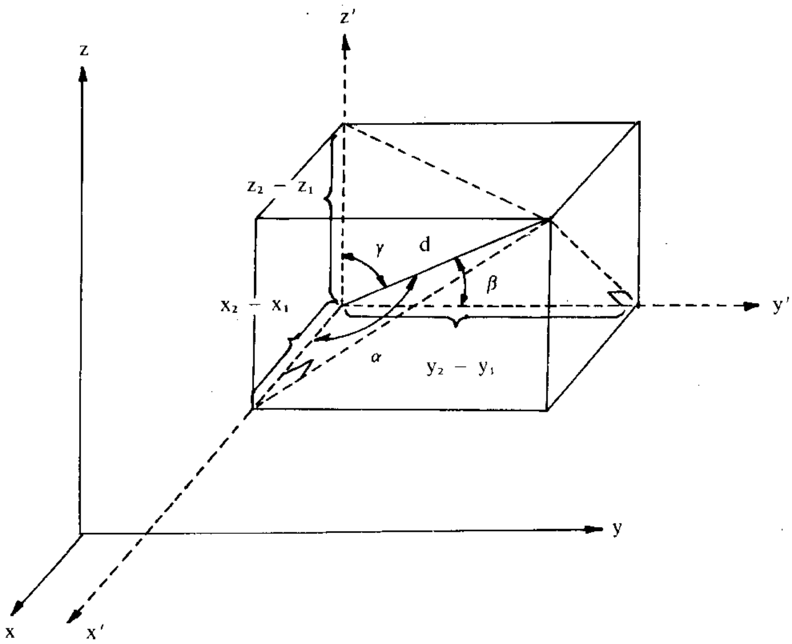
นิยาม 1.3.3 สมมุติว่า เส้น L มีโคไซน์แสดงทิศทาง λ, μ, γ. แล้วเรียกชุดของจำนวน a, b, c ว่า จำนวนแสดงทิศทางสำหรับ L ถ้า a, b, c และ λ, μ, γ เป็นสัดส่วนกัน

เส้นระบุทิศทาง L มีโคไซด์แสดงทิศทางชุดเดียว แต่มีจำนวนแสดงทิศทางมากมายไม่จำกัดจำนวน อย่างไรก็ตามสามารถหาโคไซน์แสดงทิศทางและจำนวนแสดงทิศทางของเส้น L เมื่อทราบจุด 2 จุด ที่เส้น L ผ่าน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3.2 ถ้า $p_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $p_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง L แล้ว

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{d}, \mu = \frac{y_2 - y_1}{d}, \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

เป็นชุดของโคไซน์แสดงทิศทางของ L เมื่อ d เป็นระยะทางจาก p_1 ไปยัง p_2 และ



รูป 1.3.3

พิสูจน์ จากรูป 1.3.3 เมื่อเส้น p_1x', p_1y', p_1z' ขนานกับแกนพิกัด x, y, z ตามลำดับ แล้วมุม α, β และ γ คือมุมแสดงทิศทาง และ

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

นั่นคือ

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \mu = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

เป็นชุดของโคไซน์แสดงทิศทางของ L เมื่อ d เป็นระยะทางจาก p_1 ไปยัง p_2

บทแทรก 1.3.1 ถ้า $p_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $p_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นสองจุดบนเส้นตรง L แล้ว

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$$

เป็นเซต ๆ หนึ่งของจำนวนแสดงทิศทางสำหรับ L คูณ λ, μ, γ ของทฤษฎีบท 1.3.2 ด้วยค่าคงตัว d จะได้ $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ ซึ่งเป็นสัดส่วนกับโคไซน์แสดงทิศทางสำหรับ L

(นิยาม 1.3.2) ดังนั้น $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ จึงเป็นเซต ๆ หนึ่งของจำนวนแสดงทิศทางสำหรับ L (นิยาม 1.3.3)

ตัวอย่าง 1.3.1 จงหาจำนวนแสดงทิศทาง และโคไซด์แสดงทิศทางสำหรับเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $p_1(1, 5, 2)$ และ $p_2(3, 7, -4)$

วิธีทำ จากบทแทรก 1.3.1 จะได้ 2, 2, −6 เป็นเซต ๆ หนึ่งของจำนวนแสดงทิศทาง จึงคำนวณหาค่า

$$d = \overline{p_1p_2} = \sqrt{4 + 4 + 36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

และ $\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}$

เป็นเซตของโคไซน์แสดงทิศทาง เมื่อ L เป็นเส้นไม่กำหนดทิศทางจึงมีโคไซน์แสดงทิศทางอีกเซตหนึ่งคือ

$$\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}$$

ตัวอย่าง 1.3.2 จุดสามจุด $p_1(3, -1, 4), p_2(1, 6, 8)$ และ $p_3(9, -22, -8)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ เซตของจำนวนแสดงทิศทางสำหรับเส้นตรง L_1 ผ่าน p_1 และ p_2 คือ −2, 7, 4 เซตของจำนวนแสดงทิศทางสำหรับ L_2 ผ่าน p_2 และ p_3 คือ 8, −28, −16 เมื่อทั้งสองเซตของจำนวนแสดงทิศทางเป็นสัดส่วนกัน ด้วย $k = -4$ จึงสรุปได้ว่า L_1 และ L_2 มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน เพราะฉะนั้นเส้นตรงสองเส้นนี้ขนานกัน เมื่อมีจุด p_2 เป็นจุดร่วม ดังนั้น L_1 และ L_2 ทับกันสนิท

บทแทรก 1.3.2 เส้นตรง L_1 ขนานกับเส้นตรง L_2 ก็ต่อเมื่อเซตของจำนวนแสดงทิศทางของ L_1 เป็นสัดส่วนกับเซตของจำนวนแสดงทิศทางของ L_2

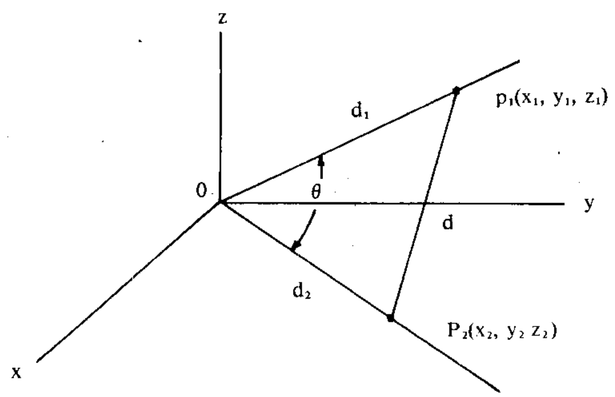
มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันในปริภูมินิยามเช่นเดียวกับมุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นในระนาบ เส้นตรงสองเส้น L_1 และ L_2 ในปริภูมิอาจจะไม่ขนานกันและไม่ตัดกันด้วย กล่าวได้ว่าเส้นตรงทั้งสองนั้นเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ (skew lines) แม้ว่าเส้นตรงสองเส้นจะไม่ขนานกัน และไม่ตัดกันก็อาจหามุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นนี้ได้ โดยให้ L_1' และ L_2' ต่างเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และ

ขนานกับ L_1 และ L_2 ตามลำดับ มุมระหว่าง L_1 และ L_2 นิยามโดยมุมระหว่างเส้นตรง L_1' และ L_2' ตัดกัน

ทฤษฎีบท 1.3.3 ถ้า L_1 และ L_2 มีโคไซน์แสดงทิศทาง $\lambda_1, \mu_1, \gamma_1$ และ $\lambda_2, \mu_2, \gamma_2$ ตามลำดับ และถ้า θ เป็นมุมระหว่าง L_1 และ L_2 แล้ว

$$\cos\theta = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \gamma_1\gamma_2$$

พิสูจน์ ให้เส้นตรง L_1 และ L_2 ผ่านจุดกำเนิด และให้ $p_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดบน L_1 และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดบน L_2 ดังรูป 1.3.4



รูป 1.3.4 $d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\theta$

ให้ d_1 เป็นระยะทางจาก 0 ถึง p_1 และ d_2 เป็นระยะทางจาก 0 ถึง p_2 และให้ d เป็นระยะทางจาก p_1 ถึง p_2 ประยุกต์กฎของโคไซด์กับสามเหลี่ยม op_1p_2 จะได้

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2\,d_1d_2\cos\theta$$

หรือ

$$\cos\theta = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d^2}{2d_1d_2}$$

และ

$$\cos\theta = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}{2d_1d_2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{d_1d_2}$$

$$= \frac{x_1}{d_1} \cdot \frac{x_2}{d_2} + \frac{y_1}{d_1} \cdot \frac{y_2}{d_2} + \frac{z_1}{d_1} \cdot \frac{z_2}{d_2}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

บทแทรก 1.3.3 เส้นตรงสองเส้น L_1 และ L_2 มีจำนวนแสดงทิศทาง a_1, b_1, c_1 และ a_2, b_2, c_2 ตามลำดับ ตั้งได้ฉากกันก็ต่อเมื่อ

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาโคไซด์ของมุมระหว่างเส้นตรง L_1 ซึ่งผ่านจุด $p_1(1, 4, 2)$ และ $p_2(3, -1, 3)$ กับเส้นตรง L_2 ซึ่งผ่านจุด $Q_1(3, 1, 2)$ และ $Q_2(2, 1, 3)$

วิธีทำ เซตของจำนวนแสดงทิศทางสำหรับ L_1 คือ $2, -5, 1$ เซตสำหรับ L_2 คือ $-1, 0, 1$ เพราะฉะนั้นโคไซน์แสดงทิศทางสำหรับเส้นตรงทั้งสองคือ

$$L_1 : \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}} \; ; \; L_2 : \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

จะได้ว่า

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{15}} + 0 + \frac{1}{2\sqrt{15}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{15}}$$

ถ้า $\cos\theta$ เป็นลบแสดงว่าเส้นตรงทั้งสองตัดกัน เป็นมุมป้าน และถ้า $\cos\theta$ เป็นบวกเส้นตรงทั้งสองตัดกันเป็นมุมแหลม

แบบฝึกหัด 1.3

ข้อ 1 ถึง 4 จงหาเซตของจำนวนแสดงทิศทาง และเซตของโคไซด์แสดงทิศทาง สำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้

1. $p_1(3, 1, 2)$, $p_2(2, 6, 0)$
2. $p_1(4, 1, 0)$, $p_2(0, 1, 2)$
3. $p_1(-5, -1, 4)$, $p_2(2, 0, 6)$
4. $p_1(-1, 5, 5)$, $p_2(3, 5, 5)$

ข้อ 5 ถึง 8 จงหาจุดอีกสองจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่ผ่าน p_1 และมีเซตของจำนวนแสดงทิศทางดังที่กำหนดให้

5. $p_1(2, 5, 1)$ จำนวนแสดงทิศทาง 3, 2, 5
6. $p_1(3, 0, -5)$ จำนวนแสดงทิศทาง 2, -1, 0
7. $p_1(0, 4, -3)$ จำนวนแสดงทิศทาง 0, 0, 5
8. $p_1(0, 0, 0)$ จำนวนแสดงทิศทาง 2, -4, 0

ข้อ 9 ถึง 12 จงพิจารณาว่า จุดสามจุดที่กำหนดให้อยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกันหรือไม่

9. $A(3, 1, 0)$, $B(2, 2, 2)$, $C(0, 4, 6)$
10. $A(2, -1, 1)$, $B(4, 1, -3)$, $C(7, 4, -9)$
11. $A(4, 2, -1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(0, 0, 2)$
12. $A(5, 8, 6)$, $B(-2, -3, 1)$, $C(4, 2, 8)$

ข้อ 13 ถึง 15 จงพิจารณาว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด p_1, p_2 ขนานกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด Q_1, Q_2 หรือไม่

13. $p_1(4, 8, 0)$, $p_2(1, 2, 3)$; $Q_1(0, 5, 0)$, $Q_2(-3, -1, 3)$
14. $p_1(2, 1, 1)$, $p_2(3, 2, -1)$, $Q_1(0, 1, 4)$, $Q_2(2, 3, 0)$
15. $p_1(3, 1, 4)$, $p_2(-3, 2, 5)$; $Q_1(4, 6, 1)$, $Q_2(0, 5, 8)$

ข้อ 16 ถึง 18 จงพิจารณาว่าเส้นตรงที่ลากผ่าน p_1, p_2 ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่าน Q_1, Q_2 หรือไม่

16. $p_1(2, 1, 3)$, $p_2(4, 0, 5)$; $Q_1(3, 1, 2)$, $Q_2(2, 1, 6)$
17. $p_1(2, -1, 0)$, $p_2(3, 1, 2)$; $Q_1(2, 1, 4)$, $Q_2(4, 0, 4)$
18. $p_1(0, -4, 2)$, $p_2(5, -1, 0)$; $Q_1(3, 0, 2)$, $Q_2(2, 1, 1)$

ข้อ 19 ถึง 21 จงหา $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง L_1 ซึ่งผ่าน p_1, p_2 และ L_2 ซึ่งผ่าน Q_1, Q_2

19. $p_1(2, 1, 4), p_2(-1, 4, 1); Q_1(0, 5, 1), Q_2(3, -1, -2)$

20. $p_1(4, 0, 5), p_2(-1, -3, -2); Q_1(2, 1, 4), Q_2(2, -5, 1)$

21. $p_1(0, 0, 5), p_2(4, -2, 0); Q_1(0, 0, 6), Q_2(3, -2, 1)$

22. ทรงสี่หน้าปรกติ (regular tetrahedron) แต่ละหน้าเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า (equilateral triangle) จงหาจุดยอดทั้งสี่ เมื่อแต่ละด้านยาว 2 หน่วย

23. ปิระมิดปรกติเป็นรูป 5 หน้ามีฐานเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส และอีก 4 หน้าเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าด้านฐานยาว 4 หน่วย และปิระมิดสูง 6 หน่วย จงหาพื้นที่ผิวของแต่ละหน้าที่เป็นสามเหลี่ยม

24. จุด $p_1(1, 2, 3), p_2(2, 1, 2), p_3(3, 0, 1), p_4(5, 2, 7)$ เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมในระนาบ จงหาพิกัดของจุดกึ่งกลางของแต่ละด้าน และถ้าต่อจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ จะได้รูปสี่เหลี่ยมอะไร

25. จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมทั้งสี่ของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน (parallelepiped) แบ่งครึ่งภายในซึ่งกันและกัน

1.4 สมการของเส้นตรง

(Equations of a Line)

ในเรขาคณิตสองมิติ (two dimensions) สมการกำลังหนึ่ง

$$A_x + B_y + C = 0$$

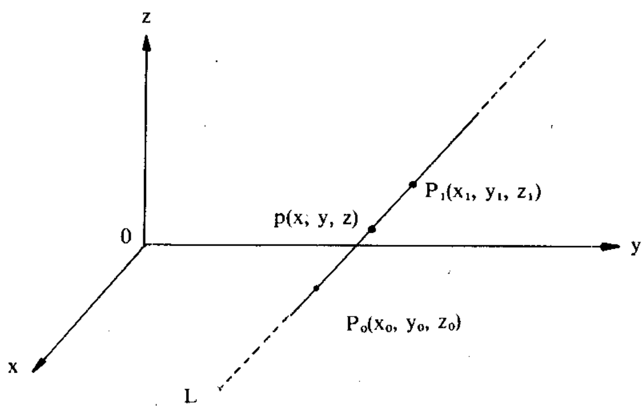
เป็นสมการของเส้นตรง (เมื่อ A และ B ไม่เป็นศูนย์ทั้งสองค่า) แต่ในเรขาคณิตสามมิติ (three dimensions) สมการกำลังหนึ่งดังกล่าว แทนระนาบ

เส้นตรงในปริภูมิ (3 มิติ) กำหนดโดยจุดสองจุด ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และ $P_1(X_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง L ที่กำหนดให้ ดังนั้น จุด P(x, y, z) อยู่บน L ก็ต่อเมื่อจำนวนแสดงทิศทาง (direction numbers) โดย P_0 และ P เป็นสัดส่วนกับจำนวน แสดงทิศทางโดย P_0 และ P_1 ดังรูป 1.4.1 เมื่อสัดส่วนเป็นค่าคงตัว t จะพบว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็น

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t(x_1 - x_0), \\ y - y_0 &= t(y_1 - y_0), \\ z - z_0 &= t(z_1 - z_0). \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้รูปแบบสองจุด (two-point form) ของสมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equations) ของเส้นตรง คือ

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)t, \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)t, \qquad \text{..........(1.4.1)} \\ z &= z_0 + (z_1 - z_0)t. \end{aligned}$$



รูป 1.4.1 เส้นตรงในปริภูมิกำหนดโดยจุดสองจุด

ตัวอย่าง 1.4.1 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงผ่านจุด A(3, 2, −1) และ B(4, 4, 6) และหาจุดอื่นอีกสามจุดบนเส้นตรงนี้

วิธีทำ แทนค่าใน (1.4.1) จะได้สมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$x = 4 - t,\ y = 4 - 2t,\ z = 6 - 7t$$

เพื่อที่จะให้ได้จุดอื่นอีกสามจุดก็หาได้โดยให้ $t = 2$ จะได้ $P_1(2, 0, -8)$, $t = 3$ ได้ $P_2(1, -2, -15)$, $t = -1$ ได้ $P_3(5, 6, 13)$

ทฤษฎีบท 1.4.1 สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ด้วยจำนวน แสดงทิศทาง a, b, c กำหนดโดย

$$x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct \qquad \text{..........(1.4.2)}$$

พิสูจน์ จุด $P_1(x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$ จะต้องอยู่บน L เมื่อจำนวนแสดงทิศทางโดย P_0 และ P_1 คือ $x_0 + a - x_0, y_0 + b - y_0, z_0 + c - z_0$ คือ a, b, c ใช้รูปแบบสองจุด (1.4.1) สำหรับสมการของเส้นตรงผ่าน P_0 และ P_1 จะได้

$$x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ผ่านจุด A(3, −2, 5) ด้วยจำนวนแสดงทิศทาง 4, 0, −2 และอยากทราบว่า เส้นตรง L สัมพันธ์กับระนาบพิกัด (coordinate planes) อย่างไร.

วิธีทำ แทนใน 1.4.2 จะได้สมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$x = 3 + 4t,\ y = -2,\ z = 5 - 2t$$

เมื่อทุก ๆ จุดบนเส้นตรงจะต้องสอดคล้องกับสมการทั้งสามนี้ เส้นตรง L จะต้องอยู่ในระนาบ $y = -2$ ระนาบนี้ขนานกับระนาบ xz เพราะฉะนั้น L ขนานกับระนาบ xz

ถ้าไม่มีจำนวนแสดงทิศทางใดเป็นศูนย์ ตัวแปรเสริม t อาจจะกำจัดออกจากระบบของสมการ (1.4.2) ได้ และเขียนได้เป็น

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad \text{..........(1.4.3)}$$

ซึ่งสมการนี้เป็นสมการเส้นตรงในรูปพิกัดฉาก

ถ้าจำนวนแสดงทิศทางตัวหนึ่งเป็นศูนย์ รูปแบบ (1.4.3) ก็ยังคงใช้ได้อยู่ เช่น

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{0}$$

ก็คือสมการ

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \text{และ} \quad z = z_0$$

(เป็นเส้นตรงที่อยู่บนระนาบ $z = z_0$)

ถ้าระบบเป็น

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{0}$$

$$x = x_0 \quad \text{และ} \quad z = z_0$$

(เป็นเส้นตรงที่อยู่บนรอยตัดของระนาบ $x = x_0$ และ $z = z_0$ ซึ่งระนาบทั้งสองนั้นเป็นระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด)

รูปแบบสองจุดสำหรับสมการเส้นตรงอาจจะเขียนในรูปสมมาตรได้ดังนี้

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

แบบฝึกหัด 1.4

ข้อ 1 ถึง 4 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้ และหาจุดอื่นอีกสองจุดบนเส้นตรงแต่ละเส้นนี้

1. $P_1(2, 3, 4)$, $P_2(-1, -3, 2)$
2. $P_1(1, -1, 3)$, $P_2(2, 1, 5)$
3. $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(3, -1, 2)$
4. $P_1(-1, 2, 1)$, $P_2(3, 1, -1)$

ข้อ 5 ถึง 9 จงหาสมการเส้นตรง เมื่อกำหนดจุดที่เส้นตรงผ่านและจำนวนแสดงทิศทางของแต่ละเส้นมาให้ดังต่อไปนี้

5. $(1, 0, -1); 2, 1, -3$
6. $(-2, 1, 3); 3, -1, -2$
7. $(4, 0, 0); 2, -1, -3$
8. $(1, 2, 0); 0, 1, 3$
9. $(3, -1, -2); 2, 0, 0$

ข้อ 10 ถึง 14 จงพิจารณาว่า L_1 และ L_2 ตั้งฉากกันหรือไม่

10. $L_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$; $\quad L_2 : \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

11. $L_1 : x = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{3}$; $\quad L_2 : \dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+4}{2}$

12. $L_1 : -(x+2) = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{3}$; $\quad L_2 : x+2 = \dfrac{y-2}{2} = -(z+3)$

13. $L_1 : \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+8}{5}$; $\quad L_2 : \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+7}{2} = z+4$

14. $L_1 : \dfrac{x+1}{0} = y-2 = \dfrac{z+8}{0}$; $\quad L_2 : x-3 = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-1}{0}$

15. จงหาสมการของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดที่ $A(4, 0, 2)$, $B(3, 1, 4)$ และ $c(2, 5, 0)$
16. จงหาจุดตัดของเส้นตรง

$$x = 3 + 2t,\ y = 7 + 8t,\ z = -2 + t$$

กับแต่ละระนาบพิกัด

17. จงหาจุดตัดของเส้นตรง

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{7}$$

กับแต่ละระนาบพิกัด

18. จงแสดงว่าเส้นตรงต่อไปนี้ทับกันสนิท

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{4}; \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-8}{4}$$

19. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 1, 5) และขนานกับเส้นตรง

$$x = 4 - t,\ y = 2 + 3t,\ z = -4 + t$$

20. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 1, −2) ซึ่งตั้งได้ฉากและตัดกับเส้น

$$x + 1 = y + 2 = z + 1$$

1.5 ระนาบ

(The Plane)

จุดสามจุดใด ๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน กำหนดระนาบขึ้นระนาบหนึ่ง แม้ว่าคุณลักษณะของระนาบดังกล่าวจะค่อนข้างง่าย แต่ก็ไม่สะดวกที่จะเริ่มศึกษาระนาบในแนวนี้ แต่จะใช้ความจริงที่ว่ามีระนาบเพียงระนาบเดียวผ่านจุดที่กำหนดให้ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้แทน

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ และสมมุติว่า L เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ ซึ่ง L ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และมีจำนวนแสดงทิศทาง A, B, C

ทฤษฎีบท 1.5.1 สมการของระนาบผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับ L คือ

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

พิสูจน์ ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดอยู่ในระนาบที่ต้องการ (รูป 1.5.1)

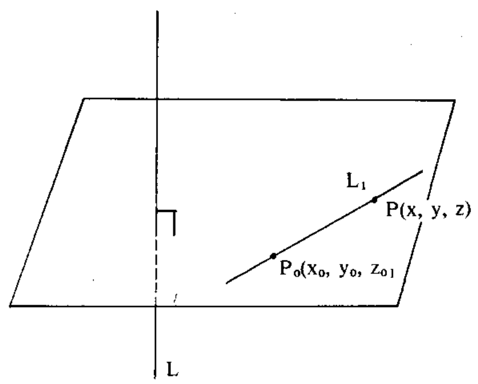
จากเรขาคณิตระบบยุคลิด (Euclidean geometry) กล่าวว่า ถ้าเส้นตรง L_1 ผ่านจุด P_0 ตั้งฉากกับ L แล้ว P จะอยู่ในระนาบที่ต้องการ เซตของจำนวนแสดงทิศทางสำหรับ L_1 คือ

$$x - x_0, \; y - y_0, \; z - z_0$$

เมื่อ L มีจำนวนแสดงทิศทาง A, B, C จึงสรุปได้ว่า เส้นตรงสองเส้น L_1 และ L_2 ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อจำนวนแสดงทิศทางสอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

ซึ่งเป็นสมการที่ต้องการ



รูป 1.5.1 มีระนาบเพียงระนาบเดียวที่ผ่านจุดหนึ่งที่กำหนดให้ และตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้

ข้อสังเกตของทฤษฎีบท 1.5.1 อาศัยเพียงจำนวนแสดงทิศทางของ L และจุดบนระนาบแทนค่าในสมการข้างบน ก็จะได้ระนาบเดียวกัน และสมการเดียวกันด้วย แม้จะใช้เส้นตรงใด ๆ ที่ขนานกับ L ก็ตาม

ตัวอย่าง 1.5.1 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P_0(5, 2, -3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(5, 4, 3)$ และ $P_2(-6, 1, 7)$

วิธีทำ เส้นตรงเชื่อมจุด P_1 และ P_2 มีจำนวนแสดงทิศทาง $-11, -3, 4$ ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบที่ต้องการ

ดังนั้น จำนวนแสดงทิศทางของเส้นเชื่อม P_0 กับ P ก็คือ

$$x - 5, y - 2, z + 3$$

เพราะว่าเส้นเชื่อม P_1 และ P_2 ตั้งฉากกับเส้นเชื่อม P_0 และ P

ดังนั้น สมการของระนาบที่ต้องการ คือ

$$-11(x - 5) - 3(y - 2) + 4(z+3) = 0$$

หรือ

$$11x + 3y - 4z - 73 = 0$$

เส้นตรงทั้งหลายที่ต่างก็ตั้งฉากกับระนาบเดียวกันจะต้องขนานกันและมีจำนวนแสดงทิศทางเป็นสัดส่วนกัน

นิยาม 1.5.1 เซตของจำนวนแอตติจูด (attitude numbers) ของระนาบเป็นเซตใดเซตหนึ่งของจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ

ในตัวอย่าง 1.5.1 ข้างบน $11, 3, -4$ เป็นเซตของจำนวนแอตติจูดของระนาบ

ตัวอย่าง 1.5.2 จงหาเซตของจำนวนแอตติจูดสำหรับระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด (coordinate planes)

วิธีทำ ระนาบที่ขนานกับระนาบ yz มีสมการอยู่ในรูป

$$x - c = 0$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เซตของจำนวนแอตติจูดสำหรับระนาบนี้ คือ 1, 0, 0 ระนาบขนานกับระนาบ xz มีจำนวนแอตติจูด 0, 1, 0 และระนาบใด ๆ ที่ขนานกับระนาบ xy มีจำนวนแอตติจูด 0, 0, 1

เมื่อเส้นตรงทั้งหลายที่ตั้งฉากกับระนาบเดียวกันหรือกับระนาบทั้งหลายที่ขนานกันต่างก็ขนานซึ่งกันและกันด้วย จึงได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5.2 ระนาบสองระนาบขนานกันก็ต่อเมื่อจำนวนแอตติจูดของระนาบทั้งสองเป็นสัดส่วนกัน

ทฤษฎีบท 1.5.3 ถ้า ทั้ง A, B และ C ไม่เป็นศูนย์โลกัส (locus) ของสมการในรูป

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{..........(1.5.1)}$$

เป็นระนาบ

พิสูจน์ สมมุติว่า $\neq 0$ แล้ว จุด $P_o(0, 0, -D/C)$ อยู่บนโลกัส เพราะพิกัดของจุดนี้สอดคล้องกับสมการข้างต้น เพราะฉะนั้นอาจจะเขียน

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z + \frac{D}{C}) = 0$$

และโลกัสก็คือระนาบผ่าน P_o ตั้งฉากกับเส้นตรงใด ๆ ที่มีจำนวนแสดงทิศทาง A, B, C

#

สมการของระนาบที่ผ่านจุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน สามารถหาได้โดยสมมุติว่ามีสมการดังสมการ (1.5.1) โดยแทนพิกัดของจุดทั้งสามลงในสมการนี้แล้วแก้ปัญหาระบบสมการทั้งสาม ซึ่งความจริงมีสี่ค่าคงตัว A, B, C, D แต่มีเพียงสามสมการ ดังนั้น จึงต้องนำตัวใดตัวหนึ่ง (เช่น D) หารตลอด จะได้สามสมการในตัวไม่รู้ค่า A/D, B/D, C/D ซึ่งสมมูลกับการให้ D (หรือตัวหนึ่งตัวใดของค่าคงตัวอื่น) เท่ากับค่าที่เหมาะสม ซึ่งตัวอย่างต่อไปจะได้แสดงกระบวนการดังกล่าว

ตัวอย่าง 1.5.3 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด (2, 1, 3), (1, 3, 2), (−1, 2, 4)

วิธีทำ เนื่องจากจุดทั้งสามอยู่บนระนาบ แต่ละจุดย่อมสอดคล้องกับสมการ (1.5.1) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
(2, 1, 3) &: \quad 2A + B + 3C + D = 0 \\
(1, 3, 2) &: \quad A + 3B + 2C + D = 0 \\
(-1, 2, 4) &: \quad -A + 2B + 4C + D = 0
\end{aligned}$$

แก้สมการทั้งสามเพื่อหาค่า A, B, C ในพจน์ของ D ได้

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -D & 1 & 3 \\ -D & 3 & 2 \\ -D & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-D(12-4) - 1(-4D+2D) + 3(-2D+3D)}{2(12-4) - 1(4+2) + 3(2+3)}$$

$$= -\frac{3}{25}D$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -D & 3 \\ 1 & -D & 2 \\ -1 & -D & 4 \end{vmatrix}}{25} = \frac{2(-4D+2D) + D(4+2) + 3(-D-D)}{25} \qquad 1$$

$$= -\frac{4}{25}D$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -D \\ 1 & 3 & -D \\ -1 & 2 & -D \end{vmatrix}}{25} = \frac{-6D - 2D + D - 3D + 4D + D}{25}$$

$$= \frac{-5}{25} D$$

แทนค่า A, B, C ในสมการ (1.5.1) ได้

$$\frac{-3}{25}Dx + \frac{4}{25}Dy - \frac{5}{25}Dz + D = 0$$

ให้ $D = -25$ จะได้สมการของระนาบเป็น

$$3x + 4y + 5z - 25 = 0$$

แบบฝึกหัด 1.5

ข้อ 1 ถึง 4 จงหาสมการของระนาบ เมื่อกำหนดจุด P และจำนวนแอตติจูดในแต่ละข้อมาให้ดังนี้

1. $P(0, 5, 6); 4, 2, -1$
2. $P(-3, 1, 4); 0, 2, 5$
3. $P(1\ -2, -3); 4, 0, -1$
4. $P(2, 0, 6); 0, 0, -5$

ข้อ 5 ถึง 8 จงหาสมการของระนาบซึ่งผ่านจุดสามจุดต่อไปนี้

5. $(1, -2, 1), (2, 0, 3), (0, 1, -1)$
6. $(2, 2, 1), (-1, 2, 3), (3, -5, -2)$
7. $(3, -1, 2), (1, 2, -1), (2, 3, 1)$
8. $(-1, 3, 1), (2, 1, 2), (4, 2, -1)$

ข้อ 9 ถึง 12 จงหาสมการของระนาบที่ผ่าน P_1 และตั้งฉากกับเส้น L_1 ดังต่อไปนี้

9. $P_1(2, -1, 3); L_1 : x = -1 + 2t, y = 1 + 3t, z = -4t$
10. $P_1(1, 2, -3); L_1 : x = t, y = -2 - 2t, z = 1 + 3t$
11. $P_1(2, -1, -2); L_1 : x = 2 + 3t, y = 0, z = -1 - 2t$
12. $P_1(-1, 2, -3); L_1 : x = -1 + 5t, y = 1 + 2t, z = -1 + 3t$

ข้อ 13 ถึง 16 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และตั้งฉากกับระนาบ M_1 ดังนี้

13. $P_1(-2, 3, 1);\quad M_1 : 2x + 3y + z - 3 = 0$
14. $P_1(1, -2, -3);\quad M_1 : 3x - y - 2z + 4 = 0$
15. $P_1(-1, 0, -2);\quad M_1 : x + 2z + 3 = 0$
16. $P_1(2, -1, -3);\quad M_1 : x = 4$

ข้อ 17 ถึง 20 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด P_1 และขนานกับระนาบ ϕ ดังนี้

17. $P_1(1, -2, -1);\quad \phi : 3x + 2y - z + 4 = 0$
18. $P_1(-1, 3, 2);\quad \phi : 2x + y - 3z = 0$
19. $P_1(2, -1, 3);\quad \phi : x - 2y - 3z + 6 = 0$
20. $P_1(3, 0, 2);\quad \phi : x + 2y - 1 = 0$

ข้อ 21 ถึง 23 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด P_1 และขนานกับเส้น L ดังนี้

21. $P_1(2, -1, 3);\quad L : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$
22. $P_1(0, 0, 1);\quad L : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$

23. $P_1(1, -2, 0)$; $L : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$

ข้อ 24 ถึง 28 จงหาสมการของระนาบที่ประกอบด้วย L_1 และ L_2 สำหรับแต่ละข้อดังต่อไปนี้

24. $L_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$; $L_2 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

25. $L_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-2}{2}$; $L_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-2}{0}$

26. $L_1 : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+1}{2}$; $L_2 : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{1}$

27. $L_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{-1}$; $L_2 : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}$ $(L_1 /\!/ L_2)$

28. $L_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$; $L_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ $(L_1 /\!/ L_2)$

ข้อ 29 และ 30 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด P_1 และ ผ่านเส้นตรงที่กำหนดให้ คือ L ด้วย

29. $P_1(3, -1, 2)$; $L : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-2}$

30. $P_1(1, -2, 3)$; $L : x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = 2 - 2t$

31. จงแสดงว่าระนาบ $2x - 3y + z - 2 = 0$ ขนานกับเส้น

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$$

32. จงแสดงว่าเส้นตรง $x = 1 + 2t, y = -1 + 3t, z = 2 + t$ อยู่ในระนาบ

$$5x - 3y - z - 6 = 0$$

33. ระนาบมีจำนวนแอตติจูดเป็น A, B, C และเส้นตรงมีจำนวนแสดงทิศทางเป็น a, b, c อยากทราบว่าเงื่อนไขที่จะทำให้ระนาบและเส้นตรงนี้ขนานกันคืออะไร

1.6 มุม ระยะทางจากจุดไปยังระนาบ

(Angles. Distance from a Point to a Plane)

ถ้าเส้นตรง L_1 มีโคไซด์แสดงทิศทาง $\lambda_1, \mu_1\ \nu_1$ และเส้นตรง L_2 มีโคไซด์แสดงทิศทาง λ_2, μ_2, ν_2 แล้ว

$$\cos\theta = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง L_1 และ L_2

นิยาม 1.6.1 ให้ ϕ_1 และ ϕ_2 เป็นระนาบสองระนาบ และให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งตั้งฉากกับ ϕ_1 และ ϕ_2 ตามลำดับแล้ว มุมระหว่าง ϕ_1 และ ϕ_2 นิยมโดยมุมระหว่าง L_1 และ L_2 โดยปกติจะเลือกมุมแหลมระหว่างเส้นทั้งสองเป็นมุมระหว่าง ϕ_1 และ ϕ_2

ทฤษฎีบท 1.6.1 มุม θ ระหว่างระนาบ $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ และ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ กำหนดโดย

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

พิสูจน์ จากนิยามของจำนวนแอตติจูดสำหรับระนาบ คือ จำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงใด ๆ ที่ตั้งฉากกับระนาบ และเมื่อทราบจำนวนแสดงทิศทางของเส้นตรงใดก็สามารถหาโคไซด์แสดงทิศทางของเส้นตรงนั้นได้ ดังนั้น

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ มีโคไซด์แสดงทิศทางเป็น

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ $A_2x + B_2y + C_1z + D_2 = 0$ มีโคไซด์แสดงทิศทางเป็น

$$\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + B_2^2}}$$

เลือก θ ที่เป็นมุมแหลม จึงได้

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} + \frac{B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$+ \frac{C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$= \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

บทแทรก 1.6.1 ระนาบสองระนาบซึ่งมีจำนวนแอตติจูดเป็น A_1, B_1, C_1 และ A_2, B_2, C_2 ตั้งได้ฉากกันก็ต่อเมื่อ

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

ตัวอย่าง 1.6.1 จงหา $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างระนาบ

$3x - 2y + z - 4 = 0$ และ $x + 4y - 3z - 2 = 0$

วิธีทำ อาศัยทฤษฎีบทที่ 1.6.1 จึงได้

$$\cos\theta = \frac{|(3)(1)+(-2)(4)+(1)(-3)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+4^2+(-3)^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{91}}$$

ระนาบสองระนาบที่ไม่ขนานกันจะตัดกันเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง ทุก ๆ จุดบนเส้นตรงจะสอดคล้องกับสมการทั้งสองของระนาบ ในทางกลับกันทุก ๆ จุดที่สอดคล้องกับสมการของระนาบทั้งสองจะต้องอยู่บนเส้นตรงเส้นนั้น เพราะฉะนั้น จึงอาจจะกล่าวได้ว่าเส้นตรงใด ๆ ในปริภูมิกำหนดได้โดยระนาบสองระนาบที่ไม่ขนานกัน เมื่อทุก ๆ เส้นตรงมีจำนวนระนาบนับไม่ถ้วนผ่าน และเมื่อสองระนาบใด ๆ กำหนดเส้นตรงที่แน่นอนได้หนึ่งเส้น จะพบว่ามีวิธีการนับไม่ถ้วนที่จะเขียนสมการของเส้นตรง

ตัวอย่าง 1.6.2 ระนาบสองระนาบ

$2x + 3y - 4z - 6 = 0$ และ $3x - y + 2z + 4 = 0$

ตัดกันเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง (นั่นคือ จุดทั้งหลายที่สอดคล้องกับสมการทั้งสองกำหนดเส้นตรง) จงหาเซตของสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบทั้งสองนั้น

วิธีทำ แก้สมการทั้งสองสำหรับ x และ y ในพจน์ของ z จะได้

$$x = -\frac{2}{11}z - \frac{6}{11}, \quad y = \frac{16}{11}z + \frac{26}{11}$$

และ

$$\frac{x + \frac{6}{11}}{-\frac{2}{11}} = \frac{y - \frac{26}{11}}{\frac{16}{11}} = \frac{z}{1}$$

เพราะฉะนั้นจึงเขียนได้ว่า

$$x = -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t, \; y = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t, \; z = t$$

เป็นสมการอิงตัวแปรเสริมที่ต้องการ

ระนาบสามระนาบอาจจะผ่านเส้นตรงเส้นเดียวกัน อาจจะไม่มีจุดร่วม หรืออาจจะมีจุดตัดร่วมเพียงจุดเดียว ถ้าระนาบทั้งสามมีจุดร่วมได้เพียงจุดเดียว จุดตัดร่วมนั้นอาจจะหาได้โดยแก้ระบบสมการทั้งสามของระนาบ แต่ถ้าไม่มีจุดตัดร่วมการพยายามจะแก้ระบบสมการดังกล่าวก็จะล้มเหลว

ตัวอย่าง 1.6.3 จงพิจารณาว่า ระนาบ $\phi_1 = 3x - y + z - 2 = 0$; $\phi_2 : x + 2y - z + 1 = 0$; $\phi_3 : 2x + 2y + z - 4 = 0$ ตัดกันที่จุด ๆ หนึ่งหรือไม่ ถ้ามีจุดตัดร่วม จงหาจุดตัดนั้น

วิธีทำ กำจัด z ระหว่าง ϕ_1 และ ϕ_2 จะได้

$$4x + y - 1 = 0$$

กำจัด z ระหว่าง ϕ_2 และ ϕ_3 จะได้

$$3x + 4y - 3 = 0$$

แก้สมการ (1.6.1) และ (1.6.2) จะได้

$$x = \frac{1}{13}, y = \frac{9}{13}$$

แทนค่า x, y ในสมการสำหรับ ϕ_1 จะได้ $z = \frac{32}{13}$ เพราะฉะนั้นจุดตัดจุดเดียวของระนาบทั้งสามคือ $(\frac{1}{13}, \frac{9}{13}, \frac{32}{13})$

ตัวอย่าง 1.6.4 จงหาจุดตัดของระนาบ $3x - y + 2z - 3 = 0$ กับเส้นตรง

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

วิธีทำ เขียนสมการเส้นตรงในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = -1 + 3t, y = -1 + 2t, z = 1 - 2t$$

จุดตัดดังกล่าวกำหนดด้วยค่าของ t ให้เส้นตรงตัดระนาบเมื่อ $t = t_0$ นั่นคือตัดระนาบที่ $x_0 = -1 + 3t_0$, $y_0 = -1 + 2t_0$, $z_0 = 1 - 2t_0$ นั่นคือ ตัดที่จุด (x_0, y_0, z_0) หรือ จุด $(-1 + 3t_0, -1 + 2t_0, 1 - 2t_0)$ นั่นเอง ซึ่งจุดนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการของระนาบ จึงได้ว่า

$$3(-1 + 3t_0) - (-1 + 2t_0) + 2(1 - 2t_0) - 3 = 0'$$

$$t_0 = 1$$

ดังนั้น จุดตัดดังกล่าว คือ $(2, 1, -1)$

ทฤษฎีบท 1.6.2 ระยะทาง d จากจุด $p_1(x_1, y_1, z_1)$ ไปยังระนาบ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

กำหนดโดย

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

พิสูจน์ เส้นตรง L ผ่านจุด p_1 และตั้งได้ฉากกับระนาบที่กำหนดให้ คือ

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$