หรือ

$$x = x_1 + At,\ y = y_1 + Bt,\ z = z_1 + Ct$$

ให้จุด $p_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบเมื่อ $t = t_0$ ดังนั้นระยะทาง d ระหว่างจุด p_0 กับ p_1 เป็น

$$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \qquad \text{..........(1.6.3)}$$

เพราะว่าจุด (x_0, y_0, z_0) อยู่ทั้งบนเส้นตรง L และระนาบที่กำหนดให้จุดนี้จึงสอดคล้องทั้งสมการของเส้นตรงและสมการของระนาบ นั่นคือ

$$x_0 = x_1 + At_0,\ y_0 = y_1 + Bt_0,\ z_0 = z_1 + Ct_0 \qquad \text{..........(1.6.4)}$$

และ $A x_0 + B y_0 + C z_0 + D = 0$

หรือ $A(x_1 + A t_0) + B(y_1 + B t_0) + C(z_1 + C t_0) + D = 0$

$$t_0 = \frac{-(A x_1 + B y_1 + C z_1 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

แทนค่า x_0, y_0, z_0 จาก (1.6.4) ใน (1.6.3) จะได้

$$d = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,|t_0| \qquad \text{..........(1.6.5)}$$

แทนค่า t_0 ลงใน (1.6.5) จะได้

$$d = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\left|\frac{-(A x_1 + B y_1 + C z_1 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}\right|$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ตัวอย่าง 1.6.5 จงหาระยะทางจากจุด $(2, -1, 5)$ ไปยังระนาบ $3x + 2y - 2z - 7 = 0$

วิธีทำ $$d = \frac{|6 - 2 - 10 - 7|}{\sqrt{9 + 4 + 4}} = \frac{13}{\sqrt{17}}$$

แบบฝึกหัด 1.6

ข้อ 1 ถึง 4 จงหา $\cos\theta$ เมื่อ θ คือมุมในระหว่างระนาบที่กำหนดให้

1. $2x - y + 2z - 3 = 0,\ 3x + 2y - 6z - 11 = 0$
2. $x + 2y - 3z + 6 = 0,\ x + y + z - 4 = 0$
3. $2x - y + 3z - 5 = 0,\ 3x - 2y + 2z - 7 = 0$
4. $x + 4z - 2 = 0,\ y + 2z - 6 = 0$

ข้อ 5 ถึง 8 จงหาสมการในรูปอิงตัวแปรเสริม ของเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบตามที่กำหนดให้

5. $3x + 2y - z + 5 = 0,\ 2x + y + 2z - 3 = 0$
6. $x + 2y + 2z - 4 = 0,\ 2x + y - 3z + 5 = 0$
7. $x + 2y - z + 4 = 0,\ 2x + 4y + 3z - 7 = 0$
8. $2x + 3y - 4z + 7 = 0,\ 3x - 2y + 3z - 6 = 0$

ข้อ 9 ถึง 12 จงหาจุดตัดของเส้นตรงที่กำหนดให้กับระนาบที่กำหนดให้

9. $3x - y + 2z - 5 = 0,\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$
10. $2x + 3y - 4z + 15 = 0,\ \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+4}{3}$
11. $x + 2z + 3 = 0,\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+2}{2}$
12. $2x + 3y + z - 3 = 0,\ \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{1}$

ข้อ 13 ถึง 16 จงหาระยะทางจากจุดที่กำหนดให้ไปยังระนาบที่กำหนดให้

13. $(2, 1, -1),\ x - 2y + 2z + 5 = 0$
14. $(3, -1, 2),\ 3x + 2y - 6z - 9 = 0$
15. $(-1, 3, 2),\ 2x + 3y + 4z - 5 = 0$
16. $(0, 4, -3),\ 3y + 2z - 7 = 0$
17. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรง

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$$

และตั้งฉากกับระนาบ

$$2x + y - 3z + 4 = 0$$

18. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรง

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

และขนานกับเส้นตรง

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

19. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรง

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

และขนานกับเส้นตรง

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

20. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 4, 2)$ และขนานกับระนาบ

$$2x + y + z - 4 = 0$$

21. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $(3, 2, -1)$ และ $(1, -1, 2)$ และขนานกับเส้นตรง

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -\frac{z}{2}$$

ข้อ 22 ถึง 26 จงหาจุดตัดของระนาบสามระนาบที่กำหนดให้ ถ้าระนาบสามระนาบผ่านเส้นตรงเส้นหนึ่ง จงหาสมการเส้นตรงนั้นในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

22. $2x + y - 2z - 1 = 0,\ 3x + 2y + z - 10 = 0,\ x + 2y - 3z + 2 = 0$
23. $x + 2y + 3z - 4 = 0,\ 2x - 3y + z - 2 = 0,\ 3x + 2y - 2z - 5 = 0$
24. $3x - y + 2z - 4 = 0, x + 2y - z - 3 = 0,\ 3x - 8y + 7z + 1 = 0$
25. $2x + y - 2z - 3 = 0, x - y + z + 1 = 0,\ x + 5y - 7z - 3 = 0$
26. $x + 2y + 3z - 5 = 0, 2x - y - 2z - 2 = 0, x - 8y - 13z + 11 = 0$

ข้อ 27 ถึง 29 จงหาสมการในรูปอิงตัวแปรเสริม ของเส้นตรงที่ผ่านจุด p_1 ที่กำหนดให้ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ L

27. $p_1(3, -1, 2)$; $L : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$

28. $p_1(-1, 2, 3)$; $L : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+3}{-3}$

29. $p_1(0, 2, 4)$; $L : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{4}$

30. (ก) ถ้า $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

และ

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

เป็นระนาบสองระนาบที่ตัดกัน อยากทราบว่าโลกัสของจุดทั้งหลายที่สอดคล้องกับ

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$ คืออะไรเมื่อ k เป็นค่าคงตัว

(ข) จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2, 1, -3)$ และเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $3x + y - z - 2 = 0$, $2x + y + 4z - 1 = 0$

1.7 ทรงกระบอก ทรงกลม

(Cylinders, The Sphere)

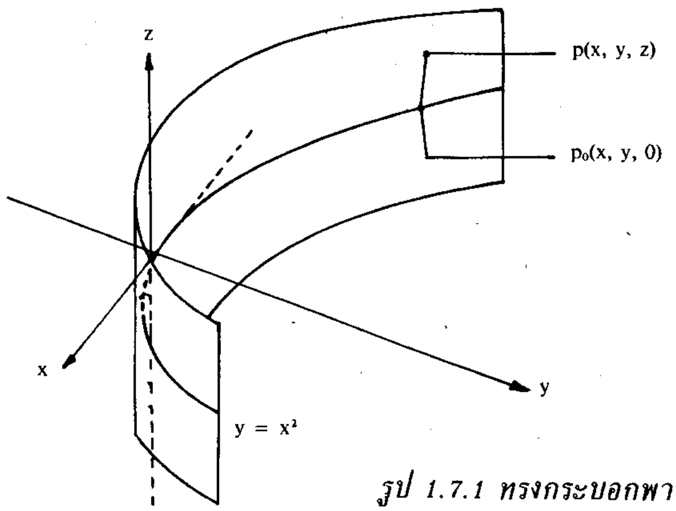
ทรงกระบอก เซตของจุด $p(x, y, z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$F(x, y, z)$

อาจจะแปลความหมายอย่างกว้าง ๆ ว่าเป็นพื้นผิว ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดของพื้นผิว คือ ระนาบ ซึ่งสมการอยู่ในรูป $Ax + By + Cz - D = 0$ ระนาบเป็นพื้นผิวที่เรียกว่าทรงกระบอก

โดยทั่วไปทรงกระบอกเป็นพื้นผิวที่ก่อกำเนิด (generate) โดยการเคลื่อนที่ของเส้นตรงตามเส้นโค้งที่กำหนดให้ โดยเส้นตรงนั้นขนานกับเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 1.7.1 ทรงกระบอกพาราโบลิค (parabolic cylinder) ดังรูป 1.7.1 ก่อกำเนิดโดยเส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับแกน z โดยเคลื่อนที่ตามเส้นโค้ง $y = x^2$ ในระนาบ xy ถ้าจุด $P_0(x, y, 0)$ อยู่บนพาราโบลา แล้วทุก ๆ จุด $p(x, y, z)$ ด้วยพิกัด x และ y เดียวกันจะอยู่บนเส้นตรงที่ผ่าน p_0 ขนานกับแกน z และอยู่บนพื้นผิวด้วย ในทางกลับกัน ถ้า $p(x, y, z)$ อยู่บนพื้นผิว โพรเจคชันของจุดนี้ไปยังจุด $p_0(x, y, 0)$ บนระนาบ xy จะต้องอยู่บนพาราโบลา $y = x^2$ ดังนั้น พิกัดของจุดสอดคล้องกับสมการ $y = x^2$ จุดของพื้นผิวคือจุดซึ่งพิกัดสอดคล้องกับสมการนี้โดยไม่ต้องคำนึงถึงค่าของ z ดังนั้น สมการ $y = x^2$ เป็นสมการสำหรับทรงกระบอก ซึ่งก่อกำเนิดจากพาราโบลา ภาคตัดขวางของทรงกระบอกในแนวตั้งฉากกับแกน z จะเป็นพาราโบลาทั้งหลาย ซึ่งทุก ๆ พาราโบลาลงรอยกัน (congruence) กับพาราโบลาในระนาบ xy



รูป 1.7.1 ทรงกระบอกพาราโบลิค

โดยทั่ว ๆ ไป เส้นโค้งใด ๆ

$$f(x, y) = 0$$

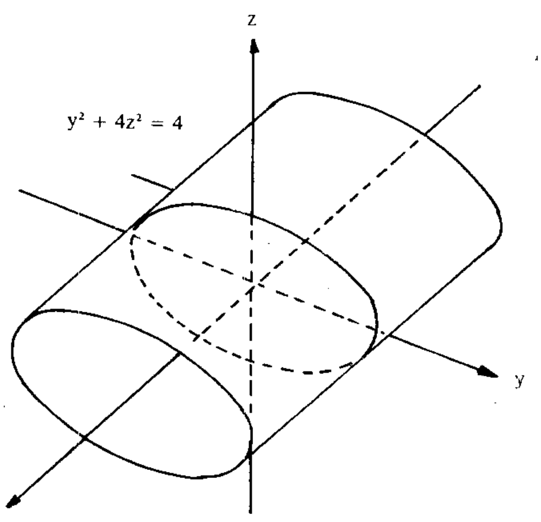
ในระนาบ x y นิยามทรงกระบอกในปริภูมิซึ่งมีสมการ $f(x, y) = 0$ ด้วย และจะประกอบด้วยจุดของเส้นตรงที่ผ่านเส้นโค้งและขนานกับแกน z บางทีก็เรียกเส้นตรงนี้ว่า สมาชิก (elements) ของทรงกระบอก

ทรงกระบอกอาจจะมีสมาชิกขนานกับแกนพิกัดอื่นก็ได้ สำหรับสมการพิกัดฉาก ซึ่งอักษรตัวหนึ่งหายไปจะแทนทรงกระบอกด้วยสมาชิกที่ขนานกับแกนที่ตัวอักษรหายไปนั่นเอง

ตัวอย่าง 1.7.2 พื้นผิว

$$y^2 + 4z^2 = 4$$

เป็นทรงกระบอกทรงรี (elliptic cylinder) ด้วยสมาชิกขนานกับแกน x และแกนของทรงกระบอกนี่คือแกน x ซึ่งขยายไปทั้งทิศทางลบและบวกอย่างไม่จำกัดเขตและผ่านจุดศูนย์กลางของทรงรีซึ่งเกิดจากภาคตัดของของทรงกระบอกดังรูป 1.7.2

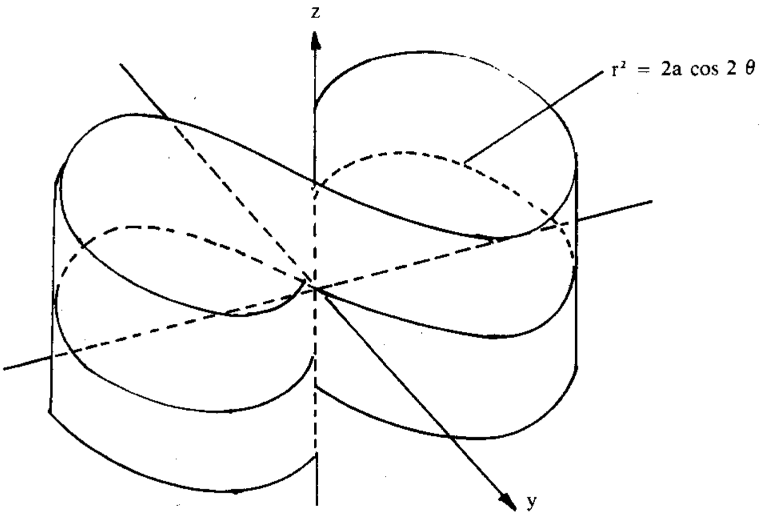


รูป 1.7.2 ทรงกระบอกทรงรี

ตัวอย่าง 1.7.3 พื้นผิว

$$r^2 = 2a \cos 2\theta$$

ในพิกัดทรงกระบอกเป็นทรงกระบอกด้วยสมาชิกขนานแกน z แต่ละภาคตัดตั้งฉากกับแกน z เป็นเส้นโค้งเลมนิสเคต (lemniscate) ทรงกระบอกขยายออกไปอย่างไม่จำกัดเขตทั้งทิศทางบวกและลบตามแกน x ดังรูป 1.7.3



รูป 1.7.3 ทรงกระบอกซึ่งภาคตัดขวางเป็นเส้นโค้งเลมนิสเคต

ทรงกลม

ทรงกลมเป็นโลกัสของทุกจุดที่มีระยะทางห่างคงที่จากจุดคงที่จุดหนึ่ง เรียกจุดคงที่นั้นว่า จุดศูนย์กลาง (center) และเรียกระยะทางคงที่นั้นว่า รัศมี (radius)

ถ้าจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k, ℓ) รัศมี r และ (x, y, z) เป็นจุดใด ๆ บนทรงกลมแล้ว จากสูตรสำหรับระยะทางระหว่างจุดสองจุดจะได้ความสัมพันธ์

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2 \qquad ....(1.7.1)$$

สมการ (1.7.1) เป็นสมการของทรงกลม เมื่อคูณกันออกมาและจัดพจน์เสียจะได้

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - 2\ell z + h^2 + k^2 + \ell^2 \quad r^2 = 0$$

จะสมมูลกับสมการ

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0 \qquad \text{..........(1.7.2)}$$

ซึ่งเป็นสมการทั่วไปของทรงกลม เมื่อจัดให้อยู่ในรูปกำลังสองบริบูรณ์ (Complete the square) จะได้

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 + (z + \frac{F}{2})^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} + \frac{F^2}{4} - G \qquad \text{..........(1.7.3)}$$

เมื่อเทียบกับสมการทรงกลม 1.7.1 ทำให้ได้สูตรเมื่อเทียบสมการ (1.7.2) ว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลมอยู่ที่

$$(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2})$$

และรัศมีคือ

$$\sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} + \frac{F^2}{4} - G}$$

หรือ $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$

ตัวอย่าง 1.7.4 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลมซึ่งมีสมการเป็น

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 9z - 6 = 0$$

วิธีที่ 1 จัดให้อยู่ในรูปกำลังสองบริบูรณ์โดยเริ่มต้นด้วย

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 + 9z = 6$$

แล้วบวกด้วยจำนวนที่เหมาะสมทั้งสองด้านของสมการนี้

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 9z + \frac{81}{4} = 6 + 4 + 9 + \frac{81}{4}$$

และ

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + \frac{9}{2})^2 = \frac{157}{4}$$

จะได้จุดศูนย์กลางคือ $(-2, 3, -\frac{9}{2})$ และรัศมีคือ $\frac{1}{2}\sqrt{157}$

วิธีที่ 2 โดยใช้สูตร จะได้จุดศูนย์กลางเป็น

$$\left(-\frac{4}{2}, -\frac{(-6)}{2}, -\frac{9}{2}\right) = \left(-2, 3, -\frac{9}{2}\right)$$

และรัศมีคือ

$$\frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 + 81 - 4(-6)} = \frac{1}{2}\sqrt{157}$$

ตัวอย่าง 1.7.5 จงหาสมการทรงกลมที่ผ่านจุด (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, −2, −3) และ (−1, 1, 2)

วิธีทำ แทนค่าจุดเหล่านี้ในสมการทั่วไปของทรงกลม (1.7.2) จะได้

$$(2, 1, 3) : 2D + E + 3F + G = -14$$

$$(3, 2, 1) : 3D + 2E + F + G = -14$$

$$(1, -2, -3) : D - 2E - 3F + G = -14$$

$$(-1, 1, 2) : -D + E + 2F + G = -6$$

แก้สมการเหล่านี้โดยกำจัด G แล้ว D แล้ว F ตามลำดับจะได้

$$D + E - 2F = 0,\ D + 3E + 6F = 0,\ 3D + F = -8$$

และ

$$2E + 8F = 0,\ -3E + 7F = -8,\ \text{และ}\ -38E = -64$$

เพราะฉะนั้น

$$E = \frac{32}{19},\ F = -\frac{8}{19}, D = -\frac{48}{19},\ G = -\frac{178}{19}$$

สมการที่ต้องการคือ

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{48}{19}x + \frac{32}{19}y - \frac{8}{19}z - \frac{178}{19} = 0$$

แบบฝึกหัด 1.7

ข้อ 1 ถึง 2 จงหาสมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง C และรัศมี r

1. $C(2, 0, 1), r = 4$
2. $C(3, -2, 6), r = 7$

ข้อ 3 ถึง 5 จงพิจารณาดูว่าแต่ละสมการเป็นสมการทรงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมี

3. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 7 = 0$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 2z + 10 = 0$
6. จงหาสมการของโลกัสของทุก ๆ จุดซึ่งอยู่ห่างจาก $A(3, -1, 2)$ เป็นสองเท่าของระยะห่างจาก $B(0, 2, -1)$
7. จงหาสมการของโลกัสของทุก ๆ จุดซึ่งอยู่ห่างจาก $A(2, 1, -3)$ เป็นสามเท่าของระยะห่างจาก $B(-2, -3, 5)$
8. จงหาสมการของโลกัสของทุก ๆ จุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(0, 0, 4)$ เท่ากับระยะตั้งฉากจากจุดเหล่านั้นไปยังระนาบ xy

ข้อ 9 ถึง 14 อยากทราบว่าแต่ละสมการเป็นสมการของพื้นผิวใด และจงเขียนภาพของแต่ละข้อ

9. $x = 3$	10. $2x + y = 3$
11. $x^2 = 4z$	12. $4x^2 + y^2 = 16$
13. $y^2 + x^2 = 9$	14. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

ข้อ 15 ถึง 16 จงหาว่าพื้นผิว S ตัดกับระนาบ ϕ จะได้เส้นโค้งใด

15. $S : x^2 + y^2 + z^2 = 25;\ \phi : z = 3$
16. $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12;\ \phi : y = 4$

1.8 พื้นผิวกำลังสอง

(Quadric Surfaces)

ในระนาบ สมการใด ๆ ในรูป

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

แทนเส้นโค้ง กล่าวให้เจาะจงลงไปอีกจะพบว่า วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา หรือเส้นโค้งที่เกิดจากภาคตัดกรวยทั้งหลายต่างก็แทนได้ด้วยสมการกำลังสอง (second degree) ดังกล่าว

ในปริภูมิสามมิติสมการทั่วไปของกำลังสอง ใน x, y และ z อยู่ในรูป

$$ax^2 + by^2 + cx^2\, dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0 \quad (1.8.1)$$

เมื่อปริมาณ a, b, c, ..., l เป็นจำนวนบวกหรือลบหรือศูนย์ จุดทุกจุดในปริภูมิที่สอดคล้องกับสมการใดจะต้องอยู่บนพื้นผิวนั้น ดังกรณีพิเศษเช่น ทรงกลม ทรงกระบอกในหัวข้อ 1.7 สมการกำลังสองใด ๆ ซึ่งไม่สามารถลดทอนเป็นทรงกระบอก ระนาบ เส้นตรง หรือจุดได้เรียกพื้นผิวกำลังสอง ซึ่งพื้นผิวกำลังสองแบ่งออกได้หกแบบ

นิยาม 1.8.1 ส่วนตัด (intercepts) x –, y – และ z – ของพื้นผิว คือ พิกัด x –, y – และ z – ของจุดของผลตัดของพื้นผิวกับแกนตามลำดับ เมื่อกำหนดสมการของพื้นผิวให้หาส่วนตัด x – ได้โดยให้ y และ z เท่ากับศูนย์และหาค่าสำหรับ x สำหรับส่วนตัด y – และ z – ก็ดำเนินการหาได้ในทำนองเดียวกัน

การเขียนพื้นผิวบนระนาบพิกัดจะเป็นเส้นโค้งของผลตัดของพื้นผิวกับระนาบพิกัด เมื่อกำหนดพื้นผิวให้ จะเขียนเส้นโค้งบนระนาบของ xz ได้โดยให้ y เท่ากับศูนย์ และพิจารณาผลของสมการใน x และ z เสมือนสมการของเส้นโค้งในระนาบ ซึ่งเป็นเรขาคณิตวิเคราะห์ในระนาบภาคตัดของพื้นผิวโดยระนาบเป็นเส้นโค้งของผลตัดของพื้นผิวกับระนาบ

ตัวอย่าง 1.8.1 จงหาส่วนตัด x –, y – และ z – ของพื้นผิว

$$3x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 12$$

จงอธิบายการเขียนพื้นผิวนี้ และจงหาภาคตัดของพื้นผิวนี้โดยระนาบ z = 1 และโดยระนาบ x = 3

วิธีทำ ให้ y = z = 0 ได้ $3x^2 = 12$ ส่วนตัด x – คือที่ 2 และ – 2 ในทำนองเดียวกัน ส่วนตัด y – ที่ $\pm\sqrt{6}$ ส่วนตัด z – ที่ $\pm\sqrt{3}$ หาเส้นบนระนาบ xy ให้ z = 0 จะได้

$$3x^2 + 2y^2 = 12 \text{ หรือ } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1$$

ซึ่งเป็นเส้นโค้งวงรีด้วยครึ่งแกนเอกเท่ากับ $\sqrt{6}$ ครึ่งแก่นโทเก่ากับ 2 มีโฟกัสอยู่ที่ $(0, \sqrt{2}\ 0)$, $(0, -\sqrt{2}, 0)$ ในทำนองเดียว เส้นบนระนาบ xz เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$$

และเส้นบนระนาบ yz เป็นวงรี

$$\frac{y^2}{6} \quad \frac{z^2}{3} = 1$$

ภาคตัดของพื้นผิวโดยระนาบ $z = 1$ เป็นเส้นโค้ง

$$3x^2 + 2y^2 + 4 = 12 \text{ หรือ } \frac{x^2}{\frac{8}{3}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

ซึ่งเป็นวงรี ภาคตัดโดยระนาบ $x = 3$ เป็นเส้นโค้ง

$$27 + 2y^2 + 4z^2 = 12 \text{ หรือ } 2y^2 + 4z^2 + 15 = 0$$

เมื่อผลบวกของปริมาณบวกสามจำนวนเป็นศูนย์ไม่ได้ จึงสรุปได้ว่าระนาบ $x = 3$ ไม่ตัดพื้นผิว ภาคตัดจึงว่างเปล่า

นิยาม 1.8.2 พื้นผิวสมมาตรเทียบกับระนาบ xy ก็ต่อเมื่อ จุด $(x, y, -z)$ และจุด (x, y, z) ต่างก็อยู่บนพื้นผิว พื้นผิวสมมาตรเทียบกับแกน x ก็ต่อเมื่อจุด $(x, -y, -z)$ และจุด (x, y, z) ต่างก็อยู่บนพื้นผิว ในทำนองเดียวกันก็สามารถนิยามการสมมาตรโดยเทียบกับระนาบพิกัดและแกนพิกัดที่เหลือได้

พื้นผิวกำลังสองทั้งหกแบบมีดังนี้

แบบที่ 1 ทรงรี

(ellipsoid)

เป็นโลกัสของสมการในรูป

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

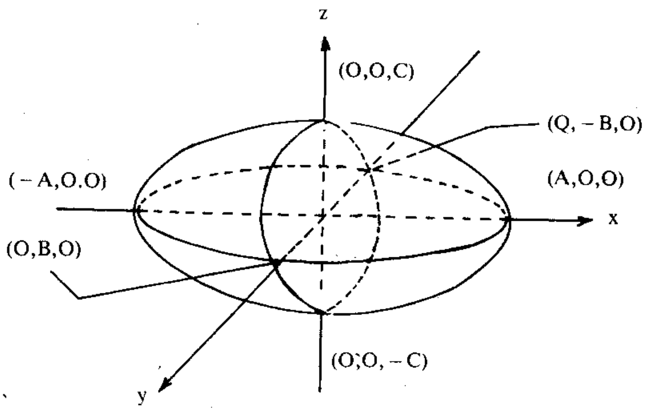
พื้นผิวนี้เขียนรูปได้ดังรูป 1.8.1 ส่วนตัด x –, y – และ z – คือ $\pm A, \pm B, \pm C$ ตามลำดับ และเส้นโค้งบนระนาบ xy –, xz – และ yz – ตามลำดับเป็นวงรี

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \ \frac{x^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \ \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

ภาคตัดโดยระนาบ $y = k$ (k เป็นค่าคงตัว) เป็นวงรีทั้งหลายในรูป

$$\frac{x^2}{A^2(1 - k^2/B^2)} + \frac{z^2}{C^2(1 - k^2/B^2)} = 1 \text{ , } y = k, -B < k < B$$

วงรีทั้งหลายดังรูป 1.8.1



รูป 1.8.1 ทรงรี

ถ้า $A = B = C$ โลกัสจะเป็นทรงกลม ถ้าสองจำนวนในสามจำนวนนี้เท่ากัน พื้นผิวจะเป็นทรงรีของการหมุนรอบ (ellipsoid of revolution) หรืออาจจะเรียกว่า ทรงคล้ายทรงกลม (spheroid) ตัวอย่าง ถ้า $A = B$ และ $C > A$ พื้นผิวเรียบ ทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง (prolate spheroid) คล้ายลูกรักบี้หรือลูกอเมริกันฟุตบอล ในอีกทางหนึ่ง ถ้า $A = B$ และ $C < A$ จะได้ทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว (oblate spheroid) โลกก็มีสัณฐานจัดเป็นทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว ด้วยภาคตัดที่เส้นศูนย์สูตรเป็นวงกลม และระยะทางระหว่างขั้วโลกเหนือและใต้สั้นกว่าเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่เส้นศูนย์สูตร

แบบที่ 2 ไฮเพอร์โบลอยด์เดี่ยวเชิงวงรี

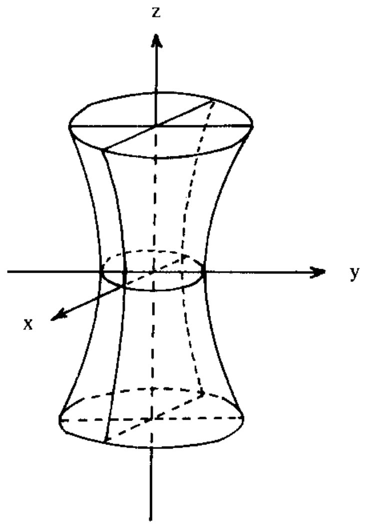
(elliptic hyperboloid of one sheet)

เป็นโลกัสของสมการในรูป

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$$

พื้นผิวนี้เขียนรูปได้ดังรูป 1.8.2 ส่วนตัด x – (x – intercept) ที่ $\pm A$ และส่วนตัด y – ที่ $\pm B$ ขณะที่ส่วนตัด z – จะต้องแก้สมการ $-z^2/C^2 = 1$ ซึ่งไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้นไม่ตัด

แกน z ภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ xy เป็นวงรี ขณะที่ภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ yz และระนาบ xz เป็นไฮเพอร์โบลา



รูป 1.8.2 ไฮเพอร์โบลอยด์เดี่ยวเชิงวงรี

ภาคตัดโดยระนาบ z = k เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{A^2(1 + k^2/C^2)} + \frac{y^2}{B^2(1 + k^2/C^2)} = 1$$

และภาคตัดโดยระนาบ y = k เป็น ไฮเพอร์โบลา

$$\frac{x^2}{A^2(1 - k^2/B^2)} - \frac{z^2}{C^2(1 - k^2/B^2)} = 1$$

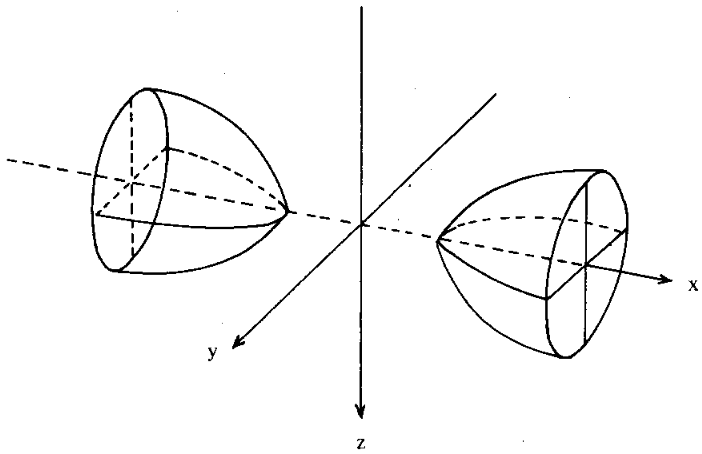
แบบที่ 3 ไฮเพอร์โบลอยด์คู่เชิงวงรี

(elliptic hyperboloid of two sheets)

เป็นโลกัสของสมการในรูป

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$$

พื้นผิวนี้เขียนรูปได้ดังรูป 1.8.3



รูป 1.8.3 ไฮเพอร์โบลอยด์คู่เชิงวงรี

จะพบว่า $|x| \geq A$ ถ้าไม่เช่นนั้นแล้วจะทำให้ $(x^2/A^2) < 1$ และทางซ้ายของสมการจะน้อยกว่าทางขวาเสมอ ส่วนตัด x อยู่ที่ $x = \pm A$ ไม่มีส่วนตัด y และ z ภาคตัดของพื้นผิว กับระนาบ xz และระนาบ xy เป็นไฮเพอร์โบลา ไม่มีภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ yz ภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ $x = k$ ต่างเป็นวงรี

$$\frac{y^2}{B^2(k^2/A^2 - 1)} + \frac{z^2}{C^2(k^2/A^2 - 1)} = 1 \text{ ถ้า } |k| > A$$

และไม่มีภาคตัด ถ้า $|k| < A$ ภาคตัดโดยระนาบ $y = k$ และ $z = k$ ต่างเป็นไฮเพอร์โบลา

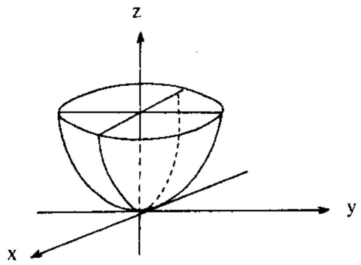
แบบที่ 4 พาราโบลอยด์เชิงวงรี

(elliptic paraboloid)

เป็นโลกัสของสมการในรูป

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = z$$

พื้นผิวนี้เขียนได้ดังรูป 1.8.4



รูป 1.8.4 พาราโบลอยด์เชิงวงรี

พื้นผิวตัดแกนทั้งสามที่จุดกำเนิด ภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ yz และ xz ต่างเป็นพาราโบลา ขณะที่ภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ xy เป็นเพียงจุด ๆ เดียวที่จุดกำเนิด ภาคตัดที่เกิดจากพื้นผิวกับระนาบ $z = k$ ต่างเป็นวงรีถ้า $k > o$ ถ้า $k < o$ ไม่มีภาคตัด ส่วนภาคตัดโดยระนาบ $x = k$ และ $y = k$ ต่างเป็นพาราโบลา

ถ้า $A = B$ จะได้พาราโบลอยด์ของการหมุนรอบ และภาคตัดโดยระนาบ $z = k, k > o$ ต่างเป็นวงกลม พื้นผิวของกล้องส่องทางไกลแบบสะท้อนภาพ โคมหน้ารถยนต์ ต่างเป็นพาราโบลอยด์ ของการหมุนรอบ

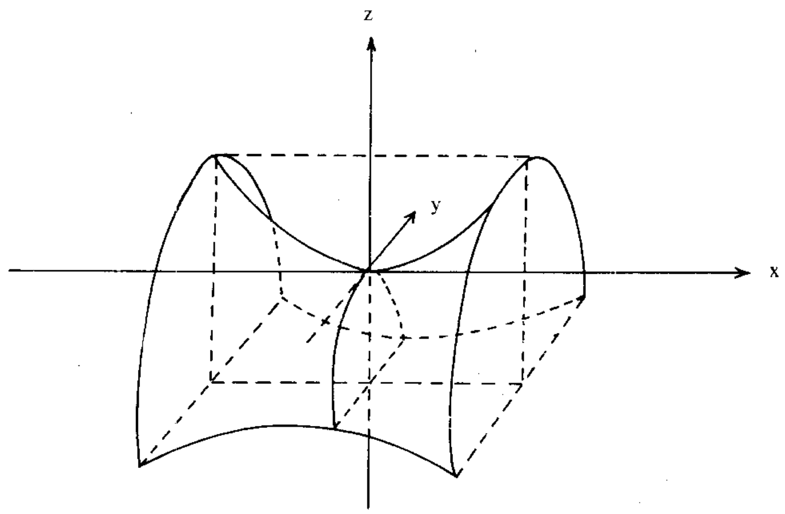
แบบที่ 5 ไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์

(hyperbolic paraboloid)

เป็นโลกัสของสมการในรูป

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = z$$

พื้นผิวเขียนได้ดังรูป 1.8.5



รูป 1.8.5 ไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์

ที่เหมือนกับพาราโบลอยด์เชิงวงรีก็คือพื้นผิวตัดแกนทั้งสามที่จุดกำเนิดภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ xz เป็นพาราโบลาเว้าหงาย ภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ yz เป็นพาราโบลาเว้าคว่ำ ภาคตัดของพื้นผิวกับระนาบ xy เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันคือ

$$y = \pm (B/A)\, x$$

พื้นผิวนี้เป็นรูปทรงอานม้า (saddle - shape) ภาคตัดของพื้นผิวโดย $x = k$ ต่างเป็นพาราโบลาเว้าคว่ำ และโดยระนาบ $y = k$ ต่างเป็นพาราโบลาเว้าหงายภาคตัดโดยระนาบ $z = k$ เป็นไฮเพอร์โบลาหันไปทางหนึ่งถ้า $k < 0$ และไปอีกทางหนึ่ง ถ้า $k > 0$ รอยตัดบนระนาบ xy สมนัยกับ $k = o$ จะประกอบด้วยเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

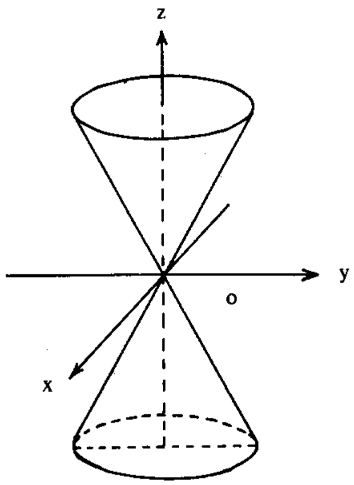
แบบที่ 6 กรวยเชิงวงรี

(elliptic cone)

เป็นโลกัสของสมการในรูป

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{z^2}{C^2}$$

พื้นผิวนี้เขียนได้ดังรูป 1.8.6 อีกครั้งหนึ่งที่พื้นผิวตัดแกนทั้งสามที่จุดกำเนิด รอยตัดบนระนาบ xz และ yz เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกัน



รูป 1.8.6 กรวยเชิงวงรี

ขณะที่รอยตัดบนระนาบ xy เป็นจุด ๆ เดียวคือจุดกำเนิด ภาคตัดที่เกิดจากพื้นผิวกับระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัดเป็นเส้นโค้งภาคตัดกรวยชนิดใดชนิดหนึ่งในเรขาคณิตวิเคราะห์ในระนาบ

ตัวอย่าง 1.8.2 จงให้ชื่อและเขียนภาพของโลกัสของ

$$4x^2 - 9y^2 + 8z^2 = 72$$

และจงแสดงภาคตัดที่ขนานกับระนาบพิกัด

วิธีทำ หารโดย 72 จะได้

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{9} = 1$$

ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลอยด์เดี่ยวเชิงวงรี ส่วนตัดแกน x ที่ $\pm 3\sqrt{2}$ ส่วนตัดแกน z ที่ ± 3 และไม่มีส่วนตัดบนแกน y รอยตัดบนระนาบ xy เป็นไฮเพอร์โบลา

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$$

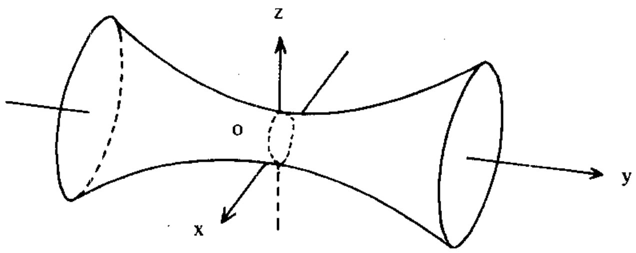
รอยตัดบนระนาบ xz เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{18} + \frac{z^2}{9} \quad 1$$

และรอยตัดบนระนาบ yz เป็นไฮเพอร์โบลา

$$\frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$$

พื้นผิวนี้เขียนได้ดังรูป 1.8.7



รูป 1.8.7 ไฮเพอร์โบลอยด์เดี่ยวเชิงวงรี

แบบฝึกหัด 1.8

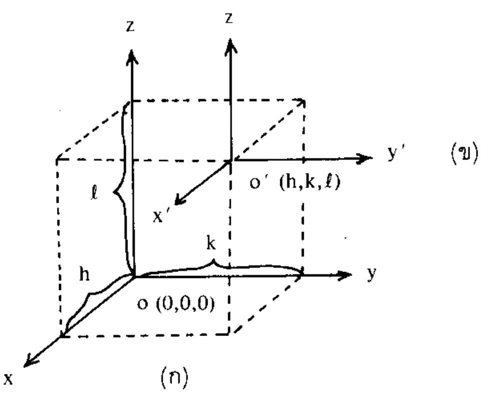
ข้อ 1 ถึง 18 อยากทราบว่าในแต่ละข้อเป็นพื้นผิวกำลังสองแบบใด พร้อมทั้งเขียนภาพประกอบด้วย

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1$
3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} + \frac{z^2}{20} = 1$
4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$
5. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$
6. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$
7. $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{x^2}{16}$
8. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$
9. $\frac{x}{4} = \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$
10. $z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$
11. $y = \frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{8}$
12. $z^2 = 4x^2 + 4y^2$
13. $y^2 = x^2 + z^2$
14. $z^2 = x^2 - y^2$
15. $2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 8$
16. $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$
17. $3x = 2y^2 - 5z^2$
18. $\frac{y}{5} = 8z^2 - 2x^2$

1.9 การย้ายแกน

(Translation of Axes)

ตามรูป 1.9.1 (ก) แสดงระบบพิกัดฉากในสามมิติ สมมุติว่า จะกำหนดระบบพิกัดฉากที่สองด้วยแกน x', y', z' โดยให้แกน x' ขนานกับแกน x และไปตามแกน x เท่ากับ h หน่วย แกน y' ขนานกับแกน y และไปตามแกน y เท่ากับ k หน่วย และแกน z' ขนานกับแกน z และไปตามแกน z เท่ากับ ℓ หน่วย ให้ o' เป็นจุดตัดกันของแกนชุดใหม่นี้ ซึ่ง o' มีพิกัดเป็น (h, k, ℓ) เมื่อเทียบกับแกนชุดเดิมดังรูป 1.9.1 (ข)



รูป 1.9.1

จุด P ในปริภูมิจะมีพิกัดในทั้งสองระบบ ถ้ามีพิกัดเป็น (x,y,z) ในระบบแรกเริ่ม และ (x', y', z') ในระบบที่สอง สมการ

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

$$z' = z - \ell$$

เป็นจริง ระบบพิกัดทั้งสอง xyz และ $x'y'z'$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเหล่านี้กล่าวได้ว่ามีความสัมพันธ์กันโดยการย้ายแกน วิธีการย้ายแกนนี้ศึกษาโดยใช้สมการกำลังสองจะง่ายขึ้น โดยเฉพาะในเรื่องพื้นผิวกำลังสอง และเครื่องมือสำคัญในกระบวนการนี้คือกำลังสองบริบูรณ์ (completing the square)

ตัวอย่าง 1.9.1 จงใช้วิธีการย้ายแกนพิกัด พิจารณาว่าสมการ

$$x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2x - 8y + 9z = 10$$

เป็นพื้นผิวกำลังสองชนิดใดและจงเขียนภาพให้ดูด้วย

วิธีทำ เขียนเสียใหม่โดยจัดแต่ละกลุ่มเป็น

$$(x^2 + 2x \qquad) + 4(y^2 - 2y \qquad) + 3(z^2 + 3z \qquad) = 10$$

โดยกำลังสองบริบูรณ์จะได้

$$(x + 1)^2 + 4(y - 1)^2 + 3(z + \frac{3}{2})^2 = 10 + 1 + 4 + \frac{27}{4}$$

โดยการย้ายแกนพิกัดให้จุดกำเนิดใหม่อยู่ที่จุด $(-1, 1, -\frac{3}{2})$ ของแกนชุดเดิม และโดยให้แกนชุดใหม่ขนานกับแกนชุดเดิมจึงได้สมการ

$$x' = x + 1$$

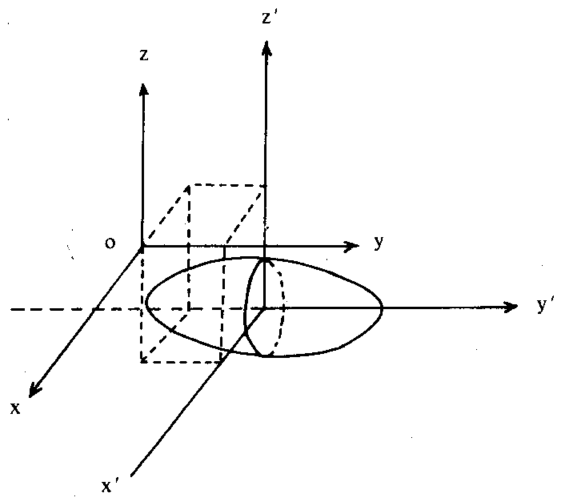
$$y' = y - 1$$

$$z' = z + \frac{3}{2}$$

สมการของพื้นผิวที่ต้องการเมื่อเขียนกับแกนชุดใหม่คือ

$$x'^2 + 4y'^2 + 3z'^2 = \frac{87}{4}$$

ซึ่งเป็นสมการทรงรี (elliproid) พื้นผิวและแกนพิกัดทั้งสองเขียนได้ดังรูป 1.9.2



รูป 1.9.2 ทรงรี

ตัวอย่าง 1.9.2 จงใช้วิธีการย้ายแกนพิกัด พิจารณาว่าสมการ

$$2x^2 - 3y^2 + 6x - 12y - 4z = 0$$

เป็นพื้นผิวชนิดใด พร้อมทั้งเขียนภาพด้วย

วิธีทำ เขียนสมการในรูป

$$2(x^2 + 3x \quad) - 3(y^2 + 4y \quad) = 4z$$

ทำให้เป็นกำลังสองบริบูรณ์จะได้

$$2(x + \frac{3}{2})^2 - 3(y + 2)^2 = 4z + \frac{9}{2} - 12$$

$$= 4(z - \frac{15}{8})$$

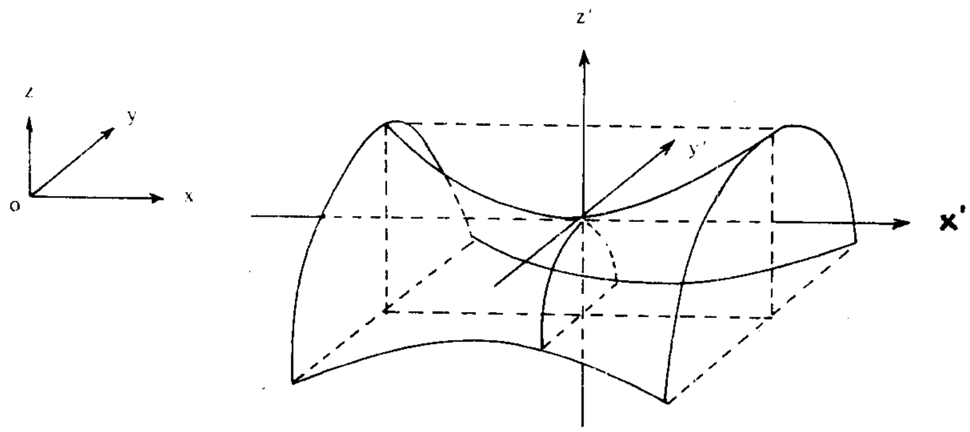
โดยการย้ายแกน

$$x' = x + \frac{3}{2},\ y' = y + 2,\ z' = z - \frac{15}{8}$$

จะได้สมการเทียบแกนชุดใหม่เป็น

$$2x'^2 - 3y'^2 = 4z'$$

ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลิก พาราโบลอยด์ พื้นผิวพร้อมด้วยระบบพิกัดทั้งสอง แสดงให้เห็นดังรูป 1.9.3



รูป 1.9.3 ไฮเพอร์โบลิก พาราโบลอยด์

ตัวอย่าง 1.9.3 จงใช้วิธีการย้ายแกนพิกัดแสดงพื้นผิว

$$4x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 8x + 18y - 8z = 15$$

ว่าเป็นพื้นผิวชนิดใดพร้อมทั้งเขียนภาพ

วิธีทำ เริ่มด้วยการจัดพวก

$$4(x^2 + 2x \qquad) - 3(y^2 - 6y \qquad) + 2(z^2 - 4z \qquad) = 15$$

อาศัยกำลังสองบริบูรณ์จะได้

$$4(x + 1)^2 - 3(y - 3)^2 + 2(z - 2)^2 = 15 + 4 - 27 + 8 = 0$$

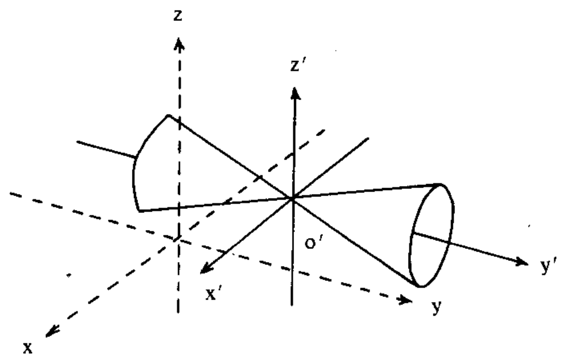
โดยการย้ายแกน

$$x' = x + 1, y' = y - 3, z' = z - 2$$

แสดงว่าพื้นผิวเป็นกรวยเชิงวงรีด้วยสมการ

$$4x'^2 + 2z'^2 = 3y'^2$$

พื้นผิวและระบบพิกัดแสดงให้เห็นดังรูป 1.9.4



รูป 1.9.4 กรวยเชิงวงรี

แบบฝึกหัด 1.9

ข้อ 1 ถึง 6 จงใช้วิธีการย้ายแกนพิกัด ศึกษาดูว่าในแต่ละสมการแทนพื้นผิวกำลังสองชนิดใด พร้อมทั้งเขียนภาพประกอบ

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z = 0$
2. $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z = 18$
3. $x^2 + 8z^2 + 2x - 3y + 16z = 0$
4. $2y^2 - 3z^2 + 4x - 3y + 2z = 0$
5. $x^2 + y^2 - z^2 + 4x + 8y + 6z + 11 = 0$
6. $x^2 - y^2 + 2x - 3y + 4z = 0$

1.10 ระบบพิกัดอื่น ๆ
(Other Coordinate Systems)

จะพิจารณาระบบพิกัดในสามมิติที่แตกต่างไปจากระบบพิกัดฉากที่เคยศึกษามาแล้ว ระบบนี้ก็คือ **ระบบพิกัดทรงกระบอก** (cylindrical coordinate) ซึ่งอธิบายได้ดังนี้ จุด P ในปริภูมิด้วยพิกัดฉาก (x, y, z) แทนค่า x และ y ด้วยพิกัดเชิงขั้วที่สมนัย r, θ โดยไม่เปลี่ยนค่า z กล่าวอีกทางหนึ่งได้ว่า แต่ละจำนวนทั้งสามที่เป็นอันดับ (ordered number triple ในรูป (r, θ, z) มีจุด ๆ หนึ่งที่สัมพันธ์ในปริภูมิการแปลงจากระบบพิกัดทรงกระบอกเป็นระบบพิกัดฉากกำหนดโดยสมการ

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

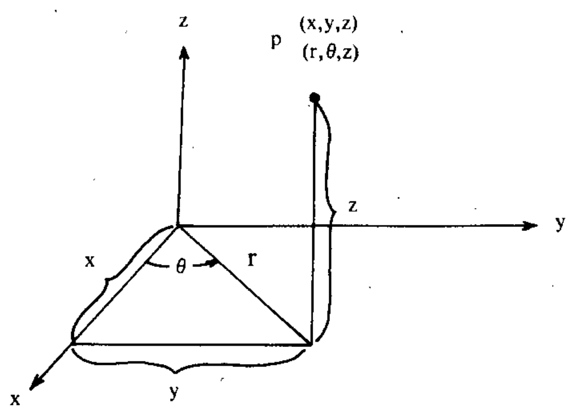
การแปลงจากระบบพิกัดฉากไปเป็นระบบพิกัดทรงกระบอกกำหนดโดย

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

ถ้าพิกัดของจุด ๆ หนึ่ง กำหนดให้ในระบบหนึ่ง สมการข้างบนแสดงให้เห็นว่าจะหาพิกัดในระบบอื่นอย่างไร รูป 1.10.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระบบทั้งสอง



รูป 1.10.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากกับระบบพิกัดทรงกระบอก

จุดกำเนิดของทั้งสองระบบอยู่ที่จุดเดียวกัน และที่ $\theta = 0$ ก็คือระนาบ xz จะเห็นได้ว่าโลกัส $\theta =$ ค่าคงตัวประกอบด้วยทุก ๆ จุดในระนาบที่ผ่านแกน z โลกัส $r =$ ค่าคงตัวประกอบด้วยทุก ๆ จุดบนทรงกระบอกกลมตรง (right circular cylinder) ด้วยแกน z เป็นแกนกลาง (พจน์ "พิกัดทรงกระบอก" มาจากความจริงนี้) โลกัส $z =$ ค่าคงตัวประกอบด้วยทุก ๆจุดในระนาบที่ขนานกับระนาบ xy

ตัวอย่าง 1.10.1 จงหาพิกัดทรงกระบอกของจุดซึ่งมีพิกัดฉากเป็น

$P(3,3,5)$ $Q(2,0,-1)$, $R(0,4,4)$, $S(0,0,5)$, $T(2,2\sqrt{3},1)$

วิธีทำ สำหรับจุด P จะได้

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan \Theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\therefore \Theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 5$$

นั่นคือ พิกัดทรงกระบอกของ P คือ $(3\sqrt{2}, \pi/4, 5)$

สำหรับจุด Q $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$, $\tan\theta : = \frac{0}{2} = 0$, $\theta = 0$, $z = -1$ พิกัดจึงเป็น $(2, 0, -1)$ สำหรับ R ได้ $r = 4$, $\theta = \pi/2$, $z = 4$ ผลลัพธ์คือ $(4, \pi/2, 4)$ สำหรับ S ได้ $r = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$, $\tan\theta = \frac{0}{0}$ จะได้ $\tan\theta$ มีค่าใด ๆ ก็ได้ นั่นคือ θ มีค่าใด ๆ, $z = 5$ นั่นคือ พิกัดทรงกระบอกของ S คือ $(0, \theta, 5)$ สำหรับ T จะได้ $r = \sqrt{4 + 12} = 4$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\theta = \pi/3$ คำตอบคือ $(4, \pi/3, 1)$

เมื่อพิกัดเชิงขั้วไม่ให้การสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่อันดับกับจุดในระนาบ ดังนั้นพิกัดทรงกระบอกจึงไม่ให้การสมนัยระหว่างจำนวนทั้งสามที่เป็นอันดับกับจุดในปริภูมิด้วย

ระบบพิกัดทรงกลม (spherical coordinate system) นิยามดังนี้ จุด P ด้วยพิกัดฉากมีพิกัดทรงกลม (ϱ, θ, ϕ) เมื่อ ϱ เป็นระยะทางของจุด P จากจุดกำเนิด θ เป็นปริมาณเดียวกับพิกัดทรงกระบอก และ ϕ เป็นมุมที่ชัน OP กับแกน z ในทิศทางบวก รูป 1.10.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากกับพิกัดทรงกลม การแปลงจากพิกัดทรงกลมไปเป็นพิกัดฉากกำหนดโดยสมการ

$$x = \varrho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \varrho \sin\phi \sin\theta$$

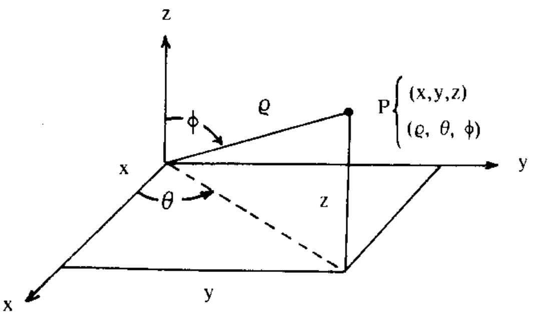
$$z = \varrho \cos\phi$$

การแปลงจากพิกัดฉากไปยังพิกัดทรงกลม กำหนดโดย

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

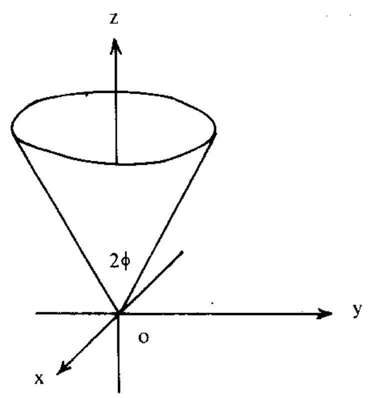
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



รูป 1.10.2 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดทรงกลม

โลกัส ϱ = ค่าคงตัวเป็นทรงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด (พจน์ "พิกัดทรงกลม" มาจากความจริงข้อนี้) โลกัส θ = ค่าคงตัวเป็นระนาบผ่านแกน z ดังเช่นพิกัดทรงกระบอก โลกัส ϕ = ค่าคงตัวเป็นกรวยที่จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และมุมเป็น 2ϕ ดังรูป 1.10.3



รูป 1.10.3 กรวยจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและมุมเปิด 2ϕ

ตัวอย่าง 1.10.2 จงหาสมการในรูปพิกัดทรงกลมของทรงกลม

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$$

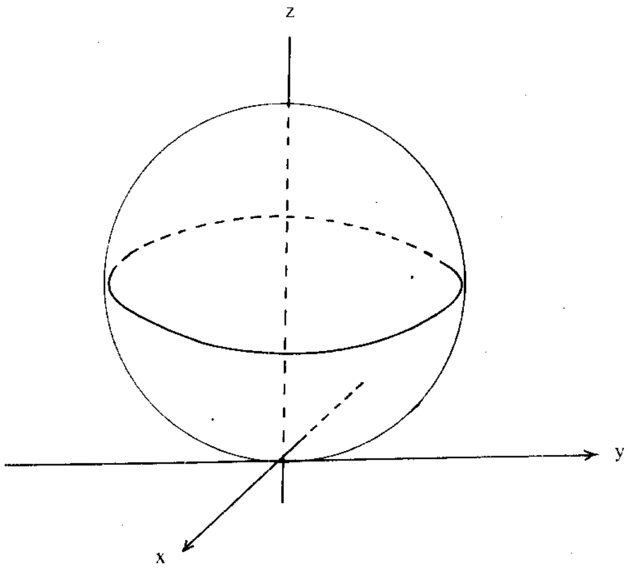
พร้อมทั้งเขียนรูปทรงกลมนี้ด้วย

วิธีทำ เมื่อ $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ และ $z = \varrho \cos \phi$ เพราะฉะนั้น

$$\varrho^2 - 2\varrho \cos \phi = 0 \equiv \varrho(\varrho - 2 \cos \phi) = 0$$

โลกัสของ $\varrho = 0$ อยู่บนโลกัส $\varrho - 2 \cos \phi = 0$ (ด้วย $\phi = \pi/2$) เขียนรูปได้ดังรูป 1.10.4

$$\varrho = 2 \cos \phi$$

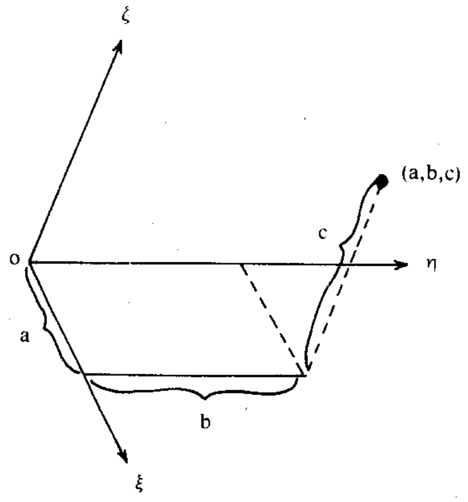


รูป 1.10.4 $\varrho = 2 \cos \phi$

ถ้า ϱ เป็นค่าคงตัวแล้วปริมาณ (θ, ϕ) จะให้ระบบพิกัดบนพื้นผิวของทรงกลม เส้นรุ้ง (latitude) และเส้นแวง (longitude) บนพื้นผิวของโลกให้ระบบพิกัดระบบหนึ่งด้วย ถ้าจำกัดให้ $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ แล้ว θ เรียกเส้นแวงของจุดบนพิกัดทรงกลม ถ้าจำกัดให้ $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ แล้ว ϕ ถูกเรียกว่าเส้นรุ้งร่วม (colatitude) ของจุด เส้นรุ้งกำหนดได้โดยเครื่องหมาย คือเมื่อมีค่าเป็นบวกจะอยู่เหนือเส้นศูนย์สูตร และถ้ามีค่าเป็นลบจะอยู่ใต้เส้นศูนย์สูตร

เส้นตรงสามเส้นใด ๆ ในปริภูมิที่ไม่ได้อยู่ในระนาบเดียวกันและตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง อาจจะใช้เป็นแกนของระบบพิกัด โดยให้จุดตัดเป็นจุดกำเนิด กำหนดหน่วยความยาวของแต่ละแกน ก็จะได้

ระบบพิกัดเฉียง (oblique system of coordinate) ดังรูป 1.10.5 ให้แกนทั้งสามเป็น $\xi(x_i)$, η(Eta), ζ(Zeta) จึงกำหนดจุด (a,b,c) ได้โดยเริ่มจากจุดกำเนิดไปตามแกน ξ เป็นระยะทาง a แล้วขนานไปตามแกน η เป็นระยะทาง b และสุดท้ายขนานไปตามแกน ζ เป็นระยะทาง c ก็จะได้จุด (a,b,c) ตามต้องการดังรูป 1.10.5



รูป 1.10.5 ระบบพิกัดเฉียง

แบบฝึกหัด 1.10

1. จงหาชุดของพิกัดทรงกระบอกสำหรับแต่ละจุดซึ่งมีพิกัดฉากเป็น

   (ก) $(3, 3, 7)$, (ข) $(4, 8, 2)$, (ค) $(-2, 3, 1)$

2. จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดทรงกระบอกเป็น

   (ก) $(2, \pi/3, 1)$, (ข) $(3, -\pi/4, 2)$, (ค) $(7, 2\pi/3, -4)$

3. จงหาชุดของพิกัดทรงกลมสำหรับแต่ละจุดซึ่งพิกัดฉากเป็น

   (ก) $(2, 2, 2)$, (ข) $(2, -2, -2)$, (ค) $(-1, \sqrt{3}, 2)$

4. จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดทรงกลมเป็น

   (ก) $(4, \pi/6, \pi/4)$, (ข) $(6, 2\pi/3, \pi/3)$, (ค) $(8, \pi/3, 2\pi/3)$

5. จงหาชุดของพิกัดทรงกระบอกสำหรับแต่ละจุดซึ่งพิกัดทรงกลมเป็น

   (ก) $(4, \pi/3, \pi/2)$, (ข) $(2, 2\pi/3, 5\pi/6)$, (ค) $(7, \pi/2, \pi/6)$

6. จงหาชุดของพิกัดทรงกลมสำหรับแต่ละจุดซึ่งพิกัดทรงกระบอกเป็น

   (ก) $(2, \pi/4, 1)$, (ข) $(3, \pi/2, 2)$, (ค) $(1, 5\pi/6, -2)$,

ข้อ 7 ถึง 11 จงหาสมการในรูปพิกัดทรงกระบอกของโลกัสซึ่งสมการกำหนดให้ในรูป (x, y, z) พร้อมทั้งเขียนภาพ

7. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
8. $x^2 + y^2 = 4z$
9. $x^2 + y^2 = z^2$
10. $x^2 - y^2 = 4$
11. $x^2 + y^2 - 4y = 0$

ข้อ 12 ถึง 14 จงหาสมการในรูปพิกัดทรงกลมของโลกัส ซึ่งกำหนดสมการให้ในรูป (x, y, z) พร้อมทั้งเขียนภาพ

12. $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$
13. $x^2 + y^2 = z^2$
14. $x^2 + y^2 = 4z + 4$ (หาค่า ϱ ในพจน์ของ ϕ)
