บทที่ 4
จำนวนเชิงซ้อน
(Complex Number)

จำนวนเชิงซ้อนกำเนิดขึ้นมาเนื่องจากไม่มีจำนวนจริง x ใด ๆ ที่จะตอบคำถามสมการโพลีโนเมียล $x^2 + 1 = 0$. เพื่อให้สมการนี้สามารถหาคำตอบได้ เซตของจำนวนเชิงซ้อนจึงได้ถือกำเนิดขึ้น

เราสร้างจำนวนเชิงซ้อนให้มีรูปเป็น $a + bi$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง และ i ซึ่งเราเรียกว่า หน่วยจินตภาพ (imaginary unit) มีคุณสมบัติว่า $i^2 = 1$

ถ้า $z = a + bi$ แล้ว

เรียก a ว่าส่วนจริงของ z (real part of z) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{Re}(z)$

เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพของ z (imaginary part of z) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{Im}(z)$

4.1 การดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 4.1.1 จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ และ $c + di$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $a = b$ และ $c = d$

ตัวอย่าง 4.1.1

$$2 + \sqrt{18}\,i = \left(\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right) + 3\sqrt{2}\,i$$

พิจารณา

$$\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)$$

แต่

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 &= 7 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\,\sqrt{7-4\sqrt{3}} \\ &\quad + 7 - 4\sqrt{3} \\ &= 14 + 2\sqrt{49 - 16(3)}\end{aligned}$$

$$= 14 + 2(\sqrt{1})$$
$$= 16$$
$$\therefore \quad \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right) = 4$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right) = 2$$

ดังนั้น $\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2$

และ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

จึงได้ว่า $2 + \sqrt{18}\,i = \frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{18}\,i$

ตัวอย่าง 4.1.2 **จงหาค่าของ** x **และ** y **ที่ทำให้** $2x - yi = 4 + 3i$

วิธีทำ

$$2x = 4$$
$$-y = 3$$
$$x = 2$$
$$y = -3$$
#

นิยาม 4.1.2 ให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด กำหนดการดำเนินการ + (การบวก) บน C โดย

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ใน C

ตัวอย่าง 4.1.3 จงหาค่าของ $(3+2i) + (-7-i)$

วิธีทำ

$$(3+2i) + (-7-i) = \left(3 + (-7)\right) + \left(2 + (-1)\right)i$$
$$= (-4 + 1)\,i$$
$$= -4 + i$$
#

นิยาม 4.1.3 ให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด กำหนดการดำเนินการ − (การลบ) บน C โดย

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)\,i$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ใน C

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหาค่าของ $(8-6i) - (2+7i)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(8-6i) - (2+7i) &= (8-2) + ((-6) - 7)\,i \\ &= 6 + (-13)\,i \\ &= 6 - 13\,i\end{aligned}$$

#

นิยาม 4.1.4 ให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด กำหนดการดำเนินการ (การคูณ) บน C โดย

$$(a+bi)\,(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)\,i$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อนใน C

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาค่าของ $(4+2i)\,(2-3i)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(4+2i)\,(2\text{-}3i) &= \left((4)\,(2) - (2)\,(\text{-}3)\right) + \left((4)\,(-3) + (2)\,(2)\right)i \\ &= (8+6) + (-12+4)\,i \\ &= 14\text{-}S\end{aligned}$$

#

นิยาม 4.1.5 ให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด กำหนดการดำเนินการ ÷ (การหาร) บน C โดย เมื่อ $c + di \neq 0$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + hd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อนใน C

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาค่าของ $\frac{3 - 2i}{-1 + i}$

วิธีทำ $\frac{3-2i}{-1+i} = \frac{3(-1)+(-2)(1)}{(-1)^2+1^2} + \frac{(-2)(-1)-(3)(1)}{(-1)^2+1^2}i$

$$= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i \qquad \#$$

4.2 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ของ z หรือ โมดูลัส (modulus ของ z) คือ $\sqrt{a^2+b^2}$ เขียนแทนด้วย $|z|$

นั่นคือ $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

และ $\bar{z} = a - bi$ เรียกว่าจำนวนสังยุคของ z

ตัวอย่าง 4.2.1

$$|-4 + 2i| = \sqrt{(-4)^2+(2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ถ้า $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว คุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ หรือ $|z_1z_2\ldots z_m| = |z_1||z_2|\ldots|z_m|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ถ้า $z_2 \neq 0$
3. $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
   หรือ $|z_1 + z_2 + \ldots + z_m| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_m|$
4. $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$ หรือ $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

4.3 สัจพจน์หลักมูลของจำนวนเชิงซ้อน

ในบทก่อนนักศึกษาพบแล้วว่าเราเขียนแทนจำนวนเต็มด้วยคู่อันดับของจำนวนธรรมชาติ หรือเขียนแทนจำนวนตรรกยะด้วยคู่อันดับของจำนวนเต็ม ในหัวข้อนี้เช่นกัน เราอาจเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อนในรูปของคู่อันดับของจำนวนจริงได้เช่นกัน

นั่นคือ $z = (a, b)$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง และโดยนิยามของการเท่ากัน, การบวก และการคูณจำนวนเชิงซ้อน ทำให้เราได้ว่า

$(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c, b = d$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$m\ (a.\ b) = (ma.\ mb)$$

$$i = (0.\ 1)$$

$$i^2 = (0,\ I)\ (0,\ 1)$$

$$= (-1.0)$$

$$1 = (I,\ 0)$$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงแสดงว่า $(a,\ b) = a\ (1, 0) + h\ (0,\ 1) = a + bi$

พิสูจน์ $\because$ $(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b)$

$= a\ (1,\ 0) + b\ (0,\ 1)$

แต่ $(1,\ 0) = 1$

และ $(0,\ I\ ) = i$

ดังนั้น $(a,\ h) = a\ (1,\ 0) + b\ (0.\ 1) = ii + bi$

ทฤษฎี 4.3.1

ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้วจะได้ว่าคุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

4.3.1.1 $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน (กฎการปิดภายใต้การบวก)

4.3.1.2 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (กฎการสลับที่ภายใต้การบวก)

4.3.1.3 $(z_1+z_2) + z_3 = z_1 + (z_2+z_3)$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การบวก)

4.3.1.4 $z_1 z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน (กฎการปิดภายใต้การคูณ)

4.3.1.5 $z_1z_2 = z_2z_1$ (กฎการสลับที่ภายใต้การคูณ)

4.3.1.6 $(z_1z_2)\ z_3 = z_1\ (z_2z_3)$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การคูณ)

4.3.1.7 $z_1\ (z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (กฎการแจกแจง)

4.3.1.8 มีจำนวนเชิงซ้อน 0 และเป็นจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $z + 0 = z = 0 + z$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อน z เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

4.3.1.9 มีจำนวนเชิงซ้อน 1 และเป็นจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อน z เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

4.3.1.10 สำหรับแต่ละจำนวนเชิงซ้อน z จะมีจำนวนเชิงซ้อน z และเป็นจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $z + z = 0$ เรียก z ว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-z$

4.3.1.11 สำหรับแต่ละจำนวนเชิงซ้อน $z \neq 0$ จะมีจำนวนเชิงซ้อน z_1 และเป็นจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $zz_1 = 1$ เรียก z ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของ z_1 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ z^{-1} หรือ $\frac{1}{z}$

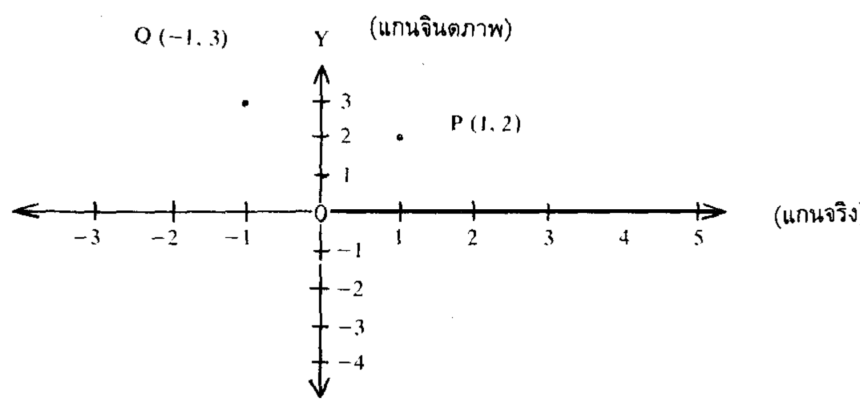
จึงเห็นได้ว่าเซตจำนวนเชิงซ้อน (C) ภายใต้การดำเนินการ + และเป็นสนาม

บทพิสูจน์ของทฤษฎีนี้นักศึกษาดูได้จากตำรา **MA 223** รศ. กัลยาณี ธาระสืบ สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง

4.4 จำนวนเชิงซ้อนกับระบบพิกัดฉาก

จากนิยามของจำนวนเชิงซ้อนจะเห็นได้ชัดว่าคู่อันดับ $(x, y) = (\text{Re } z, \text{ Im } z)$ สามารถแทนได้ด้วยจุด ๆ หนึ่งในระนาบ R^2 กล่าวคือ ทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อนซึ่งแทนด้วยคู่อันดับ (x, y) จะสมนัยกับจุด (x, y) เพียงจุดเดียว (unique) บนระนาบ XY (R^2) ในระบบพิกัดฉาก และจุด (x, y) ทุกจุดในระนาบ XY ก็จะใช้แทนจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ หนึ่งจำนวนเช่นกัน

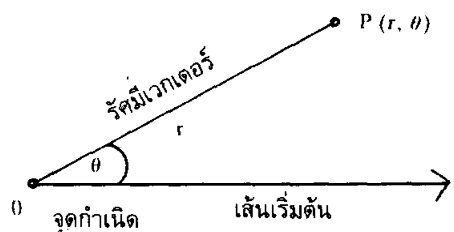
จุดกำเนิด 0 จะมีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, 0)$ แทนจำนวนเชิงซ้อน $0 + 0i$ จุดทุกจุดบนแกน X มีโคออร์ดิเนตอยู่ในรูป $(x, 0)$ และสมนัยกับจำนวนจริง $x + 0i = x$ เรียกแกน X ว่าแกนจริง จุดทุกจุดบนแกน Y จะมีโคออร์ดิเนตในรูป $(0, y)$ และสมนัยกับจำนวนจินตภาพบริสุทธิ์ $0 + y_i = y_i$ เรียกแกน Y ว่าแกนจินตภาพ เรียกระนาบ XY ว่าระนาบเชิงซ้อน



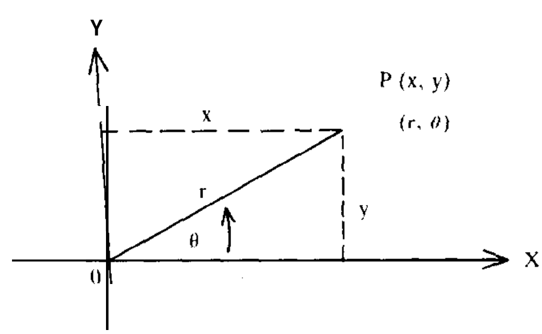
ถ้า z และ w เป็นสมาชิกของ C (เป็นจำนวนเชิงซ้อน) แล้ว เขียนเส้นตรงจาก z และ w ไปยัง 0 (จุดกำเนิด (0, 0)) แล้วจะได้ว่า เส้นตรงนี้จะเป็นด้านสองด้านของสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยที่ 0, z และ w เป็นจุดยอดสามจุด จุดยอดที่สี่คือ $z + w$ นั่นคือ การบวกจำนวนเชิงซ้อนคือ การบวกของเวคเตอร์สเปซ R^2

4.5 จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ถ้า P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน (x, y) หรือ $x + yi$ แล้ว เรายังสามารถเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้วในระนาบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งจุดบนระนาบนี้ กำหนดโดยอาศัยเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งเรียกว่าเส้นเริ่มต้น จุดปลายสุดของเส้นหลักเรียกจุดกำเนิด เส้นเริ่มต้นจะลากจากจุดกำเนิดไปทางขวาในแนวนอน เรียกระยะระหว่างจุดกำเนิดกับจุด P ว่ารัศมีเวกเตอร์ นิยมเขียนแทนด้วย r ส่วนมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากเส้นเริ่มต้นไปยังรัศมีเวกเตอร์ เรียกว่า มุมเวกเตอร์ นิยมแทนด้วย θ ดังนั้น จุด P ใด ๆ ในระนาบพิกัดเชิงขั้วจะแทนด้วยคู่อันดับ (r, θ)



ถ้าเรานำจุด $P(r, \theta)$ ไปวางทาบในระบบพิกัดฉากโดยให้จุดกำเนิดทับกัน เส้นเริ่มต้นทับแกน X ทางขวาจะได้รูป



พิจารณารูปจะได้ว่า

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

เนื่องจาก $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= |x + yi|$

$= |z|$

จึงเรียก r = โมดูลัสของ z หรือค่าสัมบูรณ์ของ z เขียนแทนด้วย $\mathrm{mod}\ z$

เรียก θ ว่า แอมพิจูดหรืออาร์กิวเมนต์ของ z เขียนแทนด้วย $\arg z$

จำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi = x + iy$

$= r\cos\theta + ir\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ซึ่งเรียกว่ารูปพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

ในบางครั้ง เพื่อสะดวกในการเขียนจะเขียน $\mathrm{cis}\ \theta$ แทน $\cos\theta + i\sin\theta$

จำนวนเชิงซ้อน $z \neq 0$ ใด ๆ จะสมนัยกับค่าของ θ ในช่วง $0 \leqslant 0 < 2\pi$ เพียงค่าเดียวเท่านั้น

และ $(r, \theta) = (r, \theta + 2k\pi)$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว 2 จำนวนใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ โมดูลัสเท่ากัน และแอมพลิจูดเท่ากันหรือต่างเป็นพหุคูณของ 2π เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.5.1 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 4(\cos 240° + i\sin 240°)$ ในรูปพิกัดฉาก

วิธีทำ

จาก $z = 4(\cos 240° + i \sin 210”)$

เพราะ $\cos 240° = \cos(180” + 60°)$

$= -\cos 60”$

$$= -\frac{1}{2}$$

และ $\sin 240^\circ = \sin (180^\circ + 60^\circ)$

$$= -\sin 60''$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = 4 (\cos 240^\circ + i \sin 210'')$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\right)$$

$$= -2 - 2\sqrt{3}\, i$$

ตัวอย่าง 4.5.2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 6\sqrt{3} + 6i$ ในรูปพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ

$$z = 6\sqrt{3} + 6\,i$$

$$= (6\sqrt{3}\ .\ 6)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{144}$$

$$= 12$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$= \frac{6}{6\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$z = 6\sqrt{3} + 6\,i$$

$$= 12\ (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$ #

4.6 ทฤษฎีของเดอร์มัว (De Moivre's Theorem)

ทฤษฎี 4.6.1

ถ้า $z_1 = x_1 + y_1 i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

และ $z_2 = x_2 + y_2 i = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

พิสูจน์ $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

แต่ $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

ดังนั้น $z = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$ #

ทฤษฎี 4.6.2

ถ้า $z_1 = x_1 + y_1 i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

และ $z_2 = x_2 + y_2 i = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

พิสูจน์

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)]}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]}{r_2(1)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$ #

ตัวอย่าง 4.6.1 กำหนดให้ z_1 = 5 (cos 170” + i sin 170”)

z_2 = 9 (cos 55° + i sin 55°)

จงหา z_1z_2

วิธีทำ z_1z_2 = 5 (cos 170° + i sin 170”) 9 (cm 55° + i sin 55°)

= (5) (9) (cos ($170^\circ+55^\circ$) + i sin ($170^\circ+55^\circ$)]

= 45 [cos 225” + i sin 225°]

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 \text{ (cos 170” + i sin 170”)}}{9 (\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ)}$$

$$= \frac{5}{9} [\cos (170^\circ - 55^\circ) + i \sin (170^\circ - 55^\circ)]$$

$$= \frac{5}{9} [\cos 115^\circ + i \sin (115^\circ)]$$

บทแทรก จากทฤษฎี 4.6.1 ทำให้ได้ว่า

$$z_1z_2 \ldots z_n = r_1r_2 \ldots r_n [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]$$

และถ้า $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ แล้ว จะทำให้ได้ว่า

$$z^n = \{ r (\cos \theta + i \sin \theta) \}^n$$

$$= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

ซึ่งรู้จักกันในนามทฤษฎีเดอร์มัว

ทฤษฎี 4.6.3 (ทฤษฎีบทของเดอร์มัว)

ถ้า n เป็นจำนวนบวกใด ๆ และ $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้ว

$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

พิสูจน์ Pifl $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z^n = \underbrace{rr\ldots r}_{n \text{ ตัว}} [\cos (\underbrace{\theta+\theta+\ldots+\theta}_{n \text{ ตัว}}) + i \sin (\underbrace{\theta+\theta+\ldots+\theta}_{n \text{ ตัว}})]$$

$$= r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$ #

ทฤษฎี 4.6.4 (ทฤษฎีบทของเดอร์มัว)

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

พิสูจน์ ให้ $z = r\cos\theta + i\sin\theta$

ถ้า $r = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$z = 1\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^n = 1^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$= 1\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\therefore\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$ #

ทฤษฎี 4.6.5 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$

พิสูจน์

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \left(\frac{1}{r}\right)^n[\cos n(-\theta) + i\sin n(-\theta)]$$

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$ #

ตัวอย่าง 4.6.2 จงหาค่าของ $(1 + i\sqrt{3})^4$

วิธีทำ $\because$ $(1+i\sqrt{3}) = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

ดังนั้น $(1+i\sqrt{3})^4 = [2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)]^4$

$$= 2^4[\cos(4)(60^\circ) + i\sin(4)(60^\circ)]$$

$$= 16(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -8 - i8\sqrt{3}$$ #

ตัวอย่าง 4.6.3 จงหาค่าของ $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^3}{(-2 + 2i)^4}$.

วิธีทำ

$$(1 - i\sqrt{3}) = 2(\cos 300° + i\sin 300°)$$

$$(1 - i\sqrt{3})^3 = 2^3(\cos 900° + i\sin 900°)$$

$$= 8[\cos 2(360°) + 180° + i\sin 2(360°) + 180°]$$

$$= 8[\cos 180° + i\sin 180°]$$

และ

$$(-2 + 2i) = 2\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$$

$$(-2 + 2i)^4 = (2\sqrt{2})^4(\cos 540° + i\sin 540°)$$

$$= 64[\cos(360° + 180°) + i\sin(360° + 180°)]$$

$$= 64(\cos 180° + i\sin 180°)$$

ดังนั้น

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})^3}{(-2 + 2i)^4} = \frac{8(\cos 180° + i\sin 180°)}{64(\cos 180° + i\sin 180°)}$$

$$= \frac{1}{8}[\cos(180° - 180°) + i\sin(180° - 180°)]$$

$$= \frac{1}{8}(\cos 0° + i\sin 0°)$$

$$= \frac{1}{8}(1 + i0) = \frac{1}{8}$$ #

4.7 รากของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม จำนวน w จะเรียกว่ารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z ก็ต่อเมื่อ $w^n = z$ เราเขียน

$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$

ทฤษฎี 4.7.1

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วรากที่ n ของ z คือจำนวนเชิงซ้อน

$$w = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\}$$

$$k = 0, 1, 2, \ , n-1$$

พิสูจน์ ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

w เป็นรากที่ n ของ z

นั่นคือ $w^n = z$

ถ้า $z \neq 0$

ให้ $w = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ โดย r_0 และ θ_0 ยังไม่ทราบค่า

จาก $w^n = z$

$\therefore$ $[r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r_0^n(\cos n\theta_0 + i\sin n\theta_0) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $r_0^n = r$

$r_0 = \sqrt{r}$

และ $n\theta_0 = \theta + 2kn$ เมื่อ $k = 0, 1, 2. \ldots, (n-l)$

$$\theta_0 = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

จึงได้ว่า $w = \sqrt[n]{z}$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

โดยที่ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ถ้า $z = 0$ รากที่ n ของ z คือ $w = 0$ #

ตัวอย่าง 4.7.1 จงหารากที่สี่ของ $-8 - i8\sqrt{3}$

วิธีทำ

$$-8 - i8\sqrt{3} = 16(\cos 240^{\circ} + i\sin 240^{\circ})$$

$$= 16\ [\cos\ (240^\circ+360^\circ k) + i \sin\ (240+360^\circ\ k)]$$

$$(-8 - i8\sqrt{3}\ )^{1/4} = \sqrt[4]{16}\left[\cos \frac{(240^\circ+360^\circ k)}{4} + i \sin \frac{(240^\circ+360^\circ k)}{4}\right]$$

$$= 2\ [\cos\ (60^\circ+90^\circ k) + i \sin\ (60^\circ+90^\circ k)]$$

เมือ $k = 0, 1, 2, 3$ จะได้รากทั้ง 4 ดังนี้

$w_1 = 2$ (cos 60” + i sin 60”)

$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$w_2 = 2\ (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$ -VT+ i

$w_3 = 2$ (cos 240” + i sin 240”)

$$= 2\left(-\frac{1}{2}\ i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

$w_4 = 2$ (cos 330” + i sin 330°)

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

ตัวอย่าง 4.7.2 จงหารากที่ 6 ของ -1

วิธีทำ

$$-1 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ$$

$$= \cos\ (180^\circ+360^\circ k) + i \sin\ (180^\circ+360^\circ k)$$

$$\sqrt[6]{-1} = \cos\left(\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}\right) + i \sin\left(\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}\right)$$

$$= \cos\ (30^\circ+60^\circ k) + i \sin\ (30^\circ+60^\circ k)$$

เมือ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ จะได้รากทั้ง 6 ของ -1 ดังนี้

$w_1 = \cos 30^\circ + i \sin 30$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$w_2 = \cos 90° + i \sin 90$

$= i$

$w_3 = \cos 150° + i \sin 150"$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

$w_4 = \cos 210" + i \sin 210"$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

$w_5 = \cos 270° + i \sin 270"$

$= -i$

$w_6 = \cos 330° + i \sin 330$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$ #

4.8 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน 1

รากที่ n ของ 1 ก็คือจำนวนเชิงซ้อน w ซึ่งยกกำลัง n แล้วมีค่าเท่ากับ 1 โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก

นั่นคือ จำนวนเชิงซ้อน w ซึ่ง $w^n = 1$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎี 4.8.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $w^n = 1$ แล้ว

$$w = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, k-1$

พิสูจน์ ให้ $z = 1$

$= \cos 0° + i \sin 0°$

โดยทฤษฎี 4.7.1 ได้ว่า

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{1}\left(\cos \frac{0°+2k\pi}{n} + i \sin \frac{0°+2k\pi}{n}\right)$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$w = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ตัวอย่าง 4.8.1 จงหารากที่ 3 ของ 1

วิธีทำ

จาก $w = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ในที่นี้ $n = 3$

$$w = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

ให้ $k = 0, 1, 2$ จะได้รากที่ 3 ของ 1 ดังนี้

$$w_1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$$

$$= 1$$

$$w_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sqrt{3})$$

$$w_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3})$$ #

แบบฝึกหัด

1. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

   1.1 $(3+2i) + (-7-i)$

   1.2 $(-7-i) + (3+2i)$

   1.3 (H-hi) $(2i-7)$

   1.4 $(5+3i) + \{(-1+2i) + (7-5i)\}$

   1.5 $\{(5+3i) + (-2+2i)\} + (7-5i)$

   1.6 $(2-3i)(4+2i)$

   1.7 $(4+2i)(2-3i)$

   1.4 $(2-i)\{(-3+2i)(5-4i)\}$

   1.9 $((3-i)(-3+2i)\}$ (5-G)

   1.10 $(-1+2i)\{(7-5i) + (-3+4i)\}$

2. กำหนดให้ $z_1 = 2+i, z_2 = 3-2i$ และ $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ จงหาต่อไปนี้

   2.1 $|3z_1 - 4z_2|$

   2.2 $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$

   2.3 $(\bar{z}_3)^4$

   2.4 $\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 \quad i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}$,

3. จงหาจำนวนจริง x และ y ซึ่ง $3x + 2yi - ix + 5y = 7 + 5i$

4. จงพิสูจน์ว่า

   4.1 $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

   4.2 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

5. จงเขียนแต่ละจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว

   5.1 $2 + 2\sqrt{i}$

   5.2 $-5 + 5i$

   5.3 $-\sqrt{6} - \sqrt{2i}$

   5.4 $-3i$

6. จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

6.1 $(1 + i)^{6}$

6.2 $(\sqrt{3} - i)^{10}$

6.3 $(\sqrt{3} + i)^{-6}$

6.4 $(2 + 3i)^{4}$

6.5 $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{20}$

6.6 $\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{-7}}{2}$

6.7 $\frac{(1 + i)(\sqrt{3} + i)^{5}}{(1 - i\sqrt{3})^{5}}$

6.8 $\left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^{-11}$

7. จงหารากที่กำหนดให้ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

7.1 รากที่ห้าของ $4 - 4i$

7.2 รากที่สี่ของ -4

7.3 รากที่สองของ $2 - 2\sqrt{3}\, i$

7.4 รากที่สี่ของ $-16i$

7.5 รากที่สามของ $-8i$

7.6 รากที่สามของ $-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\, i$

8. จงหารากที่กำหนดให้ของจำนวนเชิงซ้อน 1

8.1 รากที่ 5 ของ 1

8.2 รากที่ 8 ของ 1

8.3 รากที่ 10 ของ 1