บทที่ 3
จำนวนจริง
(Real Numbers)

3.1 จำนวนตรรกยะ (Rational Numbers)

เราได้ศึกษาการหารลงตัวและหารไม่ลงตัวของจำนวนเต็มในบทที่แล้ว และทราบจากขั้นตอนวิธีหาร (Division Algorithm) ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ ย่อมมีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $a = qb+r$ ซึ่ง $0 \leqslant r < |b|$ ก็หมายความว่า ถ้าเอา b ไปหาร a ก็จะได้ผลลัพธ์ q เหลือเศษ r ในที่นี้บังคับว่า r ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0 และน้อยกว่าขนาดของตัวหาร คือ $|b|$ จะเห็นได้ว่า ตัวหาร b ของเราจำเป็นต้องต่างจาก 0 นั่นคือ เราไม่เอา 0 หารจำนวนใด ๆ

ความพยายามที่จะหาคำตอบ x (ค่าของ x) จากสมการ $a = bx$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ ถ้า $b|a$ เราก็จะได้คำตอบ x เป็นจำนวนเต็ม แต่ถ้า $b \nmid a$ เราก็จะได้คำตอบ x ไม่ใช่จำนวนเต็ม คือ ได้จำนวนใหม่ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม พบว่าคำตอบ x ขึ้นอยู่กับจำนวนเต็ม a และ b เราเขียนแทนจำนวน x ด้วยคู่ลำดับ $\left(\frac{a}{b}\right)$ และเรียกว่าจำนวนตรรกยะ (Rational Number) ตัวอย่างเช่น $\left(\frac{7}{5}\right)$ แทนจำนวนตรรกยะ x ซึ่งคล้องตามสมการ $7 = 5x$, $\left(\frac{3}{8}\right)$ แทนจำนวนตรรกยะ x ซึ่งคล้องตามสมการ $3 = 8x$ และ $\left(\frac{4}{4}\right)$ แทนจำนวนตรรกยะ x ซึ่งคล้องตามสมการ $4 = 4x$ เป็นต้น

หมายเหตุ สมการ $a = bx$ ตามที่เคยเรียนในชั้นประถมและมัธยม เราคุ้นกับความหมายของ $x = \frac{a}{b}$ ดังนั้น เราอาจคิดเสียว่า คู่ลำดับ $\left(\frac{a}{b}\right)$ ก็คือ $\frac{a}{b}$ นั่นเอง เราใช้สัญลักษณ์ Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะ ดังนั้น

$$Q = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

3.2 การบวกและการคูณจำนวนตรรกยะ

นิยาม 3.2.1 กำหนดให้ $Q = \left\{\left(\frac{a}{b}\right) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ นิยามความสัมพันธ์ "$\sim$" บน Q ดังต่อไปนี้

สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left(\frac{a}{b}\right)$ และ $\left(\frac{c}{d}\right)$ ใด ๆ

$$\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right) \Longleftrightarrow ad = bc$$

จึงพบว่า $\left(\frac{1}{2}\right) \sim \left(\frac{3}{6}\right)$ เพราะว่า $1 \times 6 = 2 \times 3$ และ

$\frac{4}{5} \sim \frac{8}{10}$ เพราะว่า $4 \times 10 = 5 \times 8$

นอกจากนี้ ยังพบต่อไปว่า

$$\left(\frac{0}{1}\right) \sim \left(\frac{0}{2}\right) \sim \left(\frac{0}{3}\right) \sim \ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) \sim \left(\frac{2}{2}\right) \sim \left(\frac{3}{3}\right) \sim \ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{-1}{1}\right) \sim \left(\frac{1}{-1}\right) \sim \left(\frac{-2}{2}\right) \sim \ldots\ldots\ldots$$

ฯลฯ

ข้อสังเกต

1) $(a, b) = (c, d)$ ตามนิยามคู่ลำดับ หมายถึง $a = c$ และ $b = d$

2) เราใช้ $\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$ แทนความหมายถึงคู่ลำดับทั้งสองแทนจำนวนตรรกยะเดียวกัน (นั่นคือ $ad = bc$)

3) เนื่องจาก $Q = \left\{\left(\frac{a}{b}\right) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

ดังนั้น Q จึงสามารถเขียนในรูปของผลคูณคาร์ทีเซียนได้

$$Q = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) = \left\{\left(\frac{0}{1}\right), \left(\frac{0}{2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \ldots, \left(\frac{-1}{1}\right), \left(\frac{-1}{2}\right), \ldots, \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \ldots\right\}$$

ทฤษฎีบท 3.2.1 ความสัมพันธ์ $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน Q

พิสูจน์ เราจะต้องพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$ และ $\left(\frac{e}{f}\right)$ ใด ๆ

1) $\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{a}{b}\right)$

2) $\left(\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)\right) \Rightarrow \left(\left(\frac{c}{d}\right) \sim \left(\frac{a}{b}\right)\right)$

3) $\left(\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right) \& \left(\frac{c}{d}\right) \sim \left(\frac{e}{f}\right)\right) \Rightarrow \left(\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{e}{f}\right)\right)$

1) เนื่องจาก $ab = ba$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{a}{b}\right)$

2) สมมติว่า $\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$

$ad = bc$

$.da = cb$

$.. \ cb = da$

$\therefore \left(\frac{c}{d}\right) \sim \left(\frac{a}{b}\right)$

3) สมมติว่า $\left(\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)\right)$ และ $\left(\frac{c}{d}\right) \sim \left(\frac{e}{f}\right)$

$..\ ad = bc$ และ $cf = de$

$,addf = bcdf$ และ $bdcf = bdde$

$.addf = bdde$

$..\ af = be$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{e}{f}\right)$ #

เนื่องจาก $Q = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\mathbf{Q} = \left\{\left(\frac{0}{1}\right), \left(\frac{0}{2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \ldots, \left(-\frac{1}{1}\right), \left(-\frac{1}{2}\right), \ldots\right.$$

$$\left.\left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \ldots, \left(-\frac{2}{1}\right), \left(-\frac{2}{2}\right), \ldots\right\}$$

เราพบว่า สมาชิกของ Q สามารถแยกเป็นพวก ๆ ที่แทนจำนวนตรรกยะเดียวกันได้ เช่น

$$A = \left\{\left(\frac{1}{2}\right), \frac{-1}{-2}, \left(\frac{2}{4}\right), \left(\frac{-2}{-4}\right), \ldots\right\}$$

$$B = \left\{\left(\frac{-1}{2}\right), \left(\frac{1}{-2}\right), \left(\frac{-2}{4}\right), \left(\frac{2}{-4}\right), \ldots\right\}$$

$$\vdots$$

จึงอาจนิยามของจำนวนตรรกยะใหม่ให้กะทัดรัดขึ้น ดังนี้

นิยาม 3.2.2 สำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะ $\left(\frac{a}{b}\right)$,

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{\left(\frac{m}{n}\right) : \left(\frac{m}{n}\right) \sim \left(\frac{a}{b}\right)\right\}$$

เรียก $\left[\frac{a}{b}\right]$ ว่า เป็นพวกสมมูล (equivalence class) ของ $\left(\frac{a}{b}\right)$ เรียก $\left(\frac{a}{b}\right)$ ว่าเป็นตัวแทนของพวกสมมูล $\left[\frac{a}{b}\right]$

ทฤษฎีบท 3.2.2 สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left(\frac{a}{b}\right)$ และ $\left(\frac{c}{d}\right)$ ใด ๆ

1) $\left(\frac{a}{b}\right) \in \left[\frac{a}{b}\right]$

2) $\left(\frac{a}{b}\right) \in \left[\frac{c}{d}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right]$

3) $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right] \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left(\frac{a}{b}\right)$ และ $\left(\frac{c}{d}\right)$ ใด ๆ

1) เนื่องจาก $\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{a}{b}\right)$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) \in \left[\frac{a}{b}\right]$

2)

$\Rightarrow$ สมมติว่า $\left(\frac{a}{b}\right) \in \left[\frac{c}{d}\right]$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$

2.1) สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left(\frac{x}{y}\right)$ ใด ๆ ใน $\left|\frac{a}{b}\right|$

$\therefore \quad \left(\frac{x}{y}\right) \sim \left(\frac{a}{b}\right)$

ดังนั้น $\quad \left(\frac{x}{y}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$

$\therefore \quad \left(\frac{x}{y}\right) \in \left|\frac{c}{d}\right|$

นั้น $\quad \left|\frac{a}{b}\right| \subseteq \left|\frac{c}{d}\right|$

2.2) สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left(\frac{u}{v}\right)$ ใด ๆ ใน $\left|\frac{c}{d}\right|$

$\therefore \quad \left(\frac{u}{v}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$

ดังนั้น $\quad \left(\frac{u}{v}\right) \sim \left(\frac{a}{b}\right)$

$\left(\frac{u}{v}\right) \in \left|\frac{a}{b}\right|$

นั่นคือ $\quad \left|\frac{c}{d}\right| \subseteq \left|\frac{a}{b}\right|$

2.1) และ 2.2) นั่นคือ $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c}{d}\right|$

$\Leftarrow$ สมมติว่า $\quad \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c}{d}\right|$

เนื่องจาก $\quad \left(\frac{a}{b}\right) \in \left|\frac{a}{b}\right|$

$\left(\frac{a}{b}\right) \in \left|\frac{c}{d}\right|$

3)

$\Rightarrow$ สมมติว่า $\quad \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c}{d}\right|$

เนื่องจาก $\quad \left(\frac{a}{b}\right) \in \left|\frac{a}{b}\right|$

$\left(\frac{a}{b}\right) \in \left|\frac{c}{d}\right|$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$$

$\Leftarrow$ **สมมติว่า** $\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) \in \left[\frac{c}{d}\right]$$

$\therefore$ โดย 2) จึงได้ $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right]$ #

นิยาม 3.2.3 ให้ $\left[\frac{a}{b}\right]$ เป็นพวกสมมูลของ $\left(\frac{a}{b}\right) \in Q$ เรานิยามจำนวนตรรกยะเป็นเซตของพวกสมมูล และแทนด้วยสัญลักษณ์ "Q" ดังนั้น

$$\mathbf{Q} = \left\{\left[\frac{a}{b}\right] : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

นิยาม 3.2.4 สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left[\frac{a}{b}\right]$ และ $\left[\frac{c}{d}\right]$ ใด ๆ

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{ad+bc}{bd}\right] \quad \text{และ}$$

$$\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{ac}{bd}\right]$$

ทฤษฎีบท 3.2.3 คุณสมบัติแจ่มชัด

สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{a'}{b'}\right], \left[\frac{c}{d}\right]$ และ $\left[\frac{c'}{d'}\right]$ ใด ๆ

ถ้า $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]$ และ $\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{c'}{d'}\right]$ แล้ว

1) $\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]+\left[\frac{c'}{d'}\right]$

2) $\left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]\left[\frac{c'}{d'}\right]$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{a'}{b'}\right], \left[\frac{c}{d}\right]$ และ $\left[\frac{c'}{d'}\right]$ ใด ๆ

สมมติว่า $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]$ และ $\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{c'}{d'}\right]$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{a'}{b'}\right) \quad \text{และ} \quad \left(\frac{c}{d}\right) \sim \left(\frac{c'}{d'}\right)$$

$ab' = ba'$ และ $cd' = dc'$

1) $\therefore \quad (ab')(dd') = (ba')(dd')$ และ $(bb')(cd') = (bb')(dc')$

$$\therefore \quad (ab')(dd') + (bb')(cd') = (ba')(dd') + (bb')(dc')$$

$$\therefore \quad (ad)(b'd') + (bc)(b'd') = (a'd')(bd) + (b'c')(bd)$$

$$\therefore \quad (ad+bc)(b'd') = (a'd'+b'c')(bd)$$

$$\therefore \left(\frac{ad+bc}{bd}\right) \sim \left(\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}\right)$$

$$\therefore \left[\frac{ad+bc}{bd}\right] = \left[\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}\right]$$

$$\therefore \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right] + \left[\frac{c'}{d'}\right]$$

2) $\therefore \quad (ab')(cd') = (ba')(dc')$

$$\therefore \quad (ac)(b'd') = (bd)(a'c')$$

$$\therefore \left(\frac{ac}{bd}\right) \sim \left(\frac{a'c'}{b'd'}\right)$$

$$\therefore \left[\frac{ac}{bd}\right] = \left[\frac{a'c'}{b'd'}\right]$$

$$\therefore \left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]\left[\frac{c'}{d'}\right]$$ #

ต่อไปนี้เป็นคุณสมบัติในการบวกและการคูณ

ทฤษฎีบท 3.2.4 สำหรับจำนวนตรรกยะ $x = \left[\frac{a}{b}\right]$, $y = \left[\frac{c}{d}\right]$ และ $z = \left[\frac{e}{f}\right]$ ใด ๆ

1) $x+y$ เป็นจำนวนตรรกยะ

2) xy เป็นจำนวนตรรกยะ

3) $x+y = y+x$

4) $xy = yx$

5) $x+(y+z) = (x+y)+z$

6) $x(yz) = (xy)z$

7) มีจำนวนตรรกยะ $0 = \left[\frac{0}{m}\right]$ ซึ่ง $x+0 = x$ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ x

8) สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ $x = \left[\frac{a}{b}\right]$ มีจำนวนตรรกยะ $-x$ ซึ่ง $x+(-x) = 0$

9) มีจำนวนตรรกยะ $1 = \left|\frac{m}{m}\right| \neq 0$ ซึ่ง $x \cdot 1 = x$

10) สำหรับจำนวนตรรกยะ $x \neq 0$ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ x^{-1} ซึ่ง $xx^{-1} = 1$

11) $x(y+z) = xy+xz$

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.4 อาจพิสูจน์ได้โดยง่ายด้วยคุณสมบัติ จำนวนตรรกยะและนิยามข้างต้นจึงเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.4

สำหรับจำนวนตรรกยะ x, y, z และ t ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

2. ถ้า $z \neq 0$ และ $xz = yz$ แล้ว $x = y$
3. ถ้า $x+z = y+z$ แล้ว $x = y$
4. มีจำนวนตรรกยะ 0 เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ $x+0 = x$
5. มีจำนวนตรรกยะ $-x$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $x+(-x) = 0$
6. $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$
7. $(x+y)z = xz+yz$
8. $(-x)(-y) = xy$
9. $-(-x) = x$
10. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = 0$ หรือ $y = 0$
11. $(-1)(x) = -x$
12. $-0 = 0$
13. $-(x+y) = (-x)+(-y)$
14. $(x+y)(z+t) = xz+xt+yz+yt$
15. $(-x)y = x(-y) = -(xy)$

ถ้าเรานิยาม $x-y$ คือ $x+(-y)$ (อ่าน "$x-y$" ว่า "x ลบด้วย y")
และเมื่อ $x = \frac{a}{b}$ และ $y = \left| \frac{c}{d} \right. \neq 0$,

$$x \div y = \frac{x}{y} = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot \left|\frac{c}{d}\right| = \left|\frac{ad}{bc}\right|$$

(อ่าน "$\frac{x}{y} = x \div y$" ว่า "x หารด้วย y") แล้ว

จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

16. $x-(y-z) = (x-y)+z$
17. ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{x} = 1$
18. ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$

19. ถ้า $y \neq 0$ และ $t \neq 0$ แล้ว $\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} = \frac{xz}{yt}$

20. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{z} + \frac{x}{y} = \frac{x+y}{z}$

21. ถ้า $y \neq 0$ และ $t \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{xt+yz}{yt}$

22. $\frac{x}{1} = x$

23. ถ้า $\frac{x}{y} \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{Y} \cdot \frac{y}{x} =$,

24. ถ้า $z \neq 0$, $x \cdot \frac{y}{z} = \frac{xy}{z}$

25. ถ้า $z \neq 0$, $x + \frac{y}{z} = \frac{xz+y}{z}$

26. ถ้า $y \neq 0$ และ $z \neq 0$ แล้ว $\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{yz}$

27. ถ้า $\frac{y}{z} \neq 0$ แล้ว $\frac{y}{z} = \frac{xz}{Y}$

28. ถ้า $y \neq 0$ และ $t \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{y} - \frac{z}{t} = \frac{xt-yz}{yt}$

29. ถ้า $y \neq 0$ และ $\frac{z}{t} \neq 0$ แล้ว $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{t}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{t}{z}$

3.3 ความสัมพันธ์น้อยกว่าและมากกว่าใน Q เป็นความสัมพันธ์ลำดับอย่างเข้มงวด (Strick Linear Ordering)

สำหรับจำนวนตรรกยะ $x = \left[\frac{a}{b}\right]$ และ $y = \left[\frac{c}{d}\right]$ ซึ่งต่อไปนี้เราจะเขียนแต่เพียงว่า $x = \frac{a}{b}$ และ $y = \frac{c}{d}$ เราจะเขียน x และ y เสียในรูปที่ $0 < b$ และ $0 < d$ ก็ย่อมทำได้ ถ้าเราเขียน x และ y ในรูปดังกล่าว ก็จะนิยามได้ว่า

$$x < y \Longleftrightarrow ad < bc$$

เนื่องจากความสัมพันธ์ $<$ ใน Q เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด คือ $(x<y \wedge y<z) \Rightarrow (x<z)$ และสำหรับจำนวนตรรกยะ x และ y ใด ๆ ต่อไปนี้ $x = y$, $x < y$, $y < x$ เป็นจริงเพียงกรณีเดียวเท่านั้น พูดง่าย ๆ ก็คือ ไม่มีกรณี $x < x$ และไม่มีกรณีที่ $x < y \Rightarrow y < x$ จึงกล่าวได้ว่า $<$ เป็นความสัมพันธ์ลำดับอย่างเข้มงวดในระบบจำนวนตรรกยะ ทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทซึ่งเป็นคุณสมบัติพิเศษของจำนวนตรรกยะ ซึ่งจำนวนเต็มไม่มีคุณสมบัตินี้

ทฤษฎีบท 3.3.1 สำหรับจำนวนตรรกยะ x และ z ใด ๆ ถ้า $x < z$ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ y ซึ่ง $x < y < z$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ x และ z ใด ๆ

ให้ $x = \frac{a}{b}$, $z = \frac{c}{d}$ โดยที่ $0 < b$ และ $0 < d$

สมมติว่า $x < z$

$$\therefore \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$\therefore ad < bc$$

1) $\therefore ad+ad < ad+bc$

$$\therefore a(2bd) < (ad + bc)b$$

$$\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd}$$

2) จาก $ad < bc$

$$ad+bc < bc+bc$$

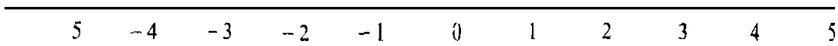
$$\therefore (ad + bc)d < (2bd)c$$

$$\frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d}$$

1) และ 2) นั่นคือ สำหรับจำนวนตรรกยะ x และ z ใด ๆ ถ้า $x < z$ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ

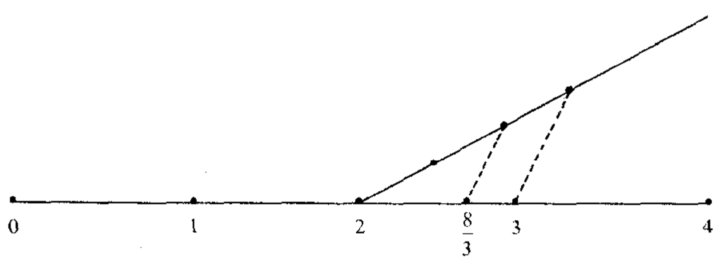
$$y = \frac{ad+bc}{2bd} = \frac{x+z}{2} \quad \text{ซึ่ง} \quad x < y < z \qquad \#$$

ในการเขียนแสดงจำนวนตรรกยะด้วยจุดบนเส้นจำนวน กระทำได้ดังต่อไปนี้



เริ่มด้วยการเขียนแสดงจำนวนเต็มด้วยจุดต่าง ๆ บนเส้นตรงนี้ ทำได้โดยเลือกจุดใดจุดหนึ่งขึ้นมาแทน 0 แล้วกำหนดความยาว 1 หน่วยขึ้น (ตามชอบใจ) ให้จุดซึ่งห่างจาก 0 ไปทางขวามือ 1 หน่วย แทน 1 จุดซึ่งห่าง 0 ไปทางขวามือ 2 หน่วย แทน 2 ฯลฯ ให้จุดซึ่งห่างจาก 0 ไปทางซ้ายมือ 1 หน่วยแทน −1 จุดซึ่งอยู่ห่างจาก 0 ไปทางซ้ายมือ 2 หน่วยแทน −2 ฯลฯ ดังนั้นเราจึงได้ว่า ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็ม และถ้า $a < b$ จุด a ต้องอยู่ทางซ้ายของ b และทางกลับกันถ้า a อยู่ทางซ้ายของ b ต้องได้ $a < b$

ในการเขียนแสดงจำนวนตรรกยะด้วยจุดบนเส้นตรง ทำได้โดยการสร้างจุดที่แทนจำนวนเต็มเสียก่อนโดยใช้วิธีที่กล่าวไว้แล้ว แล้วใช้วิธีแบ่งเส้นตรง (จากวิชาเรขาคณิต) ในการกำหนดจุดซึ่งแทนจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม เช่น ถ้าเราจะหาจุดซึ่งแทน $\frac{8}{3}$ ($\frac{8}{3} = 2+\frac{2}{3}$) ดังนั้น $\frac{8}{3}$ อยู่ห่างจาก 2 ไปทางขวาด้วยระยะทาง $\frac{2}{3}$ หน่วย) ก็อาจทำได้โดยการแบ่งช่องจากเส้นตรงจากจุดที่แทน 2 กับ 3 ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน จุดแบ่งจุดที่ 2 (นับจุดที่อยู่ใกล้ 2 เป็นจุดที่ 1) เป็นจุดที่ต้องการ



ในทำนองเดียวกัน ก็อาจหาจุดซึ่งแทนจำนวนตรรกยะจำนวนอื่น ๆ ได้ ทฤษฎีบท 3.3.1 บอกให้ทราบว่า ในการเขียนแสดงจำนวนตรรกยะด้วยจุดบนเส้นตรงนั้น มีจุดที่แทนจำนวนตรรกยะอยู่อย่างหนาแน่น (คือระหว่าง 2 จุดใด ๆ ที่แทนจำนวนตรรกยะย่อมมีอย่างน้อยอีกหนึ่งจุดที่แทนจำนวนตรรกยะ) ซึ่งผิดกับการแสดงจำนวนเต็มด้วยจุดบนเส้นตรง

3.4 จำนวนอตรรกยะ (Irrational Numbers)

จากการศึกษาระบบจำนวนนับ ระบบจำนวนเต็ม และระบบจำนวนตรรกยะ และคงเห็นว่า ความสัมพันธ์ $<$ ช่วยจัดจำนวนต่าง ๆ เข้าลำดับกัน และโดยการเขียนจุดบนเส้นตรงแทนจำนวนต่าง ๆ ที่เราศึกษาลงบนเส้นตรง และอาจกล่าวได้ว่า จำนวนที่เขียนแทนด้วยจุดบนเส้นตรงดังกล่าวแล้วได้ว่า **จำนวนจริง** (Real Numbers) ซึ่งพบว่าระบบจำนวนธรรมชาติ ระบบจำนวนเต็ม และระบบจำนวนตรรกยะ ดังที่กล่าวแล้ว เป็นส่วนหนึ่งของระบบจำนวนจริง เราจะใช้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง เนื่องจากได้กล่าวไว้แล้วว่า จุดต่าง ๆ บนเส้นตรงที่แทนจำนวนตรรกยะนั้นมีอยู่อย่างหนาแน่น เราอาจคิดว่าไม่มีจุดใดเหลืออยู่ให้เราใช้เขียนแทนจำนวนจริงอื่นที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะอีกเลยก็ได้ ความจริงมีอีกมากมาย เรียกจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะว่า จำนวนอตรรกยะ (Irrational Numbers) ต่อไปนี้จะแสดงว่ามีจำนวนจริงที่เป็นจำนวนอตรรกยะโดยการพิสูจน์ข้อความ **"ไม่มีจำนวนตรรกยะ d ซึ่ง $d^2 = 2$"**

พิสูจน์ สมมติว่า มีจำนวนตรรกยะ d ซึ่ง $d^2 = 2$ ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนแทน d ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม $\frac{m}{n}$ โดยที่ ห.ร.ม. $(m, n) = 1$ ได้ ก็คือ

$$d = \frac{m}{n} \quad \text{โดยที่ ห.ร.ม. } (m,n) = 1$$

$$\therefore \quad d^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\therefore \quad 2n^2 = m^2$$

$\therefore$ m^2 เป็นเลขคู่

$\therefore$ m เป็นเลขคู่ .... (1)

ให้ $m = 2k, \quad k \in Z$

$$\therefore \quad m^2 = 4k^2 = n^2$$

$\therefore$ n^2 เป็นเลขคู่

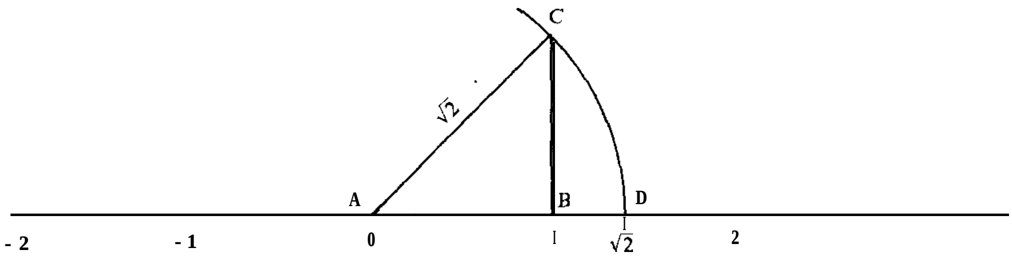
$\therefore$ n เป็นเลขคู่

ดังนั้น ห.ร.ม. $(m, n) \geqslant 2 \neq 1$

นั่นคือ d เขียนในรูปของเศษส่วนของจำนวนเต็ม $\frac{m}{n}$ โดยที่ ห.ร.ม. $(m, n) = 1$ ไม่ได้ d จึงไม่ใช่จำนวนตรรกยะ #

การพิสูจน์ข้างบนแสดงว่า ถ้า d ซึ่ง $d^2 = 2$, แล้ว d ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เราเขียนเสียว่า $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ การแสดงด้วยเรขาคณิตต่อไปนี้แสดงว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น จำนวนจริง $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ



ให้ A และ B เป็นจุดซึ่งแทน 0 และ 1 ตามลำดับ ลาก BC ตั้งฉากกับ AB และให้ BC มีความยาวเท่ากับ AB (คือยาวเท่ากับ 1 หน่วย) ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งของวงกลมด้วยรัศมี AC ตัดเส้นตรง AB ที่ D จากเรขาคณิตเราทราบว่า

$$(\text{ความยาว AD})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

ดังนั้น AD ยาว $\sqrt{2}$ หน่วย จุด D จึงเป็นจุดที่แทนจำนวนอตรรกยะ นี่ก็แสดงให้เห็นว่า ยังมีจุดซึ่งมิได้ถูกใช้แทนจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งจุด (อันที่จริงมีจุดเช่นนี้มากมาย) เช่นนี้เราก็เห็นได้ว่า แม้จุดที่แทนจำนวนตรรกยะจะมีอยู่อย่างหนาแน่นก็จริง แต่ยังมีช่องโหว่ระหว่างจุดเหล่านั้น กล่าวคือ **จุดที่แทนจำนวนตรรกยะมิได้เรียงกันอยู่อย่างต่อเนื่อง** นั่นเอง

จำนวนจริงที่เป็นจำนวนอตรรกยะมีอีกมากมาย เช่น e, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, π, ฯลฯ โดยเฉพาะ "ถ้า q เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ศูนย์ และ r เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว qr ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

พิสูจน์ สมมติว่า q เป็นจำนวนตรรกยะ และ $q \neq 0$ และ r เป็นจำนวนอตรรกยะ

ให้ $q = \frac{m}{n}$ และ $m \neq 0$

สมมติว่า qr เป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ $qr = \frac{a}{b}$

$$\therefore \quad \frac{m}{n} r = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad r = \frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$$

ขัดแย้งข้อที่ว่า $r \notin \mathbf{Q}$

นั่นคือ $qr \notin \mathbf{Q}$ #

3.5 ส่วนตัดเดเดคินด์

ส่วนตัดเดเดคินด์ (Dedekind Cut) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ส่วนตัด (Cut) คือ $L|U$ ซึ่ง $L \subseteq Q$ และ $U = Q - L$ โดยที่ L มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1) $L \neq \phi$
2) $L \neq Q$
3) สำหรับทุก $a \in L$ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ b ซึ่ง $b \in L$ และ $a < b$
4) สำหรับทุก $a \in L$ และ $b \in Q$ และ $b < a$ แล้ว $b \in L$

ทฤษฎีบท 3.5.1 สำหรับส่วนตัด $L|U$ ใด ๆ และจำนวนตรรกยะ q ใด ๆ ถ้า $p \in L$ และ $q \in U$ แล้ว $p < q$

พิสูจน์ สำหรับส่วนตัด $L|U$ ใด ๆ และจำนวนตรรกยะ q ใด ๆ สมมติว่า $p \in L$ และ $q \in U$

กรณีที่ 1 ถ้า $q = p$ แล้ว $q \in L$

กรณีที่ 2 ถ้า $q < p$ แล้ว $q \in L$

ทั้งสองกรณีข้างบนเราได้ว่า ถ้า $q = p$ และ $q < p$ แล้ว $q \in L$

เนื่องจาก $q \in U$

$\therefore$ $q \notin L$

$\therefore$ $q \neq p$ หรือ $q \not< p$

$\therefore$ $p < q$ #

ทฤษฎีบท 3.5.2 สำหรับส่วนตัด $L|U$ ใด ๆ และจำนวนตรรกยะ p และ q ใด ๆ

ถ้า $p \in U$ และ $p < q$ แล้ว $q \in U$

(ถ้า $p \in U$ และ $q \notin U$ แล้ว $p > q$)

พิสูจน์ สำหรับส่วนตัด $L|U$ ใด ๆ และจำนวนตรรกยะ p และ q ใด ๆ

สมมติว่า $q \notin U$ และ $p \in U$

$\therefore$ $p \neq q$ และ $q \in L$ และ $p \notin L$

$\therefore$ $p \neq q$ และ $p \geqslant q$

$\therefore$ $p > q$ #

จากนิยามและทฤษฎีบทที่กล่าวแล้วข้างต้น เราน่าจะสร้างส่วนตัดด้วยวิธีใหม่ โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลำดับดี (well ordering) ความสัมพันธ์ลำดับอย่างเข้มงวด $<$ บนเซต X กล่าว

ได้ว่า เป็นลำดับดีสำหรับ X ถ้าทุกสับเซตที่มีสมาชิก (nonempty subset) ของ X มีสมาชิกตัวแรกอยู่ด้วย หมายความว่า สำหรับทุกสับเซต $A \subseteq X$ ถ้า $A \neq \phi$ แล้วย่อมมี $a \in A$ ซึ่ง $a < x$ สำหรับทุก $x \in A-\{a\}$ ถ้าเราให้ $X = \mathbb{N}$ และ $<$ หมายความว่าน้อยกว่า แล้ว $\mathbb{N}$ ลำดับดี โดย $<$ แต่จำนวนจริง $\mathbb{R}$ ไม่ลำดับดีโดยความสัมพันธ์น้อยกว่า เนื่องจากมีสับเซต $A \neq \phi$ ของ $\mathbb{R}$ ซึ่ง A ไม่มีสมาชิกตัวแรกอยู่ด้วย (คือไม่รู้ว่าสมาชิกตัวแรกของ A คืออะไร) เช่น

$$A = \{x : x \in \mathbb{R}, x < 5\},$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{R}, x > 5\}$$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 3.5.3 (Principle of Mathematical Induction) สำหรับ $S \subseteq \mathbb{N}$, ถ้า

1) $1 \in S$ และ

2) สำหรับทุก $n \in S$ ย่อมได้ $n+1 \in S$

แล้ว $S = \mathbb{N}$

พิสูจน์ สมมติว่า $S \subseteq \mathbb{N}$ ซึ่ง $1 \in S$ และสำหรับทุก $n \in S$ ย่อมได้ $n+1 \in S$ ให้ $T = \mathbb{N}-S$ ก็จะเป็นไปได้สองกรณี คือ $T = \phi$ หรือไม่

1) ถ้า $T = \phi$ เราได้ $S = \mathbb{N}$

2) สมมติว่า $T \neq \phi$ และเนื่องจาก $\mathbb{N}$ ลำดับดีโดย $<$

$\therefore$ ย่อมมี $k \in T$ ซึ่ง $k < x$ สำหรับทุก $x \in T$

$\therefore$ $k-1 \notin T$ ดังนั้น $k-1 \in S$

$\therefore$ $(k-1)+1 = k \in S$ **ซึ่งเป็นไปไม่ได้**

นั่นคือ $T = \phi$ #

ก่อนที่เราจะได้ศึกษาส่วนตัดโดยละเอียด ควรจะได้รู้จักศัพท์ต่าง ๆ ที่ควรทราบสักสองสามคำเกี่ยวกับจำนวนจริง S เป็นสับเซตของจำนวนจริง เรากล่าวว่า b เป็นขอบเขตบน (upper bound) สำหรับ S ถ้าแต่ละ $x \in S$ เราได้ $x \leqslant b$ ดังนั้น เซตของขอบเขตบนของ S ก็คือ $\{b : b \in \mathbb{R}, \forall x[x\in S \Rightarrow x \leqslant b]\}$ เรากล่าวว่า a เป็นขอบเขตล่าง (lower bound) สำหรับ S ถ้าแต่ละ $x \in S$ เราได้ $a \leqslant x$ ดังนั้น เซตของขอบเขตล่างของ S ก็คือ $\{a : a\in R, \forall x[x\in S \Rightarrow a \leqslant x]\}$ จำนวนจริง c กล่าวได้ว่าเป็นขอบเขตบนต่ำสุด (least upper bound) สำหรับ S ถ้า c เป็นขอบเขตบนของ S และถ้า $c \leqslant b$ สำหรับทุกขอบเขตบน b ของ S และจำนวนจริง d เป็นขอบเขตล่างสูงสุด (greatest lower bound) ของ S ถ้า d เป็นขอบเขตล่างของ S และ $a \leqslant d$ สำหรับทุกขอบเขตล่าง a ของ S

สับเซต S ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ มีขอบเขต (bounded) ก็ต่อเมื่อ S มีทั้งขอบเขตล่างและขอบเขตบน จึงได้สัจพจน์สำหรับจำนวนจริง $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ 1) Completeness Axiom : ทุกสับเซตที่มีสมาชิก S ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ที่มีขอบเขตบนย่อมมีขอบเขตบนต่ำสุด (ทุกสับเซตที่มีสมาชิก S ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ที่มีขอบเขตล่างย่อมมีขอบเขตล่างสูงสุด)

ทฤษฎีบท 3.5.4 ให้ L และ U เป็นสับเซตที่มีสมาชิก $\mathbb{R}$ โดย $\mathbb{Q} = L \cup U$ ซึ่งแต่ละ a ใน L และแต่ละ u ใน U เราได้ $a < u$ แล้วใน L มีจำนวนที่มากที่สุด หรือไม่ก็ใน U มีจำนวนน้อยที่สุด

พิสูจน์ สมมติว่า L และ U เป็นสับเซตที่มีสมาชิกของ R ด้วย $\mathbb{Q} = L \cup U$ ซึ่งแต่ละ a ใน L และแต่ละ u ใน U เราได้ $a < u$

$\therefore$ ทุก u ใน U เป็นขอบเขตบนของ L

$\therefore$ ย่อมมีจำนวนจริง u' เป็นขอบเขตข้างบนต่ำสุดของ L คือ $a \leqslant u' \leqslant u$ สำหรับทุก a ใน L และสำหรับทุก u ใน U

1) ถ้า $u' \in L$ เราได้ว่า ใน L มีจำนวน u' มีค่ามากที่สุด

2) ถ้า $u' \notin L$ เราได้ว่า u' ต้องอยู่ใน U (เพราะว่า $\mathbb{Q} = L \cup U$) จึงได้ต่อไปว่า ใน U มีจำนวนจริง u' เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด #

ทฤษฎีบท 3.5.5 Axiom of Archimedes : สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $x < n$ (สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $n < x$)

พิสูจน์ ให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็ม k ซึ่ง $k \leqslant x$

เนื่องจาก S มีขอบเขตบน x

$\therefore$ S ย่อมมีจำนวนจริง y เป็นขอบเขตบนต่ำสุด (ความจริง $y \in \mathbb{Z}$)

$\therefore$ $y - \frac{1}{2}$ ไม่ใช่ขอบเขตบนของ S ดังนั้น ย่อมมี $k \in S$ ซึ่ง $k > y - \frac{1}{2}$

$\therefore$ $k+1 > y + \frac{1}{2} > y$

$\therefore$ $k+1 \notin S$

$\therefore$ เราได้จำนวนเต็ม $n = k+1 > x$ #

บทแทรก 3.5.5 ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ ถ้า $x < y$ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $x < r < y$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ

สมมติว่า $x < y$

1) สมมติว่า $0 \leqslant x$

โดย Axiom of Archimedes ย่อมมีจำนวนเต็ม $q > (y-x)^{-1} > 0$

$\therefore \quad \frac{1}{q} < y-x$

โดย Axiom of Archimedes เซตของจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $y \leqslant \frac{n}{q}$ ไม่ใช่เซตเปล่า

ดังนั้น ย่อมมีจำนวนที่น้อยที่สุด p จึงได้ $\frac{p-1}{q} < y < \frac{p}{q}$

และ $\quad x = y-(y-x) < \frac{p}{q} - \frac{1}{q} = \frac{p-1}{q}$

$\therefore \quad x < r = \frac{p-1}{q} < y$

2) สมมติว่า $x < 0$

เราสามารถหาจำนวนเต็ม $n > -x$ ดังนั้น $0 < n+x$

และมีจำนวนตรรกยะ r_1 ตาม 1) ซึ่ง

$n+x < r_1 < n+y$

$\therefore \quad x < r_1-n < y$, และ r_1-n เป็นจำนวนตรรกยะ #

จากทฤษฎีบทและสัจพจน์ข้างต้นจึงแน่ใจว่า สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ให้

$L_x = \{a : a \in Q, a < x\}$, และ

$U_x = \{u : u \in Q, x \leqslant u\}$

แล้ว $C(x) = L_x|U_x$ เป็นส่วนตัด

นิยาม 3.5.1 $C(x) = C(y)$ ก็ต่อเมื่อ $L_x = L_y$ แล$U_x = U_y$

ทฤษฎีบท 3.5.6 $C : \mathbb{R} \to \{L_r|U_r : r \in \mathbb{R}, L_r = \{x : x \in \mathbb{Q}, x < r\}, U_r = \{y : y \in \mathbb{Q}, r \leqslant y\}\}$ กำหนดโดย $C(r) = L_r|U_r, r \in \mathbb{R}$ เป็นสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (1 – 1 correspondence)

พิสูจน์ 1) การพิสูจน์ว่า C เป็น onto function มองเห็นได้โดยแจ่มชัดจากนิยามของส่วนตัด $L|U$,และ Completeness axiom ว่า ทุกส่วนตัด $L|U$ ย่อมมีจำนวนจริง r ซึ่ง

$$L|U = C(r) = L_r|U_r$$

2) การพิสูจน์ว่า C เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

สมมติว่า $r_1 \neq r_2$ และโดยไม่เสียความโดยทั่วไป สมมติว่า $r_1 < r_2$ และโดยบทแทรกข้างต้น เราย่อมมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $r_1 < r < r_2$ จึงได้ว่า $r \notin L_{r_1}$ แต่ $r \in L_{r_2}$

ดังนั้น $L_{r_1} \neq L_{r_2}$ และเพราะฉะนั้น $L_{r_1}|U_{r_1} \neq L_{r_2}|U_{r_2}$

ก็คือ $C(r_1) \neq C(r_2)$

นั่นคือ C เป็นสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่าง $\mathbb{R}$ กับ

$$\{L_r|U_r : r \in \mathbb{R}, L_r = \{x : x \in \mathbb{Q}, x < r\}, U_r = \{y : y \in \mathbb{Q}, r \leqslant y\}\}$$ #

3.6 การบวกส่วนตัด

นิยาม 3.6.1 $C(r_1) \oplus C(r_2) = C(r) = L_r|U_r$ โดยที่

$$L_r = \{x : x = p_1 + p_2, p_1 \in L_{r_1}, p_2 \in L_{r_2}\}$$ และ

$$U_r = \{y : y = q_1 + q_2, q_1 \in U_{r_1}, q_2 \in U_{r_2}\}$$

เราทราบต่อไปว่า สำหรับจำนวนตรรกยะ p_1, p_2, q_1, q_2 ใด ๆ ถ้า $p_1 \in L_{r_1}, p_2 \in L_{r_2}$ $q_1 \in U_{r_1}$ และ $q_2 \in U_{r_2}$ แล้ว $p_1 + p_2 < q_1 + q_2$ เสมอ ดังนั้น L_r มีขอบเขตบน และ U_r มีขอบเขตล่าง เพราะฉะนั้น L_r มีขอบเขตบนต่ำสุด และ U_r มีขอบเขตล่างสูงสุด คือ r ซึ่งเราจะให้สัญลักษณ์ว่า $r = r_1 + r_2$ นั่นคือ เราได้

$$C(r_1) \oplus C(r_2) = C(r_1 + r_2)$$

ดังนั้น จึงได้ว่า C ยืนยงในการบวก คือ ระหว่าง $\mathbb{R}$ โดยการบวก "+" กับ $\{C(r) : r \in \mathbb{R}\}$ กับการบวก "$\oplus$" ในขณะนี้จึงได้ว่า สัจพจน์ว่า

$\mathbb{R}$ 2) สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ $x + y \in \mathbb{R}$

เนื่องจาก $p_1 + p_2 = p_2 + p_1$ และ $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$ จึงได้ว่า

$L_{r_1 + r_2} = L_{r_2 + r_1}$ และ $U_{r_1 + r_2} = U_{r_2 + r_1}$ จึงได้ต่อไปว่า

$$C(r_1) \oplus C(r_2) = C(r_2) \oplus C(r_1)$$

$$\therefore \quad C(r_1 + r_2) = C(r_2 + r_1)$$

$$\therefore \quad r_1 + r_2 = r_2 + r_1$$

จึงได้สัจพจน์ว่า

$\mathbb{R}$ 3) สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ $x+y = y+x$

เช่นเดียวกัน เนื่องจากสำหรับจำนวนตรรกยะ $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ ใด ๆ

สมมติว่า $p_1 \in L_{r_1}$, $p_2 \in L_{r_2}$, $p_3 \in L_{r_3}$, $q_1 \in U_{r_1}$, $q_2 \in U_{r_2}$ และ $q_3 \in U_{r_3}$

เราได้ว่า $p_1 + (p_2 + p_3) = (p_1 + p_2) + p_3$

และ $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$

จึงได้ต่อไปว่า

$$L_{r_1+(r_2+r_3)} = L_{(r_1+r_2)+r_3} \quad \text{และ}$$

$$U_{r_1+(r_2+r_3)} = U_{(r_1+r_2)+r_3}$$

ดังนั้น $$C(r_1) \oplus \big(C(r_2) \oplus C(r_3)\big) = \big(C(r_1) \oplus C(r_2)\big) \oplus C(r_3)$$

$$C\big(r_1 + (r_2 + r_3)\big) = C\big((r_1 + r_2) + r_3\big)$$

$$\therefore \quad r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3$$

จึงได้สัจพจน์ว่า

$\mathbb{R}$ 4) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ $x+(v+z) = (x+y)+z$

เรามีส่วนตัด $C(0) = L_0 | U_0$

ซึ่ง $L_0 = \{x : x \in \mathbb{Q}, x < 0\}$

และ $U_0 = \{y : y \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant y\}$

ดังนั้น สำหรับส่วนตัด $C(r)$ ใด ๆ

ซึ่ง $L_r = \{x : x \in \mathbb{Q}, x < r\}$

และ $U_r = \{y : y \in \mathbb{Q}, r \leqslant y\}$

สำหรับจำนวนตรรกยะ p ใด ๆ สมมติว่า $p \in L_{r+0}$

$\therefore$ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ $p_1 \in L_r$ และ $p_2 \in L_0$ ซึ่ง

$$p = p_1 + p_2 < p_1 + 0 = p_1$$

$$\therefore \quad p \in L_r$$

ดังนั้น $L_{r+0} \subseteq L_r$

และสำหรับจำนวนตรรกยะ p ใด ๆ สมมติว่า $p \in L_r$

เนื่องจาก $p = p + 0 \in L_{r+0}$

ดังนั้น $L_r \subseteq L_{r+0}$

นั่นคือ $L_r = L_{r+0}$ #

จากการพิสูจน์ข้างต้นจึงพบว่า สำหรับจำนวนจริง r ใด ๆ

$$C(r)@\ C(0) = C(0)\oplus C(r) = C(r)$$

$$C(r+0) = C(O+r) = C(r)$$

$$.r+0 = O+r$$

จึงได้สัจพจน์ว่า ใน $\mathbb{R}$ มีสมาชิก 0 เป็น Additive identity ซึ่ง

$\mathbb{R}$ 5) $x+0 = 0+x = x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

เรานิยาม $-C(r) = -(L_r|U_r) = L_a|U_a$

โดยที่ $L_a = \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge \exists y[y \in U_r \wedge x < -y]\}$

เมื่อพิจารณาจากนิยามเราพบว่า ถ้า $y \notin L_r$ ดังนั้น $y \in U_r$

นั่นคือ $r \leqslant y$ เราได้ $-y \leqslant -r$ ดังนั้น ถ้า $x \in L_a$ แล้ว $x < -r$ จึงได้ต่อไปว่า $L_a = L_{-r}$ และ $U_a = U_{-r}$ และสุดท้ายจึงได้ $-C(r) = C(-r)$ นั่นเอง นั่นคือ ทุกส่วนตัด $C(r)$ เรามี $-C(r)$ เป็นส่วนตัด

$$C(r)\oplus(-C(r)) = C(r)\oplus C(-r) = L_r|U_r\oplus L_{-r}|U_{-r}$$

$$= L_b|U_b$$

เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $L_b|U_b = L_0|U_0$

พิสูจน์ 1) สำหรับจำนวนตรรกยะ x ใด ๆ

สมมติว่า $x \in L_b$

$\therefore\ x = p+q$ โดยที่ $p \in L_r$ และ $q \in L_{-r}$

สำหรับจำนวนตรรกยะ m ใด ๆ ซึ่ง $m \in U_r$ จึงได้ว่า $p < m$ และ $q < -m$

$\therefore\ x = p+q < m+(-m) = 0$

$\therefore\ x \in L_0$

นั่นคือ $L_b \subseteq L_0$

2) สำหรับจำนวนตรรกยะ y ใด q

สมมติว่า $y \in L_0$

$.y < 0$ และ $0 < -y$

$$0 < (-y)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ 0 < -\frac{1}{2}y$$

ย่อมมีจำนวนตรรกยะ $z \in U_r$ แต่ $z-\left(-\frac{1}{2}y\right) \in L_r$

หรือ $z+\left(\frac{1}{2}y\right) \in L_r$ . . . (a)

แต่ $z < z+\left(-\frac{1}{2}y\right)$

$$.-z+\frac{1}{2}(y) = -\left(z+\left(-\frac{1}{2}y\right)\right) < -z$$

ดังนั้น $-z+\frac{1}{2}y \in L_{-r}$ ....(b)

จากข้อความ (a) และ (b)

$$y \in L_b$$

ดังนั้น $L_0 \subseteq L_b$

1) และ 2) นั่นคือ

$$C(r)\oplus C(-r) = C(r+(-r)) = C(0) \quad \#$$

จึงได้

$\mathbb{R}\,6)$ สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ย่อมมีจำนวนจริง $-x$ ซึ่ง $x+(-x) = 0$

3.7 การคูณส่วนตัด

นิยาม 3.7.1 ส่วนตัด $C(r) = L_r|U_r$ กล่าวได้ว่าเป็นส่วนตัดบวกก็ต่อเมื่อมีจำนวนตรรกยะ $p \in L_r$ และ $p \geqslant 0$ ถ้า $C(r)$ เป็นส่วนตัดบวก เราจะเรียก $-C(r) = C(-r)$ ว่า ส่วนตัดลบ

นิยาม 3.7.2 $C(r_1) = L_{r_1}|U_{r_1}$ และ $C(r_2) = L_{r_2}|U_{r_2}$ เป็นส่วนตัดบวก
ผลคูณ $C(r_1)\otimes C(r_2) = C(r) = L_r|U_r$ โดยที่
$L_r = \{x : x \in \mathbb{Q}$ และสำหรับ $0 \leqslant a \in L_{r_1}$ และ $0 \leqslant b \in L_{r_2}, x \leqslant ab\}$ และ
$U_r = \mathbb{Q}-L_r$

เราทราบต่อไปว่า สำหรับจำนวนตรรกยะ p_1, p_2, q_1, q_2 ใด ๆ ถ้า $0 \leqslant p_1 \in L_{r_1}$, $0 \leqslant p_2 \in L_{r_2}$, $q_1 \in U_{r_1}$ และ $q_2 \in U_{r_2}$ แล้วเราได้ $0 \leqslant p_1 < q_1$ และ $0 \leqslant p_2 < q_2$ ดังนั้น $p_1p_2 < q_1q_2$ เสมอ ดังนั้น L_r มีขอบเขตบนและ U_r มีขอบเขตล่าง เพราะฉะนั้น L_r มีขอบเขตบนต่ำสุด และ U_r มีขอบเขตล่างสูงสุด คือ r เราจะให้สัญลักษณ์ว่า $r = r_1r_2$ นั่นคือเราได้ถ้า $C(r_1)$ และ $C(r_2)$ ต่างเป็นส่วนตัดบวก $C(r_1)\otimes C(r_2) = C(r_1r_2)$ ว่า C ยืนยงในการ $\otimes$

ในเซต $\{C(r) : r \in R$ และ $r > 0\}$ นั่นคือ เราได้ส่วนตัดบวกคูณส่วนตัดบวกได้ส่วนตัดบวก

ข้อสังเกต พบว่า $C(0)$ ไม่ใช่ส่วนตัดบวกและไม่ใช่ส่วนตัดลบ

นิยาม 3.7.3 ถ้า $C(r_1)$ และ $C(r_2)$ ต่างเป็นส่วนตัดลบ แล้ว

$$\begin{aligned} C(r_1)\otimes C(r_2) &= \big(-C(r_1)\big)\otimes\big(-C(r_2)\big) \\ &= C(-r_1)\otimes C(-r_2) \\ &= C\big((-r_1)(-r_2)\big) \end{aligned}$$

ผลลัพธ์จากนิยาม 3.7.2 เราพบว่า $C(-r_1)$ และ $C(-r_2)$ ต่างเป็นส่วนตัดบวก เพราะฉะนั้น $C(r_1)\otimes C(r_2)$ เป็นส่วนตัดบวก นั่นคือ มีจำนวนตรรกยะ p_1, p_2, q_1, q_2 ซึ่ง $0 \leqslant -p_1 \in L_{-r_1}$ $0 \leqslant p_2 \in L_{-r_2}$, $-p_1 < -q_1 \in U_{-r_1}$ และ $-p_2 < -q_2 \in U_{-r_2}$ จึงได้ว่า $0 \leqslant (-p_1)(-p_2) = p_1p_2 < (-q_1)(-q_2) = q_1q_2$ ดังนั้น $L_{(-r_1)(-r_2)}$ มีขอบเขตข้างบน และ $U_{(-r_1)(-r_2)}$ มีขอบเขตข้างล่าง เพราะฉะนั้น $L_{(-r_1)(-r_2)}$ และร่วมกันที่ $(-r_1)$ $(-r_2)$ ซึ่งก็คือ r_1r_2 นั่นคือ ถ้า $C(r_1)$ และ $C(r_2)$ ต่างเป็นส่วนตัดลบ $C(r_1)\otimes C(r_2) = C(r_1r_2)$

นิยาม 3.7.4 ถ้า $C(r_1)$ เป็นส่วนตัดลบ และ $C(r_2)$ เป็นส่วนตัดบวก

$$\begin{aligned} C(r_1)\otimes C(r_2) &= -\big(-C(r_1)\otimes C(r_2)\big) \\ C(r_2)\otimes C(r_1) &= -\big(C(r_2)\otimes\big(-C(r_1)\big)\big) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $C(r_1)$ เป็นส่วนตัดลบ และ $C(r_2)$ เป็นส่วนตัดบวก

$$\begin{aligned} C(r_1)\otimes C(r_2) &= -\big(-C(r_1)\otimes C(r_2)\big) \\ &= -\big(C(-r_1)\otimes C(r_2)\big) \\ &= -\big(C((-r_1)r_2)\big) \\ &= C\big(-(-r_1)r_2\big) \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นส่วนตัดลบ ด้วยการพิจารณาจากขอบเขตบนต่ำสุดของ $L_{-(-r_1)r_2}$ และขอบเขตล่างสูงสุดของ $U_{-(-r_1)r_2}$ ค่านั้นก็คือ $-(-r_1)r_2 = r_1r_2$ นั่นคือ สำหรับส่วนตัดลบ $C(r_1)$ ใด ๆ และส่วนตัดบวก $C(r_2)$ ใด ๆ

$$C(r_1)\otimes C(r_2) = C(r_1r_2)$$

สำหรับส่วนตัด $C(0)$ ซึ่งก็ไม่ใช่ส่วนตัดบวก เพราะว่าไม่มีจำนวนตรรกยะ $p \geqslant 0$ อยู่ใน L_0 เลย และ $-C(0) = C(-0) = C(0)$ $-C(0)$ ก็ไม่ใช่ส่วนตัดบวก ดังนั้น $C(0)$ ไม่ใช่ส่วนตัดลบ เราจึงเรียกชื่อ $C(0)$ ว่า ส่วนตัดศูนย์ และสำหรับส่วนตัด $C(r)$ ใด ๆ

$$C(r)\otimes C(0) = C(r_0) = L_{r_0}|U_{r_0}$$

โดย $L_{r_0} = \{x : x \in \mathbb{Q}$ และ $x < a \cdot 0$ สำหรับทุก $a \in L_r\} = L_0$

ดังนั้น $C(r) \otimes C(0) = C(0) = C(0) \otimes C(r)$

จากผลลัพธ์ของนิยาม 3.7.2, 3.7.3 และ 3.7.4 รวมทั้งการคูณด้วย $C(0)$ เราได้ว่า สำหรับส่วนตัด $C(r_1)$, $C(r_2)$ ใด ๆ

$$C(r_1) \otimes C(r_2) = C(r_1 r_2)$$

นั่นคือ C ยืนยงในการคูณ คือระหว่าง $\mathbb{R}$ โดยการคูณกับ $\{C(r) : r \in \mathbb{R}\}$ และเราทราบต่อไปว่า ส่วนตัดคูณส่วนตัดได้ผลลัพธ์เป็นส่วนตัด ดังนั้น จึงได้นิยามเกี่ยวกับจำนวนจริง

R 7) สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ $xy \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 3.7.1 สำหรับส่วนตัด $C(r_1)$, $C(r_2)$, $C(r_3)$ ใด ๆ

1) $C(r_1) \otimes C(r_2) = C(r_2) \otimes C(r_1)$

2) $C(r_1) \otimes \big(C(r_2) \otimes C(r_3)\big) = \big(C(r_1) \otimes C(r_2)\big) \oplus C(r_3)$

3) $C(r_1) \oplus \big(C(r_2) \oplus C(r_3)\big) = \big(C(r_1) \otimes C(r_2)\big) \oplus \big(C(r_1) \otimes C(r_3)\big)$

พิสูจน์ 1)

a) กรณีที่ $C(r_1)$ และ $C(r_2)$ ต่างเป็นส่วนตัดบวก

$$C(r_1) \otimes C(r_2) = C(r_1 r_2) = L_{r_1 r_2}/U_{r_1 r_2}$$

$$\begin{aligned} L_{r_1 r_2} &= \{x : x \in Q \text{ และ } x \leqslant ab \text{ สำหรับ } 0 < a \in L_{r_1} \text{ และ } 0 < b \in L_{r_2}\} \\ &= \{x : x \in Q \text{ และ } x \leqslant ba \text{ สำหรับ } 0 < b \in L_{r_1} \text{ และ } 0 < a \in L_{r_2}\} \\ &= L_{r_2 r_1} \end{aligned}$$

นั่นคือ $C(r_1) \otimes C(r_2) = C(r_2) \otimes C(r_1)$

b) กรณีที่ $C(r_1)$ เป็นส่วนตัดลบ และ $C(r_2)$ เป็นส่วนตัดบวก

$$\begin{aligned} C(r_1) \otimes C(r_2) &= -\big(C(-r_1) \otimes C(r_2)\big) \\ &= -\big(C(r_2) \otimes C(-r_1)\big) && \text{(จากตอน a))} \\ &= C(r_2) \otimes C(r_1) \end{aligned}$$

c) กรณีที่ $C(r_,)$, $C(r_2)$ ต่างเป็นส่วนตัดลบ เราได้

$$\begin{aligned} C(r_1) \otimes C(r_2) &= \big(-C(r_1)\big) \otimes \big(-C(r_2)\big) \\ &= C(-r_1) \otimes C(-r_2) \\ &= C(-r_2) \otimes C(-r_1) && \text{(จากตอน a))} \\ &= C(r_2) \otimes C(r_1) \end{aligned}$$

d) กรณีที่ $C(r_1)$, $C(r_2)$ ส่วนตัดใดส่วนตัดหนึ่ง หรือทั้งสองส่วนตัด เป็น $C(0)$ ก็ได้

$C(r_1) \otimes C(r_2) = C(r_2) \otimes C(r_1)$ ตามนิยามการคูณด้วย $C(0)$ #

(สำหรับการพิสูจน์ข้อ 2) และ 3) ทิ้งไว้เป็นแบบฝึกหัด)

จากทฤษฎีบทนี้ และ C ยืนยงในการคูณส่วนตัดกับการคูณจำนวนจริง

$\mathbb{R}$ 8) สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ $xy = yx$

$\mathbb{R}$ 9) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ $x(yz) = (xy)z$

$\mathbb{R}$ 10) สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ $x(y+z) = xy+xz$

เรามีส่วนตัด $C(1)$ ซึ่งสำหรับส่วนตัด $C(r)$ ใด ๆ แล้ว $C(1) \otimes C(r) = C(r)$

พิสูจน์ สำหรับส่วนตัด $C(r)$ ใด ๆ

1) สมมติว่า $C(r) = C(0)$

$$\therefore \quad C(1) \otimes C(r) = C(1) \otimes C(0)$$

$$= C(0) = C(r)$$

2) สมมติว่าส่วนตัดบวก $C(r)$

$$C(1) \otimes C(r) = C(1r) = L_{1r}|U_{1r}$$

เราต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $L_{1r} = L_r$

สำหรับจำนวนตรรกยะ p ใด ๆ

a) สมมติว่า $p \in L_{1r}$

เพราะฉะนั้น ย่อมมีจำนวนตรรกยะ x และ y ซึ่ง

$0 \leqslant x < 1$ และ $x \in L_1$, $0 \leqslant y \leqslant L_r$

$\therefore \quad p \leqslant xy \leqslant y$

$\therefore \quad p \in L_r$

นั่นคือ $L_{1r} \subseteq L_r$

b) สมมติว่า $0 < p \in L_r$ เนื่องจาก $C(r)$ เป็นส่วนตัดบวก ดังนั้น ย่อมมีจำนวนตรรกยะ q ซึ่ง $0 < q \in L_r$ และย่อมมีจำนวนตรรกยะบวก x ซึ่ง $0 < x < q \in L_r$ ให้ $p < x < q$ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ $\frac{x+q}{2q}$ ซึ่ง $0 < \frac{x+q}{2q} < 1$ ดังนั้น

$\frac{x+q}{2q} \in C(1)$ จึงได้ $p < \iota < \frac{x+q}{2q} q < q$ ดังนั้น $p \in C(1r)$ นั่นคือ $L_r \subsetneq L_{1r}$

นั่นคือ a)& b) $\quad C(1r) = C(1)\otimes C(r) = C(r)$

3)' สมมติว่า $C(r)$ เป็นส่วนตัดลบ เราได้

$$\begin{aligned} C(1)\otimes C(r) &= -\big(C(1)\otimes(-C(r))\big) \\ &= -\big(C(1)\otimes C(-r)\big) \\ &= -C(-r) \\ &= C(-(-r)) \\ &= C(r) \end{aligned}$$ #

โดยการพิสูจน์ข้างบนกับการยืนยงในการคูณส่วนตัด กับการคูณจำนวนจริง จึงได้

R 11) ในเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ มีจำนวนจริง 1 ซึ่ง

$1x = x1 = x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

นิยาม 3.7.5 สำหรับส่วนตัดบวก $C(r)$ ใด ๆ

$$\begin{aligned} (C(r))^{-1} &= (L_r|U_r)^{-1} \\ &= (L_r)^{-1}|(U_r)^{-1} \end{aligned}$$

โดยที่
$$\begin{aligned} (L_r)^{-1} &= \left\{x : x \in \mathbb{Q} \wedge \exists u\left[u \in U_r \wedge x < \frac{1}{u}\right]\right\} \\ (U_r)^{-1} &= \mathbb{Q} - (L_r)^{-1} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $C(r)$ เป็นส่วนตัดบวกสำหรับทุก p ซึ่ง $0 < p \in L_r$ ดังนั้น สำหรับทุก $u \in U_r$, $p < u$ และ $x < \frac{1}{u} < \frac{1}{p}$ เพราะฉะนั้น $(L_r)^{-1}$ มีขอบเขตข้างบนต่ำสุดให้สัญลักษณ์ $\frac{1}{r}$ $(L_r)^{-1}$ ก็คือ $L_{\frac{1}{r}}$ นั่นคือ สำหรับส่วนตัดบวก $C(r)$ ใด ๆ

$$(C(r))^{-1} = C\left(\frac{1}{r}\right)$$

นิยาม 3.7.6 สำหรับส่วนตัดลบ $C(r)$ ใด ๆ

$$(C(r))^{-1} = -(-C(r))^{-1}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับส่วนตัดลบ $C(r)$ ใด ๆ

$$\begin{aligned} (C(r))^{-1} &= -(-C(r))^{-1} \\ &= -(C(-r))^{-1} \end{aligned}$$

$$= -C\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= C\left(-\ \frac{1}{-r}\right)$$

ก็คือ $\quad (C(r))^{-1} = C\left(\frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ สำหรับ $C(r) \neq C(0)$ ย่อมมี $(C(r))^{-1}$ และสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$C(r) \otimes (C(r))^{-1} = C(1)$$ จึงได้สัจพจน์

$\mathbb{R}$ 12) สำหรับจำนวนจริง $x \neq 0$ ใด ๆ ย่อมมี $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

แบบฝึกหัด 3.7

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.7.1 ในหัวข้อ 2) และ 3)
2. สำหรับส่วนตัด $C(r) \neq C(0)$ ใด ๆ

$$C(r) \otimes (C(r))^{-1} = C(1)$$

3. สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

   3.1 ถ้า $a+b = a+c$ แล้ว $b = c$

   3.2 ถ้า $ab = ac$ และ $a \neq 0$ แล้ว $b = c$

3.8 ความสัมพันธ์ $<$ ใน $\{C(r) : r \in \mathbb{R}\}$

นิยาม 3.8.1 $C(r_1) < C(r_2)$ ก็ต่อเมื่อ $L_{r_1} \subset L_{r_2}$ คือ

$$L_{r_1} \subseteq L_{r_2} \quad \text{และ} \quad L_{r_1} \neq L_{r_2}$$

จากนิยามข้างต้น อาจพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.8.1 สำหรับส่วนตัด $C(r_1) < C(r_2)$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 < r_2$
(ให้นักศึกษาพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบท 3.8.2 สำหรับส่วนตัด $C(r_1), C(r_2), C(r_3)$ ใด ๆ

1) $C(r_1) = C(r_2)$ หรือ $C(r_1) < C(r_2)$ หรือ $C(r_2) < C(r_1)$ อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

2) ถ้า $C(r_1) < C(r_2)$ และ $C(r_2) < C(r_3)$ แล้ว $C(r_1) < C(r_3)$

3) ถ้า $C(r_1) < C(r_2)$ แล้ว $C(r_1) \oplus C(r_3) < C(r_2) \oplus C(r_3)$

4) ถ้า $C(r_1) < C(r_2)$ และ $C(0) < C(r_3)$ แล้ว $C(r_1) \otimes C(r_3) < C(r_2) \otimes C(r_3)$

(ให้นักศึกษาพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

จากทฤษฎีบทบทนี้จึงได้สัจพจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

$\mathbb{R}$ 13) $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $y < x$ ถูกเพียงข้อความเดียวเท่านั้น

$\mathbb{R}$ 14) ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

$\mathbb{R}$ 15) ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

$\mathbb{R}$ 16) ถ้า $x < y$ และ $0 < z$ แล้ว $xz < yz$

แบบฝึกหัด 3.8

1. พิสูจน์ทฤษฎีบท 3.8.1 และ 3.8.2

2. สำหรับจำนวนจริง x, y, z, t ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   2.1 มีจำนวนจริง 0 เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่

   $$x+0 = x$$

   2.2 มีจำนวนจริง $-x$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่

   $$x+(-x) = 0$$

   2.3 $x0 = 0 = 0x$

   2.4 $(-x)(-y) = xy$

   2.5 $-(-x) = x$

   2.6 $(x+y)z = xz+yz$

   2.7 ถ้า [illegible] แล้ว [illegible] หรือ [illegible] 0

   2.8 $(-1)x = -x$

   2.9 $-0 = 0$

   2.10 $-(x+y) = (-x)+(-y)$

   2.11 $(x+y)(z+t) = xz+xt+yz+yt$

   2.12 $(-x)y = x(-y) = -(xy)$

3. นิยาม $x-y = x+(-y)$ สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ

   และเมื่อ $y \neq 0$, $\frac{x}{y} = x\left(\frac{1}{y}\right)$

   สำหรับจำนวนจริง x, y, z, t ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   3.1 $x-(y-z) = (x-y)+z$

   3.2 ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{x} = 1$

   3.3 ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{xy} = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)$

   3.4 ถ้า $y \neq 0$ และ $t \neq 0$ แล้ว $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{t}\right) = \frac{xz}{yt}$

   3.5 ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{z}+\frac{y}{z} = \frac{x+y}{z}$

   3.6 ถ้า $y \neq 0$ และ $t \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{y}+\frac{z}{t} = \frac{xt+yz}{yt}$

3.1 $\frac{x}{1} = x$

3.8 ถ้า $\frac{x}{y} \neq 0$ แล้ว $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right) = 1$

3.9 ถ้า $y \neq 0$ แล้ว $-\frac{x}{y} = \frac{(-x)}{y} = \frac{x}{(-y)}$

3.10 ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $x\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{xy}{z}$

3.11 ถ้า $y \neq 0$ แล้ว $\frac{z}{t} \neq 0$ แล้ว $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{t}} = \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{t}{z}\right)$

3.12 ถ้า $x < y$ แล้ว $-y < -x$

3.13 61 $x < 0$ แล้ว $0 < -x$

3.14 ถ้า $x < y$ และ $z < t$ แล้ว $x+z < y+t$

3.15. 1 เป็นจำนวนบวก $(0 < 1)$

3.16 ถ้า $0 < x$ และ $0 < y$ แล้ว $0 < x+y$

3.17 ถ้า $x < y$ และ $z < 0$ และ $yz < xz$

3.18 ถ้า $0 < x$ แล้ว $0 < \frac{1}{x}$

3.19 ถ้า $0 < x < y$ แล้ว $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

3.20 ถ้า $x < y < 0$ แล้ว $\frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$

3.21 ถ้า $y < x$ และ $t < z$ แล้ว $y-z < x-t$