บทที่ 1
จำนวนธรรมชาติ

ในการศึกษาเลขจำนวนจริง เราเริ่มต้นด้วยเซต N ของจำนวนธรรมชาติ 1, 2, 3, ... ทุกคนเคยเรียนการนับมาแล้วตั้งแต่เริ่มเข้าเรียน แต่เพื่อจะศึกษาถึงคุณสมบัติของจำนวนจริง เราจึงจะศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของเซต N เช่น การบวก การคูณ คุณสมบัติการสลับที่ การจัดหมู่ เป็นต้น ก่อนอื่นจะกล่าวถึงสัจพจน์ของเปอาโน (ค.ศ. 1858 – 1932) เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ของจำนวนธรรมชาติที่สำคัญ

1.1 สัจพจน์ของเปอาโน (Peano's Postulates)

พิจารณาเซต N ซึ่งสมาชิกของเซตนี้เรียกว่า **จำนวนธรรมชาติ** เซต N มีคุณสมบัติดังสัจพจน์ต่อไปนี้

สัจพจน์ 1 $1 \in N$ ดังนั้น $N \neq \phi$

สัจพจน์ 2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ จะมีจำนวนธรรมชาติ n^* เพียงตัวเดียว ซึ่งเป็น **พจน์ตามหลัง** (successor) ของ n

สัจพจน์ 3 สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ $n^* \neq 1$
นั่นคือ 1 ไม่เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติใด ๆ

สัจพจน์ 4 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ ถ้า $m \neq n$ แล้ว จะได้ $m^* \neq n^*$
นั่นคือ จำนวนธรรมชาติใด ๆ ที่ต่างกัน จะมีพจน์ตามหลังต่างกัน

สัจพจน์ 5 หลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction)
ถ้า $A \subseteq N$ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1) $1 \in A$
2) $\forall a \in N,\ a \in A \rightarrow a^* \in A$

จะได้ว่า $A = N$

ข้อสังเกต

สัจพจน์ 2 หมายถึง $\forall n \in N \; \exists! \; n^* \in N$ เมื่อ n^* เป็นพจน์ตามหลังของ n นั่นคือ $\forall n \in N$ $\exists m \in N$, $m = n^*$ และพจน์ตามหลัง n^* มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น หมายความว่า ถ้า p^* เป็นพจน์ตามหลังของ n แล้วจะได้ $p^* = n^*$ ดังนั้น สัจพจน์ 2 เขียนอีกอย่างหนึ่งคือ ถ้า $m = n$ แล้วจะได้ $m^* = n^*$ ซึ่งเป็นบทกลับของสัจพจน์ 4

จากสัจพจน์ทั้ง 5 จะนิยามจำนวนธรรมชาติได้ตามลำดับดังนี้

1) $1 \in N$ โดยสัจพจน์ 1

2) $1^* \in N$ (สัจพจน์ 2) และ $1^* \neq 1$ (สัจพจน์ 3)

ให้ $1^* = 2$ ดังนั้น 1, 2 เป็นจำนวนธรรมชาติที่ต่างกัน

3) $2^* \in N$ (สัจพจน์ 2) $2^* \neq 1$ (สัจพจน์ 3) และ $2^* \neq 2$ (สัจพจน์ 4 เนื่องจาก $2 \neq 1$)

ให้ $2^* = 3$ ดังนั้น 1, 2, 3 เป็นจำนวนธรรมชาติที่ต่างกัน

4) $3^* \in N$ (สัจพจน์ 2) $3^* \neq 1$ (สัจพจน์ 3) $3^* \neq 2$ และ $3^* \neq 3$ (สัจพจน์ 4)

ให้ $3^* = 4$ ดังนั้น 1, 2, 3, 4 เป็นจำนวนธรรมชาติที่ต่างกัน

โดยการให้นิยามในทำนองเดียวกัน จะได้เซต A ดังนี้

$$A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

ซึ่งเป็นเซตของจำนวนธรรมชาติที่ต่างกัน เนื่องจากเซต A มีคุณสมบัติตามสัจพจน์ 5 ดังนั้น $A = N$ นั่นคือ เซตของจำนวนธรรมชาติ N นิยามได้โดย

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เป็นคุณสมบัติของจำนวนธรรมชาติที่สำคัญ

ทฤษฎีบทที่ 1.1.1

สำหรับจำนวนธรรมชาติใด ๆ $n \neq n^*$

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติซึ่งไม่เท่ากับพจน์ตามหลังของมัน

$$A = \{n \in N / n \neq n^*\}$$

จะพิสูจน์ $A = N$ โดยอาศัยสัจพจน์ 5

1) $1 \in N$ (สัจพจน์ 1)

$1 \neq 1^*$ (สัจพจน์ 3)

ดังนั้น $1 \in A$

2) ให้ a เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ใน A

ดังนั้น $a \neq a^*$

และ $a^* \neq (a^*)^*$ (สัจพจน์ 4)

$a^* \in A$

นั่นคือ $\forall a \in N,\ a \in A \rightarrow a^* \in A$

จาก (1) และ (2) จะได้ $A = N$

#

ทฤษฎีบทที่ 1.1.2

จำนวนธรรมชาติใด ๆ ที่ไม่ใช่ 1 ย่อมเป็นพจน์ตามหลังของอีกจำนวนหนึ่ง

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตที่ประกอบด้วย 1 หรือจำนวนธรรมชาติที่เป็นพจน์ตามหลัง

$A = \{n \in N / (n = 1) \vee (n$ เป็นพจน์ตามหลัง$)\}$

1) $1 \in A$

2) ให้ a เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ใน A

$\therefore$ a^* เป็นพจน์ตามหลังของ a

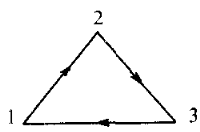
ดังนั้น $a^* \in A$

จาก (1) และ (2) จะได้ $A = N$

นั่นคือ $\forall n \in N,\ (n = 1) \vee (n$ เป็นพจน์ตามหลัง$)$

ดังนั้น $\forall n \in N,\ n \neq 1 \rightarrow n$ เป็นพจน์ตามหลัง

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ลูกศรใช้แทนพจน์ตามหลัง และสมาชิกของเซต A คือจุด ดังรูป 1.1



รูปที่ 1.1

จะได้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $1^* = 2,\ 2^* = 3,\ 3^* = 1$

จงพิจารณาว่า เซต A เป็นไปตามสัจพจน์ของเปอาโนข้อใดบ้าง

วิธีทำ สัจพจน์ 1 $1 \in A$

สัจพจน์ 2 สำหรับสมาชิกแต่ละตัวใน A จะมีพจน์ตามหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น

สัจพจน์ 3 ไม่จริง เพราะว่า $3^* = 1$

สัจพจน์ 4 ถ้า $n \neq m$ แล้วจะได้ $n^* \neq m^*$ จริง

$1 \neq 2 \rightarrow (1^* = 2) \neq (3 = 2^*)$ คู่อื่นก็เช่นเดียวกัน

สัจพจน์ 5 $A \subseteq N$

1) $1 \in N$

2) $1, 2, 3 \in N$

$$1 \in A \rightarrow 1^* = 2 \in A$$
$$2 \in A \rightarrow 2^* = 3 \in A$$
$$3 \in A \rightarrow 3^* = 1 \in A$$

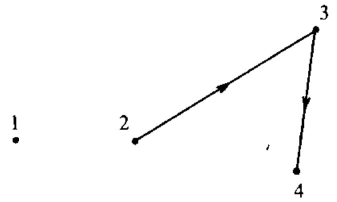
จะได้ $A = N$

สรุปว่า เซต A เป็นไปตามสัจพจน์ของเปอาโน ข้อ 1, 2, 4, 5

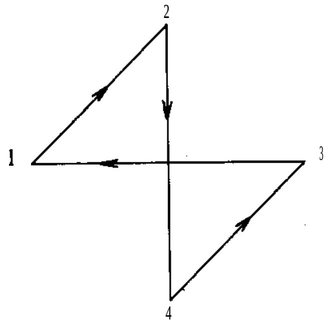
แบบฝึกหัด 1.1

กำหนดให้ลูกศรในแผนภาพต่อไปนี้ใช้แทนพจน์ตามหลัง และสมาชิกของเซต A คือจุด จง พิจารณาว่า เซต A เป็นไปตามสัจพจน์ของเปอาโนข้อใดบ้าง

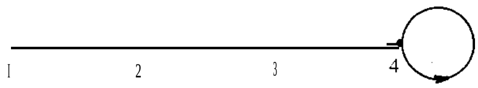
1.



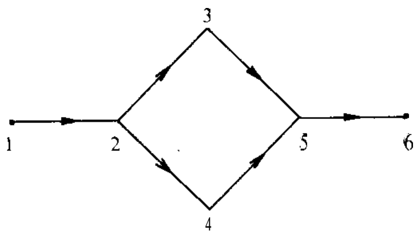
2.



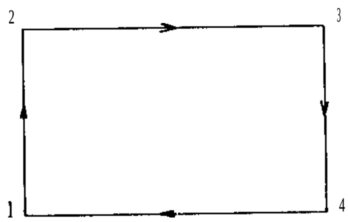
3.



4.



5.



1.2 การบวกจำนวนธรรมชาติ

การดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนธรรมชาติสองจำนวน ซึ่งเราสนใจอยากจะศึกษาถึง คือ การบวกและการคูณ คงจะทราบแล้วว่าเมื่อเริ่มเรียนการบวกเลข เมื่อเอาจำนวนธรรมชาติสองจำนวนบวกกัน จะได้จำนวนธรรมชาติซึ่งมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ เราจะใช้สัญลักษณ์ $m+n$ (อ่านว่า m บวก n) แทนผลบวกของ m และ n

นิยาม 1.2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ

1.2.1 $m+1 = m^*$ และ

1.2.2 $(m+n)^* = m+n^*$

ทฤษฎีบทที่ 1.2.1

สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ จะได้

1) $m+n \in N$ (Closure Law)

2) $m+n$ เป็นจำนวนธรรมชาติเทียบเคียงจำนวนเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ การพิสูจน์ใช้สัจพจน์ 5

1) ให้ $A = \{n \in N / m+n \in N\}$

เพราะว่า $m+1 = m^*$

และ $m^* \in N$

ดังนั้น $m+1 \in N$

นั่นคือ $1 \in A$

ให้ $a \in A$ ดังนั้น $m+a \in N$

พิจารณา $m+a^* = (m+a)^*$

และ $(m+a)^* \in N$

ดังนั้น $m+a^* \in N$

จาก $a^* \in A$

โดยสัจพจน์ 5 จะได้ $A = N$

2) ให้ $m \in N$

$A = \{n \in N / m+n$ มีเพียงจำนวนเดียว$\}$

พิจารณา $m+1 = m^*$

เพราะว่า m^* มีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

ดังนั้น $m+1$ มีเพียงจำนวนเดียว

นั่นคือ $1 \in A$

ให้ $a \in A$ ดังนั้น $m+a$ มีเพียงจำนวนเดียว

$$\because\ m+a^* = (m+a)^*$$

และ $(m+a)^*$ มีเพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น $m+a^*$ มีจำนวนเดียว

นั่นคือ $a^* \in A$

$$\therefore\ A = N \quad \#$$

บทแทรก 1.2.1 สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ จะได้ $1+n = n+1$

พิสูจน์ ให้ $n \in N$

$$A = \{n/1+n = n+1\}$$

เพราะว่า $1+1 = 1+1$

ดังนั้น $1 \in A$

ให้ $a \in A$ ดังนั้น $1+a = a+1$

$$(1+a)^* = (a+1)^*$$

$$1+a^* = (a+1)+1$$

$$1+a^* = a^*+1$$

ดังนั้น $a^* \in N$

นั่นคือ $A = N \quad \#$

ทฤษฎีบทที่ 1.2.2 กฎการจัดหมู่สำหรับการบวก (Associative Law for Addition)
สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p am ๆ จะได้

$$(m+n)+p = m+(n+p)$$

พิสูจน์ ให้ m , n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

$$A = \{p \in N/(m+n)+p = m+(n+p)\}$$

เนื่องจาก $(m+n)+1 = (m+n)^*$ (นิยาม 1.2.1)

$= m+n^*$ (นิยาม 1.2.2)

$= m+(n+1)$

ดังนั้น $1 \in A$

ให้ a เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ใน A จะได้

$$(m+n)+a = m+(n+a)$$

พิจารณา $(m+n)+a^* = [(m+n)+a]^*$

$$= [m+(n+a)]^*$$

$$= m+(n+a)^*$$

$$= m+(n+a^*)$$

ดังนั้น $a^* \in A$

โดยสัจพจน์ 5 จะได้ $A = N$

นั่นคือ $\forall m \in N\ \forall n \in N\ \forall p \in N,\ (m+n)+p = m+(n+p)$ #

ทฤษฎีบทที่ 1.2.3 กฎการสลับที่สำหรับการบวก (Commutative Law for Addition)

สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ จะได้ $m+n = n+m$

พิสูจน์ ให้ m เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

$$A = \{n \in N / m+n = n+m\}$$

โดยสัจพจน์ 5 สามารถพิสูจน์ได้ว่า $A = N$ (แบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบทที่ 1.2.4 กฎการตัดออกสำหรับการบวก (Cancellation Law for Addition)

สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p ใด ๆ

ถ้า $m+n = m+p$ แล้วจะได้ $n = p$

พิสูจน์ ให้ n, p เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

$$A = \{m \in N / \forall n \in N, \forall p \in N, m+n = m+p \rightarrow n = p\}$$

ให้ $1+n = 1+p$

$$n+1 = p+1$$

$$n^* = p^*$$

$$n = p$$

ดังนั้น $1 \in A$

ให้ a เป็นจำนวนธรรมชาติใน A

จะได้ $a+n = a+p \rightarrow n = p$

พิจารณา $a^*+n = a^*+p$

จะได้ $n+a^* = p+a^*$

$$(n+a)^* = (p+a)^*$$

$$n+a = p+a$$
$$a+n = a+p$$
ดังนั้น $n = p$

นั่นคือ $a^* \in A$

โดยสัจพจน์ 5 จะได้ $A = N$ #

จากทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ผ่านมา เป็นคุณสมบัติของการบวกจำนวนธรรมชาติ ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป ซึ่งยังไม่มีความคิดเกี่ยวกับเรียงอันดับจำนวนธรรมชาติใด ๆ 2 จำนวน โดยทฤษฎีบทต่อไป จะเห็นว่าจำนวนธรรมชาติ 2 จำนวนใด ๆ ถ้าไม่เท่ากันสามารถจัดอันดับได้ ซึ่งก็นำไปสู่ความหมายของการ "น้อยกว่า" หรือ "มากกว่า" ซึ่งจะได้ทราบนิยามในภายหลัง

ทฤษฎีบทที่ 1.2.5 (The Trichotomy Theorem)

สำหรับจำนวนนับ m, n ใด ๆ ข้อความต่อไปนี้มีข้อความเดียวเท่านั้นที่เป็นจริง

1.2.5.1 $m = n$

1.2.5.2 $\exists p \in N,\ m = n+p$

1.2.5.3 $\exists q \in N,\ n = m+q$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะต้องแยกเป็น 2 ส่วน คือจะแสดงว่า ข้อความ 1.2.5.1, 1.2.5.2 และ 1.2.5.3 เป็นจริงได้อย่างมาก 1 ข้อ และส่วนที่สองจะแสดงว่า ข้อความดังกล่าวเป็นจริงอย่างน้อย 1 ข้อ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้จะอาศัยทฤษฎีประกอบดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 1.2.5

1. $\forall m \in N\ \forall n \in N\ m = n \rightarrow \nexists p \in N,\ m = n+p$
2. $\forall m \in N\ \forall n \in N\ m = n \rightarrow \nexists q \in N,\ n = m+q$
3. $\forall m \in N\ \forall n \in N\ \forall p \in N\ n = m+p \rightarrow \nexists q \in N,\ m = n+q$

พิสูจน์ 1) ให้ m, n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ซึ่ง $m = n$

สมมติว่า สามารถหา $p \in N$ ซึ่ง $m = n+p$

ดังนั้น
$$m^* = (n+p)^*$$
$$m+1 = n+p^*$$
$$= m+p^*$$
ดังนั้น $1 = p^*$

แต่ 1 ไม่เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติใด

$$m = (m+p)+q$$

โดยทฤษฎีบทประกอบข้อ 2 ข้อความ 1.2.5.3 ไม่จริง

ถ้าข้อความ 1.2.5.2 จริง นั่นคือ $\exists p \in N, m = n+p$ โดยทฤษฎีบทประกอบข้อ 1 จะได้ $m \neq n$ และทฤษฎีบทประกอบข้อ 3 จะได้ $\nexists q \in N, \; n = m+q$ นั่นคือ ข้อความ 1.2.5.3 ไม่จริง

ในทำนองเดียวกัน ถ้าข้อความ 1.2.5.3 ก็จะได้ว่า 1.2.5.1 และ 1.2.5.3 ไม่จริง

นั่นคือ 1.2.5.1, 1.2.5.2, 1.2.5.3 เป็นจริงได้อย่างมาก 1 ข้อ การพิสูจน์ส่วนที่ 2 ให้

$$A = \{n \in N / (n = n) \vee (\exists p \in N, m = n+p) \vee (\exists q \in N, n = m+q)\}$$

ถ้า $m = 1$ จะได้ $1 \in A$

ถ้า $m \neq 1$แล้ว $\exists p \in N \in m = p^*$

$$m = p+1$$

$$= 1+p$$

ดังนั้น $1 \in A$

ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติใน A จะแสดงว่า $n^* \in A$

กรณีที่ 1 $m = n$

$$m^* = n^*$$

$$m+1 = n^*$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงพิสูจน์ว่า $2 \cdot 3 = 6$
3. จงพิสูจน์ว่า

   2.1 $(m \cdot n^*)^* = m \cdot n + m^*$

   2.2 $(m^* \cdot n^*) = (m \cdot n)^* + m + n$

3. จงพิสูจน์หรือให้ตัวอย่างหักล้าง

$$\forall m \in N,\ \forall n \in N,\ mn = 1 \leftrightarrow m = 1 \vee n = 1$$

4. ให้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังนี้ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p ใด ๆ

   4.1 mn เป็นจำนวนธรรมชาติเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

   4.2 $(m + p)m = nm + pm$

   4.3 $(mn)p = m(np)$

1.4 การเรียงอันดับจำนวนธรรมชาติ (Ordering of Natural Numbers)

คุณสมบัติที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งในการศึกษาจำนวนธรรมชาติ คือ การเปรียบเทียบตัวเลขว่าตัวใดมากหรือน้อยกว่ากัน จากทฤษฎีบทที่ 1.2.5 เราทราบแล้วว่าจำนวนธรรมชาติ 2 จำนวนใด ๆ ก็ตาม จะเปรียบเทียบกันได้กรณีใดกรณีหนึ่งใน 3 กรณีเท่านั้น ต่อไปจะได้ให้นิยามและคุณสมบัติต่าง ๆ

นิยาม 1.4.1 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ m **น้อยกว่า** n หมายถึงมีจำนวนธรรมชาติ p ซึ่งทำให้ $n = m+p$ และใช้สัญลักษณ์ $m < n$ หรือ $n > m$ (อ่านว่า n **มากกว่า** m)

นั่นคือ $m < n$ หมายถึง $\exists p \in N,\ n = m+p$

ทฤษฎีบทที่ 1.4.1 ความสัมพันธ์ $<$ เป็นการเรียงอันดับเชิงเส้นบนเซตของจำนวนธรรมชาติ นั่นคือ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p ใด ๆ จะได้

1) ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อความเดียว

$m = n$ หรือ $m < n$ หรือ $n < m$

และ 2) ถ้า $m < n$ และ $n < p$ แล้วจะได้ $m < p$

พิสูจน์ ให้ m, n, p เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

จากทฤษฎีบทที่ 1.2.5 จะได้ข้อ 1) จริง

สมมติว่า $m < n$ และ $n < p$

ดังนั้น $\exists q \in N,\ n = m+q$

และ $\exists r \in N,\ p = n+r$

$$p = (m+q)+r$$
$$= m+(q+r)$$

เพราะว่า $q+r \in N$

ดังนั้น $m < p$ #

ทฤษฎีบทที่ 1.4.2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p ใด ๆ

$m < n$ ก็ต่อเมื่อ $m+p < n+p$

พิสูจน์ 1) ให้ m, n, p เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

ให้ $m < n$.

$$\exists q \in N,\quad n = m+q$$

พิจารณา $n+p = (m+q)+p$

$= m+(q+p)$

$= m+(p+q)$

$= (m+p)+q$

ดังนั้น $m+p < n+p$

2) ให้ $m+p < n+p$

สมมติว่า $\sim (m < n)$

ดังนั้น $m = n$ หรือ $n < m$

กรณีที่ 1 $m = n$

จะได้ $m+p = n+p$

นั่นคือ $\sim (m+p < n+p)$

กรณีที่ 2 $n < m$

จะได้ $n+p < m+p$ (จาก 1)

นั่นคือ $\sim (m+p < n+p)$

จากทั้ง 2 กรณี สรุปว่า $m+p < n+p \rightarrow m < n$ #

ทฤษฎีบท 1.4.3 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p, q ใด ๆ

1) $(m<p) \wedge (n<q) \rightarrow m+n < p+q$

2) $m < n \leftrightarrow mp < np$

3) $(m<p) \wedge (n<q) \rightarrow mn < pq$

การพิสูจน์สามารถพิสูจน์ได้ตามนิยาม (แบบฝึกหัด)

นิยาม 1.4.2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ m **น้อยกว่าหรือเท่ากับ** n หมายถึง $m = n$ หรือ $m < n$ ใช้สัญลักษณ์ $m \leqslant n$ หรือ $n \geqslant m$ (อ่านว่า n มากกว่าหรือเท่ากับ m)

นั่นคือ $m \leqslant n$ หมายถึง $(m = n) \vee (m < n)$

จากนิยามและความรู้ทางตรรกศาสตร์ สามารถสรุปคุณสมบัติของ $\leqslant$ ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4.4 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p ใด ๆ จะได้

1. $m \leqslant m$

2. $(m \leqslant n) \wedge (n \leqslant m) \rightarrow m = n$

3. $(m \leqslant n) \wedge (n \leqslant p) \rightarrow m \leqslant p$

4. $(m \leqslant n) \vee (n \leqslant m)$

ทฤษฎีบท 1.4.5 จำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ จะได้ $1 \leqslant n$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

ดังนั้น $(n = 1) \vee (n \neq 1)$

ถ้า $n = 1$ จะได้ $1 \leqslant n$

ถ้า $n \neq 1$ n จะเป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ m จำนวนหนึ่ง

ดังนั้น $n = m^* = m+1$

เพราะฉะนั้น $1 < n$

นั่นคือ $1 \leqslant n$

ทฤษฎีบท 1.4.6 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ

1. ถ้า $m < n$ แล้วจะได้ $m+1 \leqslant n$
2. ถ้า $m < n+1$ แล้วจะได้ $m \leqslant n$

พิสูจน์ 1 ให้ m, n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

ให้ $m < n$

$\exists p \in N, \quad n = m+p$

แต่ $1 \leqslant p$

ถ้า $1 = p$ จะได้

$$n = m+p = m+1$$

นั่นคือ $m+1 \leqslant n$

ถ้า $1 < p$ จะได้

$$m+1 < m+p = n$$

ดังนั้น $m+1 \leqslant n$

พิสูจน์ 2 ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบทที่ 1.4.7 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p และ q ใด ๆ จะได้

1. $m \leqslant n \leftrightarrow m+p \leqslant n+p$
2. $(m \leqslant p) \wedge (n \leqslant q) \rightarrow m+n \leqslant p+q$

3. $m \leq n \leftrightarrow mp \leq np$

4. $(m \leq p) \wedge (n \leq q) \rightarrow mn \leq pq$

ทฤษฎีบทที่สำคัญของจำนวนธรรมชาติที่ควรทราบคือ หลักการอาร์คีมีดีสและหลักการเรียงอันดับอย่างดี

ทฤษฎีบทที่ 1.4.8 หลักการอาร์คีมีดิสสำหรับจำนวนธรรมชาติ (The Achemedean Principle for Natural Numbers)

สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ จะมีจำนวนธรรมชาติ p อย่างน้อยหนึ่งจำนวนที่ทำให้ $m < np$

พิสูจน์ ให้ m, n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

ดังนั้น $n = 1$ หรือ $n \neq 1$

กรณีที่ 1 $n = 1$

ให้ $p = m^* = m+1$

เพราะฉะนั้น $m < p$

ดังนั้น $m < np$

กรณีที่ 2 $n \neq 1$

ดังนั้น n จะเป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ q จำนวนหนึ่ง

$$\therefore \quad n = q^* = q+1$$

ให้ $p = m$

พิจารณา
$$\begin{aligned} np &= (q+1)m \\ &= qm+m \\ &= m+qm \end{aligned}$$

ดังนั้น $m < np$ #

ทฤษฎีบทที่ 1.4.9 หลักการเรียงอันดับอย่างดี (The Well – Ordering Principle)

สำหรับสมาชิกใด ๆ ของ N ถ้า $A \neq \phi$ แล้ว จะมีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุด

นั่นคือ $\forall A \subseteq N,\ A \neq \phi \rightarrow (\exists a \in A\ \forall n \in A\ \ a \leq n)$

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $A \subseteq N$ และ $A \neq \phi$

เนื่องจาก $A \neq \phi$ ดังนั้น $\exists p, p \in A$

ให้ $M = \{m \in N / \forall n \in A,\ m \leq n\}$

เพราะว่า $1 \leq n$ ดังนั้น $1 \in M$

เนื่องจาก $p < p+1$ และ $p \in A$

$\therefore \quad p^* = p+1 \notin M$

ดังนั้น $M \neq N$

นั่นคือ สัจพจน์ 5 ไม่จริง

ดังนั้น $\exists a \in M$ แต่ $a^* \notin M$

นั่นคือ $a \leqslant n$ สำหรับทุกค่า n ใน A

ต่อไปจะแสดงว่า $a \in A$

สมมติว่า $a \notin A$

เพราะฉะนั้น $a \neq n$

ดังนั้น $\forall n \in A, \quad a < n$

แต่จาก ทบ. 1.4.6 จะได้ $\forall n \in A, \quad a+1 \leqslant n$

เพราะฉะนั้น $a+1 \in M$

$a^* \in M$ ซึ่งขัดแย้งกัน

ดังนั้น $a \in A$ #

ทฤษฎีบทนี้จะสามารถพิสูจน์ได้อีกว่า สมาชิกตัวที่น้อยที่สุดนั้นจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทแทรก 1.4.9 สำหรับสับเซต A ใด ๆ ของ N ถ้า $A \neq \phi$ แล้ว จะมีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดเพียงตัวเดียว

พิสูจน์ ถ้า a และ b เป็นสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดของ A

ดังนั้น $\forall n \in A, \ a \leqslant n$ และ $\forall n \in A, \ b \leqslant n$

เนื่องจาก $b \in A$ และจาก $a \leqslant n, \ \forall n \in A$

ดังนั้น $a \leqslant b$

เนื่องจาก $a \in A$ และจาก $b \leqslant n, \ \forall n \in A$

ดังนั้น $b \leqslant a$

นั่นคือ $a = b$

แบบฝึกหัด 1.4

จงพิสูจน์ว่า

1. สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n ใด ๆ ถ้า $m = n$ แล้วจะได้ $n < k^{*} \cdot m$ ทุก $k \in N$
2. สำหรับจำนวนธรรมชาติ m, n, p ใด ๆ

   2.1 $m<n<p$ หมายถึง $(m<n) \wedge (n<p)$ และ

   2.2 $m \leqslant n \leqslant p$ หมายถึง $(m \leqslant n) \wedge (n \leqslant p)$

   จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in N, \sim(\exists m \in N, n<m<n+1)$
3. จงพิจารณาว่าบทกลับของ ทบ. 1.4.3 (1) เป็นจริงหรือไม่
4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1.4.3, ทฤษฎีบทที่ 1.4.4, ทฤษฎีบทที่ 1.4.7

1.5 หลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction)

ในวิชาคณิตศาสตร์มีข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนธรรมชาติ n เช่น

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$$

$$2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)+(n-2)(n-3)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ข้อความดังกล่าวอาจจะเป็นจริงทุกค่า n หรืออาจจะเป็นจริงเฉพาะบางค่าของ n เช่น ข้อความที่ 3 เป็นจริงเฉพาะเมื่อ n = 2, 3 เท่านั้น

ถ้าให้ P(n) แทนข้อความใด ๆ ที่เกี่ยวกับเลขจำนวนธรรมชาติ n หลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ใช้พิสูจน์ข้อความที่เขียนอยู่ในรูป $\forall n \in N$, P(n) เป็นจริง ซึ่งกล่าวว่า ข้อความ

(1.5.1) $P(1) \wedge [\forall k \in N, P(k) \rightarrow P(k+1)] \rightarrow \forall n, P(n)$ เป็นสัจพจน์

สัจพจน์ 5 ของเปอาโนกล่าว

(1.5.2) $\forall A \subseteq N, \ [1 \in A \wedge (\forall k \in N, k \in A \rightarrow k^* \in A] \rightarrow A = N$

ถ้าให้ $K = \{n \in N / P(n)$ เป็นจริง$\}$

จะเห็นว่าข้อความ (1.5.2) → (1.5.1)

พิสูจน์ สมมติว่า (1.5.2) จริง และให้ $P(1) \wedge [\forall k \in N, P(k) \rightarrow P(k+1)]$

ดังนั้น $1 \in K$ ($\because$ P(1) จริง)

และ $\forall k \in N, k \in K \rightarrow k+1 \in N$

หรือ $\forall k \in N, k \in K \rightarrow k^* \in K$

โดย (1.5.2) จะได้ $K = N$

ดังนั้น $\forall n \in N, \ n \in K$

นั่นคือ $\forall n \in N;$ P(n) จริง

ในการพิสูจน์ข้อความ $\forall n$, P(n) โดยหลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะทำดังนี้

1. พิสูจน์ว่า P(1) จริง
2. ให้ k เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ สมมติว่า P(k) จริง แล้วแสดงว่า P(k+1) จริง

ตัวอย่าง 1.5.1 จงพิสูจน์ว่า

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{ทุก } n \in N.$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ คือข้อความ $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

ขั้นที่ 1 จะแสดงว่า $P(1)$ จริง

เนื่องจาก $1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 สมมติว่า $P(k)$ จริง จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

นั่นคือสมมติว่า $1+2+3+\ldots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+k+(k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \\
&= (k+1)\left[\frac{1}{2}k+1\right] \\
&= (k+1)\left[\frac{k+2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(k+1)\,(k+2) \\
&= \frac{1}{2}(k+1)\,[(k+1)+1]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

ข้อสังเกต การใช้หลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์พิสูจน์นั้น ข้อความนั้นจะต้องจริงทุกค่า n และใช้ในการตรวจสอบคำตอบเท่านั้น แต่ถ้าจะใช้หาคำตอบว่า $1+2+3+\ldots+n$ มีค่าเท่าใด ต้องใช้วิธีอื่น

ตัวอย่าง 1.5.2 จงพิสูจน์โดยใช้ Math Induction แสดงว่า ผลบวกของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มี n ด้านเท่ากับ $(n-2)\ 180^\circ$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 ให้ $n = 3$, $P(n)$ เป็นจริง เพราะผลบวกของมุมภายในเท่ากับ $(3-2)180^\circ = 180^\circ$

ขั้นที่ 2 ตั้งสมมติฐานว่า $P(k)$ เป็นจริง
ดังนั้น ทฤษฎีนี้จะเป็นจริง เมื่อ $n = k+1$ ด้วย

ถ้า $n = k$ เป็นจริงแล้ว ผลบวกของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มี k ด้าน $= (k-2)180°$ เป็นจริง
ทราบว่ารูปหลายเหลี่ยมด้านเท่านี้ ถ้าเพิ่มด้านขึ้นอีก 1 ด้าน ผลบวกของมุมภายในจะเพิ่มขึ้น 180° เสมอ

ดังนั้น ถ้า $n = k+1$ จะได้

ผลบวกของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า ที่มี $(k+1)$ ด้าน เท่ากับ

$$(k-2)180° + 180° \quad = \quad 180°[(k-2)+1]$$

หรือเท่ากับ $(k-1)180°$ ซึ่งค่านี้จะได้เท่ากับค่าที่ได้จากการเอา $(k+1)$ แทนค่า n ลงในทฤษฎี โดยตรงพอดี แสดงว่าทฤษฎีนี้เป็นจริง เมื่อ $n = k$ แล้ว ทฤษฎีนี้เป็นจริง เมื่อ $n = k+1$ ด้วย

ทฤษฎีนี้เป็นจริงเมื่อ $n = 3$ จึงเป็นจริงเมื่อ $n = 3+1+4$ ด้วย และในเวลาเดียวกัน ทฤษฎีนี้เป็นจริงเมื่อ $n = 4+1 = 5$, $n = 5+1 = 6$ เรื่อย ๆ ไป

แสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง

#

แบบฝึกหัด 1.5

จงใช้หลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ เมื่อ $n \in N$

1. $2+4+6+\ldots+2n \;=\; n(n+1)$
2. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 \;=\; \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3. $3+5+7+\ldots+(2n+1) \;=\; n(n+2)$
4. $(x^n-y^n) \;=\; (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$ ทุก ๆ $n \in N$
5. จงพิสูจน์ว่า $1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + n.3^n = \frac{(2n-1)\,3^{n+1}+3}{4}$