บทที่ 5
ความน่าจะเป็น (Probability)

เรียบเรียง โดย รศ. มานัส บุญยัง

5.0 บทนำ ความน่าจะเป็น จัดเป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับสถิติอย่างมาก ความน่าจะเป็นนี้เป็นการศึกษาการสุ่มหรือการทดลองที่ไม่มีการกำหนดล่วงหน้ามาก่อนเพื่อจะดูถึงโอกาส ที่จะเป็นไปได้ว่ามีมากน้อยสักเพียงใด หรือบางทีก็เป็นการคาดคะเนความหวังของมนุษย์อย่างหนึ่ง เช่น ข้าพเจ้ามีโอกาสสอบ MA 201 ผ่าน 70% หรือการแข่งขันฟุตบอลอุดมศึกษาปีนี้ ทีมฟุตบอลของมหาวิทยาลัยรามคำแหงมีหวังชนะเลิศ 30% หรือสำหรับสลากกินแบ่ง 1 ใบ มีโอกาส ถูกเลขท้าย 2 ตัว เพียง $\frac{1}{100}$ เป็นต้น การศึกษาถึงความน่าจะเป็นนี้สามารถนำไปใช้ช่วยในการตัดสินใจต่าง ๆ ให้ได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น

5.1 การทดลองเชิงสุ่มและปริภูมิสิ่งตัวอย่าง (Random trial and Sample space)

การทดลองเชิงสุ่ม (Random trial) คือการทดลองใด ๆ ที่ไม่สามารถกำหนดหรือไม่สามารถทำนายผลลัพธ์ล่วงหน้าได้ ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ 1 อัน ผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นได้มี 2 ทาง คือ หัวกับก้อย ซึ่งจะไม่สามารถทำนายผลลัพธ์ได้ล่วงหน้าว่าผลจะเป็นหัวหรือก้อย หรือการขับรถไปตามท้องถนน ถ้าเรามุ่งสนใจดูว่า จะประสพอุบัติเหตุหรือไม่ ก็เป็นการทดลองเชิงสุ่มด้วย เพราะเราไม่สามารถทำนายได้ล่วงหน้าว่า จะเกิดอุบัติเหตุหรือไม่เกิด เป็นต้น

ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง (Sample space) คือเซตที่ประกอบด้วยผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองเชิงสุ่ม มักเขียนแทนด้วยเซต S

ตัวอย่าง 5.1.1 การโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง เราถือว่าเป็นการทดลองเชิงสุ่ม เพราะไม่สามารถทำนายผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นได้ ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ ด้านที่เหรียญหงายขึ้น ซึ่งอาจจะเป็นหัว (H) หรือ ก้อย (T) อย่างใดอย่างหนึ่ง

ดังนั้น ปริภูมิสิ่งตัวอย่างก็คือ เซต $S = \{H,T\}$

ตัวอย่าง 5.1.2 การโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง ก็เป็นการทดลองเชิงสุ่มเช่นกัน ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือด้านที่เหรียญหงายขึ้นแล้ว ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง ก็คือ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ตัวอย่าง 5.1.3 การโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือด้านที่เหรียญหงายขึ้นแล้วปริภูมิสิ่งตัวอย่างก็คือ

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ข้อสังเกต

1) โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าโยนเหรียญ n เหรียญ 1 ครั้ง จำนวนสมาชิกในปริภูมิสิ่งตัวอย่างจะเท่ากับ 2^n

2) จำนวนสมาชิกปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการโยนเหรียญ n เหรียญ 1 ครั้ง กับการโยนเหรียญ 1 เหรียญ n ครั้ง ย่อมเท่ากัน

3) การหาปริภูมิสิ่งตัวอย่างของสิ่งใด ๆ ที่อาจเป็นไปได้ 2 อย่าง ก็สามารถจัดเข้าแบบเดียวกับการโยนเหรียญได้ เช่นตัวอย่าง 5.1.4

ตัวอย่าง 5.1.4 ในการตรวจสภาพของหลอดไฟฟ้าโดยการเลือกหยิบขึ้นมาตรวจ 3 หลอด โดยการสุ่ม ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ สภาพของหลอดไฟที่หยิบขึ้นมาว่า ดีหรือเสีย ดังนั้นปริภูมิสิ่งตัวอย่าง จะมีสมาชิกทั้งหมด $2^3 = 8$ ดังนี้ (ให้ดี แทนด้วย ด, เสียแทน ด้วย ส)

$$\therefore\ S = \{\text{ดดด, ดดส, ดสด, ดสส, สดด, สดส, สสด, สสส}\}$$

ตัวอย่าง 5.1.5 ในการโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ จำนวนเหรียญ ที่ด้านหงายเป็นก้อย โดยไม่สนใจว่า การเรียงลำดับว่าเป็นอย่างไรแล้วจะได้ว่า ปริภูมิสิ่งตัวอย่างก็คือ เซต $S = \{0, 1, 2, 3\}$ คือ ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะไม่ออกก้อยเลย หรือ ออกก้อย 1 อัน หรือ ออกก้อย 2 อัน หรืออาจจะออกก้อยทั้ง 3 อันก็ได้

ข้อสังเกต

การทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ เมื่อสนใจผลลัพธ์ในทัศนะที่ต่างกัน ปริภูมิของสิ่งตัวอย่างที่จะเป็นไปได้อาจจะไม่เหมือนกันก็ได้ ดังเช่น ตัวอย่าง 5.1.3 กับตัวอย่าง 5.1.5 เป็นต้น

ตัวอย่าง 5.1.6 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่สนใจคือ จำนวนแต้มของหน้าที่หงายขึ้น ผลลัพธ์อาจจะเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 แต้มใดแต้มหนึ่งก็ได้

ดังนั้น ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง ก็คือ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ตัวอย่าง 5.1.7 ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ แต้มบนหน้า ลูกเต๋าที่หงายขึ้นแต่ละลูก โดยให้ (x,y)แทนลูกเต๋าลูกแรกหงายแต้ม xและลูกเต๋าลูกที่สองหงายแต้ม y

เช่น (2,6) แทนลูกเต๋าลูกแรกหงายแต้ม 2 และลูกเต๋าลูกที่สองหงายแต้ม 6 เป็นต้น

ดังนั้น ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง คือ

$$
\begin{aligned}
S = \{ & (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6) \\
& (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6) \\
& (3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3.4)\ (3,5)\ (3,6) \\
& (4,1)\ (4,2)\ (4.3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6) \\
& (5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6) \\
& (6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6) \}
\end{aligned}
$$

ข้อสังเกต

จำนวนสมาชิกในปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการโยนลูกเต๋า n ลูก 1 ครั้ง เท่ากับ 6^n ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจ คือ จำนวนแต้มที่หงายขึ้นของลูกเต๋าแต่ละลูก

ตัวอย่าง 5.1.8 ในการแข่งขันฟุตบอลระหว่างทีมฟุตบอล คณะศึกษาศาสตร์กับทีมฟุต-บอล คณะวิทยาศาสตร์ ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ ผลที่ทีมคณะวิทยาศาสตร์ จะได้รับแล้วปริภูมิสิ่งตัวอย่าง คือ S = { ชนะ, เสมอ, แพ้ }

ตัวอย่าง 5.1.9 ในการขับรถไปสถานที่ทำงาน ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ การเกิดอุบัติเหตุ แล้วปริภูมิสิ่งตัวอย่างก็คือ S = { เกิดอุบัติเหตุ, ไม่เกิดอุบัติเหตุ }

ตัวอย่าง 5.1.10 ในการขับรถไปสถานที่ทำงาน ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ เวลาที่ใช้ในการเดินทาง แล้วปริภูมิสิ่งตัวอย่างก็คือ S = { เวลา $t \mid o < t < \infty$ }

แบบฝึกหัด 5.1

จงหาเซตของปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการทดลองเชิงสุ่มต่อไปนี้

1. ในการโยนเหรียญ 2 อันหนึ่งครั้งและสนใจด้านที่หงายขึ้น
2. ในการโยนเหรียญ 2 อันหนึ่งครั้งและสนใจจำนวนเหรียญที่หงายด้านก้อยขึ้น
3. ในการโยนเหรียญ 6 อันหนึ่งครั้งสนใจจำนวนวิธีที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด
4. ในการทอดลูกเต๋า 3 ลูก หนึ่งครั้ง และสนใจจำนวนแต้มที่จะขึ้นได้ทั้งหมด
5. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก หนึ่งครั้ง และสนใจจำนวนแต้มของลูกเต๋าลูกแรกมีแต้มน้อยกว่าลูกที่สอง
6. ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ และลูกเต๋า 1 ลูก พร้อมกันหนึ่งครั้ง และสนใจด้านของเหรียญและลูกเต๋าที่หงายขึ้น
7. ในการสอบ MA 201 ของนักศึกษาผู้หนึ่ง สนใจเกรดที่นักศึกษาจะได้รับ
8. ในการสอบถามแม่บ้าน เกี่ยวกับการจัดบริการรถเมล์ปรับอากาศ
9. ในการหยิบลูกบอลในกล่องใบหนึ่ง ซึ่งมีบอลสีดำ สีแดง และสีขาว สนใจสีของลูกบอลที่จะหยิบได้
10. ในการหยิบลูกบอลในกล่องใบหนึ่ง ซึ่งมี 10 ลูก โดยหยิบครั้งละ 2 ลูก สนใจจำนวนวิธีที่จะหยิบ
11. ในการดึงไพ่ 1 ใบจากไพ่สำรับหนึ่ง สนใจหน้าของไพ่ที่ได้
12. ในการดึงไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง สนใจสีและดอกของหน้าไพ่ที่ได้
13. ในการสมัครเข้ารับเลือกตั้งเป็น สส. สนใจผลที่ผู้สมัครจะได้รับ
14. ในการนับจำนวนอุบัติเหตุบนท้องถนนในกรุงเทพฯ ในเวลา 1 วัน
15. ในการกำหนดราคาข้าวต่อเกวียนในวันที่ 1 มกราคม 2531

5.2 เหตุการณ์ (Event)

ในการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ ซึ่งมี S เป็นปริภูมิสิ่งตัวอย่าง เหตุการณ์ของการทดลองเชิงสุ่มนี้ ก็คือ เซตของผลลัพธ์ใด ๆ ซึ่งเป็นเซตย่อยของปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S ปกติเรามักใช้สัญลักษณ์ A, B, C......แทนเหตุการณ์

ข้อสังเกต

จากความหมายของเหตุการณ์จะได้ว่าปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S และ เซตว่าง ϕ ต่างก็เป็นเหตุการณ์ได้ด้วย

ตัวอย่าง 5.2.1 สมมติว่าในกล่องใบหนึ่งมีสลากอยู่สามใบ ซึ่งมีหมายเลข 1, 2, 3, กำกับอยู่ตาม ลำดับ หากสุ่มหยิบสลากออกมา 1 ใบ การทดลองเชิงสุ่มนี้มีปริภูมิสิ่งตัวอย่าง $S = \{1, 2, 3\}$ เหตุการณ์ของการทดลองเชิงสุ่มนี้คือ เซตย่อยใด ๆ ของ S ดังนั้นเหตุการณ์ที่จะเป็นไปได้จึงมีทั้งหมด 8 เหตุการณ์ดังนี้

A_1	=	$\{\ \}$	A_5	=	$\{1, 2\}$
A_2	=	$\{1\}$	A_6	=	$\{1, 3\}$
A_3	=	$\{2\}$	A_7	=	$\{2, 3\}$
A_4	=	$\{3\}$	A_8	=	$\{1, 2, 3\}$

หมายเหตุ

1) จำนวนเหตุการณ์จะมีได้ทั้งหมด 2^n เหตุการณ์ เมื่อ n คือจำนวนสมาชิกในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S

2) จากความหมายของเหตุการณ์ จะได้ว่า เซตว่าง (ϕ) และปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S ต่างก็เป็นเหตุการณ์ได้

3) เราเรียก เหตุการณ์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวว่า **เหตุการณ์เชิงเดียว** (simple event) จากตัวอย่าง 5.2.1 ได้ว่า A_2, A_3 และ A_4 เป็นเหตุการณ์เชิงเดียว และเรียกเหตุการณ์ที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัวว่า **เหตุการณ์เชิงประกอบ** (compound event) จากตัวอย่าง 5.2.1 ได้ว่า A_5, A_6, A_7 และ A_8 เป็นเหตุการณ์เชิงประกอบ

ตัวอย่าง 5.2.2 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่ และ F เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มต่ำกว่า 4 จงเขียนเซตของเหตุการณ์ E และเหตุการณ์ F

ในที่นี้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เป็นปริภูมิสิ่งตัวอย่าง E เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่

$\therefore$ $E = \{2, 4, 6\}$ ซึ่ง E เป็นเซตย่อยของ S

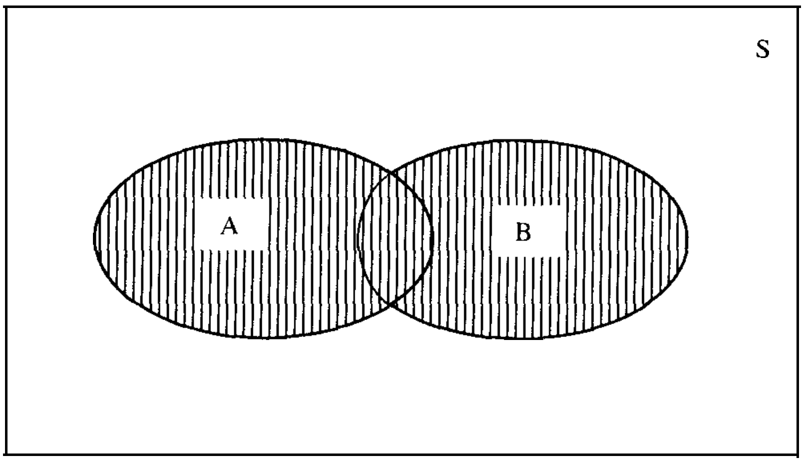
และ F เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มต่ำกว่า 4

∴ $F = \{1, 2, 3\}$ ซึ่ง F เป็นเซตย่อยของ S ด้วย

อนึ่ง เนื่องจากเหตุการณ์และปริภูมิสิ่งตัวอย่างที่กล่าวถึงนี้ต่างก็เป็นเซต จึงสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเซตมาใช้ประกอบการศึกษาได้ด้วย ดังต่อไปนี้

5.2.1 ผลผนวกของเหตุการณ์ (Union of events)

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว ผลผนวก ของเหตุการณ์ **A** กับ **B** ซึ่งเขียนแทนด้วย $A \cup B$ ก็คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ A หรือสมาชิกของเหตุการณ์ B หรือเป็นสมาชิก ของทั้งสองเหตุการณ์



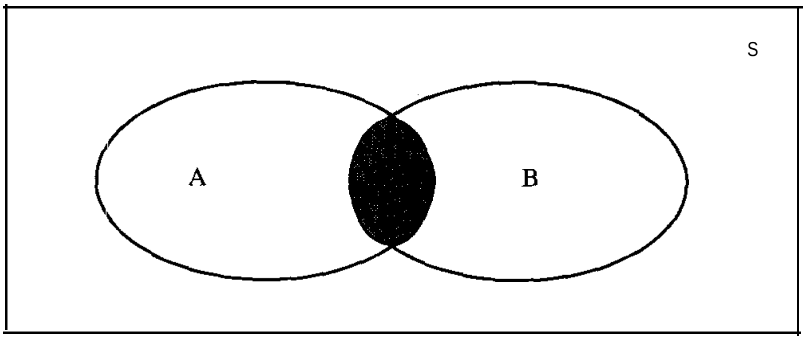
รูป 5.2.1 ส่วนที่แรเงาแสดงถึงเหตุการณ์ $A \cup B$

เช่นจากตัวอย่าง 5.2.2 ได้ว่า

$E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ คือเป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่หรือแต้มต่ำกว่า 4

5.2.2 ส่วนร่วมของเหตุการณ์ (Intersection of events)

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว **ส่วนร่วมของเหตุการณ์ A และ B** ซึ่งเขียนแทนด้วย $A \cap B$ ก็คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของทั้งเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B



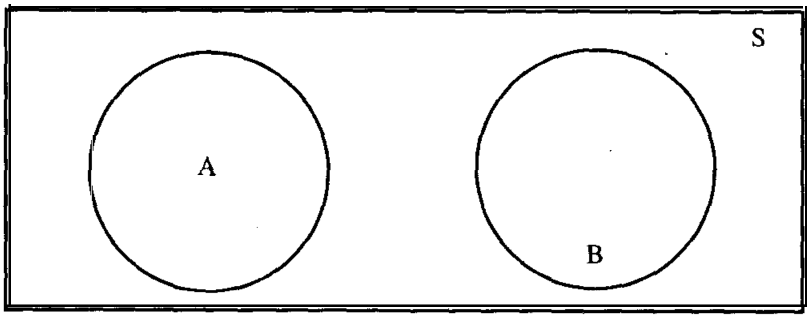
รูป 5.2.2 ส่วนที่แรเงา แสดงถึง เหตุการณ์ $A \cap B$

เช่นจากตัวอย่าง 5.2.2 ได้ว่า

$E \cap F = \{ 2 \}$ คือเป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่และต่ำกว่า 4

5.2.3 เหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (Disjoint events or mutually exclusive events)

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ และ $A \cap B = \phi$ แล้วจะเรียกเหตุการณ์ A กับ B ว่าเป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน นั่นหมายความว่า ในการทดลองครั้งนี้เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B จะเกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน ไม่ได้

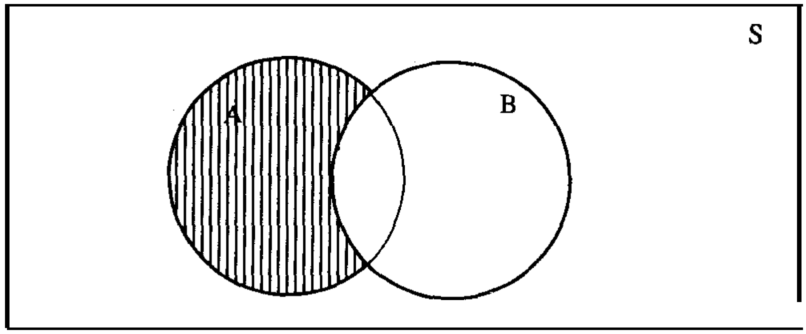


รูป 5.2.3 แสดงว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

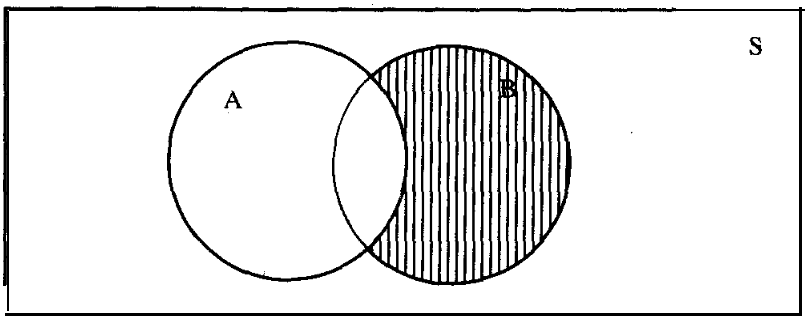
เช่น จากตัวอย่าง 5.2.1 ได้ว่า A_2 กับ A_7 เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน เพราะว่า $A_2 \cap A_7 = \phi$

5.2.4 ผลต่างของเหตุการณ์ (Difference of events)

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ ผลต่างของเหตุการณ์ A จาก B ซึ่งเขียนแทนด้วย A-B คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของเหตุการณ์ B



รูป 5.2.4 ส่วนที่แรเงาแสดงถึงเหตุการณ์ $A - B$



รูป 5.2.5 ส่วนที่แรเงาแสดงถึงเหตุการณ์ $B - A$

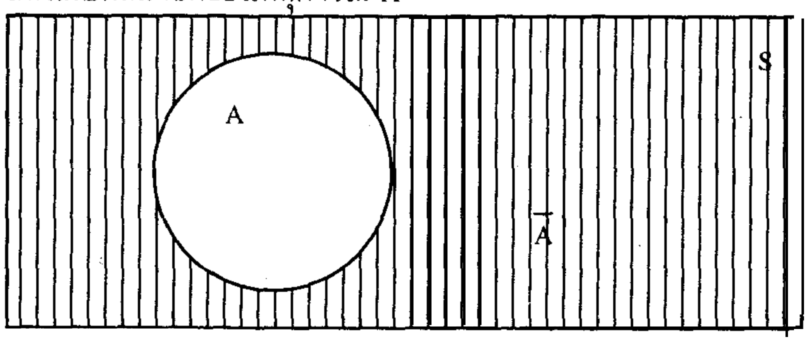
เช่นจากตัวอย่าง 5.2.2 ได้ว่า

$E - F = \{4, 6\}$ คือเป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มคู่และไม่ต่ำกว่า 4

และ $F - E = \{1, 3\}$ คือเป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มต่ำกว่า 4 และไม่เป็นแต้มคู่

5.2.5 ส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ (Complement of an event)

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่อยู่ในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S แล้ว **ส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ที่ไม่ใช่ A** เขียนแทนด้วย S-E หรือ $\bar{E}$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S แต่ไม่เป็นสมาชิกของเหตุการณ์ A



รูป 5.2.6 ส่วนที่แรเงาแสดงถึงเหตุการณ์ $\bar{A}$ หรือเหตุการณ์ $S - A$

จากตัวอย่าง 5.2.2 ได้ว่า

$\bar{E} = \{1, 3, 5\}$ คือเป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มคู่

และ $\bar{F} = \{4, 5, 6\}$ คือเป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าได้แต้มไม่ต่ำกว่า 4

ข้อสังเกต

สำหรับเหตุการณ์ A ใด ๆ ย่อมได้ว่า

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A \cap \bar{A} = \phi$$

และ $$A \cup \bar{A} = S$$ เสมอ

แบบฝึกหัด 5.2

1. ถ้า $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ เป็นปริภูมิสิ่งตัวอย่าง และ $E_1 = \{1, 3, 5\}$, $E_2 = \{2, 4\}$ $E_3 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ และ $E_4 = \{1, 2, 3\}$ เป็นเหตุการณ์ที่กำหนดให้แล้ว จงหาสมาชิกของเหตุการณ์ต่อไปนี้

   1.1) $E_1 \cup E_2$

   1.2) $E_3 \cup E_4$

   1.3) $E_1 \cap E_2$

   1.4) $E_1 \cap E_3$

   1.5) $E, \ - E_3$

   1.6) $E, \ \cap \overline{E}_3$

   1.7) E_4

   1.8) $E_2 \cap E_4$

   1.9) $(\overline{E_1 \cap E_3}) \cap \overline{E}_4$

   1.10) $E_1 \cup (E_2 \cap E_4)$

   1.11) $E_1 \cap E_3 \cap \overline{E}_4$

   1.12) $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$

   1.13) $(\overline{E_1 \cap E_3}) \cup (\overline{E}_2 \cap \overline{E}_4)$

   1.14) $(E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_4)$

   1.15) มีเหตุการณ์คู่ใดบ้างที่แยกต่างหากจากกัน

2. จากการสอบถามนักศึกษา 4 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง โดยใช้อักษร "ป" แทนนักศึกษาที่เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหงและ "ม" แทนนักศึกษาที่ไม่เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

   2.1 จงเขียนสมาชิกของปริภูมิสิ่งตัวอย่างทั้งหมด

2.2 จงเขียนเหตุการณ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้น และมีได้ทั้งหมดกี่เหตุการณ์ เป็นเหตุการณ์เชิงเดียวกี่เหตุการณ์ และเป็นเหตุการณ์เชิงประกอบกี่เหตุการณ์

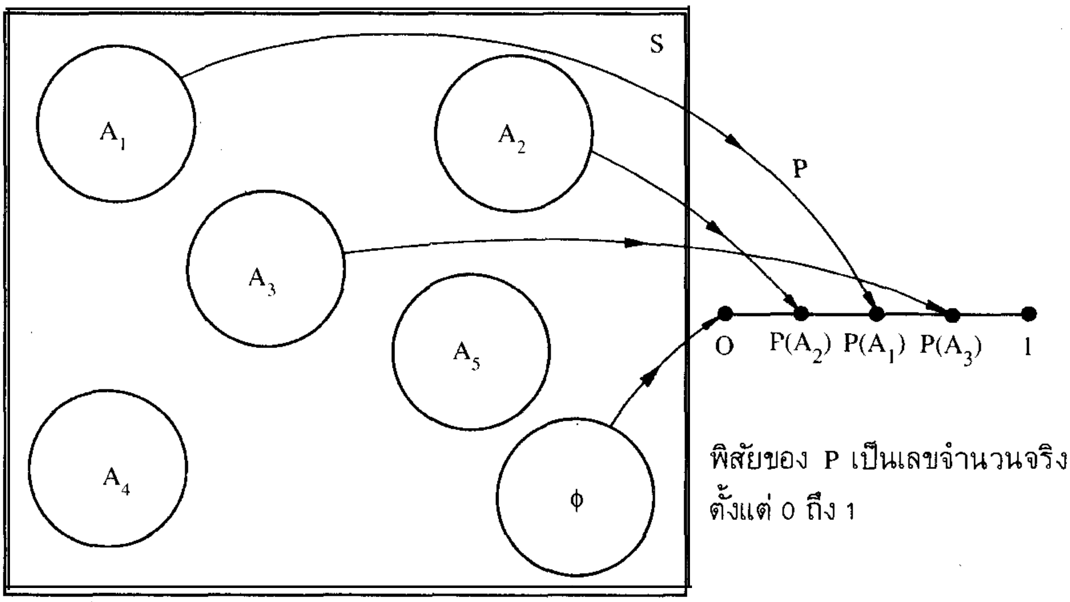
2.3 จงเขียนสมาชิกของเหตุการณ์ A ที่มีนักศึกษาเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง ทั้งสามคน

2.4 จงเขียนสมาชิกของเหตุการณ์ B ที่มีนักศึกษาอย่างน้อย 2 คน เป็นสมาชิกข่าว รามคำแหง

2.5 จงเขียนสมาชิกของเหตุการณ์ C ที่มีนักศึกษาเพียงคนเดียวเท่านั้นที่เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

5.3 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (Probability of events)

โดยทั่ว ๆ ไป เราจะกำหนดให้ความน่าจะเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ใด ๆ เป็นจำนวนเลข ซึ่งแสดงว่าเหตุการณ์ A น่าจะเกิดขึ้นมากหรือน้อยเพียงใด และจะเรียกจำนวนเลขที่กำหนดให้กับเหตุการณ์ A นี้ว่า **ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A** (Probability of A) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย P(A) หรืออีกนัยหนึ่งอาจกล่าวได้ว่า ถ้า $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots, A_2^n$ เป็นเหตุการณ์ทั้งหมดที่จะเป็นไปได้ของการทดลองเชิงสุ่มที่ปริภูมิสิ่งตัวอย่างมีสมาชิก n ตัว แล้วความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A_i หรือ $P(A_i)$ เป็นจำนวนเลขตั้งแต่ 0 ถึง 1 ซึ่งกำหนดขึ้นสำหรับแต่ละ A_i เพื่อวัดโอกาสที่จะเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A_i ดังนั้น ถ้ามองอีกแง่หนึ่งก็คือเราอาจกำหนด P เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งนิยามในโดเมนที่เป็นเซตของเหตุการณ์ A_i ทั้งหลายของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ และมีพิสัย $P(A_i)$ เป็นจริงตั้งแต่ 0 ถึง 1



โดเมนของ P ประกอบด้วยทุก ๆ A_i ซึ่งเป็นเซตย่อยของ S

โดยฟังก์ชัน P ซึ่งกำหนดความน่าจะเป็น $P(A_i)$ ให้กับเหตุการณ์ A_i ใด ๆ ย่อมมีคุณสมบัติเบื้องต้นดังนี้คือ

(i) $0 \le P(A) \le 1$ สำหรับเหตุการณ์ A ใด ๆ

(ii) $P(S) = 1$ เมื่อ S คือ ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง

(iii) ถ้า $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

นั่นคือ $A_i \cap A_j = \phi$ สำหรับ $i \ne j$ แล้ว

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

อนึ่ง เนื่องจาก P(A) คือความน่าจะเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 1 จำนวนเลขนี้ ทำให้ทราบว่า เหตุการณ์ A ที่เราสนใจมีโอกาสเกิดขึ้นได้มากน้อยเพียงใด เช่น

ถ้า $P(A) = 0$ หมายความว่า เหตุการณ์ A ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย

ถ้า $P(A) = 1$ หมายความว่า เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอน

ถ้า $P(A) = \frac{1}{2}$ หมายความว่าเหตุการณ์ A มีโอกาสเกิดขึ้น 50%

ถ้า $P(A) = \frac{1}{6}$ และ $P(B) = \frac{2}{3}$ หมายความว่า เหตุการณ์ B มีโอกาสเกิดขึ้นมากกว่าเหตุการณ์ A เป็นต้น

ทฤษฎีบท 5.3.1 $P(\phi) = 0$ เมื่อ ϕ เป็นเซตว่าง

พิสูจน์

เพราะว่า $\phi \cap \phi = \phi$

โดยคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ (*ii*) ได้ว่า

$$P(\phi \cup \phi) = P(\phi) + P(\phi) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

แต่ $\phi \cup \phi = \phi$

ดังนั้น $P(\phi \cup \phi) = P(\phi) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

จาก (1) กับ (2) ได้ว่า

$$P(\phi) + P(\phi) = P(\phi)$$

ดังนั้น $p(\phi) = P(\phi) \quad P(Q)$

$= 0$

นั่นคือ $p(\phi) = 0$

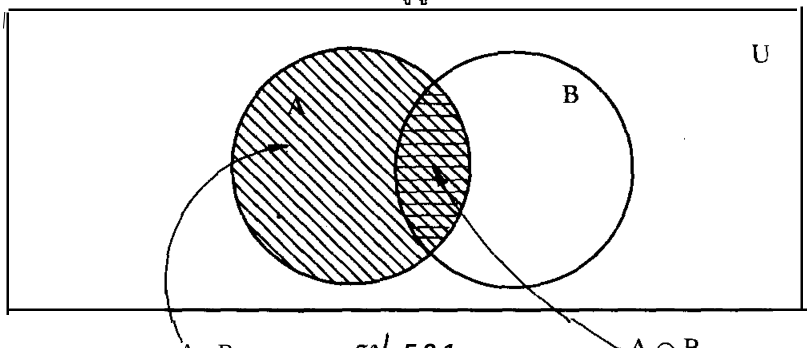
ทฤษฎีบท 5.3.2

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ แล้ว

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

พิสูจน์

เพราะว่า $A = (A-B) \cup (A \cap B)$ ดูรูป *5.3.1*



รูป 5.3.1

และ $(A-B) \cap (A \cap B) = \phi$

ดังนั้น $P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B))$

$= P(AB) + P(A \cap B)$ โดยคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ *(ii)*

เพราะฉะนั้น $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

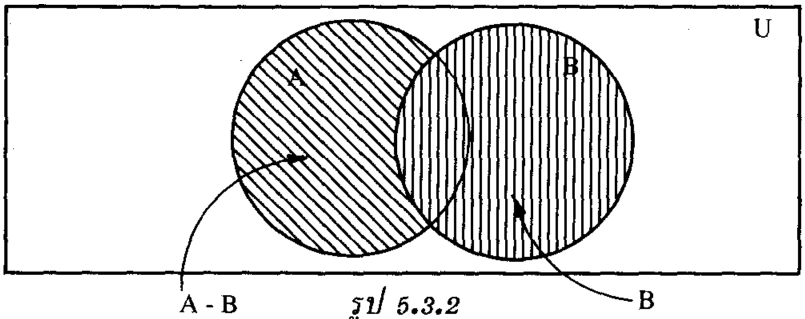
ทฤษฎีบท 5.3.3

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ แล้ว

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

พิสูจน์

เพราะว่า $A \cup B = B \cup (A-B)$ ดูรูป 5.3.2



รูป 5.3.2

และ $B \cap (A-B) = \phi$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(B \cup (A-B))$

$= P(B) + P(A\;B)$ (โดยคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ *(iii)*)

แต่ $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ โดยท.บ. 5.32

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

นั่นคือ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ข้อสังเกต

จะเห็นว่า ท.บ. 5.3.3 กับคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ *(iii)* นั้นต่างกันเล็กน้อย คือ ในคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ *(iii)* เหตุการณ์ A กับ B ต้องมีคุณสมบัติว่า $A \cap B = \phi$ ส่วนใน ท.บ. 5.3.3 นี้ เหตุการณ์ A กับ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ก็ได้ ไม่มีข้อกำหนด

บทแทรกที่ 1 ถ้า A, B และ c เป็นเหตุการณ์ใดๆ แล้ว

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

พิสูจน์

เพราะว่า $P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C)$

$= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C)$

$\quad - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$

$= P(A) + P(B) \quad P(A \cap B) + P(C)$

$\quad - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C \cap B \cap C))$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C)$

$\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

ดังนั้น $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$

$\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

บทแทรกที่ 2

ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ใดๆ แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \sum_{\text{all } i \neq j} P(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{\text{all } i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \sum_{\text{all } i \neq j \neq k \neq l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l)$$

$$+$$

$$\pm P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

ทฤษฎีบท 5.3.4 ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใดๆ แล้ว

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

พิสูจน์

เพราะ $\bar{A} = S - A$

ดังนั้น $P(\bar{A}) = P(S-A)$

$= P(S) - P(S \cap A)$ โดย ท. บ. 5.3.2

$= 1 - P(S \cap A)$ โดยคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ (iii)

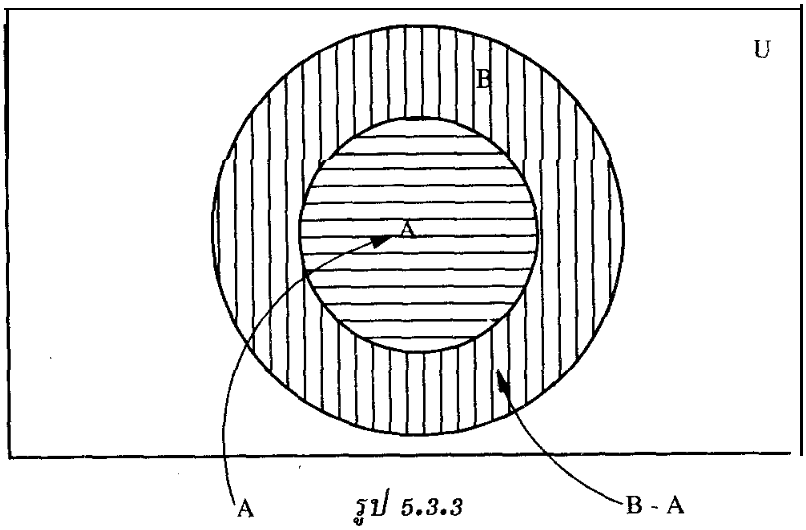
$= 1 - P(A)$ $\because S \cap A = A$

นั่นคือ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

ทฤษฎีบท 5.3.5 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $A \subseteq B$ แล้ว $P(A) \leq P(B)$

พิสูจน์

เพราะว่า $B = A \cup (B-A)$ ดูรูป 5.3.3



รูป 5.3.3

และ $A \cap (B-A) = \phi$

ดังนั้น $P(B) = P(A \cup (B-A))$

$= P(A) + P(B-A)$ โดยคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ *iii*

เพราะฉะนั้น $P(A) \leq P(B)$

ทฤษฎีบท 5.3.6

ถ้าปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S ประกอบด้วยสมาชิก n ตัว โดยที่แต่ละสมาชิกใน S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน แล้วจะได้ว่า $P(A) = \dfrac{\text{จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ A}}{n}$

พิสูจน์

สมมติ ให้ $S = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$

ให้ $p = P(\{x_i\}), i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

เราได้ว่า

$$1 = P(S)$$

$$= P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + P(\{x_3\}) + \ldots + P(\{x_n\})$$

$$= p + p + p \ldots + p \text{ (ทั้งหมด } n \text{ จำนวน)}$$

$$= np$$

ดังนั้น $p = \dfrac{1}{n}$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิก r ตัว คือ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ เราได้

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + \ldots\ldots + P(\{x_r\}) \\
&= p + p + \ldots + p \text{ (ทั้งหมด } r \text{ จำนวน)} \\
&= rp \\
&= r\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left(\because p = \frac{1}{n}\right) \\
& \frac{r}{n}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $p(A) = \dfrac{\text{จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ } A}{n}$

ข้อสังเกต

เราอาจกล่าวได้ว่า

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใดๆ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ } A}{\text{จำนวนสมาชิกในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง } S}$$

ตัวอย่าง 5.3.1 ในการทอดลูกเต๋าที่สมดุลย์หนึ่งลูกหนึ่งครั้ง

1) ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 2 จงหา $P(E_1)$
2) ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่ จงหา $P(E_2)$
3) ให้ E_3 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มต่ำกว่า 5 จงหา $P(E_3)$
4) ให้ E_4 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคี่ จงหา $P(E_4)$
5) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มเป็นเลขคู่หรือที่ต่ำกว่า 5
6) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มเป็นเลขคู่และต่ำกว่า 5
7) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มเป็นเลขคู่และไม่ต่ำกว่า 5
8) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้ม ไม่ต่ำกว่า 5
9) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มเป็นเลขคู่และเลขคี่
10) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มเป็นเลขคู่หรือเลขคี่

วิธีทำ

ในที่นี้ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1) ได้ว่า $E_1 = \{2\}$

$\therefore \quad P(E_1) = \frac{1}{6}$

2) ได้ว่า $E_2 = \{2, 4, 6\}$

$\therefore \quad P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3) ได้ว่า $E_3 = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore \quad P(E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

4) ได้ว่า $E_4 = \{1, 3, 5\}$

$\therefore \quad P(E_4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5) ได้ว่า $E_2 \cup E_3 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$\therefore \quad P(E_2 \cup E_3) = \frac{5}{6}$

6) ได้ว่า $E_2 \cap E_3 = \{2, 4\}$

$\therefore \quad P(E_2 \cap E_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

7) ได้ว่า $E_2 \quad E_3 = \{6\}$

$\therefore \quad P(E_2 - E_3) = \frac{1}{6}$

8) ได้ว่า $\bar{E}_3 = \{5, 6\}$

$\therefore \quad P(\bar{E}_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

9) ได้ว่า $E_2 \cap E_4 = \phi$

$\therefore \quad P(E_2 \cap E_4) = p(\phi) = 0$

10) 96-h $E_2 \cup E_4 = i\ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore \quad P(E_2 \cup E_4) = \frac{6}{6} = 1$

ตัวอย่าง 5.3.2 ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $p(A) = \frac{1}{2}$

$p(B) = \frac{3}{8}$ และ $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ จงหา

1) $P(A \cap B)$	6) $P(A \cup B)$
2) $P(A - B)$	7) $P(A \cap B)$
3) $P(B - A)$	8) $P(B - A)$
4) $P(\bar{A})$	9) $P(A \quad A)$
5) $P(\bar{B})$	10) $P(A \cap \bar{B})$

วิธีทำ

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$

2) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

3) $P(B-A) = P(B) \quad P(A \cap B)$

$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

5) $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

6) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

7) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

8) $P(\bar{B}-\bar{A})$ $= 1 - P(B-A)$

$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

9) $P(A-A)$ $= P(A) - p(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

10) $P(A \cap \bar{B})$ $= P(A-B)$

$= P(A) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

ตัวอย่าง 5.3.3 ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 6 ลูก โดยเป็นลูกบอลสีดำ 3 ลูก , ลูกบอลสีแดง 2 ลูก และลูกบอลสีขาว 1 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลโดยสุ่มมา 1 ลูก

1) จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีดำ

2) จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีดำและลูกบอลสีแดง

3) จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงหรือสีดำ

4) จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบไม่ได้ลูกบอลสีแดงหรือสีดำ

วิธีทำ

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีดำ

และ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดง

1) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2) เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีดำและสีแดงคือเหตุการณ์ $A \cap B$ แต่เมื่อเราสุ่มหยิบลูกบอลมาเพียง 1 ลูก จะได้ทั้งลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีดำ ในขณะเดียวกันไม่ได้ นั่นคือ

$A \cap B = \phi$

$\therefore P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

3) เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงหรือสีดำ คือเหตุการณ์ $A \cup B$

จาก $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}$$

4) เหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้ลูกบอลสีแดงหรือสีดำคือ เหตุการณ์ $\overline{A \cup B}$

จาก $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$= 1 - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

ตัวอย่าง 5.3.4 ในการวิ่งแข่งของคน 3 คน คือ A, B และ C โดยถ้า A มีโอกาสชนะได้เป็น 3 เท่าของ B และ B มีโอกาสชนะเป็น 2 เท่าของ C แล้ว

1) จงหาความน่าจะเป็นที่ A จะเป็นผู้ชนะ คือ $P(A)$

2) จงหาความน่าจะเป็นที่ B จะเป็นผู้ชนะ คือ $P(B)$

3) จงหาความน่าจะเป็นที่ C จะเป็นผู้ชนะ คือ $P(C)$

วิธีทำ

เพราะว่า B มีโอกาสชนะเป็น 2 เท่าของ C

เพราะฉะนั้น $P(B) = 2P(C) = 2p$

และเพราะว่า A มีโอกาสชนะเป็น 3 เท่าของ B

เพราะฉะนั้น $P(A) = 3P(B)$

$$= 3(2p)$$

$$= 6p$$

จากคุณสมบัติเบื้องต้นข้อ *(ii)* จะได้

$$p + 2p + 6p = 1$$

หรือ $9p = 1$

เพราะฉะนั้น $p = \frac{1}{9}$

ดังนั้น

1) $P(A) = 6p = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

2) $P(B) = 2p = \frac{2}{9}$

3) $P(C) = p = \frac{1}{9}$

ตัวอย่าง 5.3.5 ในการสำรวจแม่บ้าน 1,000 คน เกี่ยวกับการซักผ้า ได้ผลดังนี้

	ใช้สบู่	ไม่ใช้สบู่
ใช้ผงซักฟอก	635	235
ไม่ใช้ผงซักฟอก	360	500

ให้ A_1 เป็นผู้ที่ใช้ผงซักฟอก

ให้ A_2 เป็นผู้ที่ไม่ใช้ผงซักฟอก

ให้ B_1 เป็นผู้ที่ใช้สบู่

ให้ B_2 เป็นผู้ที่ไม่ใช่สบู่

ข้อมูลที่ได้จากตาราง เราสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่างๆ ได้ดังนี้

$$P(A_1 \cap B_1) = \frac{635}{1000} = 0.635$$

$$P(A_2 \cap B_1) = \frac{360}{1000} = 0.36$$

$$P(A_1 \cap B_2) = \frac{235}{1000} = 0.235$$

$$P(A_2 \cap B_2) = \frac{500}{1000} = 0.5$$

$$P(A_1) = \frac{635 + 235}{1000} = \frac{870}{1000} = 0.87$$

$$P(A_2) = \frac{360 + 500}{1000} = \frac{860}{1000} = 0.86$$

$$P(B_1) = \frac{635 + 360}{1000} = \frac{995}{1000} = 0.995$$

$$P(B_2) = \frac{235 + 500}{1000} = \frac{735}{1000} = 0.735$$

ตัวอย่าง 5.3.6 ในการทอดลูกเต๋าที่สมดุลย์ 2 ลูก หนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1) ผลบวกของแต้มเป็น 9

2) ลูกเต๋าลูกแรกขึ้นแต้มไม่ต่ำกว่า 5

3) ผลบวกของแต้มเป็น 9 และลูกเต๋าลูกแรกขึ้นแต้มไม่ต่ำกว่า 5

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเป็น 9

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกแรกขึ้นแต้มไม่ต่ำกว่า 5

ให้ (x, y) แทนลูกเต๋าลูกแรกขึ้นแต้ม x และลูกเต๋าลูกที่สองขึ้นแต้ม y

ปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการทอดลูกเต๋า 2 ลูก จะมีสมาชิก 36 ตัว คือ

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

1) เพราะว่า $A = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$

เพราะฉะนั้น $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

2) เพราะว่า $B = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$\therefore P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

3) $A \cap B = \{(5,4), (6,3)\}$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

ตัวอย่าง 5.3.7 นักศึกษาหญิงกลุ่มหนึ่งมี 9 คน ซึ่งในจำนวนนี้มี 3 คนที่มีตาสีน้ำตาล ถ้าสุ่มเลือกนักศึกษาหญิงในกลุ่มนี้มา 2 คน

1) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักศึกษาที่มีตาสีน้ำตาล 1 คน

2) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักศึกษาที่มีตาไม่ใช่สีน้ำตาลทั้ง 2 คน

วิธีทำ

มีนักศึกษาหญิงอยู่ทั้งหมด 9 คน ดังนั้นจะมีวิธีเลือกมาทีละ 2 คน จะมีวิธีเลือก

$$^{9}C_{2} = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = 36\%$$

ดังนั้น ปริภูมิสิ่งตัวอย่างมี 36 สมาชิก

1) ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เลือกได้นักศึกษาหญิงที่มีตาสีน้ำตาลทั้ง 2 คน จะมีวิธีเลือกได้ $^{3}C_{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ วิธี

เพราะฉะนั้น $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

2) ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่เลือกได้นักศึกษาที่มีตาสีน้ำตาล 1 คน จะมีวิธีเลือกได้

$$^{3}C_{1} \bullet {}^{6}C_{1} = \frac{3!}{1!\,2!} \bullet \frac{6!}{1!\,5!}$$

$= 3 \times 6$ วิธี

$= 18$ วิธี

เพราะฉะนั้น $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

3) ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่เลือกไม่ได้นักศึกษาที่มีตาสีน้ำตาลทั้ง 2 คน คือ เลือกจากพวกที่มีตาไม่ใช่สีน้ำตาล ซึ่งมี 6 คน จะมีวิธีเลือก

$$^{6}C_{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15\%$$

เพราะฉะนั้น $P(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

ตัวอย่าง 5.3.8 ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลทั้งหมด10 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลมาครั้งละ 3 ลูก จงหา

1) ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอล สีแดงทั้ง 3 ลูก
2) ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาวทั้ง 3 ลูก
3) ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูก และลูกบอลสีขาว 1 ลูก
4) ความน่าจะเป็นที่จะได้บอลสีแดง 1 ลูกและลูกบอลสีขาว 2 ลูก
5) ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก

วิธีทำ

ปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการหยิบลูกบอล 3 ลูก จากลูกบอล 10 ลูก

จะมีวิธีหยิบได้ $^{10}C_3 = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$ วิธี

1) ให้ A เป็นเหตุการณ์นี้หยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้ง 3 ลูก วิธีที่จะหยิบให้ได้ลูกบอลสีแดง 3 ลูก จากบอลสีแดงทั้งหมด 6 ลูก

จะมีวิธีหยิบ $^{6}C_3 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$ วิธี

เพราะฉะนั้น $P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้ง 3 ลูก เป็น $\frac{1}{6}$

2) ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวทั้ง 3 ลูก วิธีที่จะหยิบลูกบอลสีขาว 3 ลูก จากลูกบอลสีขาวทั้งหมด 4 ลูก

จะมีวิธีหยิบ $^{4}C_3 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$ วิธี

เพราะฉะนั้น $P(B) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวทั้ง 3 ลูก เป็น $\frac{1}{30}$

3) ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูก ลูกบอลสีขาว 1 ลูก

วิธีที่จะหยิบ ลูกบอลสีแดง 2 ลูก จากบอลสีแดงทั้งหมด 6 ลูก เท่ากับ ${}^{6}C_{2} = 15$ วิธี วิธีที่จะหยิบลูกบอลสีขาว 1 ลูก จากบอลสีขาวทั้งหมด 4 ลูก เท่ากับ ${}^{4}C_{1} = 4$ วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีที่หยิบให้ได้บอลแดง 2 ลูก และขาว 1 ลูก คือ $15 \times 4 = 60$ วิธี

$$\text{เพราะฉะนั้น } P(C) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

4) ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีแดง 1 ลูก และ บอลขาว 2 ลูก

วิธีที่จะหยิบได้บอลสีแดง 1 ลูก จากบอลแดงทั้งหมด 6 ลูก เท่ากับ ${}^{6}C_{1} = 6$ วิธี

วิธีที่จะหยิบได้บอลสีขาว 2 ลูก จากบอลสีขาวทั้งหมด 4 ลูก เท่ากับ ${}^{4}C_{2} = 6$ วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีที่หยิบให้ได้บอลแดง 1 ลูก และบอลขาว 2 ลูก

คือ $6 \times 6 = 36$ วิธี

$$\text{เพราะฉะนั้น } P(D) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

5) ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก นั่นคือ เหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีขาว 2 ลูก แดง 1 ลูก กับหยิบได้บอลขาวทั้ง 3 ลูก คือได้เหตุการณ์ D กับเหตุการณ์ B ซึ่งมีจำนวนวิธีรวมกันเป็น $36 + 4 = 40$ วิธี

$$\therefore P(E) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

ตัวอย่าง 5.3.9 ในการแจกไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ ให้กับคน 4 คน ซึ่งได้คนละ 13 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่คนหนึ่งได้ไพ่ในมือเป็นโพดำ 5ใบ, โพแดง 4 ใบ, ดอกจิก 2 ใบ และข้าวหลามตัด 2 ใบ

วิธีทำ

ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง คือ ${}^{52}C_{13}$

ดังนั้น P(โพดำ 5 ใบ, โพแดง 4 ใบ, ดอกจิก 2 ใบ, ข้าวหลามตัด 2 ใบ)

$$= \frac{{}^{13}C_{5} \cdot {}^{13}C_{4} \cdot {}^{13}C_{2} \cdot {}^{13}C_{2}}{{}^{52}C_{13}}$$

$= 0.009$

แบบฝึกหัด 5.3

1. ถ้า $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ เป็นปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง และ E_1, E_2, E_3, E_4 เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $E_1 = \{1,3,5\}$, $E_2 = \{2,4\}$, $E_3 = \{3,4,5,6,7\}$, $E_4 = \{1,2,3\}$ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1.1) $P(E_1)$

1.2) $P(E_2)$

1.3) $P(E_3)$

1.4) $P(E_4)$

1.5) $P(E_1 \cup E_2)$

1.6) $P(E_3 \cup E,)$

1.7) $P(E_1 \cap E_2)$

1.8) $P(E_1 \cap E_3)$

1.9) $P(E_1 - E_3)$

1.10) $P(\overline{E}_4)$

1.11) $P(\overline{E_2 \cap E_4})$

1.12) $P(\overline{E_1 \cup E_4})$

1.13) $P((E_1 \text{ n } E_2) \cap \overline{E}_4))$

1.14) $P(E_1 \cup ((E_2 \cap E,))$

1.15) $P(E_3 \cup E_2)$

2. ในการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง

2.1) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้ม 2

2.2) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มมากกว่า 2

2.3) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มมากกว่า 2 หรือเป็นเลขคี่

2.4) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มมากกว่า 2 และเป็นเลขคี่

2.5) จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่ได้แต้มเป็นเลขคี่

3. จากการสอบถามนักศึกษา 4 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

3.1) จงหาความน่าจะเป็นที่พบว่านักศึกษาเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหงทั้ง 4 คน

3.2) จงหาความน่าจะเป็นที่พบว่านักศึกษาอย่างน้อย 2 คน เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

3.3) จงหาความน่าจะเป็นที่พบว่านักศึกษาอย่างน้อย 1 คน เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

3.4) จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบว่านักศึกษาเพียงคนเดียวเท่านั้น เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

4. นักศึกษากลุ่มหนึ่งมีนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์ 50 คน นักศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ 30 คน นักศึกษาคณะเศรษฐศาสตร์ 35 คน นักศึกษาคณะนิติศาสตร์ 70 คน นักศึกษาคณะมนุษยศาสตร์ 20 คน นักศึกษาคณะบริหารธุรกิจ 45 คน ถ้าสุ่มนักศึกษามา 1 คน

4.1) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้น เป็นนักศึกษาคณะบริหารธุรกิจ

4.2) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้น เป็นนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์

4.3) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้น เป็นนักศึกษาคณะศึกษาศาสตร์

4.4) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้น เป็นนักศึกษาคณะนิติศาสตร์ หรือคณะมนุษยศาสตร์

4.5) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้น จะเป็นนักศึกษาคณะเศรษฐศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์

5. ในกล่องใบหนึ่งมีสลากอยู่ 20 ใบ ซึ่งมีหมายเลข 1 ถึง 20 เขียนกำกับไว้ ถ้าหยิบสลากๆ หนึ่ง โดยการสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สลากที่มีหมายเลขกำกับไว้เป็น

5.1) จำนวนคี่

5.2) จำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว

5.3) จำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว

5.4) จำนวนที่ถอดรากที่สองได้เป็นจำนวนเต็ม

5.5) จำนวนที่หารด้วย 12 ลงตัว

6. ผลการชั่งน้ำหนักของนักเรียน 100 คน มีผลดังตารางต่อไปนี้

น้ำหนัก	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
จำนวนนักเรียน	5	3	8	12	20	15	10	5	13	7	2

ให้หาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะมีน้ำหนักเป็น

6.1) 50

6.2) 45 หรือ 55

6.3) 46 และ 60

6.4) เกินกว่า 50

6.5) น้อยกว่า 50

7. ในการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง จงหาความนั้นจะเป็นของ

7.1) เหตุการณ์ที่ผลบวกบนหน้ารวมกันได้ 5

7.2) เหตุการณ์ที่ได้แต้มบนหน้าของลูกเต๋าทั้งสองลูกเหมือนกัน

7.3) เหตุการณ์ที่ผลคูณของหน้าบนลูกเต๋าทั้งสองเกิน 20

8. ถ้าจะบรรจุคน 2 คน เข้าทำงานจากชาย 5 คน หญิง 5 คน จงหาความน่าจะเป็นที่การบรรจุนั้นได้เป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน

9. ในกล่องใบหนึ่งมีบอลสีแดง 4 ลูก, บอลสีดำ 3 ลูก และบอลสีขาว 2 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลครั้งละ 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของ

9.1) การได้บอลแดงทั้ง 2 ลูก

9.2) การได้บอลดำทั้ง 2 ลูก

9.3) การได้บอลขาวทั้ง 2 ลูก

9.4) การได้บอลแดงและขาวอย่างละ 1 ลูก

9.5) การได้บอลแดงและดำอย่างละ 1 ลูก

10. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3$ และ $P(A \cap B) = 0.1$ จงหา

10.1) $P(A \cup B)$

10.2) $P(A - B)$

10.3) $P(\bar{B})$

10.4) $P(\overline{A \cup B})$

11. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ ซึ่ง $P(A \cup B) = \frac{5}{8}, P(\bar{B}) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ จงหา

11.1) $P(B)$

11.2) $P(A)$

11.3) $P(\bar{A})$

11.4) $P(A \cap \bar{B})$

11.5) $P(B \cap \bar{A})$

11.6) $P(\overline{A \cap B})$

12. นักเรียนชายห้องหนึ่งมี 30 คน ในจำนวนนี้เป็นนักฟุตบอล 20 คน, นักบาสเกตบอล 15 คน และเป็นนักบาสเกตบอลหรือนักฟุตบอล 25 คน ถ้าสุ่มเลือกมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

12.1) เป็นทั้งนักบาสเกตบอลและนักฟุตบอล

12.2) ไม่เป็นนักบาสเกตบอลและนักฟุตบอล

12.3) เป็นนักฟุตบอลอย่างเดียวโดยไม่เป็นนักบาสเกตบอล

13. ในกลุ่มนักเรียน 100 คน เป็นนักเรียนหญิง 70 คน, เป็นผู้ที่ไว้ผมยาว 50 คน, เป็นนักกีฬา 35 คน, เป็นนักเรียนหญิงและไว้ผมยาว 30 คน เป็นนักเรียนหญิงและเป็นนักกีฬา 15 คน เป็นนักกีฬา และไว้ผมยาว 10 คน เป็นนักกีฬาหญิงที่ไว้ผมยาว 5 คน ถ้าสุ่มนักเรียน ออกมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

1.3.1) เป็นนักเรียนหญิงและไม่เป็นนักกีฬา

13.2) เป็นนักเรียนหญิงและไม่ไว้ผมยาว

13.3) เป็นผู้ที่ไว้ผมยาวแต่ไม่เป็นหญิง

13.4) เป็นนักเรียนหญิงหรือไว้ผมยาว

1.3.5) เป็นนักเรียนหญิงหรือเป็นนักกีฬา

14. ในถุงใบหนึ่งมีบัตรเบอร์ 1,2,3,4,5,6 เบอร์ละ 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบบัตรมา 2 ใบ พร้อม ๆ กัน ผลรวมของเบอร์บนบัตรทั้งสองเป็น 7

15. ในการสุ่มหยิบไพ่ 3 ใบ พร้อม ๆ กัน จากไพ่สำรับหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่ข้าวหลามตัด 3 ใบ

16. ในเกมส์การแข่งขันชนิดหนึ่งปรากฏว่า นาย ก. มีโอกาสชนะเป็น 2 เท่าของนาย ข. นาย ข. มีโอกาสชนะเป็น 3 เท่าของนาย ค. นาย ค. มีโอกาสชนะเท่ากับ นาย ง. จงหาความน่าจะเป็นที่ นาย ก. จะชนะ ,นาย ข. จะชนะ, นาย ค. จะชนะ และนาย ง จะชนะ

17. ในกล่องใบหนึ่งมีของ 10 สิ่ง มีของชำรุด 4 สิ่ง สุ่มหยิบของสองสิ่ง ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ของชำรุดทั้งคู่ และ B เป็นเหตุการณ์นี้หยิบได้ของชำรุดอย่างน้อย 1 สิ่ง จงหา $P(A)$, $P(\bar{A})$ และ $P(B)$

18. มีสามี ภรรยา อยู่ 10 คู่ รวมกันอยู่ในห้อง ๆ หนึ่ง

18.1) ถ้าเลือกคนมา 2 คน โดยสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่คนทั้งสองเป็นสามีภรรยากัน

18.2) ถ้าเลือกคนมา 2 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ได้เป็นชายและหญิง อย่างละ 1 คน

18.3) ถ้าเลือกมา 4 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เป็นสามีภรรยากัน 2 คู่

19. ในการทอดลูกเต๋าที่สมดุลย์ 6 ลูก หนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าออกครบทุกหน้า

5.4 ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข (Conditional probability)

ในการทดลองเชิงสุ่ม บางครั้งเราอาจจะสนใจเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์บางอย่างภายใต้เงื่อนไขของเหตุการณ์อีกอย่างหนึ่ง ซึ่งได้เกิดขึ้นแล้ว เช่น มีเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ คือ เหตุการณ์ E กับเหตุการณ์ F โดยเหตุการณ์ E ได้เกิดขึ้นแล้ว เราจะมีวิธีการคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ F ภายใต้ผลของเหตุการณ์ E ที่ได้เกิดขึ้นแล้วนั้นอย่างไร นั่นคือ จะหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ F ภายใต้เงื่อนไขว่าเหตุการณ์ E ได้เกิดขึ้นแล้ว เราจะเขียนแทนความน่าจะเป็นของ F ภายใต้เงื่อนไขว่า E ได้เกิดขึ้นแล้วด้วย P(F/E) (อ่านว่า conditional probability of F given E)

ตัวอย่าง 5.4.1 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก มี $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าได้แต้มคู่

F เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าได้แต้มมากกว่า 3

จะได้ว่าเหตุการณ์ $E = \{2,4,6,\}$, $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

และเหตุการณ์ $F = \{4,5,6\}$, $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

สมมติว่ามีคนบอกเราว่า เหตุการณ์ E ได้เกิดขึ้นแล้ว เราก็เพียงแต่พิจารณาผลลัพธ์ในเหตุการณ์ E เท่านั้น เพราะผลลัพธ์จะเป็นอื่นนอกจากสมาชิกในเซต E ไม่ได้ จากนั้นเราก็ดูต่อไปว่า ใน E มีผลลัพธ์ใดบ้างที่จะทำให้เกิดเหตุการณ์ F จะเห็นว่า ในสมาชิกของเหตุการณ์ E มีอยู่ 2 ตัว ที่จะทำให้เกิดเหตุการณ์ F คือ $\{4,6\}$ นั่นคือ จากสมาชิก ทั้ง 3 ตัว ใน E มีอยู่ 2 ตัว ที่จะทำให้เกิดเหตุการณ์ F

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของ F ภายใต้เงื่อนไขการเกิดของ E หรือ P(F/E) จะเท่ากับ $\frac{2}{3}$

เราสังเกตต่อไปได้ว่า เซตของสมาชิกใน E ที่จะทำให้เกิดเหตุการณ์ F ก็คือ $E \cap F$ แต่ความน่าจะเป็นไม่ได้คำนวณมาจาก $P(E \cap F)$ เท่านั้น ทั้งนี้เพราะว่า $P(E \cap F)$ เป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $E \cap F$ ของปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S โดยมิได้ระบุเงื่อนไขว่า E ได้เกิดขึ้นแล้ว หากกำหนดเงื่อนไขว่า E ได้เกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข P(F/E) จะคำนวณได้โดยปรับความน่าจะเป็น $P(E \cap F)$ ให้เข้ากับปริภูมิสิ่งตัวอย่างซึ่งพิจารณาเฉพาะส่วนที่อยู่ใน E เท่านั้น เมื่อปรับแล้ว โดยทั่ว ๆ ไป ความน่าจะเป็นของ F ภายใต้เงื่อนไข E สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \quad \text{เมื่อ} \quad P(E) \neq 0$$

หรือกล่าวได้ว่า $P(F/E) = \dfrac{\text{จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ } E \cap F}{\text{จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ } E}$

จากตัวอย่าง 5.4.1

$E = \{2,4,6\}$, $F = \{4,5,6\}$

ดังนั้น $E \cap F = \{4,6\}$

เพราะฉะนั้น $P(F/E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)}$

$$= \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

ตัวอย่าง 5.4.2 ในการทอดลูกเต๋าที่สมดุลย์ 2 ลูก ถ้าผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าที่ออกเป็น 6 แล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกหนึ่งออกแต้ม 5

วิธีทำ ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่หน้าลูกเต๋าที่ออกมีผลรวมของแต้มเป็น 6

F เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกหนึ่งออกแต้ม 5

ในที่นี้จะหา $P(F/E)$

ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ปริภูมิสิ่งตัวอย่างมีสมาชิกจำนวน 36 ตัว

และ $E = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$\therefore P(E) = \dfrac{5}{36}$

$F = \{(1,5), (2,5)\ (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\ (5,6)\}$

$\therefore E \cap F = \{(1,5), (5,1)\}$

$P(E \cap F) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

จาก $P(F/E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)}$

$$= \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore P(F/E) = \frac{2}{5}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกใดลูกหนึ่งจะขึ้น 5 เมื่อผลรวมของแต้มบนหน้าของลูกเต๋าเป็น 6 คือ $\frac{2}{5}$

ตัวอย่าง 5.4.3 ให้ A กับ B เป็นเหตุการณ์ ซึ่ง $P(A) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ และ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ จงหา

1) $P(A/B)$
2) $P(B/A)$
3) $P(A \cup B)$
4) $P(B/\bar{A})$

วิธีทำ

1) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

2) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$= \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$$

3) $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

4) $P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$

โดย $P(B \cap \bar{A}) = P(B-A)$

$$= P(B) - P(B \cap A)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

และ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P(B/\bar{A}) = \frac{1/4}{2/3} = \frac{3}{8}$$

ตัวอย่าง 5.4.4 นักเรียนห้องหนึ่งของโรงเรียนแห่งหนึ่งปรากฏว่า 40% เป็นผู้ชาย 25% เป็นนักกีฬา 50% เป็นนักเรียนชายหรือเป็นนักกีฬา ถ้าสุ่มเลือกนักเรียนมา 1 คน

1) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เป็นนักเรียนชายและเป็นนักกีฬา

2) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เป็นนักกีฬา ถ้ารู้แล้วว่านักเรียนคนนั้นเป็นนักเรียนชาย

3) ถ้านักเรียนคนที่สุ่มได้มาเป็นนักกีฬาแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักเรียนชาย

4) ถ้านักเรียนที่สุ่มได้มาไม่ใช่นักกีฬาแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักเรียนชาย

วิธีทำ ให้ A เป็นเซตของนักเรียนชาย

B เป็นเซตของนักเรียนที่เป็นนักกีฬา

$\therefore$ จากโจทย์ได้ว่า $P(A) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$$P(B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

1) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$= \frac{40}{100} + \frac{25}{100} - \frac{50}{100}$$

$$= \frac{3}{20}$$

2) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{3/20}{2/5} = \frac{3}{8}$

3) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{3/20}{1/4} = \frac{3}{5}$

4) $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$

$\because \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A-B)$

$= P(A)-P(A \cap B)$

$= \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{1}{4}$

และ $P(B) = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad P(A/\bar{B}) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 5.4.5 ครอบครัวหนึ่งมีลูก 3 คน หากเป็นที่รู้กันว่า ครอบครัวนี้มีลูกหัวปีเป็นชายแล้ว ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้จะมีลูกชาย 2 คน เป็นเท่าไร

วิธีทำ ปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการมีลูก 3 คน คือ

S = { ชชช, ชชญ, ชญช, ชญญ, ญชช, ญชญ, ญญช, ญญญ }

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ลูกชายเป็นคนหัวปี คือ

A = { ชชช, ชชญ, ชญช, ชญญ }

และ $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ครอบครัวมีลูกชาย 2 คน คือ

B = { ชชญ, ชญช, ญชช } , $P(B) = \frac{3}{8}$

และ $A \cap B$ = { ชชญ, ชญช }

$\therefore P(AnB) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

จาก $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$= \frac{2/8}{1/2} = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ หากรู้ว่าครอบครัวหนึ่งมีลูก 3 คน และคนหัวปีเป็นชายแล้ว ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้จะมีลูกชาย 2 คน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ข้อสังเกต ในทางกลับกัน จากครอบครัวที่มีลูก 3 คนนี้ และรู้ว่า 2 คนในจำนวนนี้เป็นชายแล้ว ความน่าจะเป็นที่คนหัวปีจะเป็นชายเท่ากับ

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3}$$

ตัวอย่าง 5.4.6 ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลทั้งหมด 10 ลูก เป็นบอลสีแดง 6 ลูก, ขาว 4 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลออกจากกล่อง 2 ครั้ง ครั้งละ 1 ลูก หยิบแล้วไม่ใส่ลูกบอลที่หยิบออกมากลับคืนลงไปในกล่องอีก

1) จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้บอลสีแดงทั้ง 2 ครั้ง
2) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้บอลสีขาวทั้ง 2 ครั้ง

วิธีทำ 1) ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดง

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลลูกที่สองเป็นสีแดง

เหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณก็คือ $A \cap B$

จาก $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A)$$

โดย P(A) คือความน่าจะเป็นที่หยิบบอลลูกแรกเป็นสีแดงเท่ากับ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

P(B/A) คือความน่าจะเป็นที่หยิบบอลลูกที่สองเป็นสีแดงเมื่อกำหนดว่า หยิบลูกแรกได้สีแดงแล้วและไม่ใส่คืน ซึ่งเท่ากับ $\frac{5}{9}$

(เพราะว่า ครั้งแรกหยิบสีแดงไปหนึ่งลูกแล้วจึงเหลือบอลอีก 5 ลูก จากบอล 9 ลูก)

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{3}$$

2) ในทำนองเดียวกัน

ถ้าให้ E เป็นเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลลูกแรกได้เป็นสีขาว

F เป็นเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลลูกที่สองได้เป็นสีขาว

เราต้องการหา $P(E \cap F)$

$$\therefore \quad P(E \cap F) = P(F/E) \,.\, P(E) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{15}$$

ทฤษฎีบท 5.4.1 ถ้า A, B, C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง แล้วได้ว่า

$$P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$$

พิสูจน์

$$P(A \cup B/C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A\cap C)}{P(C)} + \frac{P(B\cap C)}{P(C)} - \frac{P((A\cap B)\cap C)}{P(C)}$$

$$= P(A/C) + P(B/C) \bullet P((A\cap B)/C)$$

บทแทรก $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$

พิสูจน์ $1 = P(S/B)$

$= P(A\cup\bar{A}/B)$

$= P(A/B) + P(\bar{A}/B) - P(A\cap\bar{A}/B)$ โดย ท.บ. 5.4.1

แต่ $P(A\cap\bar{A}/B) = 0$

เพราะฉะนั้น $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$

ทฤษฎีบท 5.4.2 ถ้า A_1, A_2, A_3 เป็นเหตุการณ์ใดๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง แล้ว

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1/A_2\cap A_3) . P(A_2/A_3) . P(A_3)$$

หรือ $P(A_1) . P(A_2/A_1) . P(A_3/A_2\cap A_1)$

พิสูจน์ $P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1/A_2\cap A_3) . P(A_2\cap A_3)$

$= P(A_1/A_2\cap A_3) . P(A_2/A_3) . P(A_3)$

หรือ $P(A_3\cap A_2\cap A_1) = P(A_3/A_2\cap A_1) . P(A_2\cap A_1)$

$= P(A_3/A_2\cap A_1) . P(A_2/A_1) P(A_1)$

$= P(A_1) P(A_2/A_1) . P(A_3/A_2\cap A_1)$

บทแทรก

ถ้า $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่งแล้ว ย่อมได้ว่า

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k) = P(A_1/A_2\cap\ldots\cap A_k) . P(A_2/A_3\cap\ldots\ldots A_k) \ldots\ldots P(A_{k-1}/A_k) . P(A_k)$$

หรือ $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\cap A_k) = P(A_1) . P(A_2/A_1) . P(A_3/A_1\cap A_2) \ldots\ldots P(A_k/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})$

ตัวอย่าง 5.4.7 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 10 ลูก เป็นบอลสีแดง 6 ลูก เป็นบอลสีขาว 4 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่อง 4 ครั้ง ครั้งละ 1 ลูก หยิบแล้วไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้บอลสีแดงทั้ง 4 ลูก

วิธีทำ ให้ A_i เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้บอลสีแดงในครั้งที่ i

$$\therefore\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) . P(A_2/A_1) . P(A_3/A_1 \cap A_2) . P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{14}$$

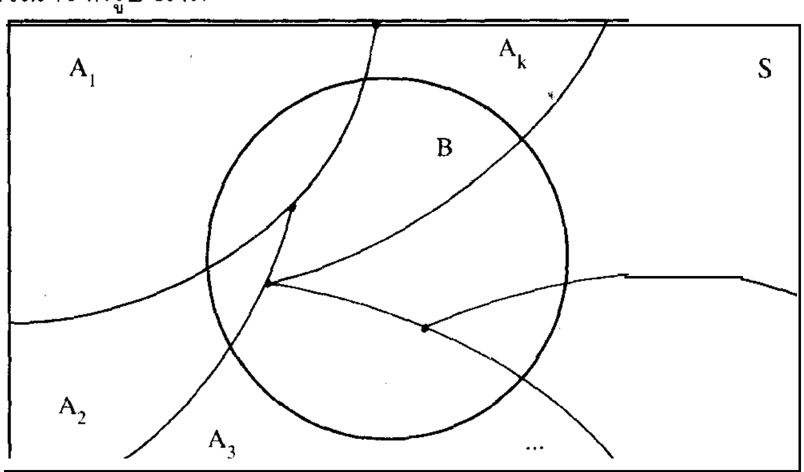
ทฤษฎีบท 5.4.3 ให้ $A_1, A_2, \ldots A_k$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน และ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = S$ โดยแต่ละ $A_i \neq \phi$ ถ้า B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ (ทั้ง A_i และ B ต่างก็เป็นเหตุการณ์ของการทดลองเชิงสุ่มเดียวกัน) แล้วจะได้ว่า

$$P(B) = P(A_1) . P(B/A_1) + P(A_2) . P(B/A_2) + \ldots + P(A_k) . P(B/A_k)$$

นั่นคือ $$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

พิสูจน์

พิจารณาจากรูป 5.4.1



รูป 5.4.1

จากรูป 5.4.1 จะเห็นว่า

เมื่อ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

$(B \cap A_1), (B \cap A_2), \ldots, (B \cap A_k)$ ย่อมเป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

และ $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_k)$

$$\therefore\ P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_k))$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_k)$$

$$= P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_k) \cdot P(B/A_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

ตัวอย่าง 5.4.8 มีกล่องอยู่ 4 ใบ ซึ่งแต่ละกล่องบรรจุหลอดไฟไว้ดังนี้

กล่องที่ 1 มีหลอดไฟ 15 หลอด เป็นหลอดเสีย 2 หลอด

กล่องที่ 2 มีหลอดไฟ 12 หลอด เป็นหลอดเสีย 5 หลอด

กล่องที่ 3 มีหลอดไฟ 25 หลอด เป็นหลอดเสีย 10 หลอด

กล่องที่ 4 มีหลอดไฟ 9 หลอด เป็นหลอดเสีย 1 หลอด

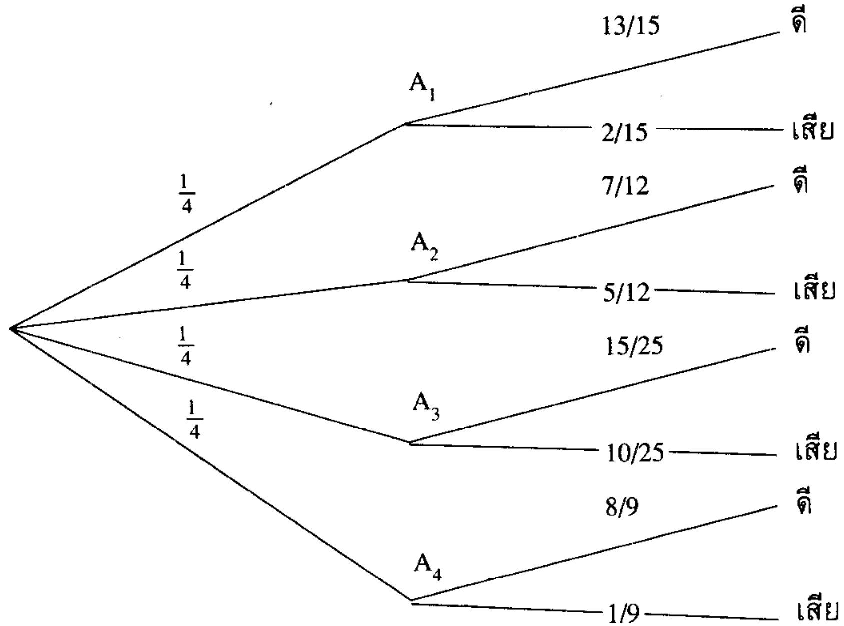
ถ้าเลือกกล่องโดยสุ่มมา 1 กล่อง แล้วสุ่มหยิบหลอดไฟมา 1 หลอด จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดไฟที่ได้จะเป็นหลอดเสีย

วิธีทำ การทดลองเชิงสุ่มนี้มี 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นแรก เลือกกล่องมา 1 กล่อง จากกล่องทั้งหมด 4 กล่อง

ขั้นที่สอง เลือกหลอดไฟมา 1 หลอด ซึ่งอาจจะได้หลอดดีหรือเสีย

ซึ่งสามารถเขียนแผนภาพแสดงความน่าจะเป็นของแต่ละขั้นตอนได้ดังนี้



ถ้าให้ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หลอดไฟเสีย

A_i เป็นเหตุการณ์ที่เลือกได้กล่องที่ i

$\therefore$ $P(B/A_i)$ เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หลอดไฟเสียจากกล่องที่ i

$$\therefore\ P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3) + P(A_4).P(B/A_4)$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{2}{15}\right) + \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{5}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{10}{25}\right) + \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{1}{9}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{15} + \tfrac{5}{12} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{\tfrac{1}{4}\,(24+75+72+20)}{180}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{191}{180}\right)$$

$$= \frac{191}{720}$$

ทฤษฎีบท 5.4.4 ทฤษฎีของเบย์ (Bay's Theorem)

ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน และ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = S$

B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ซึ่งทั้ง B และ A_i เป็นเหตุการณ์ของการทดลองเชิงสุ่มเดียวกันแล้วจะได้ว่า

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \ldots + P(A_k)\,P(B/A_k)}$$

$$= \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)\;P(B/A_i)}$$

พิสูจน์

เพราะว่า $\quad P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

และ $\quad P(B/A_i) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$

ดังนั้น $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i) \,.\, P(B/A_i)}{P(B)}$

แต่ $B = B \cap S$

และ $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$

$\therefore\ B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)$

$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_k)$

แต่ $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_k$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

ดังนั้น
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_k)$$
$$= P(A_1) \,.\, P(B/A_1) + P(A_2)\, P(B/A_2) + \ldots + P(A_k) \,.\, P(B/A_k)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i)\ P(B/A_i)$$

เพราะฉะนั้น
$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\, P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)\ P(B/A_i)}$$

ตัวอย่าง 5.4.9 มีกล่องอยู่ 4 ใบ ซึ่งแต่ละใบกล่องบรรจุหลอดไฟไว้ดังนี้

กล่องที่ 1 มีหลอดไฟ 15 หลอด เป็นหลอดเสีย 2 หลอด

กล่องที่ 2 มีหลอดไฟ 12 หลอด เป็นหลอดเสีย 5 หลอด

กล่องที่ 3 มีหลอดไฟ 25 หลอด เป็นหลอดเสีย 10 หลอด

กล่องที่ 4 มีหลอดไฟ 9 หลอด เป็นหลอดเสีย 1 หลอด

ถ้าเลือกกล่องโดยสุ่มมา 1 กล่อง แล้วสุ่มหยิบหลอดไฟจากกล่องนั้นมา 1 หลอด หากปรากฏว่าหลอดไฟที่สุ่มหยิบมานั้นเป็นหลอดเสียแล้ว ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟหลอดนี้จะถูกหยิบมาจากกล่องที่ 1, 2, 3 และ 4 เป็นเท่าไร

วิธีทำ ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้หลอดไฟเสีย

A_i เป็นเหตุการณ์ที่หยิบหลอดไฟจากกล่องที่ i

ดังนั้นจึงได้ว่า $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$

$P(B/A_1) = \frac{2}{15}$, $P(B/A_2) = \frac{5}{12}$, $P(B/A_3) = \frac{10}{25}$, $P(B/A_4) = \frac{1}{9}$

โดย ท.บ. 5.4.4 ทฤษฎีของเบย์ได้ว่า

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\,P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)\;P(B/A_i)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{4})\,(\frac{2}{15})}{(\frac{2}{15} + \frac{5}{12} + \frac{10}{25} + \frac{1}{9})\;(\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{\frac{2}{63}}{\frac{191}{720}}$$

$$= \frac{24}{191}$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)\,P(B/A_i)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{4})\,(\frac{5}{12})}{\frac{191}{720}}$$

$$= \frac{75}{191}$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)\,P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)\,P(B/A_i)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{4})\,(\frac{10}{25})}{(\frac{191}{720})}$$

$$= \frac{72}{191}$$

และ $$P(A_4/B) = \frac{P(A_4)\,P(B/A_4)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)\,P(B/A_i)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{4})(\frac{1}{9})}{\frac{191}{720}}$$

$$= \frac{20}{191}$$

นั่นคือ หากเราทราบว่า หลอดไฟที่สุ่มหยิบออกมาเป็นหลอดไฟที่เสียแล้ว ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟหลอดนี้ จะถูกหยิบมาจากกล่องที่ 1, 2, 3, และ 4 เป็น $\frac{24}{191}$, $\frac{75}{191}$, $\frac{72}{191}$ และ $\frac{20}{191}$ ตามลำดับ

ข้อสังเกต

จากตัวอย่าง 5.4.9 นี้แสดงให้เห็นประโยชน์ของการทราบผลของการทดลองที่นำมาใช้ในการทำนาย เช่น ถ้าเราต้องการทำนายว่ากล่องที่เลือกออกมานั้น เป็นกล่องหมายเลขที่เท่าไร เนื่องจากการเลือกกล่องเป็นไปโดยการสุ่มโอกาสที่กล่องใดๆ จะถูกเลือกขึ้นมาเท่ากับ $\frac{1}{4}$ การทำนายว่าเป็นหีบใบใดก็ตาม ผู้ทำนายก็มีโอกาสทายถูกเพียง $\frac{1}{4}$เท่านั้น แต่หลังจากสุ่มหยิบหลอดไฟออกจากกล่องและทราบผลแล้วว่าเป็นหลอดเสีย ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟหลอดนี้จะมาจากกล่องต่างๆ จะเปลี่ยนไปคือ ไม่เท่ากับ $\frac{1}{4}$ เช่น ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟจะถูกหยิบมาจากกล่องใบที่ 2 จะสูงถึง $\frac{75}{191}$ดังนั้น ในกรณีนี้หากทำนายว่ากล่องใบที่เลือกออกมาเป็นกล่องใบที่ 2 เรามีโอกาสทายถูกมากกว่า คือผลการทดลองเพิ่มโอกาสที่จะทายถูกจาก $\frac{1}{4}$เป็น $\frac{75}{191}$นั่นแสดงว่า การใช้ข้อมูลข่าวสาร เพื่อช่วยในการตัดสินใจ ภายใต้สภาวะการณ์ที่ไม่แน่นอน โดยข้อมูลข่าวสารที่ได้จะเพิ่มโอกาสให้เราทำการตัดสินใจได้อย่างถูกต้องมากขึ้น

แบบฝึกหัด 5.4

1. ถ้าปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการทดลองสุ่มคือ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และเหตุการณ์ คือ

$E_1 = \{1,3,5\}$, $E_2 = \{2,4\}$, $E_3 = \{3,4,5,6\}$, $E_4 = \{1,2,3\}$ จงหาความน่าจะเป็นของ

1.1) $P(E_1 \cap E_4)$

1.2) $P(E_4/E_1)$

1.3) $P(E_1/E_4)$

1.4) $P(E_3 \cap E_4)$

1.5) $P(E_3/E_4)$

1.6) $P(E_3 \cap \overline{E}_4)$

1.7) $P(E_3/\overline{E}_4)$

1.8) $P(E_4/E_4)$

1.9) $P(E_1 \cap E_3/E_4)$

1.10) $P(E_3/E_1 \cap E_4)$

2. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, $P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

จงหา

2.1) $P(A/B)$

2.2) $P(B/A)$

2.3) $P(A/\overline{B})$

2.4) $P(B/\overline{A})$

3. จากการสอบถามนักศึกษา 4 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่มีนักศึกษา 2 คน เท่านั้นที่เป็นสมาชิก

B เป็นเหตุการณ์ที่มีนักศึกษาอย่างน้อย 2 คน เป็นสมาชิก

จงหา

3.1) $P(A \cap B)$

3.2) $P(A/B)$

3.3) $P(B/A)$

3.4) $P(A/\overline{B})$

3.5) $P(B/\overline{A})$

3.6) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

3.7) $P(\overline{A} / \overline{B})$

3.8) $P(\overline{B}/\overline{A})$

4. ในกล่องใบหนึ่งมีสลากอยู่ 10 ใบ ซึ่งมีหมายเลข 1 ถึง 10 เขียนกำกับอยู่ ถ้าสุ่มหยิบสลากมา 1 ใบ

4.1) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สลากหมายเลขมากกว่า 5 ถ้ากำหนดว่าสุ่มได้สลากที่เป็นเลขคี่

4.2) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้สลากเป็นเลขคี่ เมื่อกำหนดว่าสลากที่สุ่มได้มานั้นมีหมายเลขมากกว่า 5

4.3) ถ้าสลากที่สุ่มมานั้นมีหมายเลขที่หารด้วย 4 ลงตัว จงหาความน่าจะเป็นที่ได้สลากเป็นหมายเลขคู่

4.4) ถ้าสลากที่สุ่มมาได้นั้น เป็นเลขคู่แล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จะหารด้วย 5 ลงตัว

5. นักเรียนชายห้องหนึ่งมี 30 คน, ในจำนวนนี้เป็นนักฟุตบอล 20 คน เป็นนักบาสเกต-บอล 15 คน และเป็นนักฟุตบอล หรือบาสเกตบอล 25 คน ถ้าสุ่มนักเรียนมา 1 คน

5.1) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้ที่เป็นทั้งนักบาสเกตบอล และนักฟุตบอล

5.2) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักบาสเกตบอล เมื่อทราบว่าเขาเป็นนักฟุตบอล

5.3) ถ้ารู้แล้วว่านักเรียนคนนั้นเป็นนักบาสเกตบอล จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะเป็นนักฟุตบอลด้วย

5.4) ถ้าเขาไม่ได้เป็นนักฟุตบอลแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะเป็นนักบาส-เกตบอล

6. ในกลุ่มของนักเรียน 100 คน ซึ่งในจำนวนนี้ เป็นนักเรียนหญิง 70 คน, เป็นผู้ที่ไว้ผมยาว 50 คน, เป็นนักกีฬา 35 คน, เป็นนักเรียนหญิงและไว้ผมยาว 30 คน, เป็นนักกีฬาหญิง 15 คน, เป็นนักกีฬาและไว้ผมยาว 10 คน เป็นนักกีฬาหญิงที่ไว้ผมยาว 5 คน ถ้าสุ่มเลือกนักเรียนออกมา 1 คน

6.1) ถ้าได้เป็นนักเรียนหญิงแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักกีฬา

6.2) ถ้าได้เป็นนักเรียนหญิงแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นผู้ไว้ผมยาว

6.3) ถ้าเป็นนักกีฬาแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นหญิง

6.4) ถ้าเป็นผู้ที่ไว้ผมยาวแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักกีฬา

6.5) ถ้าเป็นผู้หญิงที่ไว้ผมยาวแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่เป็นนักกีฬา

6.6) ถ้าเป็นนักกีฬาและไว้ผมยาวแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่เป็นหญิง

6.7) ถ้าเป็นนักกีฬาแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่เป็นหญิง และไว้ผมยาว

6.8) ถ้าเป็นหญิงแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักกีฬาและไว้ผมยาว

6.9) ถ้าเป็นผู้ที่ไว้ผมยาวแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่เป็นนักกีฬาหญิง

7. ในกล่องใบหนึ่งมีบอลสีขาว 3 ลูก สีแดง 2 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลมา 2 ลูก ปรากฏว่าเป็นลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ได้เป็นลูกบอลสีแดงทั้ง 2 ลูก

8. เครื่องจักร A, B และ C ผลิตสิ่งของในวันหนึ่ง ๆ ได้ 30%, 45% และ 25% ของผลิตภัณฑ์ทั้งหมดตามลำดับ สมมติว่าความน่าจะเป็นที่เครื่องจักร A, B และ C ผลิตสิ่งของออกมา ชำรุดเป็น 0.05, 0.01 และ 0.1 ตามลำดับ ถ้าสุ่มของที่ผลิตได้จากเครื่องทั้งสามนี้มา 1 ชิ้น ปรากฏว่าเป็นสิ่งของที่ชำรุด จงหาความน่าจะเป็นที่สิ่งของนั้นผลิตมาจาก เครื่องจักร A เครื่องจักร B และเครื่องจักร C

9. บริษัทผลิตยางรถยนต์มีโรงงานผลิต 4 แห่ง คือ โรงงาน A,B,C และ D ในการผลิตแต่ละครั้ง โรงงานแต่ละโรงจะผลิตยางรถยนต์คิดเป็น 25%, 30%, 10%, 35% ของผลผลิตทั้งหมดตามลำดับ และยางที่ผลิตได้จากแต่ละโรงงานจะมีคุณภาพต่ำกว่ามาตรฐาน 2%, 3%, 4% และ 2% ตามลำดับ.

9.1) จงหาความน่าจะเป็นที่บริษัทผลิตได้ยางที่มีคุณภาพต่ำกว่ามาตรฐาน

9.2) จงหาความน่าจะเป็นที่บริษัทผลิตได้ยางที่มีคุณภาพได้มาตรฐาน

9.3) จงหาความน่าจะเป็นที่ยางนั้นจะผลิตมาจากโรงงาน C เมื่อสุ่มยางมาตรวจ 1 เส้น และพบว่า เป็นยางที่มีคุณภาพต่ำกว่ามาตรฐาน

9.4) ถ้าสุ่มยางมาตรวจ 1 เส้น แล้วพบว่าเป็นยางที่มีคุณภาพต่ำกว่ามาตรฐาน จงหาความน่าจะเป็นที่เป็นยางที่ผลิตโดยโรงงาน B

10. ในกล่องใบหนึ่งมีเหรียญอยู่ 5 เหรียญ เหรียญที่ 1เป็นเหรียญที่เที่ยงตรง, เหรียญที่ 2 เป็นเหรียญที่มีหน้าหัวทั้ง 2 หน้า เหรียญที่ 3, 4 และ 5 เป็นเหรียญที่ถูกถ่วงน้ำหนักโดยได้ความน่าจะเป็นที่จะเกิดหัวเป็น $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$และ $\frac{1}{5}$ตามลำดับ ถ้าสุ่มเหรียญมา 1 เหรียญ แล้วโยนเหรียญอันนั้น

10.1) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญปรากฏด้านหัวขึ้นมา

10.2) ถ้าเหรียญที่หงายนั้นปรากฏเป็นด้านหัวขึ้นมาแล้ว ความน่าจะเป็นที่เหรียญนั้นจะเป็นเหรียญอันที่ 1 เป็นเท่าไร

5.5 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

สำหรับ A และ B ซึ่งเป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปแล้ว P(A/B) กับ P(A) จะมีค่าไม่เท่ากัน แต่ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent event) แล้วจะได้ว่า P(A/B) = P(A)

นั่นคือ เราจะกล่าวว่า เหตุการณ์ A จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ B หากการที่เราทราบ ว่าเหตุการณ์ B เกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นของ A ภายใต้เงื่อนไขการเกิดของ B ไม่ได้ทำให้ ความน่าจะเป็นเดิมของ A เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมเลย นั่นหมายความว่าการเกิดของเหตุการณ์หนึ่ง ไม่มีผลกระทบต่อการเกิดของอีกเหตุการณ์หนึ่ง ต่อไปนี้ เราสนใจที่จะศึกษา ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันเหล่านี้

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว จะได้ว่า

$$P(A/B) = P(A)$$

แต่ $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

จึงกล่าวได้ว่า สำหรับเหตุการณ์ A, B ใด ๆ ที่เป็นอิสระต่อกันจะได้ว่า

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไป จะกล่าวได้ว่า

เหตุการณ์ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ จะเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\ P(A_j), \qquad 1 \le i \le j \le n$$

$$P(A_i \ n\ A,\ n\ A_k) = P(A_i)\ P(A_j)\ P(A_k), \qquad 1 \le i \le j \le k \le n$$

-------------------- - ------------------------ --------------------------

-------------------- - ------------------------ --------------------------

-------------------- ------------------------

$$P(A_1 \cap A,\ n\ n\ A_n) = P(A_1).P(A_2)P(A_3)\ldots\ldots..P(A_n)$$

ตัวอย่าง 5.5.1 ในการทอดลูกเต๋าที่สมดุลย์ 2 ลูก

ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$

$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$

$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$

$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$

$(5,1),(5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$

$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกแรกออกแต้ม 3

$\therefore\ A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$ และ $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

และ B เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเป็นเลขคี่

$\therefore\ B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6)$

$(4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5)\}$

และ $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

เราได้ว่า $A \cap B = \{(3,2), (3,4), (3,6)\}$

และ $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

จะเห็นว่าในกรณีนี้

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6} = P(A)$$

ดังนั้น A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

อนึ่งหากพิจารณา P(B/A) บ้างจะได้ว่า

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{1/12}{1/6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= P(B)$$

นั่นแสดงว่า B กับ A ก็เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันด้วย และเราได้ว่า

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12} = P(A).P(B)$$

ตัวอย่าง 5.5.2 ในการทอดลูกเต๋าที่สมดุลย์หนึ่งลูกหนึ่งครั้ง มีปริภูมิสิ่งตัวอย่าง

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 2 หรือแต้ม 4

$\therefore \quad A = \{2,4\}$ และ $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

และ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 4

$\therefore \quad B = \{4\}$ และ $P(B) = \frac{1}{6}$

เราได้ว่า $P(A) . P(B) = (\frac{1}{3})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{18}$

และ $A \cap B = \{4\}, P(A \cap B)\ \frac{1}{6}$

จะเห็นว่า $P(A \cap B) \neq P(A) . P(B)$

นั่นแสดงว่า A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน

ข้อสังเกต

1. เมื่อ A เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อ B แล้ว B ย่อมเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อ A ด้วย

2. เหตุการณ์ที่เป็นอิสระจากกัน (Independent events) กับเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive events) นั้นไม่ได้มีความหมายอย่างเดียวกัน เหตุการณ์ A กับ B จะเป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน ถ้า $A \cap B = \phi$ และ $P(A \cap B) = 0$ แต่ A กับ B จะเป็นอิสระต่อกันเมื่อ

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ จะเห็นว่า หาก A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกันแล้ว จะเป็นอิสระต่อกันด้วยไม่ได้ ยกเว้น P(A) หรือ P(B) เท่ากับ 0

ทฤษฎีบท 5.5.1 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งมีความน่าจะเป็นไม่เป็นศูนย์แล้ว เซต A กับ B ย่อมมีสมาชิกร่วมกัน (คือ $A \cap B \neq \phi$)

พิสูจน์

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่ง $P(A) \neq 0$ และ $P(B) \neq 0$ และสมมติให้ $A \cap B = \phi$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = 0$$

แต่ $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ ($\because$ A กับ B เป็นอิสระต่อกัน)

$$\therefore \quad P(A) . P(B) = 0$$

แสดงว่า $P(A) = 0$ หรือ $P(B) = 0$ หรือ $P(A) = P(B) = 0$

ซึ่งแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ว่า $P(A) \neq 0$ และ $P(B) \neq 0$

$\therefore \quad A \cap B = \phi$ ไม่จริง

ดังนั้น $A \cap B \neq \phi$

แสดงว่า A และ B เป็นเซตที่มีสมาชิกร่วมกัน

ทฤษฎีบท 5.5.2 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว จะได้ว่า

1.1) A กับ $\overline{B}$ ก็เป็นอิสระต่อกัน

1.2) $\overline{A}$ กับ B ก็เป็นอิสระต่อกัน

1.3) $\overline{A}$ กับ $\overline{B}$ ก็เป็นอิสระต่อกัน

พิสูจน์ ให้ A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

1.1)
$$\begin{aligned}
\therefore \quad P(A \cap \overline{B}) &= P(A-B) \\
&= P(A) - P(A \cap B) \\
&= P(A) - P(A) . P(B) \\
&= P(A)(1-P(B)) \\
&= P(A) P(\overline{B})
\end{aligned}$$

ดังนั้น A กับ $\overline{B}$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

1.2) $\because$ $P(\overline{A} \cap B) = P(B \cap \overline{A})$

$= P(B-A)$

$= P(B) - P(B \cap A)$

$= P(B) - P(B) . P(A)$

$= P(B)(1-P(A))$

$= P(B) . P(\overline{A})$

$= P(\overline{A}) . P(B)$

ดังนั้น $\overline{A}$ กับ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

1.3) $\because$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}-B)$

$= P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)$

$= P(\overline{A}) - P(\overline{A}) . P(B)$

$= P(\overline{A})(1-P(B))$

$= P(\overline{A}) . P(\overline{B})$

ดังนั้น $\overline{A}$ กับ $\overline{B}$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

ตัวอย่าง 5.5.3 นักวิจารณ์ภาพยนตร์สองคนได้ทำการวิจารณ์ภาพยนตร์เรื่องหนึ่งโดยให้อัตราส่วนความดีกับไม่ดีดังนี้

นักวิจารณ์คนที่ 1 ให้ ดี กับ ไม่ดี เป็น 3 : 2

นักวิจารณ์คนที่ 2 ให้ ดี กับ ไม่ดี เป็น 1 : 3

จงหาความน่าจะเป็นที่

1) นักวิจารณ์ทั้งสองคนวิจารณ์ว่าภาพยนตร์เรื่องนี้ ดี
2) นักวิจารณ์ทั้งสองคนวิจารณ์ว่าภาพยนตร์เรื่อง ไม่ดี
3) นักวิจารณ์คนที่ 1 คนเดียวเท่านั้น ที่วิจารณ์ว่าภาพยนตร์เรื่องนี้ดี
4) นักวิจารณ์คนใดคนหนึ่งวิจารณ์ว่าภาพยนตร์เรื่องนี้ดี

วิธีทำ

เราจะถือว่าการวิจารณ์ภาพยนตร์นั้นเป็นอิสระต่อกัน คือบุคคลใดจะวิจารณ์ว่าภาพยนตร์เรื่องนี้เป็นอย่างไรก็ได้ไม่ขึ้นกับคนใดคนหนึ่งแต่อย่างใด

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่นักวิจารณ์คนที่ 1 วิจารณ์ว่าภาพยนตร์ดี

F เป็นเหตุการณ์ที่นักวิจารณ์คนที่ 2 วิจารณ์ว่าภาพยนตร์ดี

1) เหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณหาความน่าจะเป็น คือ $E \cap F$

$$\therefore \; P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F) = \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{3}{20}$$

2) เหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณหาความน่าจะเป็น คือ $\overline{E} \cap \overline{F}$

$$\therefore \; P(\overline{E} \cap \overline{F}) = P(\overline{E}) \,.\, P(\overline{F}) = \left(\tfrac{2}{5}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{3}{10}$$

3) เหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณหาความน่าจะเป็น คือ $E \cap \overline{F}$

$$\therefore \; P(E \cap \overline{F}) = P(E) \,.\, P(\overline{F}) = \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{9}{20}$$

4) เหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณหาความน่าจะเป็นคือ $(E \cap \overline{F}) \cup (\overline{E} \cap F)$ คือเหตุการณ์ว่าคนที่ 1 วิจารณ์ว่า ดี แต่คนที่ 2 วิจารณ์ว่าไม่ดี กับคนที่ 1 วิจารณ์ว่าไม่ดี แต่คนที่ 2 วิจารณ์ว่าดี

เราได้ว่า $(E \cap \overline{F}) \cap (\overline{E} \cap F) = \phi$

$$\begin{aligned}
\therefore \; P((E \cap \overline{F}) \cup (\overline{E} \cap F)) &= P(E \cap \overline{F}) + P(\overline{E} \cap F) \\
&= P(E) \,.\, P(\overline{F}) + P(\overline{E}) \,.\, P(F) \\
&= \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right) + \left(\tfrac{2}{5}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right) \\
&= \tfrac{9}{20} + \tfrac{1}{10} \\
&= \tfrac{11}{20}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.5.4 ในการสอบครั้งหนึ่งมีข้อสอบ 3 ข้อ คือ ข้อ A, ข้อ B และข้อ C นักศึกษาคนหนึ่งมีความน่าจะเป็นที่จะทำข้อสอบ ข้อ A ถูกเป็น 0.8 ทำข้อ B ถูกเป็น 0.6 และทำข้อ C ถูกเป็น 0.3 โดยการจะทำข้อใดข้อหนึ่ง ถูก เป็นอิสระต่อกัน จงหาความน่าจะเป็นที่

1) ทำข้อสอบถูกทั้ง 3 ข้อ
2) ทำข้อสอบผิดทั้ง 3 ข้อ
3) ทำข้อสอบถูกเฉพาะข้อ A ข้อเดียวเท่านั้น
4) ทำข้อสอบถูก 2 ข้อใด ๆ

วิธีทำ

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ทำข้อสอบข้อ A ถูกโดย $P(A) = 0.8$

B เป็นเหตุการณ์ที่ทำข้อสอบข้อ B ถูกโดย $P(B) = 0.6$

C เป็นเหตุการณ์ที่ทำข้อสอบข้อ C ถูกโดย $P(C) = 0.3$

1) ทำถูกทั้ง 3 ข้อ ดังนั้น เหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณความน่าจะเป็น คือ $A \cap B \cap C$

$$\therefore\ P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C) = (0.8)(0.6)(0.3) = 0.144$$

2) ทำผิดทั้ง 3 ข้อ ดังนั้น เหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณความน่าจะเป็น คือ $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

$$\therefore\ P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}).p(\overline{B}).P(\overline{C})$$
$$= (I-P(A))\ (l-P(B))\ (1-P(C))$$
$$= (I-0.8)\ (l-0.6)\ (I-0.3)$$
$$= (0.2)\ (0.4)\ (0.7)$$
$$= 0.056$$

3) ทำถูกเฉพาะข้อ A เท่านั้น ดังนั้น เหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณความน่าจะเป็นคือ $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

$$\therefore\ P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C})$$
$$= P(A)\ (1-P(B))\ (1-P(C))$$
$$= (0.8)\ (I-0.6)\ (I-0.3)$$
$$= (0.8)\ (0.4)\ (0.7)$$
$$= 0.224$$

4) ทำถูก 2 ข้อใด ๆ ดังนั้นเหตุการณ์ที่ต้องการคำนวณความน่าจะเป็นคือ $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$

$\therefore\ P((A\cap B\cap \overline{C})\cup(A\cap \overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C))$

$= P(A\cap B\cap \overline{C})+P(A\cap \overline{B}\cap C)+P(\overline{A}\cap B\cap C)$

$= P(A)\,P(B)\,P(\overline{C})+P(A)\,P(\overline{B})\,P(C)+P(\overline{A})\,P(B)\,P(C)$

$= (0.8)\ (0.6)\ (0.7)\ +\ (0.8)\ (0.4)\ (0.3)\ +\ (0.2)\ (0.6)\ (0.3)$

$= 0.336\ +\ 0.096\ +\ 0.036$

$= 0.468$

ตัวอย่าง 5.5.5 ในการโยนเหรียญที่สมดุลย์ 2 เหรียญ หนึ่งครั้ง ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญแรกปรากฏก้อย B เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญสองปรากฏก้อย และ C เป็นเหตุการณ์ที่ทั้งสองเหรียญปรากฏหน้าเหมือนกัน จงพิจารณาว่า A, B และ C เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

วิธีทำ ให้ H แทนหัว, T แทน ก้อย

ในที่นี้

$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

$A = \{(T,H),(T,T)\}$ และ $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$B = \{(H,T),(T,T)\}$ และ $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$C = \{(H,H),(T,T)\}$ และ $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$A\cap B\cap C = \{(T,T)\}$ และ $P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4}$

$A\cap B = \{(T,T)\}$ และ $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$

$A\cap C = \{(T,T)\}$ และ $P(A\cap C) = \frac{1}{4}$

$B\cap C = \{(T,T)\}$ และ $P(B\cap C) = \frac{1}{4}$

จะเห็นว่า

$P(A).\ P(B) = (\frac{1}{2})\ (\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = P(A\cap B)$

$P(A).\ P(C) = (\frac{1}{2})\ (\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = P(A\cap C)$

$P(B)\ P(C) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = P(B\cap C)$

แต่ $P(A).P(B).P(C) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \neq P(A\cap B\cap C)$

นั่นแสดงว่า A กับ B เป็นอิสระต่อกัน , A กับ C เป็นอิสระต่อกัน และ B กับ C ก็เป็นอิสระต่อกัน แต่ A, B, C ไม่เป็นอิสระต่อกัน

ข้อสังเกต

จากตัวอย่าง 5.5.5 แสดงให้เห็นว่า เหตุการณ์ A, B และ C หากจับแต่ละคู่จะเป็นอิสระต่อกัน (เรียกว่า Pair-wise indepdent) แต่ A, B, C ก็ไม่ได้เป็นอิสระต่อกัน

แบบฝึกหัด 5.5

1. ในการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่
   1.1) ออกก้อยในครั้งแรก
   1.2) ออกก้อยในครั้งที่สอง
   1.3) ออกก้อย 2 ครั้งเท่านั้น
   1.4) ออกก้อยอย่างน้อย 2 ครั้ง
2. ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่
   2.1) ครั้งแรกออกแต้มน้อยกว่า 5
   2.2) ครั้งที่สองออกแต้มที่เป็นเลขคี่
   2.3) ครั้งแรกออกแต้มน้อยกว่า 5 และครั้งที่สองออกแต้มเป็นเลขคี่
   2.4) ครั้งแรกออกแต้มไม่น้อยกว่า 5 และครั้งที่สองออกแต้มเป็นเลขคู่
3. ชายคนหนึ่ง เข้าไปนั่งในร้านอาหารแห่งหนึ่ง เพื่อรับประทานอาหาร ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสั่งข้าวผัดเป็น 0.7 และความน่าจะเป็นที่เขาจะสั่งก๋วยเตี๋ยวเป็น 0.4 โดยในการสั่งอาหารของเขาแต่ละอย่างเป็นอิสระต่อกัน จงหา
   3.1) ความน่าจะเป็นที่เขาจะสั่งข้าวผัดและก๋วยเตี๋ยว
   3.2) ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่สั่งทั้งข้าวผัดและก๋วยเตี๋ยว
   3.3) ความน่าจะเป็นที่เขาจะสั่งข้าวผัดอย่างเดียวเท่านั้น
   3.4) ความน่าจะเป็นที่เขาสั่งข้าวผัดหรือก๋วยเตี๋ยวอย่างใดอย่างหนึ่ง
   3.5) ความน่าจะเป็นที่เขาจะสั่งอย่างน้อย 1 อย่าง ใน 2 อย่างนี้
4. ผลการสำรวจความคิดแม่บ้านปรากฏว่า

   ความน่าจะเป็นที่แม่บ้านใช้ผงซักฟอก A เป็น 0.45

   ความน่าจะเป็นที่แม่บ้านใช้ผงซักฟอก B เป็น 0.30

   ความน่าจะเป็นที่แม่บ้านใช้ผงซักฟอก C เป็น 0.60

   จงหาความน่าจะเป็นที่แม่บ้านคนหนึ่ง
   4.1) ใช้ผงซักฟอกทั้งสามอย่าง
   4.2) ใช้ผงซักฟอก A เพียงอย่างเดียว
   4.3) ใช้ผงซักฟอก C เพียงอย่างเดียว
   4.4) ใช้ผงซักฟอก A และ B

4.5) ใช้ผงซักฟอก A และ C

4.6) ใช้ผงซักฟอกอย่างใดอย่างหนึ่งใน 3 อย่างนี้

4.7) ใช้ผงซักฟอก 2 อย่าง ใน 3 อย่างนี้

4.8) ไม่ใช้ผงซักฟอกใดเลยใน 3 อย่างนี้

4.9) ใช้ผงซักฟอกอย่างน้อยหนึ่งอย่างใน 3 อย่างนี้

5. ในการสอบครั้งหนึ่งมีข้อสอบ 5 ข้อ คือ A, B, C, D, E นักศึกษาคนหนึ่ง มีความน่าจะเป็นจะเป็นที่จะทำข้อ A, B, C, D และ E ถูกเป็น 0.5, 0.3, 0.7, 0.6 และ 0.1 ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่

5.1) ทำถูกทั้ง 5 ข้อ

5.2) ทำผิดทั้ง 5 ข้อ

5.3) ทำข้อ A, B, C ถูก แต่ D, E ผิด

5.4) ทำข้อ A, C, E ผิด แต่ทำข้อ B, D ถูก

5.5) ทำถูก 4 ข้อ

6. ในการโยนเหรียญที่สมดุลย์ 3 อัน หนึ่งครั้ง จงหา

6.1) ความน่าจะเป็นที่ออกหัวทั้ง 3 อัน

6.2) ความน่าจะเป็นที่ออกหัวอย่างน้อย 2 อัน

6.3) ถ้าโยนเหรียญ 3 อันนี้ 100 ครั้ง ควรจะออกหัวอย่างน้อย 2 อันกี่ครั้ง

7. ครอบครัวหนึ่งได้วางแผนการมีลูกไว้ว่าจะมีลูก 3 คน ถ้าโอกาสที่เขาจะมีลูกสาวเป็น $\frac{3}{5}$ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะได้

7.1) ลูกสองคนแรกเป็นหญิง

7.2) ลูกคนที่ 3 เป็นชาย โดยสองคนแรกเป็นหญิง

7.3) เป็นลูกสาว 1 คน

7.4) เป็นลูกสาว 2 คน

7.5) เป็นลูกชาย 2 คน

7.6) เป็นลูกชายทั้ง 3 คน

7.7) เป็นลูกสาวทั้ง 3 คน

8. ผลการสำรวจการเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหงของนักศึกษา ปรากฏว่า มีนักศึกษาเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหงถึง 70% เพื่อยืนยันผลการสำรวจนี้ มหาวิทยาลัยได้ส่งเจ้าหน้าที่ออกไปสำรวจจำนวนคนที่เป็นสมาชิกข่าวรามคำแหงโดยการสุ่มนักศึกษาในมหาวิทยาลัยมาสัมภาษณ์ จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

8.1) สองคนแรกเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

8.2) ห้าคนแรกเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง

8.3) คนที่ห้าเป็นสมาชิกข่าวรามคำแหง โดยสี่คนแรกไม่เป็น

8.4) สองคนแรกไม่เป็นแต่ห้าคนหลังเป็นสมาชิก

8.5) คนที่หนึ่งเป็นสมาชิก, คนที่สองไม่เป็น, คนที่สามเป็น คนที่สี่ไม่เป็น คนที่ห้าเป็นและคนที่หกไม่เป็น