บทที่ 4
วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่

4.1 แฟคตอเรียล (factorial)

นิยาม 4.1.1 ถ้า $n \geq 1$ แล้ว $n!$ อ่านว่า n แฟคตอเรียล

$$n! = 1.2.3\ldots(n-1)n.$$

ตัวอย่าง 4.1.1 จงหาค่า 6!

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 6! &= 1.2.3.4.5.6 \\ &= 720 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.2 จงแสดงว่า $n! = (n-1)!n$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned} n! &= 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n \\ &= [1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)]n \\ &= (n-1)!n \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงหาค่า 0!

วิธีทำ เพราะว่า $n! = (n-1)!n$

ถ้า $n = 1$

$$\begin{aligned} 1! &= (1-1)!1 \\ 1! &= 0!1 \\ 1 &= 0! \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $0! = 1$

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหาค่า n เมื่อ

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$$

วิธีทำ

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{n!}{(n+1)\,n!} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{6}$$

$$6 = n+1$$

$$5 = n$$

เพราะฉะนั้น $n = 5$

4.2 หลักเบื้องต้นของการนับ (Fundamental principle of counting)

นิยาม 4.2.1 จากการทดลอง ถ้าเหตุการณ์ที่ 1 ให้ผลการทดลอง n_1 วิธี หลังจากเหตุการที่ 1 แล้วก็ปรากฏเหตุการณ์ที่ 2 ให้ผลการทดลอง n_2 วิธี หลังจากเหตุการที่ 2 แล้วก็ปรากฏเหตุการณ์ที่ 3 ให้ผลการทดลอง n_3 วิธี หลังจากเหตุการที่ 3 แล้วก็ปรากฏเหตุการณ์ที่ 4 และเหตุการณ์ต่อๆไปแล้วได้ผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้ $n_1.n_2.n_3.........$ วิธี

ตัวอย่าง 4.2.1 จากบัตรประจำตัวนักศึกษามหาวิทยาลัยรามคำแหง ซึ่งมีตัวเลขอยู่ตัว 9 นั้น จะมีกี่วิธีที่มหาวิทยาลัยจะทำบัตรให้นักศึกษา

วิธีทำ

0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 4 5 6 7 8 9

จากรหัสของนักศึกษา สองตัวแรกเป็นปี พ.ศ. ช่องที่ 1 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 2 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 3 เลือกได้ 7 วิธี เพราะมหาวิทยาลัยมี 7 คณะ

ช่องที่ 4 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 5 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 6 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 7 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 8 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 9 เลือกได้ 10 วิธี

เพราะฉะนั้น มหาวิทยาลัยจะทำบัตรนักศึกษาได้

$= \quad 10 \times 10 \times 7 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

$= \quad 700{,}000{,}000$ บัตร

ตัวอย่าง 4.2.2 มีกี่วิธีที่กองทะเบียนกรมตำรวจจะทำป้ายทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคล สำหรับกรุงเทพมหานคร

วิธีทำ

0 0 0 0 0 0
1 2 3 4 5 6

ป้ายทะเบียนรถยนต์มีตัวเลขและพยัญชนะรวมกันอยู่ 6 ตัว

เช่น 7ข-0598

ช่องที่ 1 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 2 เลือกได้ 44 วิธี เพราะพยัญชนะไทยมี 44 ตัว

ช่องที่ 3 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 4 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 5 เลือกได้ 10 วิธี

ช่องที่ 6 เลือกได้ 10 วิธี

เพราะฉะนั้นทำป้ายได้ทั้งหมด $= 10 \times 44 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

$= 4{,}400{,}000$ อัน

4.3 แผนภาพต้นไม้ (tree diagrams)

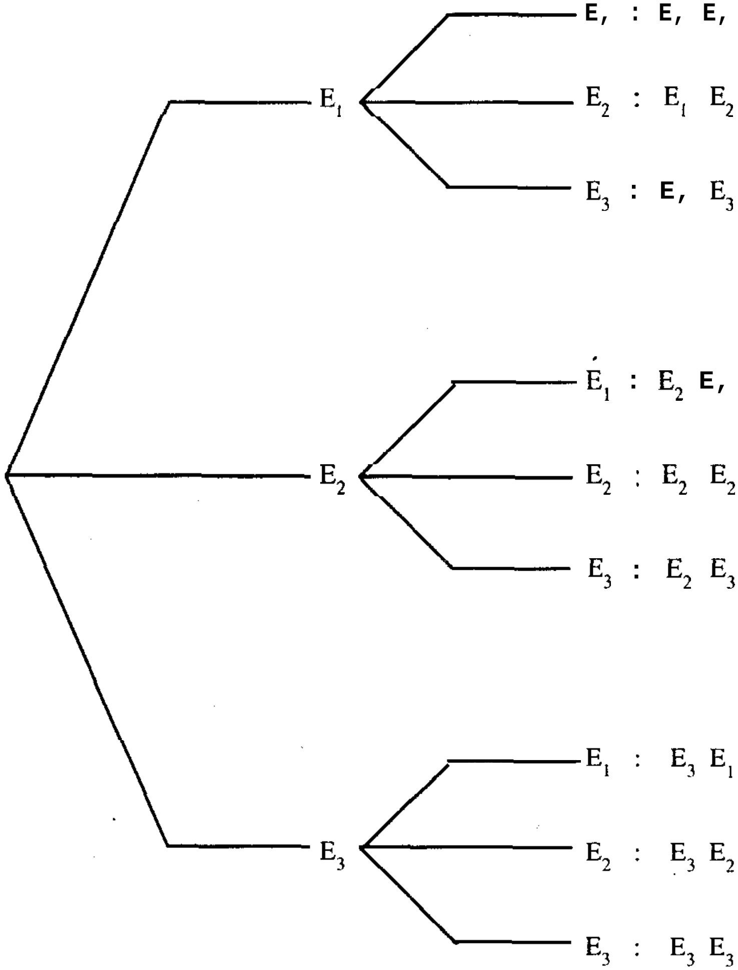
แผนภาพต้นไม้ เป็นแผนภาพที่ใช้แสดงเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลอง ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.3.1 พนักงานเก็บเงินของห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง มีเหรียญ 25 สตางค์ (E_1),50 สตางค์ (E_2) ,1 บาท (E_3) อยู่อย่างละเหรียญ มีกี่วิธีที่เขาจะหยิบเหรียญออกมาสองอันโดยเมื่อหยิบอันแรกแล้วก็ใส่กลับที่เดิมแล้วจึงหยิบอันที่สองออกมา

วิธีทำ การหยิบอันแรกมี 3 วิธี คือ E_1,หรือ E_2หรือ E_3 เมื่อหยิบอันแรกแล้วใส่เหรียญกลับที่เดิมจะได้การหยิบอันที่สองมี 3 วิธี เพราะฉะนั้น พนักงานเก็บเงินหยิบเหรียญออกมาสองอันได้ทั้งหมด

คือ $3 \times 3 = 9$ วิธี

ดังแผนภาพต้นไม้



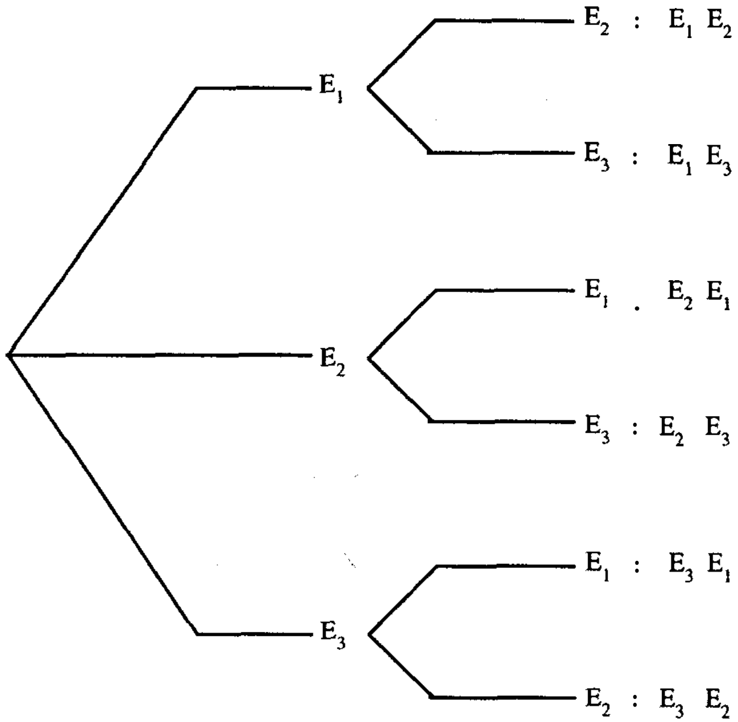
ตัวอย่าง 4.3.2 จากตัวอย่างเมื่อหยิบเหรียญอันแรกแล้วไม่ใส่กลับเข้าไปที่เดิมแล้วหยิบเหรียญอันสองที่สอง จะมีกี่วิธีที่พนักงานจะหยิบเหรียญออกมาสองอัน

วิธีทำ การหยิบอันแรกมี 3 วิธี คือ E_1 หรือ E_2 หรือ E_3 เมื่อหยิบอันแรกแล้วไม่ใส่กลับไปจะได้

การหยิบอันที่สองมี 2 วิธี

เพราะฉะนั้น การหยิบเหรียญสองอันออกมาได้ทั้งหมด คือ $3 \times 2 = 6$ วิธี

ดังแผนภาพต้นไม้



ตัวอย่าง 4.3.3 มีกี่วิธีในการโยนลูกเต๋าสองลูกโดยโยนทีละลูก

วิธีทำ เพราะว่าลูกเต๋าแต่ละลูกมีอยู่หกหน้าคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6

เพราะฉะนั้นลูกเต๋าลูกแรกมี 6 วิธี

และลูกเต๋าลูกที่สองมี 6 วิธี

ดังนั้นการโยนลูกเต๋าสองลูกมีทั้งหมด $= 6 \times 6$ วิธี

$= 36$ วิธี

ดังตารางที่แสดงนี้

ลูกสอง \ ลูกแรก	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	394	3,5	3,6
4	4,1	4,2	493	494	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	596
6	6,1	6,2	693	6,4	6,5	6,6

ตัวอย่าง 4.3.4 มีกี่วิธีในการโยนเหรียญ 1 อันสามครั้ง

วิธีทำ เพราะว่า เหรียญ 1 อัน เวลาโยนจะปรากฏได้ 2 วิธีคือ หัว (H) ก้อย (T)

เพราะฉะนั้น โยนเหรียญครั้งที่ 1 จะมี 2 วิธี

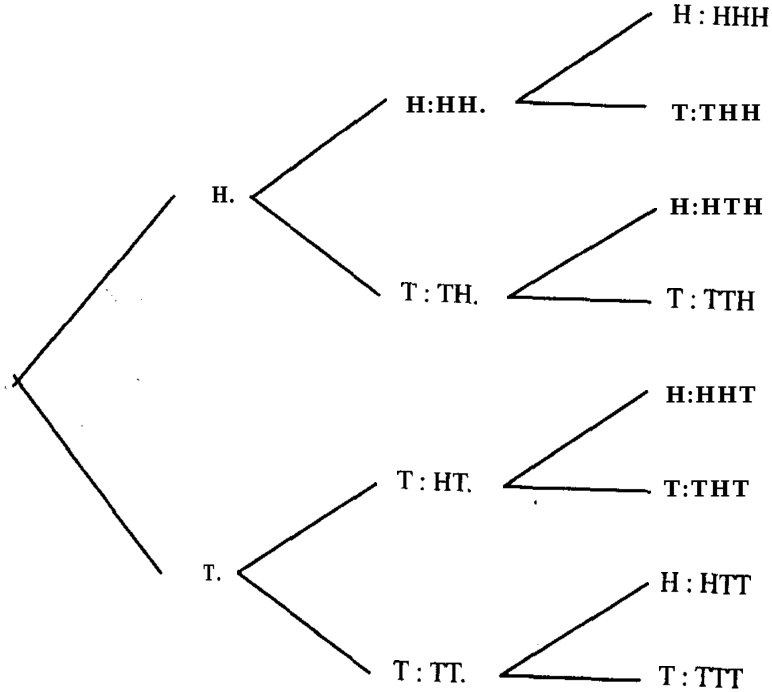
โยนเหรียญครั้งที่ 2 จะมี 2 วิธี

โยนเหรียญครั้งที่ 3 จะมี 2 วิธี

ดังนั้น โยนเหรียญ 1 อันสามครั้งจะมี $= 2 \times 2 \times 2$ วิธี

$= 8$ วิธี

ดังแผนภาพต้นไม้



แบบฝึกหัด 4.1

1. มีถนนจากกรุงเทพถึงชลบุรีอยู่ 3 สาย และจากชลบุรีถึงระยองอยู่ 3 สาย จงหาวิธีที่จะเดินทางไปกลับกรุงเทพระยองโดยมีเงื่อนไขว่า

   1.1 เดินทางอย่างไรก็ได้

   1.2 ห้ามใช้ถนนซ้ำกัน

2. ในการลงทะเบียนของนักศึกษาปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัยรามคำแหงมีทั้งหมด 6 วิชาคือ MA 111, ST 203, TH 101, LS 103, PC 103 และ EN 101 โดยแต่ละวิชาแบ่งออกเป็นหลายกลุ่มดังนี้

MA 111	มี	2	กลุ่ม
ST 203	มี	3	กลุ่ม
TH 101	มี	5	กลุ่ม
LS 103	มี	5	กลุ่ม
PC 103	มี	4	กลุ่ม
EN 101	มี	7	กลุ่ม

   โดยนักศึกษาต้องลงทะเบียนทุกวิชา แต่เลือกวิชาละ 1 กลุ่ม จะมีกี่วิธีที่นักศึกษาคนหนึ่งจะลงทะเบียนเรียน

3. มีกี่วิธีจะนำสัตว์ 4 ตัว ใส่กรง 4 กรง

4. คณะวิทยาศาสตร์มีทางเข้า-ออก อยู่ 3 ทาง คณะมนุษย์ศาสตร์มีทางเข้าออกได้ 4 ทางมีกี่วิธีที่นายก. จะเดินจากคณะวิทยาศาสตร์ไปคณะมนุษย์ศาสตร์ แล้วกลับมายังคณะวิทยา-ศาสตร์อีกโดยมีเงื่อนไขว่า

   4.1 เดินอย่างไรก็ได้

   4.2 ห้ามเข้าออกใช้ประตูซ้ำกัน

5. มีกี่วิธีในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก สองครั้ง โดยมีเงื่อนไขคือ

   5.1 ออกหน้าไม่ซ้ำกัน

   5.2 ออกคู่ทั้งสองครั้ง

5.3 ออกคี่ทั้งสองครั้ง

5.4 ครั้งแรกออกดี และครั้งที่สองออกคู่

6. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกปิงปองสีอยู่ 5 ใบ คือ แดง, เหลือง, ขาว, เขียว และน้ำเงิน จะมีอยู่กี่วิธีในการหยิบลูกปิงปองสามใบจากกล่องใบนี้ โดยมีเงื่อนไขว่า

6.1 หลังจากหยิบแต่ละลูกแล้วนำกลับไปไว้ในกล่องอย่างเดิม

6.2 หยิบแต่ละลูกแล้วไม่นำกลับไปไว้ในกล่อง

7. นาย ก. มีเสื้อเชิ้ต 6 ตัว, กางเกง 4 ตัว, เข็มขัด 2 เส้น, เน็คไท 3 อัน, ถุงเท้า 5 คู่, รองเท้า 3 คู่, จะมีกี่วิธีที่นาย ก. จะแต่งตัวไปทำงาน

8. มีกี่จำนวนที่มากกว่า 5000 ที่ประกอบด้วยตัวเลข 4 ตัวคือ 1, 2, 3, 5 ซึ่งตัวเลขแต่ละตัวใช้เพียงครั้งเดียว

9. มีกี่วิธีในการโยนเหรียญ 1 อัน

9.1 2 ครั้ง

9.2 5 ครั้ง

9.3 n ครั้ง

10. ให้จำนวนหกจำนวน 2, 3, 5, 6, 7 และ 9

10.1 มีกี่วิธีในการเลือกจำนวน 3 จำนวน

10.2 มีกี่จำนวนที่มากกว่า 400 จากจำนวนใน 10.1

10.3 มีกี่จำนวนที่เป็นเลขคู่ จากจำนวนใน 10.1

10.4 มีกี่จำนวนที่เป็นเลขคี่จากจำนวนใน 10.1

4.4 วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutotion)

วิธีเรียงสับเปลี่ยน หมายถึง การจัดวัตถุกลุ่มหนึ่งในลำดับที่แน่นอน โดยถือลำดับเป็นสำคัญ เช่น มีเลขอยู่ 3 ตัว คือ 1, 2, 3 นำมาเรียงสับเปลี่ยนได้ 6 วิธีคือ 123, 132, 213, 231, 312, 321 เป็นต้น

นิยาม 4.4.1 จำนวนหนทางของการเลือกวัตถุ r สิ่งจาก n สิ่ง และจัดเรียงเป็นแถวเรียกว่า จำนวนหนทางของการเรียงสับเปลี่ยนของวัตถุ r สิ่งจากวัตถุ n สิ่งใช้สัญลักษณ์ P_r^n ซึ่ง

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

***ตัวอย่าง* 4.4.1** จงหาค่า $P_3^8, P_4^6, P_1^{15}, P_3^3$

วิธีทำ

$$P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6 = 336$$

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2!} = 6.5.4.3 = 360$$

$$P_1^{15} = \frac{15!}{(15-1)!} = \frac{15!}{14!} = \frac{15.14!}{14!} = 15$$

$$P_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3.2.1 = 6$$

***ตัวอย่าง* 4.4.2** จงหาค่า n เมื่อ $P_5^n = 20 P_3^n$

วิธีทำ

$$P_5^n = 20 P_3^n$$

$$\frac{n!}{(n-5)!} = 20.\frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\frac{n\ (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = \frac{20n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)!}{(n-3)!}$$

$$n\ (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 20n\ (n-1)\ (n-2)$$

$$(n-3)\quad(n-4) = 20$$

$$n^2-7n+\quad 12 = 20$$

$$n^2-7n-8 = 0$$

$$(n-8)\quad(n+1) = 0$$

$$n = 8, -1$$

จาก $n!$ จะมีค่าเมื่อ $n \geq 1$

เพราะฉะนั้น $n = 8$

ตัวอย่าง 4.4.3 มีกี่วิธีในการดึงไพ่ 5 ใบ จากไพ่ชุดหนึ่ง

วิธีทำ เพราะว่าไพ่ชุดหนึ่งมี 52 ใบ

เพราะฉะนั้น $n = 52$ และ $r = 5$

จาก $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$P_5^{52} = \frac{52!}{(52-5)!}$$

$$= \frac{52.51.50.49.48.}{47!}$$

$$= 52.51.50.49.48.4!$$

ดังนั้นเลือกไพ่ 5 ใบ จากไพ่ชุดหนึ่งมี $= 52.51.50.49.48$ วิธี

ตัวอย่าง 4.4.4 มีเลขกี่จำนวนในการเลือกตัวเลข 3 ตัวจากตัวเลขต่อไปนี้ 1,2,3,4,5,6

วิธีทำ เพราะว่า $n = 6,\ r = 3$

จาก
$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!}$$

$$= \frac{6!}{3!}$$

$$= \frac{6.5.4.3!}{3!}$$

$$= 6.5.4$$

$$= 120$$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนทั้งหมด 120 จำนวน

ตัวอย่าง 4.4.5 มีกี่วิธีในการจัดนักเรียน 7 คน นั่งบนเก้าอี้ยาวตัวหนึ่งเพื่อจะถ่ายรูปร่วมกัน

วิธีทำ $n = 7$ และ $r = 7$

จาก
$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_7^7 = \frac{7!}{(7-7)!} = \frac{7!}{0!}$$

$$= 7!$$

พิจารณาจำนวนสี่จำนวน 1,2,2,3 ซึ่งมี 2 ซ้ำกันสองตัว ถ้านำจำนวนทั้งสี่จำนวนมาเขียนเป็นจำนวนเลขหลักพันจะเขียนได้ 12 จำนวน คือ 1223, 1232, 1322, 2213, 2123, 2231, 2132, 2312, 2321, 3122, 3212, 3221.

ซึ่ง $$12 = \frac{4!}{2!\,1!\,1!}$$

นิยาม 4.4.2 ถ้าวัตถุ n สิ่งแบ่งออกเป็น k ชนิด แต่ละชนิดมี S สิ่งที่เหมือนกัน แล้ววิธีเรียงสับเปลี่ยนของวัตถุ n สิ่ง คือ

$$\frac{n!}{S_1!\,S_2!.....S_k!}$$

เมื่อ $S_1 + S_2 + ... S_k = n$

ตัวอย่าง 4.4.6 มีกี่วิธีในการนำจำนวน 1,2,2,3,4,4 มาเขียนเป็นเลขหลักแสน จะได้กี่จำนวน

วิธีทำ

$n = 6$

$S_1 = 1$ (เลข 1)

$S_2 = 2$ (เลข 2)

$S_3 = 1$ (เลข 3)

$S_4 = 2$ (เลข 4)

เพราะฉะนั้นจะมีเลขหลักแสนอยู่ $= \dfrac{n!}{S_1!\,S_2!\,S_3!\,S_4!}$ จำนวน

$= \dfrac{6!}{1!\,2!\,1!\,\,2!}$ จำนวน

$= \dfrac{6!}{2!\,2!}$ จำนวน

$= \dfrac{6.5.4.3.2.1}{2.2}$ จำนวน

$= 180$ จำนวน

ตัวอย่าง 4.4.7 มีกี่วิธีที่จะสลับอักษรของคำว่า Tennessee

วิธีทำ

$n = 9$

$s_1 = 1$ (T)

$S_2 = 4$ (e)

$S_3 = 2$ (n)

$S_4 = 2$ (s)

เพราะฉะนั้น สามารถสลับอักษรได้ $= \dfrac{9!}{1!\,4!\,2!\,2!}$ วิธี

$= \dfrac{9!}{4!\,2!\,2!}$ วิธี

$= \dfrac{9.8.7.6.5.4!}{4!\,2!\,2!}$ วิธี

$= \dfrac{9.8.7.6.5}{2.2}$ วิธี

$= 3780$ วิธี

นิยาม 4.4.3 วัตถุ n สิ่งนำมาเรียงเป็นแนววงกลม จะเรียงได้ = (n-1)! วิธี

ตัวอย่าง 4.48 มีกี่วิธีที่จะจัดคน 7 คน นั่งบนโต๊ะรับประทานอาหาร

วิธีทำ เพราะการรับประทานอาหารคนทั้ง 7 คน จะต้องนั่งแบบวงกลม

จึงได้ว่า $n = 7$

เพราะฉะนั้นจะจัดคนทั้งหมดนั่งได้ = $(7-1)!$ วิธี

= $6!$ วิธี

= 720 วิธี

ตัวอย่าง 4.4.9 จากตัวอย่าง 4.4.8 ถ้าให้คนสองคนจะต้องนั่งติดกันเสมอ แล้วจะมีกี่วิธีในการจัดคนทั้ง 7 นั่งรับทานข้าว

วิธีทำ เพราะว่า $n = 7$ และมี 2 คน จะต้องนั่งติดกันเสมอ เมื่อหัก 2 คนนั้นออก จะเหลือคนอีก 7-2 = 5 คน ที่จะนำมาเรียงแบบวงกลมซึ่งเรียงได้ = 5! วิธี และสำหรับ 2 คนที่นั่งติดกันเราจัดนั่งได้ 2! วิธี

เพราะฉะนั้น จัดคนรับประทานทานอาหารได้ = $5!\ 2!$ วิธี

= $5.4.3.2.2$ วิธี

= 240 วิธี

นิยาม 4.4.4 นำของ k สิ่งจากสิ่งของที่มีลักษณะต่างกัน n สิ่ง $(k < n)$ มาเรียงเป็นแนววงกลมได้

$$\frac{P^n_k}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k}$$

ตัวอย่าง 4.4.10 ทีมบาสเกตบอลทีมหนึ่งมีผู้เล่น 15 คน มีกี่วิธีที่โคชจะจัดผู้เล่น 5 คนลงไปยืนตรงกลางสนาม เพื่อเริ่มทำการแข่งขัน

วิธีทำ เพราะว่าก่อนเริ่มทำการแข่งขันผู้เล่นจะต้องไปยืนกลางสนามรอบวงกลมกลางสนาม

ดังนั้นการจัดผู้เล่นก็เป็นแบบวงกลม โดย

$n = 15,\ \ k = 5$

เพราะฉะนั้น จำนวนหนทางที่โคชจะจัดได้ $= \dfrac{P^{15}_{5}}{5}$

$$= \frac{15!}{(15-5)!\,5}$$

$$= \frac{15!}{10!\;5}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{\;}$$

$= $ '72072

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาค่า $P^{3}_{1} + P^{3}_{2} + P^{3}_{3}$

2. จงแสดงว่า $P^{n}_{n} = 2P^{n}_{n-2}$

3. จงแสดงว่า $P^{n}_{n-r} \circ P^{r}_{1} = P^{n}_{n-r+1}$

4. จงหาค่า เมื่อ $P^{n}_{4} = 42P^{n}_{2}$

5. จงหาค่า n เมื่อ $2P^{n}_{2} + 50 = P^{2n}_{2}$

6. มีกี่วิธีที่เด็กชาย 3 คน เด็กหญิง 2 คน จะนั่งบนเก้าอี้ยาวตัวหนึ่ง

7. มีกี่วิธีที่ชายคนหนึ่งจะนำหนังสือ MA111, MA112, MA213, MA214, และ MA224 วางบนชั้นหนังสือ

8. มีกี่วิธีที่จะสลับอักษรของคำว่า

   8.1 Mississippi

   8.2 Unusual

   8.3 Sociological

9. มีจำนวนกี่จำนวนที่ประกอบด้วยตัวเลข 6 ตัวจากจำนวนต่อไปนี้

   1,1,2,2,3,3

10. เด็กชาย 3 คน เด็กหญิง 2 คน นั่งบนเก้าอี้ยาวตัวหนึ่ง

    10.1 มีกี่วิธีที่เด็กทั้ง 5 คน นั่งโดยเด็กชายและเด็กหญิงนั่งแยกกัน

    10.2 มีกี่วิธีที่เด็กทั้ง 5 คน นั่งโดยเด็กหญิงต้องนั่งติดกันเสมอ

11. มีถนน 6 สาย จาก A ถึง B และ 4 สาย จาก B ถึง C

    11.1 มีกี่วิธีที่ นาย ก. จะขับรถจาก A ถึง C

    11.2 มีกี่วิธีที่นาย ก. จะขับรถจาก A ถึง C แล้วขับกลับจาก C ถึง A

12. ทหารเรือนายหนึ่งใช้ธง 8 ผืน โบกเป็นสัญญาณ โดยใช้ธงสีแดง 4 ผืน สีขาว 2 ผืน และสีเขียว 2 ผืน อยากทราบว่าทหารเรือนายนี้จะโบกธงเป็นสัญญาณได้ทั้งหมดกี่วิธี

13. มีกี่วิธีที่เด็กหญิง 4 คน และเด็กชาย 4 คน จะนั่งสลับกัน

14. มีกี่วิธีที่เด็กหญิง 4 คน และเด็กชาย 4 คน นั่งสลับกัน โดยมีเด็กหญิง และเด็กชายคู่หนึ่งต้องนั่งคู่กันเสมอ

15. มีกี่วิธีที่เด็กชาย 4 คน และเด็กหญิง 4 คน นั่งทานอาหารร่วมกันโดยนั่งสลับกัน

16. จากโจทย์ข้อ 15 ถ้ามีเด็กหญิง และเด็กชายคู่หนึ่งนั่งคู่กันเสมอ

17. มีต้นมะม่วง 20 ต้น นำไปปลูกรอบบ้านบนพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า จะมีหนทางจัดปลูกได้กี่วิธี

18. มีลูกปัดอยู่ 8 สี นำมาทำสร้อยข้อมือจะได้ทั้งหมดกี่แบบ

19. ในการแข่งกรีฑามีกรรมการทั้งหมด 30 คน มีกี่วิธีที่ประธานจะเลือกกรรมการ 20 คน ไปยืนตามจุดต่างๆ รอบสนาม เพื่อทำการแข่งวิ่ง 400 เมตรชาย

4.5 วิธีจัดหมู่ (Combination)

วิธีจัดหมู่ หมายถึงการจัดวัตถุกลุ่มหนึ่งโดยถือว่าลำดับไม่สำคัญ เช่น 123, 132, 213, 231, 312, 321 ทั้งหมดนี้คือการจัดหมู่เพียง 1 วิธี

พิจารณาจำนวน 3 จำนวน 1, 2, 3 ถ้าเลือกทีละ 2 จำนวน จะมีทั้งหมด คือ 12, 13, 21, 23, 31, 32 รวมเป็น 6 จำนวน (P^3_2) ถ้าถือว่าลำดับไม่สำคัญนั้นคือ

12 กับ 21 เหมือนกัน

13 กับ 31 เหมือนกัน

23 กับ 32 เหมือนกัน

เมื่อลำดับไม่สำคัญ เราจะเลือกได้ทั้งหมด 3 วิธี

สมมติให้ C^3_2 แทนการจัดหมู่ของของ 2 สิ่ง จาก 3 สิ่ง จะได้ว่า

$$C^3_2 = \frac{P^3_2}{2!} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!}$$

นิยาม 4.5.1 การจัดหมู่ของของ r สิ่งใน n สิ่งใช้สัญลักษณ์ C^n_r ซึ่ง

$$C^n_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่าง **4.5.1** จงหาค่า $C^{10}_0, C^{10}_1, C^{10}_{10}, C^{10}_9$

วิธีทำ

$$C^{10}_0 = \frac{10!}{0!\,(10-0)!} = \frac{10!}{1(10)!} = 1$$

$$C^{10}_1 = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10!}{1!\,9!} = \frac{10.9!}{1.9!} = 10$$

$$C^{10}_{10} = \frac{10!}{10!(10-10)!} = \frac{10!}{10!\,0!} = \frac{10!}{10!} = 1$$

$$C_9^{10} = \frac{10!}{9!\,(10-9)!} = \frac{10!}{9!\,1!} = \frac{10.9!}{9!\,1} = 10$$

หมายเหตุ
1. $C_0^n = C_n^n$
2. $C_1^n = C_{n-1}^n$

ตัวอย่าง *4.5.2* มีกี่วิธีในการเลือกกรรมการห้องของนักเรียนห้อง A ซึ่งกรรมการชุดนี้มี 7 คน จากจำนวนนักเรียนทั้งหมด 40 คน

วิธีทำ

$n = 40$

$r = 7$

การเลือกกรรมการมีทั้งหมด $= C_7^{40}$ วิธี

$= \frac{40!}{7!\,(40-7)!}$ วิธี

ตัวอย่าง *4.5.3* ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ อาจารย์ผู้สอนให้นักเรียนเลือกทำ 8 ข้อจาก ข้อสอบทั้งหมด 10 ข้อ

1. มีกี่วิธีที่นักเรียนจะเลือกทำ
2. มีกี่วิธีที่นักเรียนจะต้องทำ 3 ข้อ แรกทุกคน

วิธีทำ จาก $C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

1. เมื่อ $n = 10,\ r = 8$

$$C_8^{10} = \frac{10!}{8!\,(10-8)!}$$

$$= \frac{10!}{8!\,2!}$$

$$= \frac{10.9}{2!}$$

$$= 45$$

เพราะฉะนั้น นักเรียนเลือกทำได้ 45 วิธี

2. เมื่อทุกคนต้องทำ 3 ข้อแรก ดังนั้น จะเลือกทำอีกเพียง 5 ข้อ จาก 7 ข้อ ที่เหลือจะได้ $n = 7, \; r = 5$

$$C_5^7 = \frac{7!}{5!\,(7-5)!}$$

$$= \frac{7!}{5!\,2!}$$

$$= \frac{7.6}{2!}$$

$$= 21$$

เพราะฉะนั้น นักเรียนเลือกทำได้ 21 วิธี

ตัวอย่าง 4.5.4 ในการแข่งขันกีฬาแห่งชาติทีมฟุตบอลเขต 1 มีผู้เล่น 18 คน มีกี่วิธีที่โคชจะเลือกผู้เล่น 11 คน ลงทำการแข่งขันนัดแรก

วิธีทำ เพราะว่า $n = 18, \; r = 11$

จาก $$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

เพราะฉะนั้น โคชจะเลือกผู้เล่นได้ $= C_{11}^{18}$

$$= \frac{18!}{(18-11)!\,11!}$$

$$= \frac{18\times17\times16\times15\times14\times13\times12}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 31824$$

ตัวอย่าง 4.5.5 หยิบไพ่ 10 ใบจากไพ่หนึ่งสำรับ จะมีหนทางที่จะหยิบได้กี่วิธี

วิธีทำ $n = 52$ (ไพ่หนึ่งสำรับมี 52 ใบ)

เพราะฉะนั้น จำนวนหนทางที่จะหยิบได้

$$= C_{10}^{52}$$

$$= \frac{52!}{(52-10)!\ 10!}$$

$$= \frac{52!}{42!\ 10!}$$

$$= \frac{52\times51\times50\times49\times48\times47\times46\times45\times44\times43}{10!}$$

$$= 15,820,024,220$$

นิยาม 4.5.2 ถ้าของ n สิ่ง ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ประเภท แต่ละประเภทมีสิ่งของที่ต่างกัน และมีจำนวน n_1, n_2 เลือกของมา r สิ่งเป็นประเภทที่หนึ่ง r_1 สิ่ง และประเภทที่สอง r_2 สิ่ง มาจัดหมู่จะได้ เป็น

$$C_{r_1}^{n_1} \times C_{r_2}^{n_2}$$

ตัวอย่าง 4.5.6 ในชั้นเรียนชั้นหนึ่งมีเด็กชาย 25 คน เด็กหญิง 15 คน ถ้าครูประจำชั้นจะเลือกเด็กมา 4 คน โดยเป็นเด็กชาย 3 คน เด็กหญิง 1 คน จะมีหนทางเลือกได้กี่หนทาง

วิธีทำ $n_1 = 25,\ r_1 = 3,\ n_2 = 15,\ r_2 = 1$

เพราะฉะนั้น จำนวนหนทางที่จะเลือกได้

$$= C_3^{25} \times C_1^{15}$$

$$= \frac{25!}{(25-3)!\,3!} \times \frac{15!}{(15-1)!\,1!}$$

$$= \frac{25!}{22!\,3!} \times \frac{15!}{14!\,1!}$$

$$= \frac{25\times24\times23\times15}{3\times2}$$

$$= 34500$$

ตัวอย่าง 4.5.7 เลขจำนวนหนึ่ง 4604464604 มาเรียงเป็นหมู่คราวละ 4 ตัว โดยให้เป็นตัวเลขเดียวกัน 3 ตัว ที่เหลือเป็นตัวเลขอื่น จะมีหนทางได้กี่แบบ

วิธีทำ เพราะว่ากลุ่มตัวเลขที่เหมือนกันทั้ง 3 ตัว คือ เลข 4 และเลข 5

เป็น $n_1 = 2, r_1 = 1$

และตัวที่เหลือคือเลข 0 และ 4 (เมื่อเลือก 4 ไป 3 ตัวแล้วยังมี 4 เหลืออีก)

เป็น $n_2 = 2,\ r_2 = 1$

เพราะฉะนั้นจำนวนหมู่ที่จะจัดได้ $= C_1^2 \times C_1^2$

$$= \frac{2!}{(2-1)!\,1!} \times \frac{2!}{(2-1)!\,1!}$$

$$= \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{2!}{1!\,1!}$$

$$= 4$$

นั่นคือ 4440 4446 6660 6664

แบบฝึกหัด 4.3

1. มีนักเทนนิส 4 คน มีกี่วิธีที่โคชจะจัดทีมเพื่อแข่งขันประเภทคู่

2. มีกี่วิธีที่นักศึกษาจะเลือกวิชาเลือก 5 วิชา จากทั้งหมด 15 วิชา

3. ในการสอบภาคปลายของวิชาคณิตศาสตร์ 101 อาจารย์ออกข้อสอบ 15 ข้อ แต่ให้นักเรียนเลือกทำเสียง 10 ข้อ จะมีทางเลือกทำได้กี่แบบ

4. นาย ก. มีเนคไทอยู่ 10 อัน มีกี่วิชาที่นาย ก. จะเลือกเนคไทใส่ในหนึ่งสัปดาห์ โดยแต่ละวันใช้ไม่ซ้ำกันเลย

5. มีจุด A, B, C, D, E, F, G, H, I, K ทั้งหมด 10 จุด อยู่บนเส้นรอบวงกลมวงหนึ่ง

   5.1 จะมีคอร์ดกี่คอร์ดที่เชื่อมระหว่างจุดเหล่านี้

   5.2 จะมีสามเหลี่ยมกี่รูปที่อยู่ภายในวงกลม โดยมีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด

6. หยิบไพ่ 5 ใบจากไพ่หนึ่งสำรับให้มีโพดำ 2 ใบ โพแดง 1 ใบ ข้าวหลามตัด 1 ใบ และดอกจิก 1 ใบ จะมีหนทางจะหยิบได้เท่าใด

7. เลือกอักษรมา 3 ตัว จากคำว่า "STATISTICS" มาจัดเป็นหมู่

   7.1 โดยมีอักษรเหมือนกันหนึ่งคู่

   7.2 อักษรทั้งสามตัวเหมือนกัน

8. ในสำนักงานแห่งหนึ่งมีพนักงานชาย 7 คน หญิง 5 คน ถ้าเลือกพนักงานมา 5 คน จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกพนักงาน ถ้า

   8.1 เป็นชาย 3 f-n.4 หญิง 2 คน

   8.2 เป็นชาย 2 คน หญิง 3 คน

4.6 สัมประสิทธิ์ทวินามและทฤษฎีบททวินาม (Binomial coefficients and Theoren)

นิยาม 4.6.1 สำหรับ r และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $r \le n$ สัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ อ่านว่า "nCr" โดยกำหนดว่า

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1)r}$$

ซึ่งเรียกจำนวนนี้ว่า "สัมประสิทธิ์ทวินาม"

ตัวอย่าง 4.6.1 จงหาค่า $\binom{8}{2}, \binom{9}{4}, \binom{12}{5}$

วิธีทำ

$$\binom{8}{2} = \frac{8\,(8-2+1)}{1.2} = \frac{8.7}{1.2}$$

$$\binom{9}{4} = \frac{9.8.7\quad(9-4+1)}{1.2.3.4} = 126$$

$$\binom{12}{5} = \frac{12.11.10.9.\ (12-5+1)}{1.2.3.4.5} = 792$$

หมายเหตุ : $\binom{n}{r}$ นี้จะมีพจน์ของเศษและส่วนเท่ากันเท่ากับ r

พิจารณา

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots.(r-1)r}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)(n-r)!}{1.2.3\ldots.(r-1)r\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$= C^{n}_{r}$$

หมายเหตุ : $\binom{n}{r} = C^{n}_{r}$

Lemma : $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

พิสูจน์

เพราะว่า $\binom{n}{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r)!}$

$= \dfrac{n!}{(n-r)!\,(n-n+r)!}$

$= \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$= \binom{n}{r}$

ตัวอย่าง 4.6.2 จงหาค่า $\binom{10}{3}$ และ $\binom{10}{7}$

วิธีทำ $\binom{10}{3} = \dfrac{10.9.8}{1.2.3} = 120$

$\binom{10}{7} = \dfrac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7} = 120$

หมายเหตุ : 1. $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,n!} =$

2. $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0!\,0!}$

ทฤษฎีบท 4.6.1 $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

พิสูจน์ $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} + \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$$= \frac{r.\,n!}{r.\,(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r)!\,(n-r+1)}$$

$$= \frac{r.\,n!}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{r.n! + (n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(r+n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}$$

$$= \binom{n+1}{r}$$

ทฤษฎีบท 4.6.2 (ทฤษฎีบททวินาม)

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + nab^{n-1} + b^n$$

พิสูจน์ พิสูจน์โดยอุปมาณทางคณิตศาสตร์

1. ถ้า $n = 1$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$$

$$= a+b$$

$n = 1$ เป็นจริง

2. ให้ $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ เป็นจริง แล้วต้องแสดงว่า $(a+b)^{n+}$ เป็นจริงด้วย

จาก
$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b) \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= (a+b) [a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$+ \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \ldots + \binom{n}{1} ab^{n-1} + b^n]$$

เมื่อเอา (a+b) คูณพจน์ต่าง ๆ ในวงเล็บ [ ] แล้วรวมกันจะได้พจน์แรกคือ a^{n+1} และพจน์สุดท้ายคือ b^{n+1}เราจะพิจารณาพจน์ทั่ว ๆ ไปที่มี b^r รวมอยู่ เช่น

$$b[\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}] + a [\binom{n}{r} a^{n-r} b^r]$$

$$= \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^r + \binom{n}{r} a^{n-r+1} b^r$$

$$= [\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}] a^{n-r+1} b^r$$

$$= \binom{n+1}{r} a^{n-r+1} b^r$$ จากทฤษฎีบท 4.6.1

เพราะฉะนั้นพจน์ที่มี b^r อยู่คือ $\binom{n+1}{r} a^{n-r+1} b^r$

และ $(a+b)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{n-r+1}b^r$

***ตัวอย่าง* 4.8.3** จงหาค่า $(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4, (a+b)^5, (a+b)^6$

วิธีทำ

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0b^1 = 1$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1b^0 + \binom{1}{1} a^0b^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2b^0 + \binom{2}{1} a^1b^1 + \binom{2}{2} a^0b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3b^0 + \binom{3}{1} a^2b^1 + \binom{3}{2} a^1b^2 + \binom{3}{3} a^0b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4b^0 + \binom{4}{1} a^3b^1 + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} a^1b^3 + \binom{4}{4} a^0b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0} a^5b^0 + \binom{5}{1} a^4b^1 + \binom{5}{2} a^3b^2 + \binom{5}{3} a^2b^3 + \binom{5}{4} a^1b^4 + \binom{5}{5} a^0b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6b^0 + \binom{6}{1} a^5b^1 + \binom{6}{2} a^4b^2 + \binom{6}{3} a^3b^3 + \binom{6}{4} a^2b^4 + \binom{6}{5} a^1b^5 + \binom{6}{6} a^0b^6$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

จากตัวอย่าง 4.6.3 ถ้านำเอาสัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^n$ สำหรับ $n = 0,1,2...$ มาเขียนเป็นสามเหลี่ยมจะเรียกว่า Pascol's triangle

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

หมายเหตุ : 1. ตัวเลขตัวหน้าและตัวหลังของแต่ละแถวคือ 1

2. ตัวเลขแต่ละตัวในแถวหนึ่งแถวใดคือผลรวมของจำนวนสองจำนวนที่อยู่แถวบนบนตัวเลขตัวนั้น เช่น 10 = 6+4

หมายเหตุ จาก $(a+b)^n$ พบว่า

1. มีพจน์ทั้งหมด $n+1$ พจน์
2. พจน์ที่ 1 คือ a และพจน์ที่ 2 คือ $n\,a^{n-1}b$
3. กำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์รวมกันเท่ากับ n
4. กำลังของ a จะลดลงจาก n ถึง 0

   และกำลังของ b จะเพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง n
5. สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์คือ $\binom{n}{k}$ เมื่อ k เป็นกำลังของ a หรือ b
6. พจน์สุดท้ายคือ b^n และพจน์รองสุดท้ายคือ nab^{n-1}

ตัวอย่าง **4.6.4** จงหาค่า $(2x+y^2)^5$

วิธีทำ $(2x+y^2)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5(y^2)^0 + \binom{5}{1}(2x)^4(y^2)^1 + \binom{5}{2}(2x)^3(y^2)^2$

$+ \binom{5}{3}(2x)^2(y^2)^3 + \binom{5}{4}(2x)(y^2)^4 + \binom{5}{5}(2x)^0(y^2)^5$

$= 32x^5 + 5(16x^4)y^2 + 10(8x^3)y^4 + 10(4x^2)y^6 +$

$5(2x)y^8 + y^{10}$

$= 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

ตัวอย่าง **4.8.6** จงหาค่า $(x-y)^4$

วิธีทำ $(x-y)^4 = \binom{4}{0}x^4(-y)^0 + \binom{4}{1}x^3(-y)^1 + \binom{4}{2}x^2(-y)^2 +$

$\binom{4}{3}x(-y)^3 + \binom{4}{4}x^0(-y)^4$

$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

ตัวอย่าง **4.6.6** จงแสดงว่า $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$

วิธีทำ จากขวามือ

$2^4 = (1+1)^4 = \binom{4}{0}1^41^0 + \binom{4}{1}1^31^1 + \binom{4}{2}1^21^2 + \binom{4}{3}1^11^3 + \binom{4}{4}1^01^4$

$= \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหาค่า $\binom{5}{2}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{14}{2}$, $\binom{6}{4}$

2. จงหาค่า $(2x + y^2)^3$

3 . จงหาค่า $(x^2 - 3y)^4$

4. จงหาค่า $(\frac{1}{2}a + 2b)^5$

5. จงหาค่า $(2a^2 - b)^6$

6. จงหาพจน์ที่มี x^8 ของการกระจาย $(2x^2 - \frac{1}{2}y^3)^8$

7. จงหาพจน์ที่มี y^6 ของการกระจาย $(3xy^2 - z^2)^7$

8. จงหาพจน์กลางของ $(2x+y^2)^6$

9. จงหาพจน์กลางของ $(2x^2 - y)^4$

10. จงหาพจน์กลางของ $(x^2 + 2y^2)^8$