บทที่ 3
ฟังก์ชัน

3.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน

สำหรับสมาชิก a และ b ใด ๆ เรียก (a,b) ว่าคู่อันดับ (ordered pair) ของ a กับ b และกำหนดเสียว่า ถ้า $a \neq b$ แล้ว

$$(a,b) \neq (b,a)$$

ดังนั้นจึงนิยามได้ว่า

นิยาม 3.1.1 สำหรับคู่อันดับ (a,b) และ (c,d) ใด ๆ ถ้า $(a,b) = (c,d)$ แล้ว

$$a = c \wedge b = d$$

นิยาม 3.1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Products) ของเซต A และ B คือเซตของทุกคู่อันดับ (x,y) เมื่อ $x \in A$ และ $y \in B$ โดยสัญลักษณ์

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

ดังนั้น

$$(x,y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

ทฤษฎีบท 3.1.1 สำหรับเซต A, B, C และ D ใด ๆ

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

พิสูจน์ 1) สำหรับคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \forall (x,y)[(x,y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)]$$

$$\therefore \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

2) สำหรับคู่ อันดับ (x,y) ใด ๆ

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \in \vee y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \forall (x,y)[(x,y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)]$$

$$\therefore \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

3) สำหรับคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in C \times D \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \varepsilon C \wedge y \varepsilon D \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D)
\end{aligned}
$$

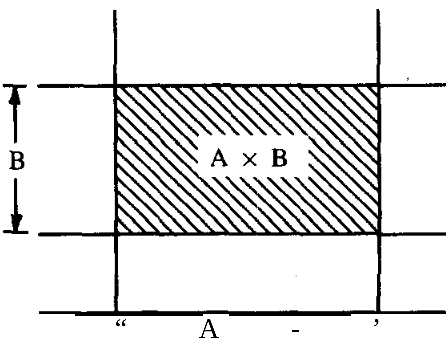
$\Leftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$

$\therefore \quad \forall\ (x,y)\ [(x,y) \in (A \times B)\ n\ (C \times D) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)]$

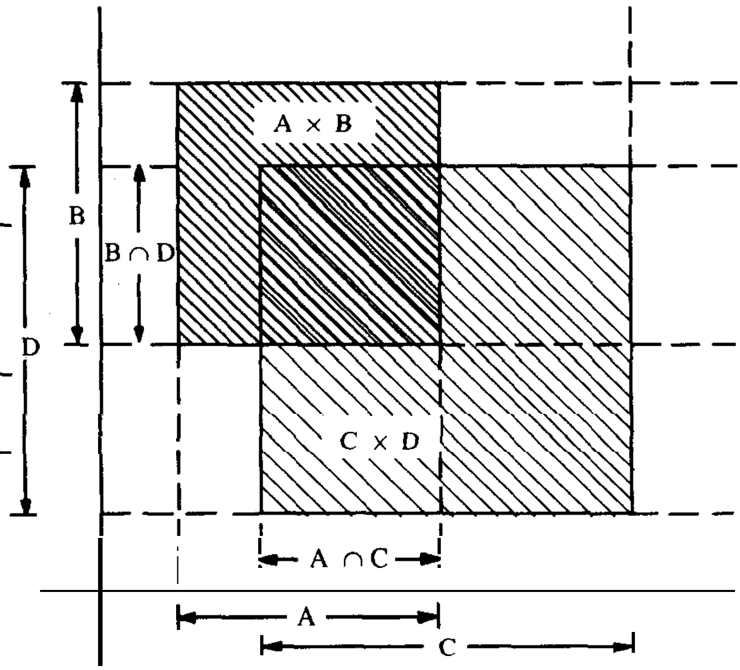
$\therefore \quad (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

การเขียนภาพโดยใช้ Venn Diagram จะทำให้เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณ คาร์ทีเซียนของเซตสองเซต อาจกำหนดให้เป็นแผนภาพโคออร์ดิเนต (coordinate diagram) ที่เราคุ้นเคยกันก็คือระบบคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนตในระนาบ เมื่อมีเซตสองเซต ให้เซตหนึ่งอยู่บนแกนนอน อีกเซตหนึ่งอยู่บนแกนตั้ง ถ้าต้องการจะแทนเซต $A \times B$ ด้วยภาพก็อาจให้ A อยู่ บนแกนนอน และเซต B อยู่บนแกนตั้ง ลากเส้นขนานกับแกนตั้งให้ผ่านจุดในเซต A และลากเส้นขนานกับแกนนอนให้ผ่านจุดในเซต B จุดตัดขอเส้นขนานเหล่านั้นแทนสมาชิกของเซต $A \times B$ ดังรูป 3.1.1 a และ 3.1.1 b



รูป 3.1.6 a

แสดง Ax B



รูป 3.1.6 b

แสดง (A x B) *n (C x* D) = (A *n* C) *x* (B *n* D)

แบบฝึกหัด 3.1

1) ให้เซต A= $\{a,b,c,d\}$, เซต B = $\{1,2,3\}$, เซต C = $\{x,y,z\}$

จงหาเซต $A \times B$, $B \times A$, $C \times (B \times A)$, $(A \cup B) \times C$, $(A \times C) \cup (B \times C)$, $(A \cup B) \times (B \cup C)$

2) จงพิสูจน์ว่า $A \times (B - D) = (A \times B) - (A \times D)$

3) จงพิสูจน์ว่า $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$

4) ถ้า A,B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ต่อไปนี้

$$(A \times A) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$$

3.2 กราฟ

เซตของคู่อันดับใด ๆ ที่เป็นเซตส่วนหนึ่งของ $A \times B$ กล่าวคือ G $A \times B$ เรียกรวม ๆ ว่า G เป็นกราฟ (graph) จาก A ไปยัง B

นิยาม 3.2.1 ถ้า G เป็นกราฟจาก A ไปยัง B แล้ว G^{-1} ซึ่งกำหนดโดย

$$G^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in G\}$$

เป็นกราฟจาก B ไปยัง A นั่นคือ เราได้ว่า

$$(y, x) \in G^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

นิยาม 3.2.2 ถ้า G และ H เป็นกราฟจาก A ไปยัง B และจาก B ไปยัง C ตามลำดับแล้ว $H \circ G = \{(x, z) : \exists y \in B[(x, y) \in G \wedge (y, z) \in H]\}$ เป็นกราฟจาก A ไปยัง C นั่นคือเราได้ว่า

$$(x, z) \in H \circ G \Leftrightarrow \exists y \in B[(x, y) \in G \wedge (y, z) \in H]$$

จากนิยามของกราฟดังกล่าวแล้วข้างต้น จึงสามารถสร้างคุณสมบัติเบื้องต้นได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 ถ้า G, H และ J เป็นกราฟจาก Z ไปยัง W และจาก Y ไปยัง Z และจาก X ไปยัง Y ตามลำดับแล้ว

1) $(G \circ H) \circ J = G \circ (H \circ J)$

2) $(G^{-1})^{-1} = G$

3) $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$

พิสูจน์ 1) สำหรับคู่อันดับ **(x, w)** ใด ๆ ใน **xx w**

$$(x. w) \in (G \circ H) \circ J \Leftrightarrow \exists y \in Y[(x, y) \in J \ A \ (y, w) \in G \circ H]$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in Y[(x, y) \in J \wedge \exists z \in Z[(y, z) \in H \wedge (z, w) \in G]]$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in Y \exists z \in Z[(x, y) \in J \wedge (y, z) \in H \wedge (z, w) \in G]$$

$$\Leftrightarrow \exists z \in Z[\exists y \in Y[(x, y) \in J \ A \ (y, z) \in H] \ A \ (z, w) \in G]$$

$\Leftrightarrow \exists z \in Z[(x, z) \in H \circ J \wedge (z, w) \in G]$

$\Leftrightarrow (x, w) \in G \circ (H \circ J)$

$\therefore \forall (x, w)[(x, w) \in (G \circ H) \circ J \Leftrightarrow (x, w) \in G \circ (H \circ J)]$

$(G \circ H) \circ J = G \circ (H \circ J)$

2) สำหรับคู่อันดับ (z, w) ใด ๆ ใน $Z \times W$

$(z, w) \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (w, z) \in G^{-1}$

$\Leftrightarrow (z, w) \in G$

$\forall (z, w)[(z, w) \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (z, w) \in G]$

$\therefore (G^{-1})^{-1} = G$

3) สำหรับคู่อันดับ (w, y) ใด ๆ ใน $W \times Y$

$(w, y) \in (G \circ H)^{-1} \Leftrightarrow (y, w) \in G \circ H$

$\Leftrightarrow \exists z \in Z[(y, z) \in H \wedge (z, w) \in G]$

$\Leftrightarrow \exists z \in Z[(z, w) \in G \wedge (y, z) \in H]$

$\Leftrightarrow \exists z \in Z[(w, z) \in G^{-1} \wedge (z, y) \in H^{-1}]$

$\Leftrightarrow (w, y) \in H^{-1} \circ G^{-1}$

$\therefore \forall (w, y)[(w, y) \in (G \circ H)^{-1} \Leftrightarrow (w, y) \in H^{-1} \circ G^{-1}]$

$(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$

ต่อไปนี้จะละการกำหนดที่กล่าวว่า G เป็นกราฟจาก X ไปยัง Y หากกล่าวว่า G เป็นกราฟให้หมายความว่า G เป็นกราฟจากเซตใดเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง

นิยาม 3.2.3 สำหรับกราฟ G จาก X ไปยัง Y ใด ๆ โดเมน (domain) ของ G เราหมายถึงเซต

$$D_G = \{x : \exists y \in Y[(x, y) \in G]\}$$

และพิสัย (range) ของ G เราหมายถึงเซต

$$R_G = \{y : \exists x \in X[(x, y) \in G]\}$$

นั่นคือ

$$x \in D_G \Leftrightarrow \exists y \in Y[(x, y) \in G]$$

และ $y \in R_G \Leftrightarrow 3x \in X[(x, y) \in G]$

อาจกล่าวได้ว่าโดเมนของ $G(D_G)$ คือ เซตของคอมโปเนนท์ตัวแรก (first component) ของทุกคู่อันดับ ใน G และพิสัยของ G คือเซตของคอมโปเนนท์ตัวที่สอง (second component) ของทุกคู่อันดับใน G

ทฤษฎีบท 3.2.2 ถ้า G และ H เป็นกราฟ จาก Y ไปยัง z และจาก X ไปยัง Y แล้ว

1) $D_G = R_{G^{-1}}$ 2) $R_G = D_{G^{-1}}$

3) $D_{G \circ H} \subseteq D_H$ 4) $R_{G \circ H} \subseteq R_G$

พิสูจน์ 1) สำหรับสมาชิก y ใด ๆ ใน Y

$$y \in D_G \Leftrightarrow \exists z \in Z[(y, z) \in G]$$

$$\Leftrightarrow \exists z \in Z[(z, y) \in G^{-1}]$$

$$\Leftrightarrow y \in R_{G^{-1}}$$

$\therefore \forall y[y \in D_G \Leftrightarrow y \in R_{G^{-1}}]$

$.D_G = R_{G^{-1}}$

2) สำหรับสมาชิก z ใด ๆ ใน z

$z \in R_G \Leftrightarrow \exists y \in Y[(y, z) \in G] \Leftrightarrow \exists y \in Y[(z, y) \in G^{-1}] \Leftrightarrow z \in D_{G^{-1}}$

$.\forall z \in Z[z \in R_G \quad \Leftrightarrow z \in D_{G^{-1}}]$

$\therefore\ R_G = D_{G^{-1}}$

3) สำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน x

$x \in D_{G\circ H} \Leftrightarrow \exists z \in Z[(x, z) \in G\circ H]$

$\Leftrightarrow \exists z \in Z[\exists y \in Y[(x, y) \in H \wedge (y, z) \in G]]$

$\Rightarrow \exists z \in Z[\exists y \in Y[(x, y) \in H] \wedge \exists z[(y, z) \in G]]$

$\Rightarrow \exists z \in Z\ \exists y \in Y[(x, y) \in H] \wedge (x, y)\exists y \in Y[(y, z) \in G]$

$\Leftrightarrow \exists y \in Y\ [(x, y) \in H] \wedge (x, y)\exists y \in Y[(y, z) \in G]$

$\Rightarrow \exists y \in Y[(x, y) \in H$

$\Leftrightarrow x \in D_H$

$.\forall x \in X[x\, \varepsilon\, D_{G\circ H} \Rightarrow x \in D_H]$

$..\ D_{G\circ H} \subseteq D_H$

4) สำหรับสมาชิก z ใด ๆ ใน z

$z \in R_{G\circ H} \Leftrightarrow \exists x \in X[(x, z) \in G\circ H]$

$\Leftrightarrow \exists x \in X[\exists y \in Y[(x, y) \in H \wedge (y, z) \in G]]$

$\Leftrightarrow \exists x \in X[y \in Y[(x, y) \in H] \wedge \exists Y[(y, z) \in G]]$

$\Leftrightarrow \exists x \in X\exists y \in Y[(x, y) \in H] \wedge \exists x \in X\exists y \in Y[(y, z) \in G]]$

$\Leftrightarrow \exists x \in X\exists y \in Y[(x, y) \in H] \wedge \exists y \in Y[(y, z) \in G]$

$\Leftrightarrow \exists y \in Y[(y, z) \in G]$

$\Leftrightarrow z \in R_G$

$.\ \forall z[z \in R_{G\circ H} \Leftrightarrow z \in R_G]$

$\therefore R_{G\circ H} \subseteq R_G$

บทแทรก 3.2.1 | สำหรับกราฟ G และ H ใด ๆ ถ้า $R_H \subseteq D_G$ แล้ว $D_{G\circ H} = D_H$

พิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $D_{G\circ H} \subseteq D_H$ และ

2. $D_H \subseteq D_{G\circ H}$

สำหรับ $D_{G\circ H} \subseteq D_H$ ได้พิสูจน์แล้วในทฤษฎีบท 5.2.2

เหลือจะต้องพิสูจน์ว่า $D_H \subseteq D_{G\circ H}$

สำหรับสมาชิก x ใด ๆ

1) $x \in D_H \Leftrightarrow \exists y \in Y[(x, y) \in H]$

2) แต่ $R_H \subseteq D_G$

จากข้อ 1) เราได้ $y \in R_H$

$y \in R_H \Rightarrow y \in D_G$

$\exists x \in X[(x, y) \in H] \Rightarrow \exists z \in Z[(y, z) \in G]$

จาก 1) และ 2) จึงได้

$\exists y \in Y[(x, y) \in H] \wedge \exists z \in Z[(y, z) \in G]$

$\exists y \in Y[\exists z \in Z[\exists y \in Y[(x, y) \in H] \wedge (y, z) \in G]]$

$\therefore \exists z \in Z[(x, z) \in G\circ H]$

$\therefore x \in D_{G\circ H}$

$\forall x[x \in D_H \Rightarrow x \in D_{G\circ H}]$

$D_H \subseteq D_{G\circ H}$

นั่นคือ $D_{G\circ H} = D_H$

แบบฝึกหัด 3.2

1. ให้ $G = \{(a, b), (b, c), (c, c), (c, d)\}$ และ $H = \{(b, a), (c, b), (d, c)\}$
   จงหา G^{-1}, H^{-1}, $G \circ H$, $H \circ G$, $(G \circ H)^{-1}$, $(G \cup H)^{-1}$, $H^{-1} \circ G$
2. ถ้า G, H และ J เป็นกราฟ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้
   2.1 $(H \cup J) \circ G = (H \circ G) \cup (J \circ G)$
   2.2 $(G \circ H)^{-1} = G^{-1} \circ H^{-1}$

3.3 ความสัมพันธ์ (Relation)

ความสัมพันธ์ของสมาชิก ในเซต A อาจให้สัญลักษณ์ R(x,y) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิก x และ y ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จสำหรับแต่ละคู่อันดับ (x,y) ของสมาชิกของเซต A สมมติว่าความสัมพันธ์เป็น "x หาร y ลงตัว" อาจจะเขียนสัญลักษณ์เสียใหม่ว่า D(x,y) คือความสัมพันธ์ในเซต I ของเลขจำนวนเต็ม D(x,y) มีค่าความจริงเป็นจริง สำหรับทุกคู่ (x,y) ของจำนวนเต็มซึ่ง y เป็นพหุคูณของ x และเป็นเท็จสำหรับคู่อันดับของจำนวนเต็มจำนวนอื่น ๆ

ถ้าให้กราฟแทนความสัมพันธ์ในเซต A จึงได้ว่ากราฟ $G \subseteq A \times A$ ประกอบด้วยทุกๆ คู่อันดับ (x,y) ซึ่ง G(x,y) มีค่าความจริงเป็นจริง ในทางกลับกันถ้าเรากำหนดให้กราฟ $G \subseteq A \times A$ ใดๆ แล้ว G จะกำหนดความสัมพันธ์ใน A ชื่อว่า ความสัมพันธ์ R ซึ่ง R(x,y) มีค่าความจริงเป็นจริงต่อเมื่อ $(x,y) \in G$ เท่านั้นดังนั้นในกรณีของฟังก์ชัน ก็สามารถที่จะชี้ให้เห็นความสัมพันธ์ด้วยการแสดงเป็นกราฟโดยวิธีการนี้ การศึกษาความสัมพันธ์จึงเป็นส่วนหนึ่งของทฤษฎีของเซตเบื้องต้น

นิยาม 3.3.1 สำหรับเซต A ใด ๆ ความสัมพันธ์ใน A หมายความถึงเซตส่วนหนึ่งของ $A \times A$

นิยาม 3.3.2 ให้ G เป็นความสัมพันธ์ใน A แล้ว

G กล่าวได้ว่าสะท้อน (reflexive) ถ้า

$$\forall x\, [x \in A \Rightarrow (x,x) \in G]$$

G กล่าวได้ว่าสมมาตร (symmetric) ถ้า

$$\forall (x,y)\, [\, (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G\,]$$

G กล่าวได้ว่าปฏิสมมาตร (anti-symmetric) ถ้า

$$((x,y) \in G \wedge (y,x) \in G) \Rightarrow x = y$$

G กล่าวได้ว่าถ่ายทอด (transitive) ถ้า

$$((x,y) \in G \wedge (y,z) \in G) \Rightarrow (x,z) \in G$$

นิยาม 3.3.3 กราฟเส้นทะแยง (diagonal graph) I_A ถูกกำหนดเป็นเซต $\{(x,x) : x \in A\}$ จึงกล่าวได้ว่า G เป็น รีเฟลคซีฟต่อเมื่อ $I_A \subseteq G$ เท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.3.1 ให้ G เป็นความสัมพันธ์

1) G สมมาตร ต่อเมื่อ $G = G^{-1}$ เท่านั้น

2) G ปฏิสมมาตร ต่อเมื่อ $G \cap G^{-1} \subseteq I_A$ เท่านั้น

3) G ถ่ายทอด ต่อเมื่อ $GoG \subseteq G$ เท่านั้น

พิสูจน์ 1) สมมติว่า G สมมาตรแล้ว

สำหรับคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ

$\therefore \quad (x,y) \varepsilon G \Leftrightarrow (y,x) \in G$

$\Leftrightarrow (x,y) \in G^{-1}$

ดังนั้น $G = G^{-1}$

ในทางกลับกันสมมติว่า $G = G^{-1}$ แล้ว

สำหรับคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ

$\therefore \quad (x,y) \in G \Leftrightarrow (x,y) \in G^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in G$

G สมมาตร

นั่นคือ G สมมาตรต่อเมื่อ $G = G^{-1}$ เท่านั้น

2) สมมติว่า G เป็น ปฏิสมมาตร แล้ว

สำหรับคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ

$\therefore \quad (x,y) \in G \cap G^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in G \wedge (x,y) \in G^{-1}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G$

$\Rightarrow \quad x = y$

$\Leftrightarrow \quad (x,y) = (x,y) \in I_A$

นั่นคือ $G \cap G^{-1} \subseteq I_A$

ในทางกลับกัน สมมติว่า $G \cap G^{-1} \subseteq I_A$

สำหรับคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ

$\therefore \quad (x,y) \in G \cap G^{-1} \Rightarrow (x,y) \in I,$

$\therefore \quad (x,y) \in G \ A \ (x,y) \in G^{-1} \Rightarrow x = y$

$\therefore \quad (x,y) \in G \ A \ (y,x) \in G \Rightarrow x = y$

$\therefore$ G ปฏิสมมาตร

นั่นคือ G ปฏิสมมาตร ต่อเมื่อ $G \cap G^{-1} \subseteq I,$ เท่านั้น

3) สมมติว่า G ถ่ายทอด

สำหรับคู่อันดับ (x,z) ใด ๆ

$\therefore \quad 3\ y\ [(x,y) \in G \ A \ (y,z) \in G] \Rightarrow (x,z) \in G$

$\therefore \quad (x,z) \in GoG \Rightarrow (x,z) \in G$

$\therefore \quad GoG \subseteq G$

ในทางกลับกันสมมติว่า $GoG \subseteq G$

สำหรับคู่อันดับ (x,z) ใด ๆ

$\therefore \quad (x,z) \in GoG \Rightarrow (x,z) \in G$

$\therefore \quad 3\ y\ [(x,y) \in G \ A \ (y,z) \in G] \Rightarrow (x,z) \in G$

$\therefore \quad (x,y) \in G \ A \ (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \in G$

$\therefore$ G ถ่ายทอด

นั่นคือ G ถ่ายทอด ต่อเมื่อ $GoG \subseteq G$ เท่านั้น

นิยาม 3.3.4 ความสัมพันธ์กล่าวได้ว่าเป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) ถ้าความสัมพันธ์นั้น สะท้อน สมมาตร และถ่ายทอดความสัมพันธ์กล่าวได้ว่าเป็นความสัมพันธ์ลำดับ (order relation) ถ้าปฏิสมมาตร

นิยาม 3.3.5 ให้ G เป็นความสัมพันธ์ใน A

G กล่าวว่าไม่สะท้อน (irreflexive) ถ้า

$\forall x\,[\, x \in A \Rightarrow (x,x) \notin G\,]$

G กล่าวว่าอสมมาตร (asymmetric) ถ้า

$(x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \notin G$

, G กล่าวว่าไม่ถ่ายทอด (intransitive) ถ้า

$(x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \notin G$

ตัวอย่าง 3.3.1 ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็มทุกจำนวนความสัมพันธ์เท่ากัน (=) ใน I สะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด ดังนั้นจึงเป็นความสัมพันธ์สมมูล ความสัมพันธ์ $\leq$ (น้อยกว่าหรือเท่ากัน) เป็นสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด ดังนั้นจึงเป็นความสัมพันธ์ลำดับ ความสัมพันธ์ $<$ (น้อยกว่า) ไม่เป็นความสัมพันธ์อันดับไม่เป็นสะท้อน อสมมาตร และถ่ายทอด ดังนั้นจึงเป็นความสัมพันธ์ที่เรียกว่า ความสัมพันธ์ของลำดับเข้มงวด (strict order)

แบบฝึกหัด 3.3

แต่ละปัญหาต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์ในเซต I ของจำนวนเต็มทุกจำนวน จงกล่าวว่าแต่ละปัญหามีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ หรือไม่ สะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร ถ่ายทอด อสมมาตร ไม่ถ่ายทอด (intransitive) จงพิสูจน์ว่าเป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) ความสัมพันธ์อันดับหรือไม่ หรือไม่เป็นทั้งสอง

1. $G = \{ (x,y) : x + y < 3 \}$
2. $G = \{ (x,y) : x$ หาร y ลงตัว $\}$
3. $G = \{ (x,y) : x$ และ y เป็น relatively prime)
4. $G = \{ (x,y) : x+y$ เป็นจำนวนคู่ $\}$
5. $G = ((x,y) : x = y$ หรือ $x = -y \}$
6. $G = \{ (x,y) : x + y$ เป็นคู่และ x เป็นตัวคูณของ $y \}$
7. $G = \{ (x,y) : y = x + 1)$

3.4 ฟังก์ชัน

ความเข้าใจในเรื่องฟังก์ชันเป็นความเข้าใจพื้นฐานที่สุดในแนวความคิดทางคณิตศาสตร์และเข้ามาเกี่ยวข้องในคณิตศาสตร์ทุกสาขาโดยทั่ว ๆ ไปฟังก์ชันนิยามได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 3.4.1 ถ้า A และ B เป็นเซตแล้วฟังก์ชันจาก A ไปยัง B คือ กฎ (rule) ซึ่งแต่ละสมาชิก $x \in A$ กำหนดค่าแน่นอน $y \in B$ ได้อย่างมากหนึ่งค่า

ในการแสดงความเกี่ยวข้องของ $x \in A$ และ $y \in B$ ตัวอย่างฟังก์ชันอาจกล่าวได้ว่า $y = f(x)$ เช่น

$$y = x + 5$$

อาจให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด และ B เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดได้ หรือ

$$y = \sin x$$

ก็อาจให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดและ B เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด หรือให้ B เป็นช่วงปิด $[-1,1]$ ก็ย่อมได้ หรือ

$$y = \tan x$$

เราอาจให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดและ B เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด โปรดสังเกตว่าถ้า $x = \frac{2n+1}{2}$ ไม่กำหนดค่า $y \in B$ ใด ๆ เลย เราก็ยังคงกล่าวได้ว่า $y = f(x) = \tan x$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ได้ตามนิยาม 3.4.1 แต่

$$y^2 = 4x \quad \text{เราจะได้} \quad y = \pm 2\sqrt{x}$$

ไม่เรียก $y = g(x) = \pm 2\sqrt{x}$ ว่าเป็นฟังก์ชันจากเซต A ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดไปยังเซตของจำนวนจริงทั้งหมด B เพราะว่ามีบาง x ซึ่ง $x > 0$, g กำหนดค่า $y \in B$ มากกว่าหนึ่งค่า คือ $2\sqrt{x}$ และ $-2\sqrt{x}$ แต่ถ้าเราให้ $A = \{0\}$ และ B เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดก็อาจกล่าวได้ว่า $g(x) = \pm 2\sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันบน A ไปยัง B

นิยาม 3.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B, f ก็คือเซตของทุกคู่อันดับ (x,y) ซึ่ง $y = f(x)$

จากนิยามนี้จึงทราบได้ว่าฟังก์ชันก็คือกราฟนั่นเองแต่กราฟอาจไม่ใช่ฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.4.1 ให้ $A = \{a,b,c,d\}$ และ $B = \{p,q,r,s\}$

ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่งกำหนดขึ้นด้วยตาราง 3.4.1

x	f(x)
a	p
b	q
c	p
d	

ตาราง 3.4.1

ดังนั้นกราฟ f คือเซต $\{(a,p), (b,q),(c,p)\}$ จากตัวอย่างข้างต้นจึงพบว่า ฟังก์ชันกำหนดกราฟของมันเองได้ และกราฟของฟังก์ชันก็กำหนดฟังก์ชันได้ ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องแยกความหมายระหว่างฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน กล่าวคือฟังก์ชันและกราฟของมันเป็นของอย่างเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.4.2 ให้ A และ B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก f เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A \wedge y \in B$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า $x + 2y = 9$ จงพิจารณาดูว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือไม่

วิธีทำ **จะเห็นว่า** $A = \{1,2,3.......)$

$B = \{1,2,3.......\}$

เราพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าวในรูป $y = \frac{9-x}{2}$

$f = \{(1,4), (3,3), (5,2), (7.1)\}$

เมื่อพิจารณาดูคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ f พบว่า แต่ละ $x \in A$ ถ้า $x = 1,3,5,7$ มี $y \in B$ ซึ่ง $(x,y) \in f$ ได้เพียงค่าเดียวของ y ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

แบบฝึกหัด 3.4

1. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก B เป็นเซตของจำนวนเต็มทั้งหลาย ให้ f เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A, y \in B$ และคล้องตามเงื่อนไขข้างล่างนี้ ในแต่ละกรณี จงพิจารณาดูว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือไม่

1.1 $x^2 + y = 3$

1.2 $x - y^2 = 10$

1.3 $x + y^2 = 1$

1.4 $x^2 + y^2 = 5$

1.5 $x^2 + y^2 = 1$

1.6 $2x^2 + 3y^2 = 1$

1.7 $x^2y = 5$

1.8 $2x \text{ t } 5y = 1$

1.9 $5xy = 0$

1.10 $y = 5$

2. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มทั้งหลาย และ B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก f เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A, y \in B$ และคล้องกับเงื่อนไขตามโจทย์ข้อ 1. ในแต่ละกรณี จงพิจารณาดูว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือไม่

ทฤษฎีบท 3.4.1 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ และ f เป็นกราฟ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ต่อเมื่อ

1) $\forall x\,[\,(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$

2) $D_f \subseteq A$ และ

3) $R_f \subseteq B$ เท่านั้น

พิสูจน์ 1. สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

1.1) จากนิยาม 3.4.1 พบว่า แต่ละสมาชิก $x \in A$, f กำหนดค่า $y \in B$ ได้อย่างมากหนึ่งค่า

นั่นคือ $\forall x\,[\,(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$

1.2 สำหรับสมาชิก x ใด ๆ

$$x \in D_f \Leftrightarrow \exists y\,[\,(x,y) \in f\,]$$
$$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$$
$$\Rightarrow x \in A$$

$\therefore\ D_f \subseteq A$

1.3 สำหรับสมาชิก Y ใด ๆ

$$Y \in R_f \Leftrightarrow \exists x\,[\,(x,y) \in f\,]$$
$$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$$
$$\Rightarrow y \in B$$

$\therefore\ R_f \subseteq B$

2. สมมติว่า f มีคุณสมบัติว่า

1) $\forall x\,[\,(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2\,]$

2) $D_f \subseteq A$ และ

3) $R_f \subseteq B$

2.1 สำหรับคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ

$$(x,y) \in f \Leftrightarrow x \in D_f \wedge y \in R_f$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge y \in B$$

$$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$$

$\therefore$ $f \subseteq A \times B$ (f เป็นกราฟ)

2.2 สำหรับสมาชิก x ใด ๆ จาก $D_f \subseteq A$ จึงได้ $x \in D_f \Rightarrow x \in A$

และ $x \in D_f \Rightarrow \exists y\,[(x,y) \in f\,]$

$\Rightarrow \exists y\,[y \in B\,]$

และ $\forall x\,[\,(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

นั่นคือจาก 2.1) และ 2.2) จึงกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

บทแทรก 3.4.1 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ถ้า C เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $D_f \subseteq C$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันจาก C ไปยัง B

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เราจึงได้ว่า

$\forall x[(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$ และ

$D_f \subseteq C$ และ

$R_f \subseteq B$

f เป็นฟังก์ชันจาก C ไปยัง B

บทแทรก 3.4.2 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ถ้า C เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $R_f \subseteq C$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง C

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เราจึงได้ว่า

$\forall x\,[\,(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$ และ

$D_f \subseteq A$ และ

$R_f \subseteq C$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง C

ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B และ $x \in A$ มีภาพ (image) ภายใต้ f มักเขียนว่า $y = f(x)$ ซึ่งมีความหมายเดียวกันกับ $(x,y) \in f$ และเขียน $y = f(x)$ แทน $(x,y) \in f$ ดังนั้น ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เราอาจกล่าวว่า

$$\forall x\,[y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2]$$

นิยาม 3.4.3

> f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B (ใช้สัญลักษณ์ว่า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน)
>
> เรากล่าวว่า 1. $\forall x\,[y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2]$ และ
>
> 2. $\forall x\,[\,x \in A \Rightarrow \exists\, y\,[y = f(x)\,]\,]$

เราอาจกล่าวในความหมายเดียวกันด้วยวิธีอื่น ๆ เช่น ในข้อ 1) และอาจกล่าวว่า

ถ้า $(x,y_1) \in f$ และ $(x,y_2) \in f$ ก็คือถ้า

$$\begin{tikzcd} & y_1 \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & y_2 \end{tikzcd}$$

แล้ว $y_1 = y_2$ ก็คือถ้า $x_1 \xrightarrow{f} f(x_1),\ x_2 \xrightarrow{f} f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

นั่นคือ ถ้า

$$\begin{tikzcd} & & f(x_1) & \\ x_1 \arrow[urr, "f"] & = & x_2 \arrow[r, "f"] & f(x_2) \end{tikzcd}$$

แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$ ซึ่งอาจจะเขียนเสียใหม่จาก ข้อ 1) ว่า

"$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$" หรือ "$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$"

ทฤษฎีบท 3.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่ง $D_f = D_g$ แล้ว $f = g$ ต่อเมื่อ $\forall x\, [x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)]$ เท่านั้น

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่ง $D_f = D_g$

1) สมมติว่า $f = g$

สำหรับสมาชิก x ใด ๆ

ถ้า $x \in D_f = D_g$ ต้องมี $y \in B$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow (x,y) \in f \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in g \\ &\Leftrightarrow y = g(x) \end{aligned}$$

$\therefore \quad \forall x\, [x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)]$

2) สมมติว่า $\forall x\, [x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)]$

ต้องมี $y \in B$ ซึ่ง $y = f(x) = g(x)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} (x,y) \in f &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y = g(x) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in g \end{aligned}$$

$\therefore \quad f = g$

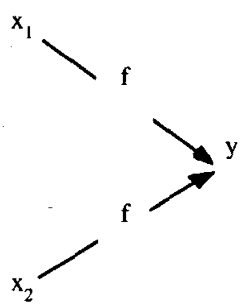
3.5 ชนิดของฟังก์ชัน Injective, Surjective, Bijective

นิยามต่อไปนี้เป็นนิยามที่สำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน

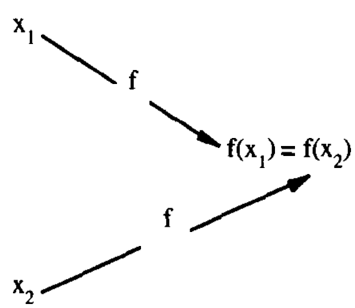
นิยาม 3.5.1 ฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง (Injective) มีคุณสมบัติ

$$1 - 1 : \forall y\,[\,(x_1,y) \in f \wedge (x_2,y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2\,]$$

นั่นคือ แต่ละสมาชิก $y \in B$ มีบุพภาพ (pre-image) ภายใต้ f อย่างมากหนึ่ง $x \in A$ สำหรับประโยคเปิดที่ว่าถ้า $(x_1,y) \in f \wedge (x_2,y) \in f$ หมายความว่าถ้า x_1 และ x_2 เป็นบุพภาพของ y ภายใต้ f ถ้าฟังก์ชัน f หนึ่งต่อหนึ่งแล้ว $x_1 = x_2$ หรืออาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าถ้า $(x_1,y) \in f \wedge (x_2,y) \in f$ กล่าวคือ



แล้ว $x_1 = x_2$ ซึ่งเหมือนกับกล่าวว่า ถ้า x_1 และ x_2 เป็นสมาชิกใน D_f และ $f(x_1) = f(x_2)$ กล่าวคือ



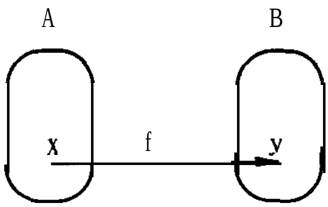
แล้ว $x_1 = x_2$ จึงกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า

$1 - 1$: "$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$" หรือ " $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$"

นิยาม 3.5.1 ฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B ทั่วถึง (surjective function) เมื่อมีคุณสมบัติว่า

$\forall y\,[y \in B \Rightarrow \exists x\,[x \in A \wedge y = f(x)]]$

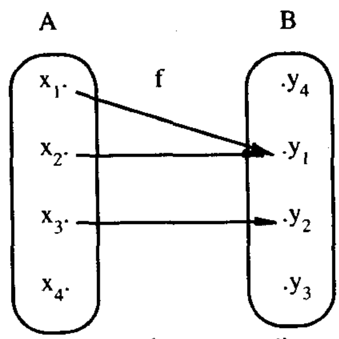
นั่นคือ $\forall y\,[y \in B \Rightarrow y \in R_f]$ ดังนั้น $B \subseteq R_f$ แต่ทราบว่า $R_f \subseteq B$ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ ทั่วถึงต่อเมื่อ $R_f = B$ เท่านั้นและสามารถเขียนภาพเพื่อลักษณะของฟังก์ชันในรูปต่างๆ ได้ดังนี้



f ส่ง (maps) ไปบน y

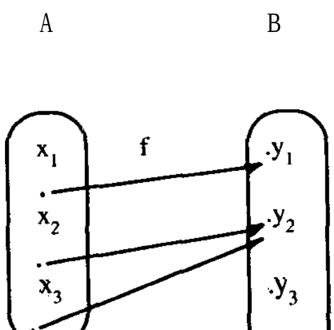
y เป็นภาพของ x

รูป 3.5.1



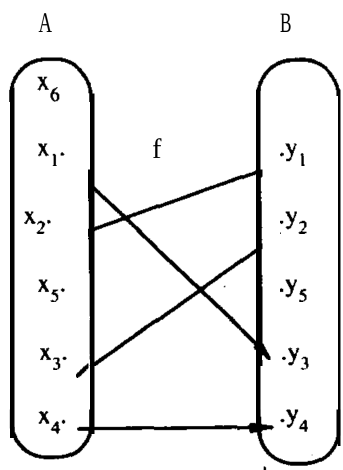
f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

รูป 3.5.2



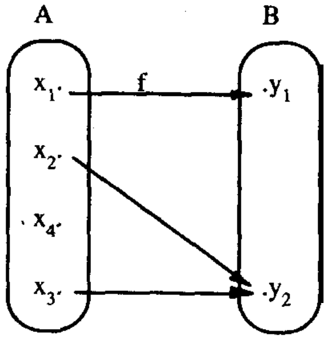
$f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันบน A ไปยัง B

รูป 3.5.3



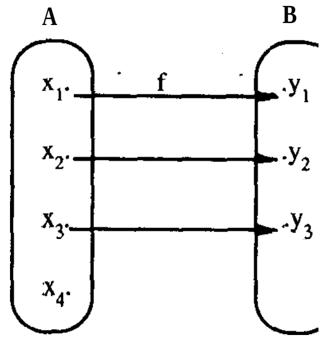
ฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

รูป 3.5.4



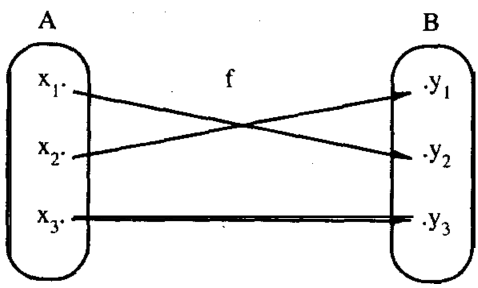
ฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B ทั่วถึง

รูป 3.5.5



ฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B หนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (bijective)

รูป 3.5.6



$f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันบน A ไปบน B อย่างหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

หรือเรียกว่า A และ B สมนัยกันหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to - one correspondence)

นิยาม 3.5.3 ฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B หนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ต่อเมื่อ f เป็นทั้งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงเท่านั้น

กล่าวได้ว่าฟังก์ชัน $f : A \to B$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ต่อเมื่อแต่ละ $y \in B$ เป็นภาพของ $x \in A$ อย่างมากหนึ่ง x และทุก $y \in B$ มี $x \in A$ เป็นบุพภาพภายใต้ f

นิยาม 3.5.4	ฟังก์ชัน $f: A \to B$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงบน A ไปบน B กล่าวได้ว่า A กับ B สมนัยกันหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to one correspondence)

3.5.1 ตัวอย่างของฟังก์ชันที่สำคัญ ๆ

3.5.1.1 ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Indentity function) ถ้า A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตเปล่าใดๆ ฟังก์ชันเอกลักษณ์บน A เราหมายถึงฟังก์ชัน $I_A : A \to A$ ซึ่งกำหนดขึ้นโดย

$$\forall x\, [x \varepsilon A \Rightarrow I_A(x) = x]$$

หรืออาจกล่าวว่า

$$I_A = \{(x,x) : x \in A\}$$

จึงแน่ใจได้ว่า I_A หนึ่งต่อหนึ่งเพราะสมมติว่า

$I_A(x) = I_A(y)$ แต่ $I_A(x) = x$ และ $I_A(y) = y$ จึงได้ $x = y$

ดังนั้น I_A หนึ่งต่อหนึ่ง และพิสัยของ I_A คือ A จึงได้ว่า I_A ทั่วถึง

ดังนั้น I_A หนึ่งต่อหนึ่งอย่างทั่วถึง บน A ไปบน A

3.5.1.2 ฟังก์ชันคงที่ (contant function) ให้ A และ B เป็นเซตสองเซตให้ b เป็นสมาชิกตัวหนึ่งของ B โดยฟังก์ชันคงที่ K_b หมายถึงฟังก์ชัน

$K_b: A \to B$ กำหนดโดย

$$\forall x[x \in A \Rightarrow K_b(x) = b]$$

หรืออาจกล่าวว่า $K_b = \{ (x,b) : z \in A\}$

ถ้า A มีสมาชิกมากกว่า 1 ค่า K_b ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง และถ้า B มีสมาชิกมากกว่า 1 ค่า K_b ไม่ทั่วถึง

3.5.1.3 ฟังก์ชันชุดย่อย (Inclusion function) สำหรับเซต B ใด ๆ และ $B \subseteq A$ ฟังก์ชันชุดย่อยของ B ใน A หมายความว่า $E_B: B \to A$ เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A กำหนดโดย

$\forall_x\ [x \in B \Rightarrow E,(x) = x]$

หรือ $E_B = \{ (x,x) : x \in B \}$

ถ้า $B = A$ เราจึงได้ว่าฟังก์ชันชุดย่อยนี้ก็คือ ฟังก์ชันเอกลักษณ์ I_A นั่นเอง E_B หนึ่งต่อหนึ่ง อย่างไรก็ตาม ถ้า $B \neq A$ แล้ว E_B ไม่ทั่วถึง

3.5.1.4 ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (Characteristic function) พิจารณาฟังก์ชันบน A ไปยังสมาชิก 2 fil สมมติว่าเป็น $\{0, 1\}$ ถ้า $B \subseteq A$, ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ B ใน A คือ ฟังก์ชัน $C_B : A \to \{0,1\}$

$$C_B(x) = \begin{cases} 0 : x \in B \\ 1 : x \in A - B \end{cases}$$

หรือ $C_B = \{ (x.0) : x \in B \} \cup \{ (x,1) : x \in A - B\}$

นั่นคือ C_B ส่งทุกสมาชิกบน B ไปบน $\{0\}$ และทุกสมาชิกบน A - B ไปบน $\{1\}$

3.5.1.5 ฟังก์ชันจำกัด (Restriction) เมื่อ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันบน A ไปยัง B และ $C \subseteq A$, ฟังก์ชันจำกัด ของ f กับ C หมายความว่าฟังก์ชัน $f_{[C]} : C \to B$ เป็นฟังก์ชัน บน C ไปยัง B ซึ่งกำหนดโดย

$\forall x\ [x \in c \Rightarrow f_{[C]}(x) = f(x)]$

หรืออาจกล่าวว่า

$f_{[C]} = \{ (x,y) : (x,y) \in f \wedge x \in C\}$

เราจึงได้ว่า $f_{[C]} \subseteq f$

ทฤษฎีบท 3.5.1

ถ้า $f : B \cup C \to A$ เป็นฟังก์ชัน บน $B \cup C$ ไปยัง A แล้ว $f = f_{[B]} \cup f_{[C]}$

พิสูจน์ สมมติว่า $f : B \cup C \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชันบน $B \cup C$ ไปยัง A

$$f_{[B]} = \{ (x,y) : (x,y) \in f \wedge x \in B\}$$

$$f_{[C]} = \{ (x,y) : (x,y) \in f \wedge x \in C\}$$

1) สำหรับ $(x,y) \in f_{[B]} \cup f_{[C]} \Rightarrow (x,y) \in f \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Rightarrow (x,y) \in f \wedge x \in B \cup C$

$\Rightarrow (x,y) \in f$

$\therefore f_{[B]} \cup f_{[C]} \subseteq f$

2) สำหรับ $(x,y) \in f \Rightarrow (x,y) \in f_{[B]} \vee (x,y) \in f_{[C]}$;

เพราะว่า $f : B \cup C \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชันบน $B \cup C$

ไปยัง A

$\therefore (x,y) \in f_{[B]} \cup f_{[C]}$

$f \subseteq f_{[B]} \cup f_{[C]}$

นั่นคือ $f = f_{[B]} \cup f_{[C]}$

ทฤษฎีบท 3.5.2

> สำหรับ $f_1 : B \rightarrow A$ และ $f_2 : C \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A และฟังก์ชันบน C ไปยัง A ตามอันดับ ถ้า $B \cap C = \varnothing$ และ $f = f_1 \cup f_2$ แล้ว
>
> 1) $f : B \cup C \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชันบน $B \cup C$ ไปยัง A
>
> 2) $f_1 = f_{[B]}$ และ $f_2 = f_{[C]}$
>
> 3) ถ้า $x \in B$ แล้ว $f(x) = f_1(x)$ และ
>
> ถ้า $x \in C$ แล้ว $f(x) = f_2(x)$

พิสูจน์ 1) สิ่งซึ่งต้องพิสูจน์

a) $(x,y) \in f \wedge x \in B \Leftrightarrow (x,y) \in f_1$

b) $(x,y) \in f \wedge x \in C \Leftrightarrow (x,y) \in f_2$ ก่อน

i) ถ้า $(x,y) \in f_1$ แล้ว $x \in B$ เพราะว่า $D_{f1} = B$

และ $(x,y) \in f$ เพราะว่า $f = f_1 \cup f_2$

คือ $(x,y) \in f_1 \Rightarrow (x,y)\ \varepsilon \in f \wedge x \in B$

ii) $(x,y) \in f \wedge x \in B \Rightarrow (x,y) \in f_1 \vee (x,y) \in f_2$

แต่ถ้า $(x,y) \in f_2$ แล้ว $x \in C$ เพราะว่า $Df_2 = C$

แต่ $(x,y) \in f \wedge x \in B \Rightarrow (x,y) \in f_2$ เป็นเท็จเพราะว่า $B \cap C = \varnothing$

$\therefore \quad (x,y) \in f \wedge x \in B \Rightarrow (x,y) \in f,$

นั่นคือ $(x,y) \in f \wedge x \in B \Leftrightarrow (x,y) \in f_1$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$(x,y) \in f \wedge x \in C \Leftrightarrow (x,y) \in f_2$

ต่อไปจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า

$D_f = B \cup C$ และ $R_f \subseteq A$

เนื่องจาก

$Df_1 \cup f_2 = Df_1 \cup Df_2 = B \cup C$

และ $Rf, u\ f_2 = Rf_1 \subseteq A$

$\therefore \quad f : B \cup C \to A$ เป็นฟังก์ชันบน $B \cup C$ ไปยัง A

ต่อไปพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชัน

สมมติว่า $(x,y_1) \in f$ และ $(x,y_2) \in f$ ดังนั้น $x \in B \vee x \in C$

a) ถ้า $x \in B$ เราจึงได้ว่า $(x,y_1) \in f, \wedge (x,y_2) \in f_1 \Rightarrow y, = y_2$

b) ถ้า $x \in C$ เราจึงได้ว่า $(x,y_1) \in f_2 \wedge (x,y_2) \in f_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

นั่นคือ $(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y, = y_2$

ดังนั้น $f : B \cup C \to A$

2) $(x,y) \in f_1 \Leftrightarrow (x,y) \in f_{[B]}$ นั่นคือ $f_1 = f_{[B]}$

และ $(x,y) \in f_2 \Leftrightarrow (x,y) \in f_{[C]}$ นั่นคือ $f_2 = f_{[C]}$

3) เราพบว่า

$$[y = f(x) \wedge x \in B] \Leftrightarrow y = f_1(x)$$

$$[y = f(x) \wedge x \in B] \Leftrightarrow y = f_2(x)$$

นั่นคือ t-h $x \in B$ แล้ว $f(x) = f_1(x)$

และ $x \in C$ แล้ว $f(x) = f_1(x)$

3.6 คุณสมบัติของฟังก์ชันประกอบส่วนกลับของฟังก์ชัน

(Properties of Composite Functions and Inverse Functions)

ต่อไปนี้เป็นคุณสมบัติเบื้องต้นของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 3.6.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง C แล้ว gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง C

พิสูจน์

1) ทราบว่า $D_{gof} \subseteq D_f \subseteq A$ และ $R_{gof} \subseteq R_g \subseteq C$

2) สมมติว่า $(x, z_1) \in gof \wedge (x,z_2) \in gof$ จึงทราบว่า

$\exists y_1 [(x,y_1) \in f \wedge (y_1, z_1) \in g] \wedge \exists y_2 [(x,y_2) \in f \wedge (y_2, z_2) \in g]$

จาก f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B จึงได้ว่า

$(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$ และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง C

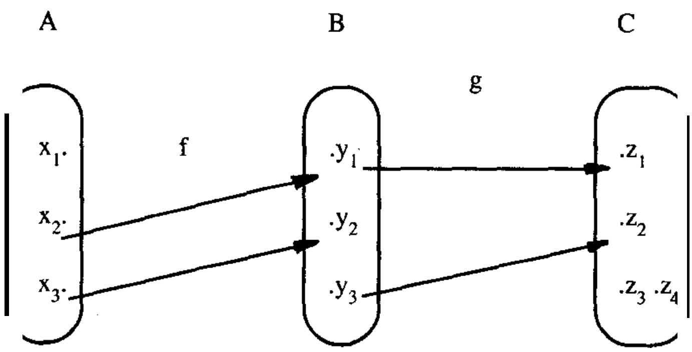
จึงทราบได้ว่า

$(y_1, z_1) \in g \wedge (y_2, z_2) \in g \Rightarrow z_1 = z_2$

นั่นคือ ถ้า $(x,z_1) \in gof \wedge (x,z_2) \in gof \Rightarrow z_1 = z_2$

จาก 1) และ 2) จึงได้ gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง C

อาจเขียนแผนภาพการสมนัยกันด้วย f และ g ตามทฤษฎีบท 3.6.1 ได้ดังนี้



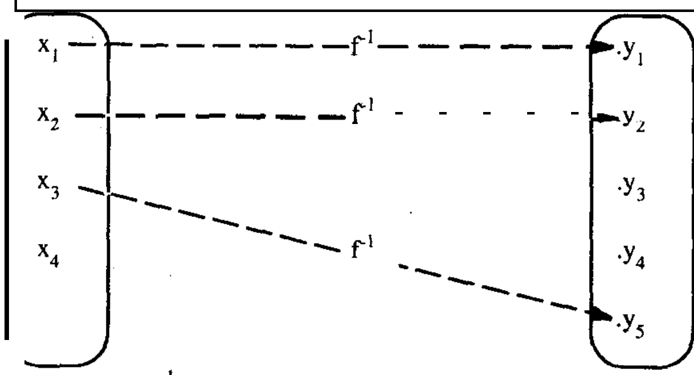
p13.6.1

จากรูปจึงได้ gof = { (x_2, z_1)} (ด้วยวิธีนี้ก็อาจได้ว่า gof = ∅) ดังนั้น

[gof] (x) = (f(x)) ในที่นี้มีอันเดียวคือ [gof] $(x_2) = g(f(x_2)) = z_1$

นิยาม 3.6.1 ฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B กล่าวได้ว่าหาตัวผกผันได้ ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A โดยที่ $(x,y) \in f$ ต่อเมื่อ $(y,x) \in f^{-1}$ เท่านั้นนั่นคือ $x \xrightarrow{f} y$ ต่อเมื่อ $y \xrightarrow{f^{-1}} x$ เท่านั้นหรือ $y = f(x)$ ต่อเมื่อ $x = f^{-1}(y)$ เท่านั้นดังแผนภาพ

กล่าวได้ว่า f จาก A ไปยัง B เป็นฟังก์ชันที่หาตัวผกผันได้ (invertible function)



$f(x_1) = y_1,\ f^{-1}(y_1) = x_1$

$f(x_3) = y_5,\ f^{-1}(y_5) = x_1$

รูป 3.6.2

ทฤษฎีบท 3.6.2

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (injective) จาก A ไปยัง B ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่หาตัวผกผันได้เท่านั้น และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก B ไปยัง A

พิสูจน์ a) สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปยัง B

1) ทราบว่า $D_f \subseteq A \wedge R_f \subseteq B$ จึงได้ $D_{f^{-1}} \subseteq B \wedge R_{f^{-1}} \subseteq A$

2) $(y,x_1) \in f^{-1} \wedge (y,x_2) \in f^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1,y) \in f \wedge (x_2,y) \in f$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B

$\therefore$ 1) และ 2) เราได้ f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่หาตัวผกผันได้

3) การพิสูจน์ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทราบว่า

$(y_1, x) \in f^{-1} \wedge (y_2,x) \in f^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f$

$\Rightarrow \quad y_1 = y_2$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน

$\therefore$ f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

b) สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ที่หาตัวผกผันได้

และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปยัง A

จะต้องพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B

$(x_1,y) \in f \wedge (x_2,y) \in f \quad \Leftrightarrow \quad (y,x_1) \in f^{-1} \wedge (y,x_2) \in f^{-1}$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน

หาตัวผกผันได้

หรือ f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A

$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปยัง B

อาจกล่าวต่อไปอีกได้ว่า

$f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันที่หาตัวผกผันได้ บน A ไปบน B ต่อเมื่อ

$f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง บน A ไปบน B เท่านั้น

หรืออาจกล่าวว่า

$f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันหาตัวผกผันได้ บน A ไปบน B ต่อเมื่อ

เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง บน A ไปบน B เท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.6.3

ถ้า $f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันหาตัวผกผันได้ บน A ไปบน B แล้ว

1) $f^{-1} \circ f = I_A$

2) $f \circ f^{-1} = I_B$

พิสูจน์ 1) สำหรับ $x \in A$ ใด ๆ จึงได้ว่า

ถ้า $y = f(x)$ แล้ว $x = f^{-1}(y)$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
[f^{-1} o f](x) &= f^{-1}(f(x)) \\
&= f^{-1}(y) \\
&= x = I_A(x)
\end{aligned}
$$

$\therefore \; f'of = I,$

2) สำหรับ $y \in B$ ใด ๆ จึงได้ว่า

ถ้า $f'(y) = x$ แล้ว $f(x) = y$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
f o f^{-1}(y) &= f(f^{-1}(y)) \\
&= f(x) \\
&= Y = I_B(y)
\end{aligned}
$$

$\therefore \; f o f' = I,$

นิยาม 3.6.2 ถ้า $f o g = I_A$ เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันผกผันทางซ้าย (left inverse) ของ g และเรียก g ว่าเป็นฟังก์ชันผกผันทางขวา (right inverse) ของ f

ทฤษฎีบท 3.6.4 สำหรับ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันบน A ไปยัง B และ $g : B \to A$ เป็นฟังก์ชัน บน B ไปยัง A ถ้า $g o f = I_A$ และ $f o g = I_B$ แล้ว $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง บน A ไปยัง B และ $g = f^{-1}$

พิสูจน์ 1) จะต้องพิสูจน์ว่า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \quad g(f(x_1)) &&= g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow \quad [g \circ f](x_1)) &&= [g \circ f](x_2) \\ &\Rightarrow \quad I_A(x_1) &&= I_A(x_2) \\ &\Rightarrow \quad x_1 &&= x_2 \end{aligned}$$

$f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) จะต้องพิสูจน์ว่า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สำหรับ $y \in B$ ใด ๆ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} y &= I_B(y) \\ &= [f \circ g](y) \\ &= f(g(y)) \\ &= f(x) \text{ เพราะว่า } g : B \to A \text{ เป็นฟังก์ชันบน } B \text{ ไปยัง } A \end{aligned}$$

ทุก $y \in B$ มี $x \in A$ ซึ่ง $y = f(x)$

$f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

1) และ 2) จึงได้ว่า

$f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง บน A ไปบน B

3) จะต้องพิสูจน์ว่า $g = f^{-1}$ โดยเริ่มจาก

$$\begin{aligned} x = g(y) \Rightarrow f(x) &= f(g(y)) \\ &= [f \circ g](y) \\ &= I_B(y) \\ &= y \end{aligned}$$

$\therefore \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$

$\therefore \quad x = f^{-1}(y)$

$\therefore \quad g = f^{-1}$

จึงกล่าวได้ว่า $f : A \to B$ เป็น ฟังก์ชันที่หาตัวผกผันได้ บน A ไปบน B ต่อเมื่อมี $g : B \to A$ เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A ซึ่ง $g \circ f = I_A$ และ $f \circ g = I_B$ ฟังก์ชัน g คือ f^{-1} เท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.6.5 สำหรับ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง บน A ไปยัง B ต่อเมื่อมี $g : B \to A$ เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A ซึ่ง $g \circ f = I_A$

พิสูจน์ 1) สมมติว่า $g : B \to A$ เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A ซึ่ง $g \circ f = I_A$ ทราบแล้วว่า $f : A \to B$ เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง บน A ไปยัง B

2) สมมติว่า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง บน A ไปยัง B ให้ $C = R_f$ จึงได้ว่า

$f : A \to C$ เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง บน A ไปบน C

ดังนั้นจึงมี $f^{-1} : C \to A$ เป็นฟังก์ชันบน C ไปยัง A

ให้ a เป็นจำนวนคงที่ใน A และให้

$K_a : (B - C) \to A$ เป็นฟังก์ชันคงที่ซึ่งส่งทุกสมาชิกของ B - C ไปบน $\{a\}$

ถ้า $g = f^{-1} \cup K_a$ แล้ว $g : B \to A$ เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A

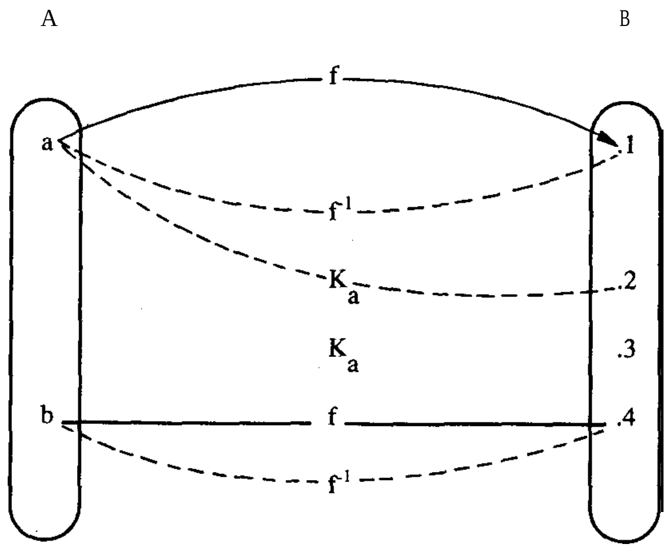
จึงได้ว่าถ้า $x \in A$ ให้ $y = f(x)$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
g \circ f(x) &= g(f(x)) \\
&= g(y) \\
&= f^{-1}(y) \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$\forall x\, [x \in A \Rightarrow [g \circ f](x) = I_A(x)]$$

นั่นคือ $gof = I_A$

ดูจากรูป 3.6.3



รูป 3.6.3

นอกจากนี้ยังอาจพิสูจน์ได้ว่า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง บน A ไปบน B ต่อเมื่อมี $g : B \to A$ เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A ซึ่ง $f \circ g = I_B$ เท่านั้น

จึงกล่าวได้ว่า "$f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันบน A ไปยัง B, $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งต่อเมื่อ f มีฟังก์ชันส่วนกลับทางซ้าย เท่านั้น และเป็นฟังก์ชันทั่วถึง ต่อเมื่อ f มีฟังก์ชันส่วนกลับทางขวา เท่านั้น"

ทฤษฎีบท 3.6.6 สำหรับ $f : A \to B$, $g : B \to C$ และ $g \circ f : A \to C$

1) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
3) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

พิสูจน์ 1) สมมติว่า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จึงได้ $[g \circ f](x_1) = [g \circ f](x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) สมมติว่า f และ g ต่างเป็นฟังก์ชันทั่วถึง จึงได้ว่า

$\forall z\,[z \in C \quad 3 \quad \exists y\,[y \in B \wedge z = g(y)\,1\,I$ และ

$\forall y\,[y \in B \Rightarrow \exists x\,[x \in A \wedge y = f(x)\,]\,]$

ดังนั้นสำหรับทุก $z \varepsilon C$ จึงได้ว่า

$$z = g(y) = g(f(x))$$

$$= [g \circ f](x)$$

$g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

3) จาก 1) และ 2) ได้ว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ดังนั้น $g \circ f$ จึงเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันของเซต A กับเซต B ให้เหมาะสมตามเงื่อนไขต่อไปนี้

   1.1 ฟังก์ชัน $f: A \to B$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ f นี้เป็นฟังก์ชันบน B ด้วย

   1.2 ฟังก์ชัน $f: A \to B$ ทั่วถึง

   1.3 ฟังก์ชัน $f: A \to B$ หนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง และ f ไม่เป็นฟังก์ชันบน A

2. จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันลักษณ์เฉพาะ ของ B ใน A

3. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ และให้ $f: A \to B$ เป็นฟังก์ชัน

   จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาตัวผกผันได้ ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน $f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเท่านั้น

4. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ และให้ $f: A \to B$ เป็นฟังก์ชัน

   จงแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A ต่อเมื่อฟังก์ชัน $f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงเท่านั้น

5. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ และให้ $f: A \to B$

   จงแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน จาก B ไปบน A ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง บน A ไปยัง B เท่านั้น

6. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ และให้ $f \subseteq A \times B$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงบน A ไปบน B ต่อเมื่อ f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง บน B ไปบน A เท่านั้น
