บทที่ 2
เซต
Sets

2.1 เซต

เครื่องมือที่สำคัญในคณิตศาสตร์ใหม่ (Modern Mathematics) ก็คือ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซต ซึ่งมีโครงสร้างทางพีชคณิต เป็นพีชคณิตบูเลียน (Boolean Algebra) ก่อนอื่นเราควรจะทำความเข้าใจเบื้องต้นเกี่ยวกับเซตเสียก่อน

เมื่อนำเอาสิ่งต่างๆ มารวมกันเข้าก็จะได้สิ่งที่เรียกว่า เซต ซึ่งเป็นคำกลางๆ ที่มีความหมายเช่นเดียวกับคำว่า หมู่ กอง คณะ แผนก ฝูง โขลง ฯลฯ เช่นเมื่อกล่าวว่า *"ช้างโขลงหนึ่งกำลังกินใบไผ่อยู่ชายทุ่ง"* เราจะกล่าวเสียใหม่ที่ว่า *"ช้างเซตหนึ่งกำลังกินใบไผ่อยู่ชายทุ่ง"* ผู้ฟังก็เข้าใจเช่นเดียวกัน เรียกองค์ประกอบของเซตใดๆ ว่า สมาชิก (member) ของเซตนั้น เช่นเซต A เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 6 การเขียนพรรนาเซตว่า เซตนั้นๆ ประกอบด้วยสมาชิกอะไรบ้าง กระทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 โดยการอธิบายว่า เซตนั้นๆ ประกอบด้วยสมาชิกใดบ้างด้วยประโยคเปิด เช่น เซต A ที่กล่าวแล้ว ข้างต้น ก็จะเขียนได้ว่า

$A = \{ x : x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 6 \}$ หรือจะเขียน

$A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 7 \}$

เครื่องหมาย $\wedge$ ในการบรรยายเซตด้วยประโยคเปิดเรานิยมใช้เครื่องหมายวรรคตอน "," แทน ดังนั้น เซต A เขียนก็เขียนตามความนิยมได้เป็น

$A = \{ x : x \in \mathbb{N}, x \leq 6 \}$

ถ้าให้ P(x) แทนประโยคเปิด $x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 6$ ดังนั้น เซต A ก็เขียนได้เป็น

$A = \{ x : P(x) \}$

วิธีที่ 2 โดยการเขียนชื่อสมาชิกลงไปในวงเล็บปีกกา แล้วคั่นระหว่างสมาชิกด้วย จุลภาคจาก เซต A ข้างต้นเราก็แทนค่า x ด้วยตัวคงที่ a ลงไปใน P(x) ก็กลายเป็น P(a) ถ้า P(a) มีค่าความจริงเป็นจริง เราก็จะเขียน a ลงในวงเล็บปีกกาดังกล่าว ถ้า P(a) เป็นเท็จ เราก็จะไม่เขียน a ลงในวงเล็บปีกกานั้น เราจะพบว่า

P(-1) : $-1 \in \mathbb{N} \wedge -1 \leq 6$ เท็จ

P(0) : $0 \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq 6$ เท็จ

P(1) : $1 \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq 6$ จริง

P(7) : $7 \in \mathbb{N} \wedge 7 \leq 6$ เท็จ

เราจึงเขียนพรรณนา เซต A ได้ดังนี้

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ หรือ

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$ ก็ได้

ในกรณีที่เราไม่สามารถเขียนสมาชิกได้หมดทุกตัวหรือไม่อยากเขียน เพราะเป็นที่รู้กันแล้ว ก็ใช้เครื่องหมาย "..." ละไว้

เช่น

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ เป็นต้น

ถ้าอีลีเมนต์ตัวใดเป็นองค์ประกอบของเซตๆ หนึ่ง เราก็กล่าวว่า อีลีเมนต์นั้นๆ เป็นสมาชิกของเซตนั้น เช่น "2 เป็นสมาชิกของ เซต A" ที่กล่าวแล้วข้างต้น เราก็จะเขียนสัญลักษณ์แทนข้อความดังกล่าวว่า $2 \in A$ และเขียนสัญลักษณ์ $0 \notin \mathbb{N}$ แทนข้อความว่า "0 ไม่เป็นสมาชิกของ $\mathbb{N}$"

โดยปกติเราคิดแต่เพียงว่า เซตจะต้องมีสมาชิก แต่เราก็ถูกให้พิจารณาเซตที่ไม่มีสมาชิกเลยด้วย เรียกว่า เซตเปล่า (empty set) และใช้สัญลักษณ์ว่า ϕ

ตามที่ได้กล่าวไว้แล้วว่า โดยความจริงแล้ว รากฐานของคณิตศาสตร์ตั้งอยู่บนทฤษฎีบท

เกี่ยวกับเซตแต่โชคไม่ดีที่ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซตไม่ง่ายและเป็นธรรมชาติ ดังที่ Frege และ Russel หวังไว้ภายหลังจึงพบว่าในการใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ เซต โดยอิสระและไม่มีขอบเขต นำมาสู่การขัดแย้ง กล่าวอย่างง่ายๆ ก็คือ การขัดแย้งจะปรากฏเมื่อใช้เซตที่ใหญ่เกินไป (too big) เช่น กล่าวถึงเซต ซึ่งประกอบด้วยทุกสิ่งทุกอย่าง (A set which contains everything.) เพื่อหลีกเลี่ยงข้อขัดแย้งเหล่านี้จะต้องมีบางเซตที่เป็น ปริภูมิ X (Space X) หรือเซตจักรวาล X (Universal set X) เพื่อศึกษาและอภิปราย เฉพาะเซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของ X

แบบฝึกหัด 2.1

ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, \{1\}, \{1, 2\}, \phi\}$ จงตรวจดูว่า ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

1) $1 \in A$ 2) $\{1\} \in A$ 3) $2 \in B$ 4) $\{1, 2\} \in A$

5) $\{1, 2\} \in B$ 6) $3 \notin B$ 7) $4 \notin B$ 8) $5 \in A$

9) $\phi \in A$ 10) $\phi \in B$

2.2 ความสัมพันธ์ของเซต

นิยาม 2.2.1 สำหรับเซต A และ B ใดๆ ถ้าทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B เราจะกล่าวว่า " A เป็นเซตย่อย (Subset) ของ B " และเขียนด้วยสัญลักษณ์ว่า " $A \subseteq B$ "

เราอาจเขียนนิยามนี้ให้เข้าใจโดยทั่วไปได้ว่า

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

ข้อสังเกต 1) เนื่องจากประโยคเปิด $x \in \phi$ เป็นเท็จเสมอสำหรับทุกสมาชิก x ดังนั้น สำหรับเซต A ใดๆ ข้อความ $\forall x\{x \in \phi \Rightarrow x \in A]$ เป็นจริง จึงกล่าวได้ว่า $\phi \subseteq A$ สำหรับเซต A ใดๆ

2) เนื่องจากประโยคเปิด $x \in X$ เป็นจริงเสมอ สำหรับทุกสมาชิก x ดังนั้น สำหรับทุกสมาชิก x ดังนั้นสำหรับ เซต Aใดๆ ข้อความ $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in X]$ เป็นจริง จึงกล่าวได้ว่า $A \subseteq X$

เมื่อรวมข้อสังเกตทั้งสองข้อเข้าด้วยกัน

จึงได้ $\phi \subseteq A \subseteq X$

3) $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$ กล่าวได้ว่า $P(A)$ คือ เซตของทุกเซตย่อยของ A เช่น $A = \{1, 2, 3,\}$ $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

สังเกตว่าจำนวนสมาชิกของ A คือ $^{\#}A = 3$
$^{\#}P(A) = 2^3 = 8$

ทฤษฎีบท 2.1.1 ถ้า $^{\#}A = n \in IN$ แล้ว $^{\#}P(A) = 2^n$

พิสูจน์ I) สมมติว่า $^{\#}A = 1$ เช่น $A = \{1\}$ เราได้

$P(A) = \{\phi, A\}$ จึงได้ $^{\#}P(A) = 2 = 2^1$

2) ให้ $^{\#}A_n = n \in$ IN สมมติว่า

$A_n = \{ a_1 , A_2 , ..., a_n \}, P(A_n) = \{ \phi , \{ a_1 \}, \{ a_2 \}, \{ a_n \},\{ a_1 , a_2 \},\{a_1, a_3 \},..., A_n \}$

ซึ่ง $^{\#}P(A_n) = 2$"

3) ให้ $A_{,+,} = \{ a_1, a_2, ... , a_{**}, a_{n+1} \}$

ให้ s เป็นเซตของทุกเซตย่อยของ A_n ที่เติม a_{n+1} ลงไปแล้ว เราจึงได้ว่า ทุก A ∈ S แตกต่างจากทุก B ∈ $P(A,) = 2^n$ และ $^{\#}P(A, _{+1}) =$ "S + $^{\#}P(A,)$

$$= 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$$

นั่นคือ ถ้า "A = n ∈ IN แล้ว $^{\#}P(A) = 2$"

ในกรณีที่ $A \subseteq B$ แต่มีสมาชิก $x \in B$ แต่ x นั้นไม่เป็นสมาชิกของ A $(\exists x [x \in B \wedge x \notin A])$ เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อยเฉพาะ (proper subset)ของ Bและเขียนด้วยสัญลักษณ์ว่า "$A \subset B$"
นั่นคือ เราอาจนิยาม $A \subset B$ ได้ว่า

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x [x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge \exists x [x \in B \wedge x \notin A])$$

ซึ่งก็คือถ้า $A \subseteq B$ แต่ **ไม่มี**สมาชิก $x \in B$ ซึ่ง x นั้นไม่เป็นสมาชิกของ A เราจะกล่าวว่า เซต A และ B เป็นเซตเดียวกันและเขียนด้วยสัญลักษณ์ว่า "A = B" ซึ่งอาจนิยาม A = B ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow (\forall x [x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge \sim\exists x [x \in B \wedge x \notin A]) \\ &\Leftrightarrow (\forall x [x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge \forall x [x \notin B \vee x \in A] \\ &\Leftrightarrow (\forall x [x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ &\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall x [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ &\Leftrightarrow \forall x [x \in A \Leftrightarrow x \in B] \end{aligned}$$

นั่นคือ เราอาจกล่าวได้ว่า

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \text{ หรือ}$$

$$A = B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

ตัวอย่าง 2.2.1 เซตของจำนวนเต็มบวก $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ เป็นเซตส่วนหนึ่งของเซต ของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ เนื่องจากทุกสมาชิกของ N เป็นสมาชิกของ $\mathbb{Z}$ เราจึงกล่าวว่า $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ แต่มีสมาชิกใน $\mathbb{Z}$ ไม่ใช่สมาชิก ใน $\mathbb{N}$ กล่าวคือ $-2 \in \mathbb{Z}$ แต่ $-2 \notin \mathbb{N}$ จึงกล่าวต่อไปว่า $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 2.2.2 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ

$B = \{a, a, b, c, c, c, d\}$

เราพบว่า ทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B และไม่มีสมาชิกใน B ตัวใดเลยที่ไม่เป็นสมาชิกของ A เราจึงกล่าวได้ว่า $A = B$

ตัวอย่าง 2.2.3 ให้ $A = \{a, b, c\}$ และ

$B = \{a, b, c, \{a\}\}$

เรากล่าวว่า $A \subset B$ เนื่องจาก $A \subseteq B$ แต่มี $\{a\} \in B$ และ แต่ $\{a\} \notin A$ จึงกล่าวต่อไปได้ว่า $A \subset B$ เช่นเดียวกัน ถ้าให้ $C = \{a, b, c, \phi\}$; $A \subset C$ เนื่องจาก $\phi \in C$ แต่ $\phi \notin A$.

ทฤษฎีบท 2.2.2 สำหรับเซต A, B, C ใดๆ

1) $A \subseteq A$ (reflexivity สำหรับ $\subseteq$)

2) $A = A$ (reflexivity สำหรับ $=$)

3) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ (Anti - Symmetry)

4) $A = B \Leftrightarrow B = A$ (Symmetry สำหรับ $=$)

5) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (Transitivity สำหรับ $\subseteq$)

6) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$ (Transitivity สำหรับ $=$)

ทฤษฎีบททั้งหมดข้างต้นพิสูจน์ได้โดยง่าย ด้วยนิยามข้างต้น จะพิสูจน์ให้เป็นตัวอย่างสัก 2 ทฤษฎีบทคือ 1) และ 5)

พิสูจน์ 1) สำหรับสมาชิก x ใดๆ

$x \in A \Rightarrow x \in A$ **จริงเสมอ** (Valid)

นั่นคือ $A \subseteq A$

พิสูจน์ 2) กำหนดให้ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$

สำหรับสมาชิก x ใดๆ

สมมติว่า $x \in A$

$\therefore$ $x \in B$ (โดยสิ่งกำหนดให้)

$\therefore$ $x \in C$ (โดยสิ่งกำหนดให้)

นั่นคือ $A \subseteq C$

แบบฝึกหัด 2.2

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเซตต่อไปนี้

1. $A = \{(a, b), (a, c)\}$

   $B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

   $C = \{(b, a), (c, a)\}$

2. $A = \{(x, y) : x + 2y = 3\}$

   $B = \{(x, y) : 2x + y = 3\}$

   $C = \{(x, y) : x + 2y = 3 \vee 2x + y = 3\}$

   $D = \{(x, y) : x + 2y = 3, 2x + y = 3\}$

3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.2 ข้อ 2), 3), 4), 6)

2.3 การดำเนินการของเซต (Operation on Sets)

2.3.1 เซตผลผนวก (Union)

เมื่อกำหนดเซต A และ B ขึ้นแล้ว เซตผลผนวก $A \cup B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกในเซต A หรือสมาชิกในเซต B หรือสมาชิกในทั้งสองเซต ดังนั้น

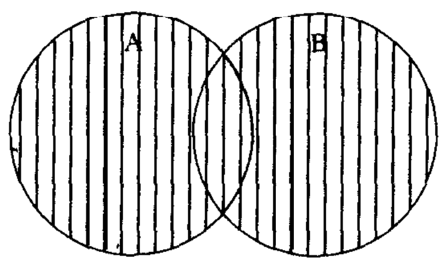
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

ตัวอย่างเช่น $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เป็นต้น

จากนิยามข้างต้นจึงได้ว่า สำหรับ เซต A และ B ใดๆ

U1) $A \cup B = B \cup A$ และ

U2) $A \cup \phi = A$



รูป 2.1

ซึ่งอาจแสดงได้โดยง่ายดังนี้

U1) $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

$= \{x : x \in B \vee x \in A\}$

$= B \cup A$

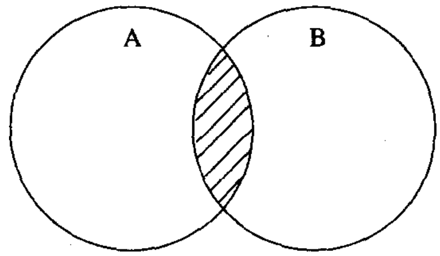
U2) $A \cup \phi = \{x : x \in A \vee x \in \phi\}$ เนื่องจาก $x \in \phi$ เท็จเสมอ

$= \{x : x \in A\}$

$= A$

2.3.2 เซตผลตัด (Intersection)

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตสองเซต เซตผลตัดของ A และ B ($A \cap B$) คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ซึ่งอยู่ทั้งในสองเซต A และ B ดังนั้น



รูป 2.2

$$A \cap B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$$

ตัวอย่าง เช่น $\{1, 2, 4\} \cap \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 4\}$

$\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \phi$

จากนิยามข้างต้น จึงได้ว่า สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ จึงได้คุณสัมบัติ ดังต่อไปนี้

I1) $A \cap B = B \cap A$

I2) $A \cap X = A$

UI 1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

UI 2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

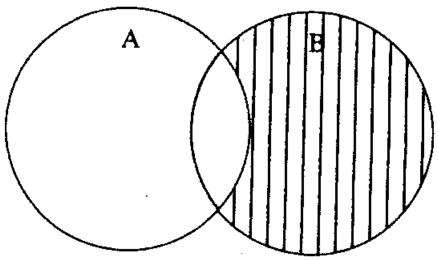
คุณสมบัติข้างต้นสามารถจะแจกแจงรายละเอียดการแสดงพิสูจน์ได้โดยตรง จากนิยาม จะแสดงให้ดูเป็นบางคุณสมบัติเช่น

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x : x \in A \vee x \in B \cap C\} \\ &= \{x : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} \\ &= \{x : x \vee A \cup B \wedge x \in A \cup C\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

2.3.3 เซตผลต่าง (Difference)

โดยผลต่าง B~A ของ B และ A เราหมายถึงเซตสมาชิกของ B ซึ่งไม่ได้เป็นสมาชิกของ A ดังนั้น

$$B \sim A = \{ x : x \in B \wedge x \notin A \}$$



รูป 2.3

จึงกล่าวได้โดยว่าตามคุณสมบัติดังต่อไปนี้

D 1) $B - B = \phi$

D 2) $B \sim \phi = B$

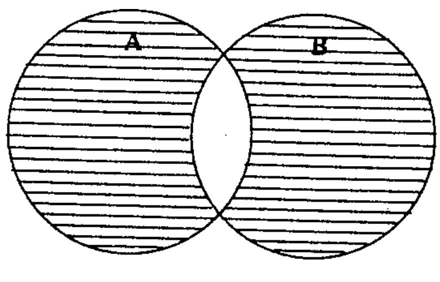
D 3) $\phi \sim A = \phi$

D 4) $(A \sim B) \sim C = A - (B \cup C)$

$= (A - C) - B$

เซตผลต่างสมมาตร **(Symmetric Differnce)** $A \Delta B$ ของเซต A และ B คือ $(A-B) \cup (B-A)$ นั่นคือ

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



รูป 2.4

จากรูป 2.4 จึงพบว่า $A \Delta B = (A \sim B) \cup (A \sim B)$ คุณสมบัติต่อไปนี้ เป็นคุณสมบัติที่พิสูจน์ได้โดยง่าย

SD 1) $A \Delta A = \phi$

SD 2) $A \Delta B = B \Delta A$

SD3) $A \Delta \phi = A$

ตัวอย่าง ถ้าให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$,

$C = \{0, 1, 4, 5\}$ แล้วเราจึงทราบว่า

$B \subset A$, $B \subseteq A$, $A \cap C = \{0, 1, 5\}$, $B \cap C = \{0, 1\}$,

$A \sim B = \{5\}$, $A \sim C = \{2, 3\}$, $B \sim C = \{2, 3\}$

$C \sim B = \{4, 5\}$, $A \Delta B = \{5\}$, $A \Delta C = \{2, 3, 4\}$ และ

$B \Delta C = \{2, 3, 4, 5\}$

2.3.4 เซตส่วนเหลือ (Complement)

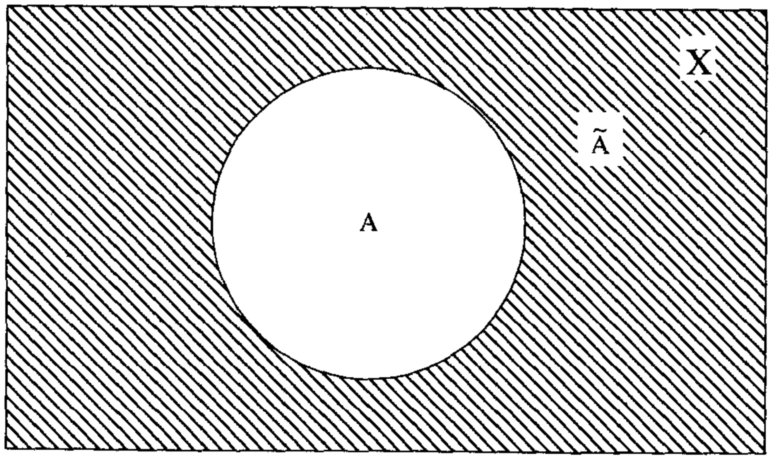
ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ถึงเซตจักรวาล X เราจึงกล่าวได้ว่า เซตผลผนวก, เซตผลตัด, เซตผลต่าง, และเซตผลต่างสมมาตร์ของเซตส่วนหนึ่งของ X ก็คือ เซตส่วนหนึ่งของ X เมื่อเราขีด วงจำกัดของเราเพื่อศึกษาเฉพาะเซตส่วนหนึ่งของจักรวาล X ก็ยังมีตัวดำเนินการ (Operator) ที่จะแนะนำอีกตัวหนึ่ง ถ้า $A \subseteq X$ แล้ว Complement $\tilde{A}$ ของ A นิยามได้เป็น $X \sim A$ ดังนั้น $\tilde{A} = \{x : x \in X \wedge x \notin A\}$ เมื่อใดก็ตามที่เราใช้เซตส่วนเหลือ เราจะสมมติว่า เราจะกล่าวถึงเซตส่วนหนึ่งของจักรวาลคงที่ X สำหรับเซต A ใดๆ ที่เป็นเซตส่วนหนึ่งของจักรวาล X จึงนิยามได้ว่า

D 1) $A \cup \tilde{A} = X$

D 2) $A \cap \tilde{A} = \phi$

D 3) $\tilde{\phi} = X$

D 4) $\tilde{X} = \phi$



รูป 2.5

ตัวอย่าง $\widetilde{A \cup B} = \{x : x \in X \wedge x \notin (A \cup B)\}$

$= \{x : x \in X \wedge \sim(x \in (A \cup B))\}$

$= \{x : x \in X \wedge \sim(x \in A \vee x \in B)\}$

$= \{x : x \in X \wedge x \in X \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)\}$

$= \{x : (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge \notin B)\}$

$= \{x : x \in \tilde{A} \wedge x \in \tilde{B}\}$

$= \{x : x \in \tilde{A} \cap \tilde{B}\}$

$= \tilde{A} \cap \tilde{B}$

แบบฝึกหัด 2.3

สำหรับ เซต A, B, C ซึ่งเป็นเซตส่วนหนึ่งของจักรวาล X จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1) $A \cup A = A$

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3) $A \cup B = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

4) $A \subseteq A \cup B$ และ $B \subseteq A \cup B$

5) $A \cap A = A$

6) $A \cap \phi = \phi$

7) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B$ *n* $C)$

8) A n B = A ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

9) A *n* B $\subseteq$ A และ A u B$\subseteq$B

10) A u (B n C) = (A u B) $\cap$ (A u C)

11) A ~ (B u C) = (A ~ B) $\cap$ (A ~ C)

12) $A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap \tilde{B} = A$

2.4 พีชคณิตของเซต (The Algelbra of Sets)

เมื่อได้กำหนดเซตจักรวาล X ขึ้นแล้ว และเซต A, B, C, ... เป็นเซตส่วนหนึ่งของ X, ความสัมพันธ์ $\subseteq, \subset, =$ การดำเนินการระหว่างเซตสองเซต (Binary Operation) เซตผลรวม (Union) "$A \cup B$" เซตส่วนรวม (Intersection) "$A \cap B$" เซตผลต่าง (Difference) "$A \sim B$" เซตผลต่างสมมาตร (Symmetric Difference) $A \Delta B$ และการดำเนินการในเซตใดเซตหนึ่ง (Unary Operation) โดยคอมพลีเมนต์ (Conplement) $\tilde{A}$ เท่าที่ทราบมาแล้วตัวดำเนินการบางตัว ก็อาจนิยามด้วยตัวดำเนินการอื่น ก็จะลดตัวดำเนินการบางตัวเสียคือ "~" และ "Δ" ซึ่งเราได้ว่า

$$A - B = A \cap \tilde{B} \text{ และ}$$

$$A \Delta B = (A \sim B) \cup (B \sim A)$$

$$= (A \cap \tilde{B}) \cup (B \cap \tilde{A})$$

เมื่อเราถือเสียว่า $P(X) = \{A : A \subseteq X\}$ การดำเนินการ $\cup$, $\cap$ และ ~ และความสัมพันธ์เท่ากับสิ่งที่เราทราบมาแล้วนำมาเป็นสัจพจน์เสียส่วนหนึ่ง ซึ่งแต่ละสัจพจน์ไม่อาจพิสูจน์ได้ด้วยสัจพจน์ข้ออื่นๆ ในชุดเดียวกันรวบรวมขึ้นเป็นสัจพจน์ดังต่อไปนี้

สัจพจน์ (Axioms) สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ ใน P เราได้

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ A \cup B = B \cup A \\ 2)\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\} \text{Commutative laws (X)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ 4)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\} \text{Distributive laws}$$

5) $A \cup \phi = A$

6) $A \cap X = A$

7) $A \cup \tilde{A} = X$

8) $A \cap \tilde{A} = \phi$

9) $\phi \neq X$

เราจึงกล่าวต่อไปได้ว่า ระบบ $(P(X), \sim, \cap, \cup)$ เป็นระบบพีชคณิตบูเลียน (Boolean Algbra) ดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 1 จึงสามารถนำสัจพจน์เหล่านี้ไปพิสูจน์ทฤษฎีบทเหล่านี้ได้ แต่จะไม่พิสูจน์ซ้ำอีกเนื่องจากได้พิสูจน์ไว้แล้วในบทที่ 1.

ทฤษฎีบท 2.4.1 (Uniqueness of the Complement)

สำหรับเซต A และ B ใดๆ ใน $P(X)$ ถ้า $A \cup B = X$ และ $A \cap B = \phi$ แล้ว $B = \tilde{A}$

บทแทรก 2.4.2 สำหรับเซต A ใดๆ ใน $P(X)$ $\widetilde{(\tilde{A})} = A$

ทฤษฎีบท 2.4.3 **Idempotence** สำหรับเซต A ใดๆ ใน P(X)

1) $A \cap A = A$

2) $A \cup A = A$

ทฤษฎีบท 2.4.4 สำหรับเซต A, B, C ใดๆ ใน $P(X)$

1) $A \cap \phi = \phi$

2) $A \cup X = X$

3) $A \cap (A \cup B) = A$

4) $A \cup (A \cap B) = A$

5) $B \cup A = C \cup A$ และ $B \cup \tilde{A} = C \cup \tilde{A}$ แล้ว $B = C$

6) $B \cap A = C \cap A$ และ $B \cap \tilde{A} = C \cap \tilde{A}$ แล้ว $B = C$

7) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

8) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

9) $\widetilde{A \cup B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$

10) $\widetilde{A \cap B} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$

11) $A \cap \tilde{B} = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

12) $\tilde{\phi} = X$

13) $\tilde{X} = \phi$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.1
2. จงพิสูจน์บทแทรก 2.4.2
3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.3
4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.4
5. จงพิสูจน์ว่า (1) $(A \cup B) \cap (A \cup \tilde{B}) = A$

   (2) $(A \cap B) \cup (A \cap \tilde{B}) = A$
6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \cup B = X$ แล้ว $\tilde{A} \subseteq B$ และ $\tilde{B} \subseteq A$
7. จงพิสูจน์ว่า (1) $A \cup (A \cap B) = A$

   (2) $A \cap (A \cup B) = A$

   (3) $A \cup (\tilde{A} \cap B) = A \cup B$

   (4) $A \cap (\tilde{A} \cup B) = A \cap B$
8. จงพิสูจน์ว่า $(A \cup X) \cap (A \cap \phi) = \phi$
9. t-h $A \cap B = \phi$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $\tilde{A} \cap B = B$
10. ถ้า $A \cap B = A \cap C$ และ $A \cup B = A \cup C$ แล้ว $B = C$

2.5 **เซตดัชนี และผลแบ่งกั้น** **(Indexed set and partitions)**

2.5.1 **เซตดัชนี (Indexed set)**

นิยาม 2.5.1 **ให้** I เป็นเซต

สำหรับทุกๆ $i \in$ I ให้ A_i เป็นเซตย่อย ของเอกภพสัมพัทธ์ X แล้วเรียก I ว่า เซตดัชนี

นิยาม 2.5.2 ให้ I เป็นเซตดัชนี แล้วจะได้ว่า

(1) $\bigcup_{i \in I} A_i$ หมายถึง เซตของสมาชิก x ทุกตัวใน X ซึ่ง $x \in A_i$ สำหรับสมาชิก i บางตัวใน I

(2) $\bigcap_{i = I} A_i$ หมายถึงเซตของสมาชิก x ทุกตัวใน X ซึ่ง $x \in A_i$ สำหรับสมาชิก i ทุกตัวใน I

ตัวอย่าง 2.5.1 กำหนดให้

$A_1 = \{ 1, 2, 3 \}$

$A_2 = \{ 1, 3, 5, 7 \}$

A, $= \{ 1, 2, 4, 6 \}$

$A_4 = \{ 1, 8 \}$

‘4, $= \{ 1, 7, 9 \}$

แล้วจะได้ว่า เซตดัชนี I = { 1, 2, 3, 4, 5 } และ

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

$\bigcap_{i = I} A_i = \{ 1 \}$

หมายเหตุ ถ้า I = { 1, 2, 3, ..., n } จะเขียนผลรวมและผลร่วมของ A_i เสียใหม่ดังนี้

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i = 1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n$$

ตัวอย่าง 2.5.2 ให้ $B_n = [\,0, \frac{1}{n}\,]$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\bigcap_{i \in N} B_i = \{0\}$$

$$\bigcup_{i \in N} B_i = [0, 1]$$

ทฤษฎีบท 2.5.1 กำหนดให้ I เป็นเซตดัชนี และสำหรับเซต A_i, $i \in I$ และเซต B ใดๆ จะได้ว่า

(1) $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

(2) $B \cup (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i)$

พิสูจน์ (1) $x \in \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \Leftrightarrow x \in B \cap A_{i_0}$ สำหรับ i_0 บางตัวใน I

$\Leftrightarrow x \in B$ และ $x \in A_{i_0}$

$\Leftrightarrow x \in B$ และ $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)$

$\Leftrightarrow x \in B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)$

(2) (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

2.5.2 ผลแบ่งกั้น (Partitions)

นิยาม 2.5.3 กำหนดให้ $A \neq \phi$

$P = \{B_i \mid i \in I\}$ เรียกว่า ผลแบ่งกั้น (partition) ของ A ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $i \in I$, $B_i \subseteq A$, $B_i \neq \phi$ และ

(1) $A = \bigcup_{i \in I} B_i$

(2) สำหรับทุกๆ B_i, B_j ที่ $B_i \neq B_j$ แล้วจะได้ว่า $B_i \cap B_j = \phi$

ตัวอย่าง เช่น กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ และเซตย่อยของ A คือ $B_1 = \{1, 3\}$, $B_2 = \{7, 8, 10\}$, $B_3 = \{2, 5, 6\}$ และ $B_4 = \{4, 9\}$ พบว่า $P = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ มีคุณสมบัติ 2 ข้อ คือ

(1) $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$

(2) $B_1 \neq B_2$ จะได้ $B_1 \cap B_2 = \phi$

$B_1 \neq B_3$ จะได้ $B_1 \cap B_3 = \phi$

$B_1 \neq B_4$ จะได้ $B_1 \cap B_4 = \phi$

$B_2 \neq B_3$ จะได้ $B_2 \cap B_3 = \phi$

$B_2 \neq B_4$ จะได้ $B_2 \cap B_4 = \phi$

$B_3 \neq B_4$ จะได้ $B_3 \cap B_4 = \phi$

จะได้ว่า P เป็นผลแบ่งกั้นของเซต A

ตัวอย่าง 2.5.3 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ว่า

(1) $P_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ ไม่ใช่ผลแบ่งกั้นของเซต A

เพราะว่า $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} \neq \phi$

(2) $P_2 = \{\{1, 2\}, \{4, 3\}, \phi\}$ ไม่ใช่ผลแบ่งกั้นของเซต A

เพราะว่ามี $\phi \in P_2$

(3) $P_3 = \{\{3\}, \{2\}, \{3\}\}$ ไม่ใช่ผลแบ่งกั้นของเซต A

เพราะว่า $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \neq A$

(4) $P_4 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ A

แบบฝึกหัด 2.5

1. กำหนดให้ $A_1 = \{1, 10\}$, $A_2 = \{2, 4, 6, 10\}$, $A_3 = \{3, 6, 9\}$

   $A_4 = \{4, 8\}$, $A_5 = \{5, 6, 10\}$ และ $I = \{2, 3, 5\}$

   จงหาค่าของ (1) $= \bigcap_{i \in I} A_i$

   (2) $= \bigcup_{i \in I} A_i$

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.5.1 ข้อ 2)

3. กำหนดให้ $B_i = [i, i+1]$ เมื่อ i เป็นจำนวนเต็ม

   จงหาค่าของ (1) $B_1 \cup B_2$

   (2) $B_3 \cap B_4$

   (3) $\bigcup_{i \in 7}^{18} B_i$

   (4) $\bigcup_{i \in Z} B_i$ เมื่อ Z แทนจำนวนเต็ม

4. กำหนดให้ $D_n = (0, \frac{1}{n})$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

   จงหาค่าของ (1) $= D_3 \cup D_7$

   (2) $= D_3 \cap D_{20}$

   (3) $= D_s \cup D_t$

   (4) $= D_s \cap D_t$

   (5) $\bigcap_{i \in N} D_i$ เมื่อ N เป็นจำนวนนับ

5. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

   จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้เป็นผลแบ่งกั้นของ A หรือไม่

   (1) $\{B_1 = \{a, c, e\}, B_2 = \{b\}, B_3 = \{d, g\}\}$

(2) $\{ C_1 = \{ a, e, g \}, C_2 = \{ c, d, \}, C_3 = \{ b, e, f \}\}$

(3) $\{ D_1 = \{ a, b, e, g \}, D_2 = \{ c \}, D_3 = \{ d, f \}\}$

(4) $\{ E_1 = \{ a, b, c, d, e, f, g \}\}$

6. จงหาเซตของผลแบ่งกั้นทั้งหมดของ A เมื่อกำหนดให้

$A = \{ a, b, c, d \}$

(*แนะนำ* มีผลแบ่งกั้นทั้งหมด 15 ชุด ที่ไม่เหมือนกัน)